

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт
прикладной механики Российской академии наук
«ИПРИМ РАН»

На правах рукописи



Царев Роман Олегович

Нелокальная во времени модель динамического
деформирования стержневых систем

01.02.04 Механика деформируемого твердого тела

01.06.01 Математика и механика

Квалификация

Исследователь. Преподаватель-исследователь

НАУЧНЫЙ ДОКЛАД

Научный руководитель: к.т.н., доцент Бадина Елена Сергеевна

Рецензент: д.ф-м.н. профессор Шитикова Марина Вячеславовна

Рецензент: к.ф-м.н., доцент Жаворонок Сергей Игоревич

Москва, 2025

Целью настоящей работы является развитие и совершенствование методов математического моделирования динамического поведения конструктивных элементов, выполненных из композитных материалов. Актуальность темы обусловлена необходимостью повышения эффективности численного моделирования конструкций из композитных материалов, характеризующихся ортотропией физико-механических свойств или неоднородностью внутренней структуры. Часто для этой цели используются трёхмерные конечно-элементные модели, которые обладают существенным недостатком — высокой вычислительной сложностью. Это ограничивает их применение в практических инженерных расчётах, особенно в задачах оптимального проектирования. В связи с этим актуальным становится переход к менее ресурсоёмким одномерным моделям, построенным на основании специальных гипотез и способным достоверно воспроизводить динамическое поведение конструкций с учётом характерных особенностей их динамического деформирования.

На основании анализа литературных источников было установлено, что для достижения поставленной цели могут быть использованы модели, построенные на основании принципов нелокальной механики. Основная задача исследования заключается в построении и обосновании новой, ранее подробно не исследовавшейся модели, относящейся к классу нелокальных.

Определяющее соотношение нелокальной во времени модели деформирования материала имеет следующий вид:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau + X^{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}. \quad (1)$$

Здесь $X^{ijkl} = C^{ijkl} t_e$, C^{ijkl} — Тензор упругих постоянных, X^{ijkl} — Тензор коэф. Вязкости, t_e — время запаздывания, σ^{ij} , ε_{kl} — компоненты тензоров деформаций и напряжений, $R(t-\tau)$ — интегрально ядро нелокального во времени оператора упругости, t, τ — время.

Разработанная модель основана на предположении, что упругие силы в системе в текущий момент определяются не только её текущим деформированным состоянием, но и предыдущей историей деформирования, что реализовано путём введения в классическое определяющее соотношение интегрального оператора с разностным ядром.

Модель была интегрирована в алгоритм метода конечных элементов, что обеспечивает возможность её применения в практических расчётах стержневых систем. Уравнение движения в конечно-элементной постановке, выведенное с использованием принципа возможных перемещений и с учетом определяющего соотношения нелокальной модели (1) имеет вид:

$$M\ddot{d} + D\dot{d} + K \int_0^t R(t-\tau) d(\tau) d\tau = F. \quad (2)$$

Здесь d — вектор узловых перемещений, M — матрица масс стержневого элемента, D — матрица демпфирования стержневого элемента, K — матрица жесткости стержневого элемента, F — вектор узловых нагрузок, точной обозначена производная по времени.

В качестве ядра была выбрана функция ошибок:

$$R(t-\tau) = 2\eta/\sqrt{\pi} e^{-(\eta)^2(t-\tau)^2}, \quad (3)$$

отвечающая условию нормирования: $\int_0^t R(t-\tau) d\tau = 1$.

Масштабный параметр нелокальной модели η определяет, насколько большой участок предыдущей истории деформирования оказывает значительное влияние на состояние системы в текущий момент. Чем выше значение этого параметра, тем ближе модель к локальной

классической (рис. 1), и может быть сведена к ней при достаточно высоких значениях параметра η .

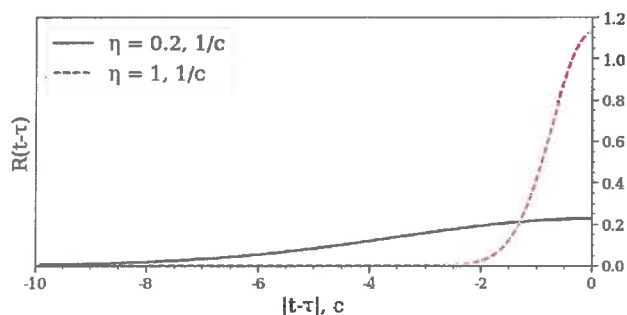


Рисунок 1 – Графики, показывающие влияние параметра η на форму ядра.

Для численного интегрирования уравнения движения была использована неявная схема по методу Ньюмарка. Для решения уравнения движения и вычисления перемещений, скоростей и ускорений узлов конструкции был разработан программный модуль на языке программирования Python.

Для оценки влияния изменения масштабного параметра η на результаты численного моделирования рассматривались колебаний 12-ти метровой балки, заземленной по концам, выполненной из термореактивного винилэфирного стеклопластика I класса. Балка в поперечном сечении представляет собой прямоугольник высотой 0,3мх0,2м и загружена мгновенно приложенной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью -10 кН/м. Было выявлено, что уменьшение масштабного параметра модели η приводит к увеличению амплитуды колебаний.

В работе представлена методика определения масштабного параметра η по результатам как численного трёхмерного моделирования, так и лабораторных экспериментов. В основе подхода лежит минимизация среднеквадратичного отклонения между результатами численного моделирования и экспериментальными данными. Для нахождения минимального среднеквадратичного отклонения применялся метод золотого сечения.

В качестве численного эксперимента в верифицированном программном комплексе Midas Civil NX были смоделированы колебания балки, описанной выше, причем модель балки была собрана из трехмерных твердотельных конечных элементов, и в ней были учтены ортотропные свойства композитного материала. Было показано, что откалиброванная одномерная нелокальная во времени модель динамического деформирования даёт лучшее совпадение с результатами численного эксперимента в сравнении с классической локальной моделью несмотря на то, что она построена без учета ортотропных свойств материала. (рис.2).

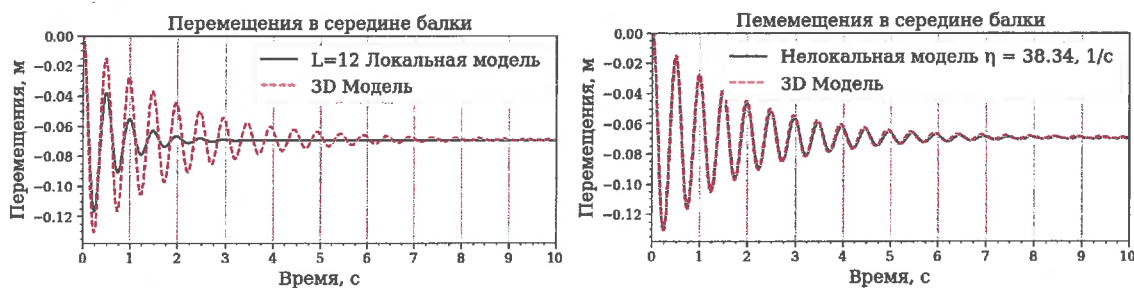


Рисунок 2 – Сравнение результатов численного эксперимента с результатами одномерного моделирования с использованием классической локальной модели и откалиброванной нелокальной во времени модели динамического деформирования

Кроме того, по результатам серии численных экспериментов было продемонстрировано, что в случае, если материал обладает частотно независимым внутренним трением, параметр η

сохраняется постоянным при изменении геометрических характеристик конструкции, что свидетельствует о том, что эта характеристика является параметром материала. В случае моделирования динамического поведения конструкции, выполненной из материала, характеризующегося частотно зависимым внутренним трением, масштабный параметр для балок различной геометрии может быть вычислен через соотношение собственных частот.

Для экспериментальной верификации модели были проведены лабораторные исследования, в которых изучалось поведение балок из высокопрочного лёгкого бетона при импульсном воздействии. Эксперимент выполнен при поддержке НОЦ «Наноматериалы и нанотехнологии» и НИИ экспериментальной механики НИУ МГСУ. Экспериментальная установка (рис. 3) представляет собой опертую по краям балку длиной 80 см, выполненную из высокопрочного легкого бетона, с закрепленным на ней в середине пролета одноосевым акселерометром. Расстояние между опорами составляет 70 см, ширина балки 4,93 см, высота 2 см. Импульсное возбуждение осуществлялось воздействием ударного молотка для модальных испытаний.

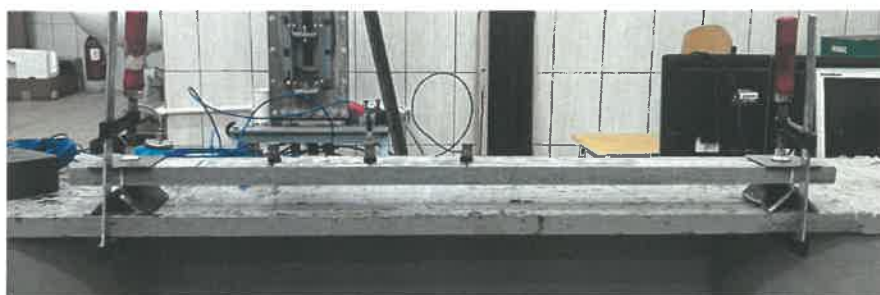


Рисунок 3 – Экспериментальная установка

Сравнение полученных экспериментально акселерограмм с результатами численного моделирования (рис. 4) показало, что разработанная нелокальная во времени модель обеспечивает значительно более точное воспроизведение экспериментального отклика по сравнению с классической локальной вязкоупругой моделью.

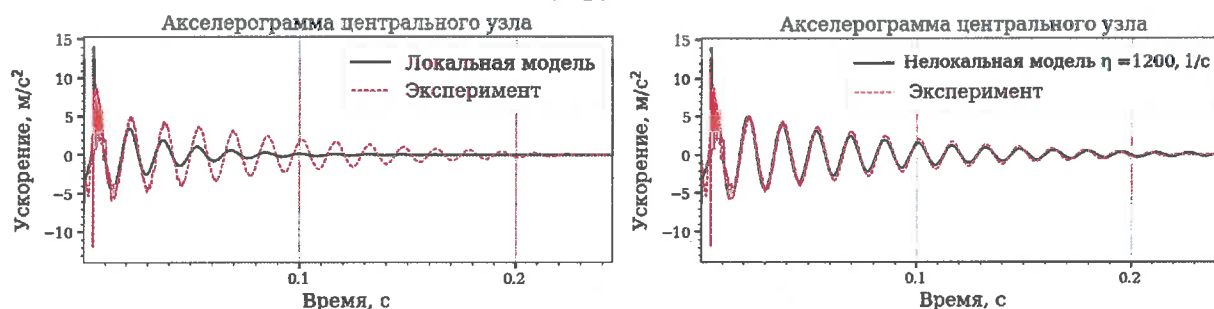


Рисунок 4 – Сравнение результатов лабораторного эксперимента с результатами одномерного моделирования с использованием классической локальной модели и откалиброванной нелокальной во времени модели динамического деформирования

Таким образом, разработанная модель может служить менее ресурсоёмкой альтернативой трёхмерным моделям при анализе динамического поведения конструкций, выполненных из композитных материалов, особенно в задачах, где важна вычислительная эффективность, например, при многовариантных расчётах, оптимизации, и при решении задач, требующих моделирования больших систем или их поведения в течение длительных временных интервалов. Модель обладает высокой степенью обобщённости, применима к стержневым конструкциям различной сложности, и может быть использована при расчётах стержневых систем из материалов с частотно независимым внутренним демпфированием.