15-Я ВСЕРОССИЙСКАЯ НАУЧНАЯ
КОНФЕРЕНЦИЯ С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ

МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ и КОНСТРУКЦИЙ, СЛОЖНЫХ и ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД

им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского

2 декабря – 4 декабря 2025 года

Москва, Ленинградский проспект, 7

СБОРНИК ТРУДОВ

МОСКВА
2025

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт прикладной механики Российской академии наук

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления Российской академии наук

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ, СЛОЖНЫХ И ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД

СБОРНИК ТРУДОВ
15-Й ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ
им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского

(2 – 4 декабря 2025 года, г. Москва)

МОСКВА
2025

«Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред».
Сборник трудов 15-й Всероссийской научной конференции с международным участием.
Москва, 2 – 4 декабря 2025 г. – М.: ООО «Сам Полиграфист», 2025. – 353 с.

ISBN 978-5-00227-672-1

В Сборник трудов включены работы участников конференции по направлениям: «Механика гетерогенных сред, адаптивных материалов, композитов и конструкций», «Аэро-, гидромеханика, реология структурно-сложных сред», «Вычислительные методы механики гетерогенных сред», «Волновая динамика газообразных, жидких и твёрдых сред. Высокоскоростной удар» и «Геомеханика. Современные методы исследований».

Составители сборника:

Жаворонок С.И., Карнет Ю.Н., Муковникова И.И.

© ФГБУН Институт прикладной механики РАН, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Секция «Механика гетерогенных сред, адаптивных материалов, композитов и конструкций»..... 7

Некоторые особенности распространения SH-ПАВ в неоднородных магнитоэлектроупругих структурах
Белянкова Т.И., Ворович Е.И., Калинчук В.В., Пименов М.С., Турчин А.С.. 9

Об идентификации неоднородностей в композиционных материалах по параметрам поверхностных волновых полей
Бочарова О.В., Анджикович И.Е., Турчин А.С.. 20

Атомно-силовая микроскопия эластомерных композитов с наполнителем технический углерод
Валиев Х.Х., Корнев Ю.В., Молчанов С.П., Гилязова Р.Ф., Власов А.Н., Карнет Ю.Н..... 25

Расчёт воздействия лопатки двигателя на панель из полимерного композиционного материала методом гидродинамики сглаженных частиц
Вестяк В.А., Мартиросов М.И., Занина Э.А.. 30

Современные устройства ограничения амплитуд субколебаний на воздушных линиях электропередачи сверхвысокого напряжения
Виноградов А.А., Данилин А.Н., Киселев А.В., Платонова И.А., Котухов М.А., Привалов А.Н.. 40

Фундаментальные решения уравнений движения трехслойной пластины с учетом особенностей материала заполнителя
Градсков С.А., Курбатов А.С., Н.А. Локтева. 52

Экспериментальное определение максимальной концентрации частиц различного состава и дисперсности в полимерных композитах
Драч Е.А., Корнев Ю.В., Джага А.О., Симонов-Емельянов И.Д.. 60

Оценка долговечности однонаправленного стеклопластика при растяжении вдоль волокон
Жаринов М.Ю., Марасанов А.И. 67

Неупругое деформирование и разрушение функциональных фторопластов, наполненных графеном
Зайцев А.В., Лобанов П.А., Банников М.В., Уваров С.В., Лукьянов Н.С., Зубко И.А.. 76

Задача Эшелби и гомогенизация композитов для линейной анизотропной вязкоупругой матрицы
Зборовский В.Г.. 83

Численное моделирование взаимодействия интраокулярных линз с тканями глаза
Зябков П.С.. 94

Термофизическая модель ниобата лития
Калинчук В.В., Пименов М.С., Турчин А.С., Широков В.Б.. 98

Классические и неклассические решения краевых задач теории упругости
Кержаев А.П., Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Власов Д.А., Мороз А.И. 107
Улучшение механических характеристик аддитивной стали 03х16н15м3 при высокоэнергетической электроимпульсной обработке
Кукуджанов К.К. 116
Уравнения общей теории оболочек с эффектом памяти формы
Курбатов А.С., Жаворонок С.И.. 124
Численное моделирование напряжённо-деформированного состояния эластомерного композита
Майский А.В., Корнев Ю.В., Гилязова Р.Ф., Муромцев Д.Н., Карнет Ю.Н. 134
Теоретико-экспериментальное исследование влияния ортогональной прошивки на ударостойкость композитной пластины
Медведский А.Л., Хомченко А.В. Мартиросов М.И., Бутысин В.Е. 140
Комплексная оценка влияния размеров отверстий на прочность многослойных композиционных пластин
Митряйкин В. И., Булашов Д. А., Беззаметнов О. Н., Кузнецов М. Е. 148
Технологическая механика изготовления полимерного композитного топливного бака летательного аппарата с несущей стенкой
Склезнев А.А.. 153
Особенности генерации поверхностных акустических волн в гетероструктуре на основе танталата лития
Широков В.Б., Пименов М.С., Турчин А.С., Калинчук В.В. 158
Инженерные подходы к моделированию изнашивания волокнистых композитов
Шпенев А.Г 167

Секция «Аэро-, гидромеханика, реология структурно-сложных сред» 173

О механизме течения турбулентных струй
Воротилин В.П. 175
Газодинамические параметры перфорированной поверхности, обтекаемой жидкостью под произвольным углом атаки α и определение оптимального угла установки решетки в канале
Захаров Н.Н., Макаров А.Ю.. 185
Свойства объемных нанопузырей в воде
Левин Ю.К.. 192
Особенности движения газа в канале с проницаемой границей под воздействием внешнего линейного градиента давления
Шалаев В.И., Калугин С.Т., Толоко Г.В.. 202

Секция «Вычислительные методы механики гетерогенных сред» ... 207

Вычислительный подход для определения тензора БИО
Артамонова Н.Б., Шешенин С.В., Клементьев П.Д., Кузьмин М.А. 209

Сравнительный анализ методов прогрессирующего разрушения
Клементьев П.Д., Шешенин С.В., Артамонова Н.Б. 219

Итерационный процесс решения связанной задачи консолидации
Шешенин С.В., Артамонова Н.Б. 229

Секция «Волновая динамика газообразных, жидких и твёрдых сред. Высокоскоростной удар» 237

Структуры разрывов в микрополярной упруго-пластической электропроводящей среде
Бахолдин И.Б. 239

Инженерная модель исследования процесса соударения жесткого цилиндрического ударника с деформируемой преградой конечной толщины
Головешкин В.А., Мягков Н.Н., Беклемишев С.А. 249

Формирование режима виброударного нагружения при наземной отработке изделий ракетно-космической техники
Москвина И.Н. 259

Изгибные волны в анизотропной цилиндрической оболочке по неклассической теории с заполнителем
Никифоров А.В., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В. 266

Исследование процесса пробития алюминиевых преград высокоскоростным ледяным ударником
Орлов М.Ю., Глазырин В.П., Фазылов Т.В. 272

Моделирование высокоскоростного процесса проникания сферического ударника в бетонную мишень с учётом динамического упрочнения материала
Пляскин А.С., Бабарыкина А.И. 283

Неупругая деформация и эволюция повреждений легких сплавов при динамическом продавливании
Скрипняк В.В., Чирков М.О., Скрипняк В.А., Кушнарев А.Г. 289

Секция «Геомеханика. Современные методы исследований» 299

Результаты сопоставительных опытов по определению мерзлых и оттаивающих грунтов методом шарового штампа в режиме ползучести и релаксации
Гуляев А., Тимерханов А.Д., Королев М.В. 301

Деформационные постоянные и эволюция проницаемости нефтенасыщенных и экстрагированных низко- и высокопористых карбонатных пород при трехосном непропорциональном нагружении
Зайцев А.В., Химуля В.В., Шевцов Н.И., Поснов А.С., Карев В.И., Коваленко Ю.Ф. 308

Перспективные методы, методики и приборы для определения механических характеристик многолетнемерзлых грунтов при изменении их физического состояния
Королев М.В. 316

Анализ проблем строительства и эксплуатации зданий и сооружений на территории города Норильска в условиях изменения температуры многолетнемерзлых грунтов
Михайлова Е.С. 327

Гибридная модель решателя для конечно-элементного анализа прикладных задач геотехники
Нестеров И.В., Щербаков А.А., Пантюхова К.К.. 338

Прогнозирование деградации свойств грунтов с помощью временных свёрточных сетей (TCN)
Тишин Н.Р., Озмидов О.Р., Селиванова О.С. 346

Механика гетерогенных сред, адаптивных материалов, композитов и конструкций

УДК 539.3
EDN ARNDMK
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.1

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ SH-ПАВ В НЕОДНОРОДНЫХ МАГНИТОЭЛЕКТРОУПРУГИХ СТРУКТУРАХ*

Белянкова Т.И.[1], Ворович Е.И.[2], Калинчук В.В.[1], Пименов М.С.[1,3], Турчин А.С.[1,3]

[1]ФИЦ Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону, Россия
[2]Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Россия
[3]Южный федеральный университет, г. Ростов-на Дону, Россия

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача о распространении в направлении x_1 сдвиговых горизонтально поляризованных поверхностных акустических волн (SH-ПАВ) в магнитоэлектроупругой (МЭУ) структуре. Полагается, что структура состоит из однородного упругого полупространства (подложки, $H_2 < x_2$, $|x_1|$, $|x_3| \le \infty$) с неоднородным двухслойным покрытием ($H_2 < x_2 < H_1$, $|x_1|$, $|x_3| \le \infty$). Слои покрытия выполнены из функционально градиентного пьезоэлектрического материала (ФГПЭМ) и функционально градиентного пьезомагнитного материала (ФГПММ). Рассмотрены покрытия:

– с внешним пьезоэлектрическим (ПЭ) слоем: $n=1$ – ФГПЭМ $0 < x_2 < H_1$, $|x_1|$, $|x_3| \le \infty$, $n=2$ – ФГПММ $H_2 < x_2 < 0$, $|x_1|$, $|x_3| \le \infty$;

– с внешним пьезомагнитным (ПМ) слоем: $n=1'$ – ФГПММ $0 < x_2 < H_1$, $|x_1|$, $|x_3| \le \infty$, $n=2'$ – ФГПЭМ $H_2 < x_2 < 0$, $|x_1|$, $|x_3| \le \infty$ (рис.1).

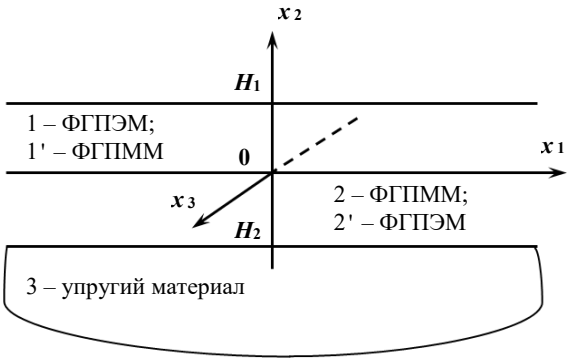


Рис.1. Геометрия задачи.

Предполагается, что изменение свойств по толщине слоев определены выражениями $\left(n = n_e,\ n_m;\ n_e = 1, 2';\ n_m = 2, 1'\right)$

* *Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант №24-29-00773.*

$$\rho^{(n)} = \rho_0^{(n)} F_\rho^{(n)}\left(x_2\right),\ \ c_{ij}^{(n)} = c_{ij}^{0(n)} F_c^{(n)}\left(x_2\right),\ \ e_{ij}^{(n)} = e_{ij}^{0(n)} F_e^{(n)}\left(x_2\right),$$
$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{0(n)} F_\varepsilon^{(n)}\left(x_2\right),\ \ f_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{0(n)} F_f^{(n)}\left(x_2\right),\ \ \mu_{ij}^{(n)} = \mu_{ij}^{0(n)} F_\mu^{(n)}\left(x_2\right). \quad (1)$$

Здесь $\rho_0^{(n)}$ – плотность, $c_{ij}^{0(n)}$, $e_{ij}^{0(n)}$, $f_{ij}^{0(n)}$, $e_{ij}^{0(2)} = 0$, $f_{ij}^{0(1)} = 0$ – компоненты тензоров упругих, пьезоэлектрических и пьезомагнитных констант, $\varepsilon_{ij}^{0(n)}$, $\mu_{ij}^{0(n)}$ – компоненты тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости основных ПЭ $\left(n = n_e\right)$ и ПМ $\left(n = n_m\right)$ материалов покрытия. Полагаем, что основные материалы покрытия имеют симметрию класса 6 mm, оси симметрии и поляризации направлены вдоль оси x_3. Распространение волн вызвано действием удаленного источника гармонических колебаний, режим которых полагается установившимся, смещения $u_k^{(n)}$, электрический $\varphi^{(n)}$ и магнитный $\psi^{(n)}$ потенциалы удовлетворяют условиям $\left(n = 1,2;\ 1',2';\ 3\right)$

$$u_1^{(n)} = 0,\ \ u_2^{(n)} = 0,\ \ \partial\left(\bullet\right)/\partial x_3 = 0,$$
$$u_3^{(n)} = u_3^{(n)}\left(x_1, x_2\right),\ \ \varphi^{(n)} = \varphi^{(n)}\left(x_1, x_2\right),\ \ \psi^{(n)} = \psi^{(n)}\left(x_1, x_2\right). \quad (2)$$

В квазистатическом приближении движение составной МЭУ среды описывается уравнениями [1-3] ($n = n_e, n_m, 3$; $n_e = 1,2'$; $n_m = 2,1'$, здесь и далее в зависимости от расположения слоев в покрытии верхние индексы принимают значения либо $n = 1,2,3$, либо $n = 1',2',3$)

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^{(n)} = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}}{\partial t^2},\quad \nabla \cdot \mathbf{D}^{(n)} = 0,\quad \nabla \cdot \mathbf{B}^{(n)} = 0, \quad (3)$$

и определяющими соотношениями [2,3] ($k, l, s, p = 1,2,3;\ \ n = 1,2;\ 1',2'$)

$$\tau_{lk}^{(n)} = c_{lksp}^{(n)} u_{s,p}^{(n)} + e_{lkp}^{(n)} \varphi_{,p}^{(n)} + f_{lkp}^{(n)} \psi_{,p}^{(n)},\ \ D_l^{(n)} = e_{lsp}^{(n)} u_{s,p}^{(n)} - \varepsilon_{lp}^{(n)} \varphi_{,p}^{(n)} - \alpha_{lp}^{(n)} \psi_{,p}^{(n)},$$
$$B_l^{(n)} = f_{lsp}^{(n)} u_{s,p}^{(n)} - \alpha_{lp}^{(n)} \varphi_{,p}^{(n)} - \mu_{lp}^{(n)} \psi_{,p}^{(n)},\ \ \tau_{lk}^{(3)} = c_{lksp}^{(3)} u_{s,p}^{(3)}, \quad (4)$$
$$D_l^{(3)} = -\varepsilon_{lp}^{(3)} \varphi_{,p}^{(3)},\ \ B_l^{(3)} = -\mu_{lp}^{(3)} \psi_{,p}^{(3)}.$$

Здесь ∇ – оператор Гамильтона; $\mathbf{T}^{(n)}$, $\mathbf{D}^{(n)}$ и $\mathbf{B}^{(n)}$ – тензор напряжений, векторы индукции электрического и магнитного полей *n*-ой составляющей структуры; $\mathbf{u}^{(n)}$ – вектор механических смещений; $\varphi^{(n)}$ и $\psi^{(n)}$ – электрический и магнитный потенциалы; $\rho^{(n)}$ – плотность, $c_{lksp}^{(n)}$, $e_{lkp}^{(n)}$, $f_{lkp}^{(n)}$ – компоненты тензоров упругих, ПЭ и ПМ констант, $\varepsilon_{lp}^{(n)}$, $\mu_{lp}^{(n)}$ – компоненты тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости, $\alpha_{lp}^{(n)}$ – компоненты тензора магнитоэлектрических констант материала *n*-ой составляющей структуры ($\alpha_{lp}^{(n)} = \alpha_{ll}^{(n)} = 0$ [4]). В силу свойств материалов покрытия для констант выполняются условия симметрии [5], далее используем сокращенную запись в нотации Фойгта.

Полагаем, что на границах структуры заданы условия, которые с учетом (2) принимают вид (в зависимости от расположения слоев в покрытии верхние индексы n_1, n_2 принимают значения либо $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, либо $n_1 = 1'$, $n_2 = 2'$):

– внешняя поверхность свободна от механических нагрузок, электрически закорочена при открытых магнитных условиях (задача **I so**) [2,3,6]

$$x_2 = H_1:\ \tau_{23}^{(n_1)} = 0,\quad \varphi^{(n_1)} = 0,\ \ \psi^{(n_1)} = 0, \quad (5)$$

– на границе раздела слоев покрытия $x_2 = 0$

$$\tau_{23}^{(n_1)} = \tau_{23}^{(n_2)},\ \ D_2^{(n_1)} = D_2^{(n_2)},\ \ \ B_2^{(n_1)} = B_2^{(n_2)},$$
$$u_3^{(n_1)} = u_3^{(n_2)},\ \ \varphi^{(n_1)} = \varphi^{(n_2)},\ \ \ \psi^{(n_1)} = \psi^{(n_2)}, \tag{6}$$

– на границе раздела покрытия и подложки $x_2 = H_2$

$$\tau_{23}^{(n_2)} = \tau_{23}^{(3)},\ D_2^{(n_2)} = D_2^{(3)},\ B_2^{(n_2)} = B_2^{(3)},\ u_3^{(n_2)} = u_3^{(3)},\ \varphi^{(n_2)} = \varphi^{(3)},\ \psi^{(n_2)} = \psi^{(3)}, \tag{7}$$

– на бесконечности

$$x_2 \to -\infty:\ \ u_3^{(3)} \to 0,\ \ \varphi^{(3)} \to 0,\ \ \psi^{(3)} \to 0. \tag{8}$$

Для удобства дальнейшего изложения введем в рассмотрение расширенный вектор перемещений $\mathbf{u}^{em(n)} = \left\{u_3^{(n)}, u_4^{(n)} = \varphi^{(n)}, u_5^{(n)} = \psi^{(n)}\right\}$ n-ой составляющей структуры. С учетом (2) и свойств материалов отличные от нуля компоненты тензора напряжений и векторов электрической и магнитной индукции (4) принимают вид $\left(k = 1,2;\ n_e = 1,2';\ n_m = 2,1'\right)$:

для ФГПЭМ

$$\tau_{k3}^{(n_e)} = c_{44}^{(n_e)} u_{3,k}^{(n_e)} + e_{15}^{(n_e)} u_{4,k}^{(n_e)},\ D_k^{(n_e)} = e_{15}^{(n_e)} u_{3,k}^{(n_e)} - \varepsilon_{11}^{(n_e)} u_{4,k}^{(n_e)},\ \ B_k^{(n_e)} = -\mu_{11}^{(n_e)} u_{5,k}^{(n_e)}. \tag{9}$$

для ФГПММ

$$\tau_{k3}^{(n_m)} = c_{44}^{(n_m)} u_{3,k}^{(n_m)} + f_{15}^{(n_m)} u_{5,k}^{(n_m)},\ \ d_k^{(n_m)} = -\varepsilon_{11}^{(n_m)} u_{4,k}^{(n_m)},$$
$$b_k^{(n_m)} = f_{15}^{(n_m)} u_{3,k}^{(n_m)} - \mu_{11}^{(n_m)} u_{5,k}^{(n_m)}. \tag{10}$$

для подложки

$$\tau_{k3}^{(3)} = c_{44}^{(3)} u_{3,k}^{(3)},\ \ \ D_k^{(3)} = -\varepsilon_{11}^{(3)} u_{4,k}^{(3)},\ \ \ B_k^{(3)} = -\mu_{11}^{(3)} u_{5,k}^{(3)}. \tag{11}$$

Краевая задача (3), (5)-(8) для МЭУ структуры с неоднородным покрытием в безразмерных параметрах с учетом условий (2), представлений (4), (9)-(11) принимает вид:

для ФГПЭМ

$$\sum_{k=1}^{2}\left[c_{44}^{(n_e)} u_{3,kk}^{(n_e)} + e_{15}^{(n_e)} u_{4,kk}^{(n_e)}\right] + c_{44,2}^{(n_e)} u_{3,2}^{(n_e)} + e_{15,2}^{(n_e)} u_{4,2}^{(n_e)} = -\rho^{(n_e)} \kappa_2^2\, u_3^{(n_e)},$$
$$\sum_{k=1}^{2}\left[e_{15}^{(n_e)} u_{3,kk}^{(n_e)} - \varepsilon_{11}^{(n_e)} u_{4,kk}^{(n_e)}\right] + e_{15,2}^{(n_e)} u_{3,2}^{(n_e)} - \varepsilon_{11,2}^{(n_e)} u_{4,2}^{(n_e)} = 0, \tag{12}$$
$$\sum_{k=1}^{2}\left[-\mu_{11}^{(n_e)} u_{5,kk}^{(n_e)}\right] - \mu_{11,2}^{(n_e)} u_{5,2}^{(n_e)} = 0.$$

для ФГПММ

$$\sum_{k=1}^{2}\left[c_{44}^{(n_m)} u_{3,kk}^{(n_m)} + f_{15}^{(n_m)} u_{5,kk}^{(n_m)}\right] + c_{44,2}^{(n_m)} u_{3,2}^{(n_m)} + f_{15,2}^{(n_m)} u_{5,2}^{(n_m)} = -\rho^{(n_m)} \kappa_2^2\, u_3^{(n_m)},$$
$$\sum_{k=1}^{2}\left[-\varepsilon_{11}^{(n_m)} u_{4,kk}^{(n_m)}\right] - \varepsilon_{11,2}^{(n_m)} u_{4,2}^{(n_m)} = 0, \tag{13}$$
$$\sum_{k=1}^{2}\left[f_{15}^{(n_m)} u_{3,kk}^{(n_m)} - \mu_{k55}^{(n_m)} u_{5,kk}^{(n_m)}\right] + f_{15,2}^{(n_m)} u_{3,2}^{(n_m)} - \varepsilon_{11,2}^{(n_m)} u_{5,2}^{(n_m)} = 0.$$

для подложки

$$\sum_{k=1}^{2} u_{3,kk}^{(3)} = -\kappa_2^2\, u_3^{(3)},\ \ \ \sum_{k=1}^{2} u_{4,kk}^{(3)} = 0,\ \ \ \sum_{k=1}^{2} u_{3,kk}^{(3)} = 0. \tag{14}$$

Граничные условия задачи запишем в виде $\left(n_1 = 1, 1',\ n_2 = 2,\ 2'\right)$

$$
\begin{aligned}
&x_2 = H_1:\ \tau_{23}^{(n_1)} = 0;\ \ u_4^{(n_1)} = 0,\ \ u_5^{(n_1)} = 0;\\
&x_2 = 0:\ \tau_{23}^{(n_1)} = \tau_{23}^{(n_2)},\ \ D_2^{(n_1)} = D_2^{(n_2)},\ \ B_2^{(n_1)} = B_2^{(n_2)},\ u_3^{(n_1)} = u_3^{(n_2)},\\
&u_4^{(n_1)} = u_4^{(n_2)},\ \ u_5^{(n_1)} = u_5^{(n_2)};\\
&x_2 = H_2:\tau_{23}^{(n_2)} = \tau_{23}^{(3)},\ \ D_2^{(n_2)} = D_2^{(3)},\ \ B_2^{(n_2)} = B_2^{(3)},\ \ u_3^{(n_2)} = u_3^{(3)},\\
&u_4^{(n_2)} = u_4^{(3)},\ \ u_5^{(n_2)} = u_5^{(3)};\\
&x_2 \to -\infty:\ \ u_3^{(3)} \to 0,\ u_4^{(3)} \to 0,\ u_5^{(3)} \to 0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Далее используем безразмерные параметры: $l' = l/H$, $\rho'^{(n)} = \rho^{(n)}/\rho^{(3)}$, $c_{ij}'^{(n)} = c_{ij}^{(n)}/c_{44}^{(3)}$, $e_{ij}'^{(n)} = e_{ij}^{(n)}\xi_e/c_{44}^{(3)}$, $\varepsilon_{ij}'^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(n)}\xi_e^2/c_{44}^{(3)}$, $f_{ij}'^{(n)} = f_{ij}^{(n)}\xi_m/c_{44}^{(3)}$, $\mu_{ij}'^{(n)} = \mu_{ij}^{(n)}\xi_m^2/c_{44}^{(3)}$, $\varphi'^{(n)} = \varphi^{(n)}/(\xi_e H)$, $\psi'^{(n)} = \psi^{(n)}/(\xi_m H)$. Здесь $\xi_e = 10^{10}$ [В/м], $\xi_m = 10^7$ [А/м] – метрические множители, H – характерный линейный размер, $\kappa_2 = \omega H/V_S^{(3)}$ – безразмерная частота. $V_S^{(3)} = \sqrt{c_{44}^{(3)}/\rho^{(3)}}$, $V_S^e = \sqrt{c_{44}^{0(n_e)}/\rho_0^{(n_e)}}$, $V_S^m = \sqrt{c_{44}^{0(n_m)}/\rho_0^{(n_m)}}$ – скорости объемной сдвиговой волны подложки, основных материалов ПЭ и ПМ слоев покрытия. $V_{Se}^e = \sqrt{\left(c_{44}^{0(n_e)} + \left(e_{15}^{0(n_e)}\right)^2/\varepsilon_{11}^{0(n_e)}\right)/\rho_0^{(n_e)}}$, $V_{Sm}^m = \sqrt{\left(c_{44}^{0(n_m)} + \left(f_{15}^{0(n_m)}\right)^2/\mu_{11}^{0(n_m)}\right)/\rho_0^{(n_m)}}$ $(n = n_e,\ n_m)$ – скорости объемных сдвиговых волн основных материалов покрытия с учетом ПЭ и ПМ свойств. Далее штрихи опущены.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение задачи **I so** (12)-(15) строится для МЭУ структуры с неоднородным покрытием строится в пространстве образов Фурье (α – параметр преобразования по координате x_1) в виде: ($p = 3,4,5$; $g = 4,5,6$; $n = 1,2;\ 1',2'$)

$$
U_p^{(n)}(\alpha, x_2) = \sum_{k=1}^{6} c_k^{(n)} y_{gk}^{(n)}(\alpha, x_2),\quad U_p^{(3)}(\alpha, x_2) = c_p^{(3)} e^{\sigma_p x_2},
\tag{16}
$$

$\sigma_3 = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_2^2}$, $\sigma_4 = \sigma_5 = \alpha$; $y_{pk}^{(n)}(\alpha, x_2)$ – линейно независимые решения начально-краевых задач Коши 1 рода с переменными коэффициентами $(n = 1,2;\ 1',2')$ [7,8]

$$
\mathbf{Y}^{(n)'}(\alpha, x_2) = \mathbf{M}^{(n)}(\alpha, x_2)\mathbf{Y}^{(n)}(\alpha, x_2),\quad \mathbf{Y}^{(n)}(\alpha, 0) = \mathbf{I},
\tag{17}
$$

относительно вектор-функций

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Y}^{(n)} = \left\{\mathbf{Y}_\Sigma^{(n)}, \mathbf{Y}_U^{(n)}\right\}^T,\quad \mathbf{Y}_\Sigma^{(n)} = \left\{T_{23}^{F(n)}, D_2^{F(n)}, B_2^{F(n)}\right\}^T,\\
&\mathbf{Y}_U^{(n)} = \left\{U_3^{(n)}, U_4^{(n)}, U_5^{(n)}\right\}^T.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Здесь $T_{23}^{F(n)}$, $D_2^{F(n)}$, $B_2^{F(n)}$, $U_p^{(n)}$ – трансформанты Фурье компонент тензора напряжений, векторов электрической и магнитной индукции и расширенного вектора смещений. Вид матриц $\mathbf{M}^{(n)}(\alpha, x_2)$ для ФГПЭМ и ФГПММ приведен в [8].

Подставляя решения (16) в граничные условия (15), получаем однородную СЛАУ для определения неизвестных $c_k^{(n)}$. Условие нетривиальности ее решения приводит к дисперсионному уравнению. После определения всех неизвестных и применяя к (16) обратное преобразование Фурье, получаем решение рассматриваемой задачи.

Дисперсионное уравнение задачи I(so) для МЭУ структуры с неоднородным покрытием запишем в виде $\left(n_1 = 1,1';\ n_2 = 2,2'\right)$

$$\det \mathbf{A}^I\left(\alpha,\kappa_2\right)=0,\quad \mathbf{A}^I=\begin{pmatrix}\mathbf{P}^{(n_1)}\left(H_1\right) & 0 & 0\\ \mathbf{P}^{(n_1)}\left(0\right) & -\mathbf{P}^{(n_2)}\left(0\right) & 0\\ 0 & \mathbf{P}^{(n_2)}\left(H_2\right) & -\mathbf{P}^{(3)}\left(H_2\right)\end{pmatrix}. \qquad (19)$$

Структура и размерность матрицы $\mathbf{A}^I$ определяется геометрией задачи, представлением решения (16) и граничными условиями (15). Матрица $\mathbf{A}^I$ имеет размерность 15×15. В силу условий на границе раздела слоев покрытия и начальных краевых условий задачи Коши (17), (18), матрицы $\mathbf{P}^{(n_1)}\left(0\right)$ и $\mathbf{P}^{(n_2)}\left(0\right)$ являются единичными. Матрицы $\mathbf{P}^{(n_1)}\left(H_1\right)$ имеют вид $\mathbf{P}_e^I$ в случае $n_1=1$ и $\mathbf{P}_m^I$ в случае $n_1=1'$, приведенным в [7]. Матрицы $\mathbf{P}^{(n_2)}\left(H_2\right)$ и $\mathbf{P}^{(3)}\left(H_2\right)$ определены условиями на границе раздела покрытия и подложки

$$\mathbf{P}^{(n_2)}=\begin{pmatrix} y_{11}^{(n_2)} & y_{12}^{(n_2)} & y_{13}^{(n_2)} & y_{14}^{(n_2)} & y_{15}^{(n_2)} & y_{16}^{(n_2)}\\ y_{41}^{(n_2)} & y_{42}^{(n_2)} & y_{43}^{(n_2)} & y_{44}^{(n_2)} & y_{45}^{(n_2)} & y_{46}^{(n_2)}\\ y_{21}^{(n_2)} & y_{22}^{(n_2)} & y_{23}^{(n_2)} & y_{24}^{(n_2)} & y_{25}^{(n_2)} & y_{26}^{(n_2)}\\ y_{51}^{(n_2)} & y_{52}^{(n_2)} & y_{53}^{(n_2)} & y_{54}^{(n_2)} & y_{55}^{(n_2)} & y_{56}^{(n_2)}\\ y_{31}^{(n_2)} & y_{32}^{(n_2)} & y_{33}^{(n_2)} & y_{34}^{(n_2)} & y_{35}^{(n_2)} & y_{36}^{(n_2)}\\ y_{61}^{(n_2)} & y_{62}^{(n_2)} & y_{63}^{(n_2)} & y_{64}^{(n_2)} & y_{65}^{(n_2)} & y_{66}^{(n_2)} \end{pmatrix},\ \mathbf{P}^{(3)}=\begin{pmatrix} \sigma_3\gamma_1 & 0 & 0\\ \gamma_1 & 0 & 0\\ 0 & -\varepsilon_{11}^{(3)}\alpha\gamma_2 & 0\\ 0 & \gamma_2 & 0\\ 0 & 0 & -\mu_{11}^{(3)}\alpha\gamma_2\\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix},$$

где $\gamma_1=e^{\sigma_3 H_2},\ \gamma_2=e^{\alpha H_2}$.

3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

При исследовании особенностей распространения SH-ПАВ в МЭУ структурах с неоднородным покрытием рассмотрены модели на основе PZT-5H/$CoFe_2O_4$/SiO_2 $\left(m_1/m_4/m_5\right)$ и $CoFe_2O_4$/PZT-5H/SiO_2 $\left(m_4/m_1/m_5\right)$. Покрытие выполнено из функционально градиентных материалов, при моделировании которых использована двухкомпонентная модель изменения свойств [8]. Неоднородность ПЭ слоя моделировалась наличием высокоскоростного включения из PZT DL-61HD $\left(m_2\right)$ с различной локализацией по толщине слоя. Включения m_{41} и m_{42} ПМ слоя моделировали проникновение ПЭ материала в узкой области в окрестности $x_2=0$. Вид функциональных зависимостей (1) приведен в [7,8]. Параметры и скоростные характеристики материалов приведены в Таблице 1.

Таблица 1.

Параметры материалов.

	m_1 [1]	m_2 [9]	m_4 [10]	m_{41}	m_{42}	m_5 [10]
ρ, кг/м^3	7500	8200	5300	6150	7900	2203
$c_{44}\times10^{10}$, н/м^2	2.3	3.9	4.53	2.3	3.9	3.12
e_{15}, Кл/м^2	17	33.1	0	0	0	0
$\varepsilon_{11}\times10^{-10}$, Кл^2/(н·м^2)	151	249	0.8	24	45	0.33
f_{15}, н/(А·м)	0	0	550	300	450	0
$\mu_{11}\times10^{-6}$, н·сек^2/Кл^2	5	5	-590	-150	-470	4.45
V_S, м/сек^2	1751	2181	2924	1934	2222	3763
V_{Se}, м/сек^2	2370	3182				
V_{Sm}, м/сек^2			2907	1908	2210	

Здесь $V_S=\sqrt{c_{44}/\rho}$, $V_{Se}=\sqrt{\left(c_{44}+\left(e_{15}\right)^2/\varepsilon_{11}\right)/\rho}$, $V_{Sm}=\sqrt{\left(c_{44}+\left(f_{15}\right)^2/\mu_{11}\right)/\rho}$.

Рассмотрены следующие виды покрытий:
покрытия из однородных ПЭ и ПМ слоев (рис.1):

– m_1/m_4 для структуры $1/2/3$,

– m_4/m_1 для структуры $1'/2'/3$;

неоднородное покрытие с высокоскоростным включением m_2 в ПЭ слое при различной его локализации:

– m_1-m_2/m_4 для структуры $1/2/3$,

– m_4/m_1-m_2 для структуры $1'/2'/3$;

неоднородное покрытие с включением m_{41} ПМ слоя при его локализации у границы раздела слоев покрытия:

– m_1/m_{41}-m_4 для структуры $1/2/3$,

– m_{41}-m_4/m_1 для структуры $1'/2'/3$;

неоднородное покрытие с включениями m_2 в ПЭ слое и m_{42} в ПМ слое при локализации включений у границы раздела слоев покрытия:

– m_1-m_2/m_{42}-m_4 для структуры $1/2/3$,

– m_{42}-m_4/m_1-m_2 для структуры $1'/2'/3$.

На рис.2а-г показано изменение безразмерного параметра $c_{44}\left(x_2\right)$ в структурах $1/2/3$ (рис.2а,б) и $1'/2'/3$ (рис.2в,г) с неоднородным покрытием ($H_2<x_2<H_1$, , $H_1=1$, $H_2=-1$, рис.1). На рисунках цифрами 0 и 0' отмечено изменение параметра в однородных материалах структур $m_1/m_4/m_5$ и $m_4/m_1/m_5$. Кривые 1, 2, 3 отвечают срединной, приповерхностной и приграничной локализации включения m_2 в покрытии m_1-m_2/m_4. Кривые 1', 2', 3' соответствуют различной локализации включения ПЭ слоя в структуре с покрытием m_4/m_1-m_2. На рис.2б,г кривые 4 и 4' отвечают изменению параметра в структурах с покрытиями m_1/m_{41}-m_4 и m_{41}-m_4/m_1, кривые 5 и 5' – в структурах с покрытиями m_1-m_2/m_{42}-m_4 и m_{42}-m_4/m_1-m_2.

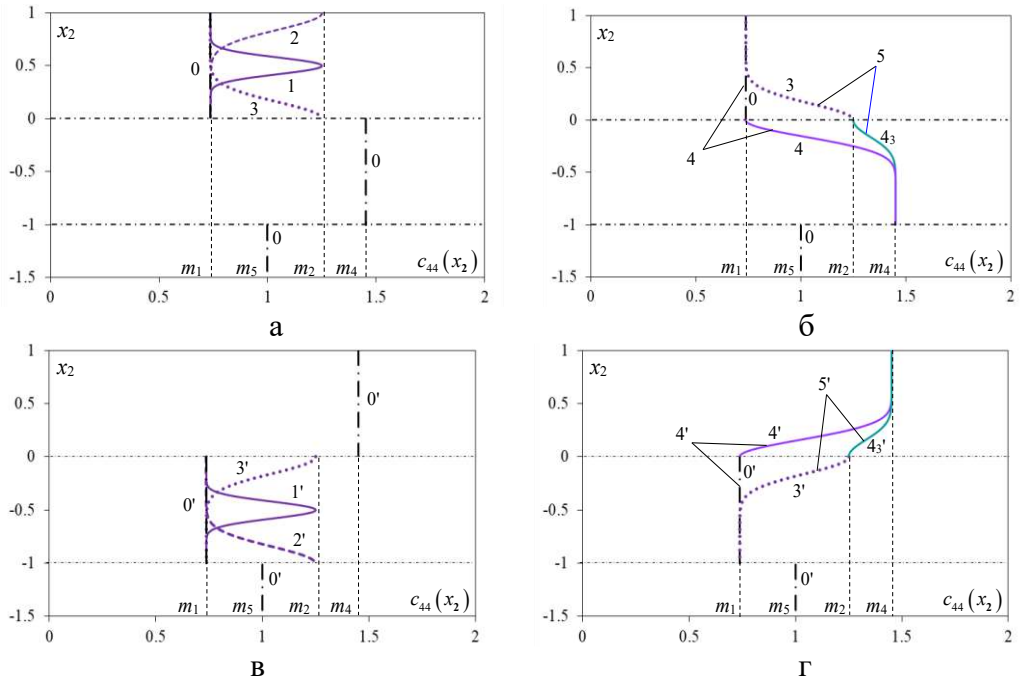


Рис.2. Изменение безразмерного параметра $c_{44}(x_2)$ в структурах с неоднородными покрытиями. а) m_1/m_4, m_1-m_2/m_4; б) m_1/m_{41}-m_4, m_1-m_2/m_{42}-m_4; в) m_4/m_1, m_4/m_1-m_2; г) m_{41}-m_4/m_1, m_{42}-m_4/m_1-m_2.

Влияние характера и локализации неоднородности покрытия на особенности распространения SH-ПАВ показаны на примере задачи I (so) с электрически закрытыми и магнитно-открытыми условиями на внешней поверхности. На рис.3-5 приведены зависимости относительных фазовых скоростей $V_F^I/V_S^{(3)}$ от частоты κ_2 ($V_F^I=\kappa_2/\zeta^I$, ζ^r – нули дисперсионного уравнения (19)). На рисунках частоты пересечения V_F^I с V_S^m обозначены $\kappa_{n,p}$ (n – номер моды ПАВ, p – локализация неоднородности в соответствии с рис.2).

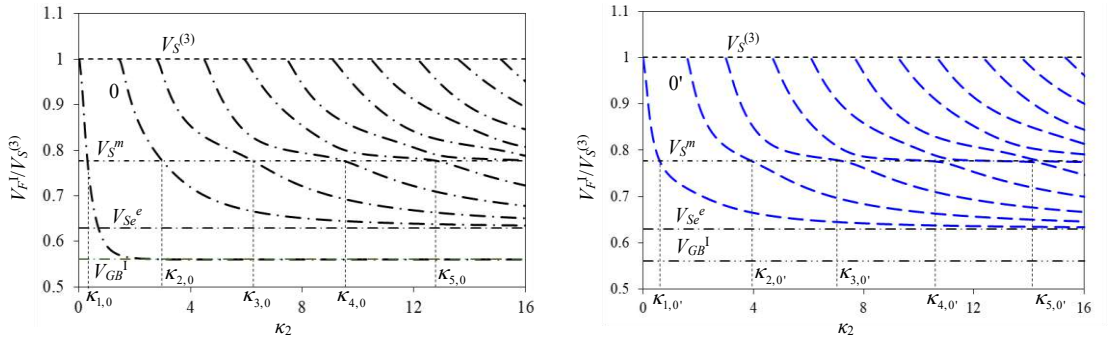


Рис.3. Влияние расположения ПЭ и ПМ слоев покрытия на скорости SH-ПАВ. а) покрытие m_1/m_4; б) покрытие m_4/m_1.

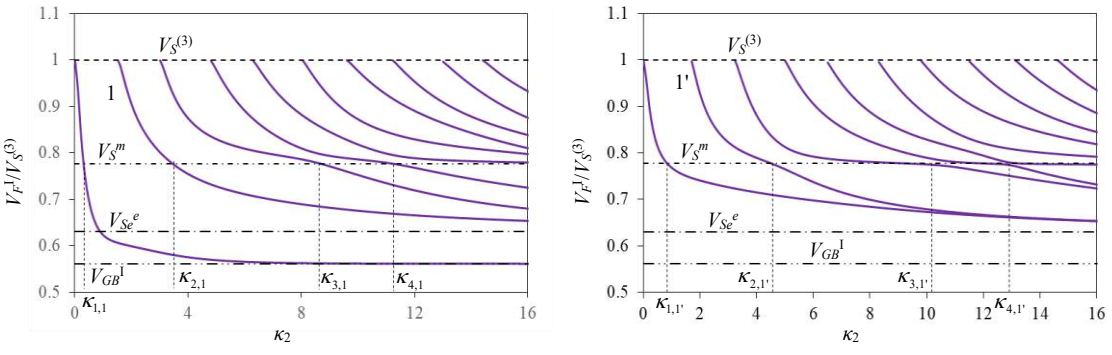
На рис.3а,б показано влияние расположения однородных ПЭ и ПМ слоев покрытия на фазовые скорости V_F^I SH-ПАВ структуры. Длинные

штрихпунктирные линии (кривые 0, рис.3а) отвечают скоростям SH-ПАВ структуры с покрытием m_1/m_4, длинные штриховые линии (кривые 0', рис.3б) – скоростям SH-ПАВ структуры с покрытием m_4/m_1.

Из рисунков видно, что в отличие от [7] для рассматриваемых структур скорости SH-ПАВ ограничены значением скорости $V_S^{(3)}$. Расположение ПЭ и ПМ слоев в покрытии играет существенную роль в поведении скоростей SH-ПАВ. Для 1-й моды в структуре с покрытием m_1/m_4 (рис.3а) в достаточно узком диапазоне частот отмечается падение скорости от $V_S^{(3)}$ до V_{GB}^I (скорость волны Гуляева-Блюштейна в материале m_1 с коротко замкнутой поверхностью [2]). В случае структуры с покрытием m_4/m_1 (рис.3б) происходит постепенное падание скорости до значения V_{Se}^e. Для 2-х и последующих мод в структурах внешним ПМ слоем (m_4/m_1, рис.3б) пересечение V_F^I с V_S^m происходит на более высоких частотах. Появление «террасных» участков со ступенчатым изменением скорости в окрестности V_S^m отмечается в поведении SH-ПАВ начиная с 3-й моды. В случае покрытия m_1/m_4 такие участки появляются, начиная с 4-й моды.

Рис.4а-е иллюстрируют влияние неоднородности ПЭ слоя покрытия на поведение SH-ПАВ в структурах в случае его внешнего (рис.4а,в,д) и внутреннего (рис.4б,г,е) расположения. Сплошными, штриховыми и пунктирными линиями с цифрами 1, 2, 3 и 1', 2', 3' отмечены области локализации высокоскоростного включения в соответствии с рис.2а,в. Для наглядности на рис.4е штриховой линией отмечено поведение *4*-й моды SH-ПАВ.

Из сравнения рис.3 и рис.4 видно, что неоднородность ПЭ слоя покрытия как при внешнем, так и при внутреннем его расположении существенно влияет на значение скоростей SH-ПАВ структуры и поведение отдельных мод. Наличие высокоскоростного включения приводит к сдвигу в область более высоких значений частот выхода новых мод и частот $\kappa_{n,p}$ пересечения V_F^I с V_S^m. Сдвиг частот для различных мод ПАВ неравномерен, определяется характером и локализацией включения, а также расположением ПЭ слоя в покрытии структуры. Максимальное влияние на скорости первых двух мод ПАВ при внешнем расположении ПЭ слоя в покрытии оказывает приповерхностная локализация включения (рис. 4в), при внутреннем расположении ПЭ слоя – срединная (рис. 4б).



а б

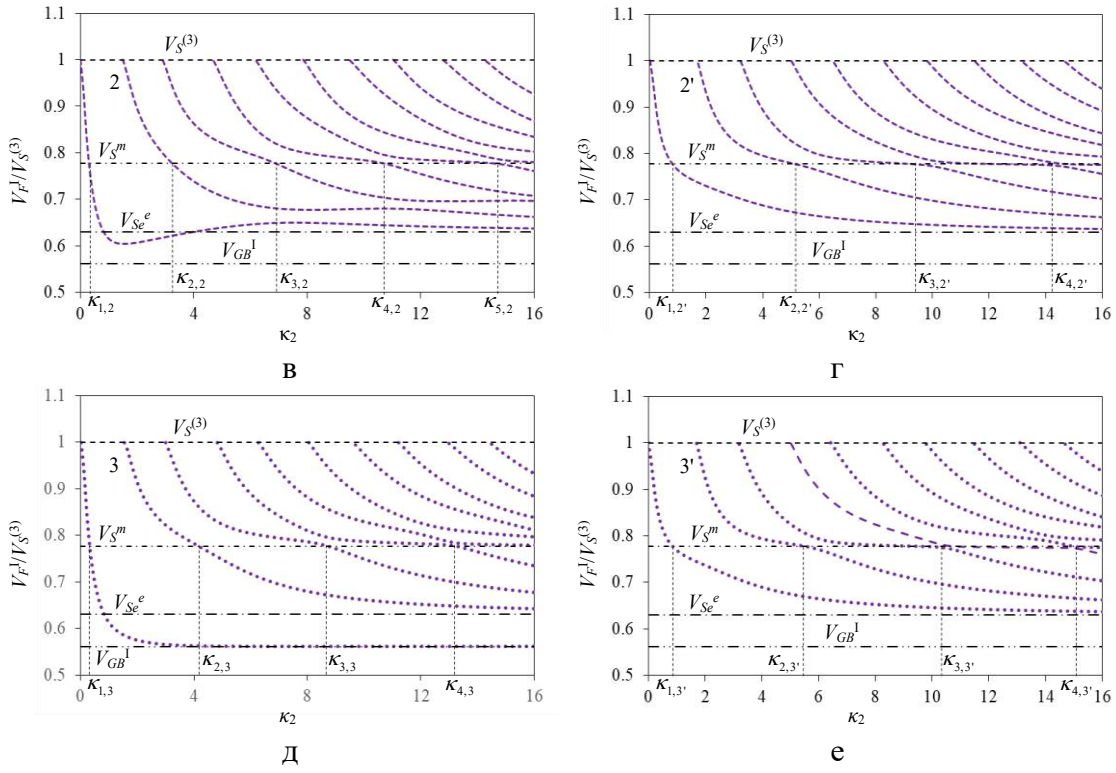
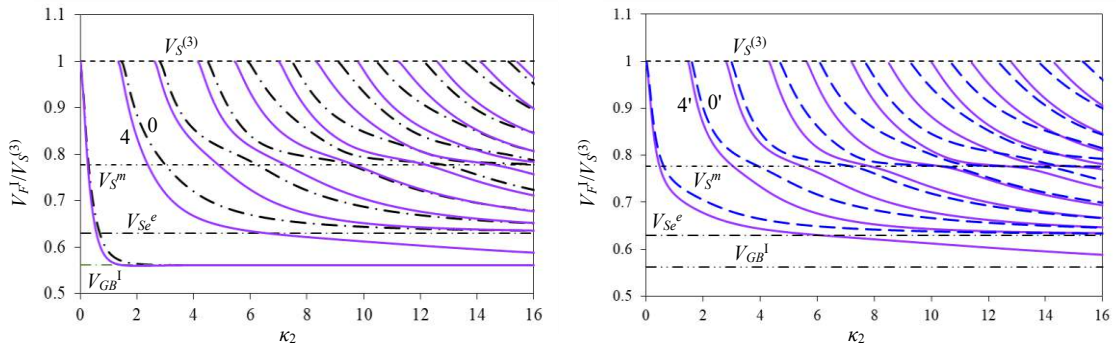
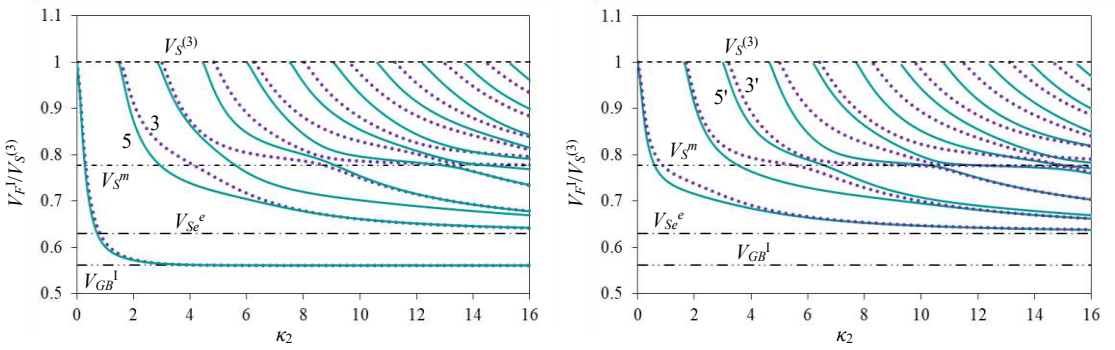


Рис.4. Влияние локализации включения ПЭ слоя покрытия на скорости SH-ПАВ. а, в, д – покрытие m_1-m_2/m_4 ; б, г, е – m_4/m_1-m_2 .

На рис.5а-г представлено влияние неоднородности покрытия, локализованного в окрестности $x_2 = 0$, на скорости ПАВ в структурах с внешним ПЭ (рис.5а,в) и ПМ (рис.5б,г) слоем. Сплошные линии с цифрами 4, 5 и 4', 5' отвечают неоднородностям рис.2б,г. Для сравнения на рис. 5а,б приведены кривые скоростей в соответствующих структурах с покрытиями из однородных материалов (кривые 0, рис.5а и 0', рис.5б), на рис.5в,г с включением ПЭ слоя, локализованным в окрестности $x_2 = 0$ (кривые 3, рис 5в и кривые 3', рис.5г).





в г

Рис.5. Влияние локализованной в окрестности $x_2 = 0$ неоднородности ПЭ и ПМ слоев покрытия на скорости SH-ПАВ структуры. а) m_1/m_{41}-m_4 и m_1/m_4; б) m_{41}-m_4/m_1 и m_4/m_1; в) m_1-m_2/m_{42}-m_4 и m_1-m_2/m_4; г) m_{42}-m_4/m_1-m_2 и m_4/m_1-m_2.

Из рис.5а-г видно, что наличие в покрытии структуры включений m_{41}, m_{42} $\left(V_S^{41} < V_S^{42} < V_S^4\right)$ ПМ слоя (сплошные линии) относительно структур с однородным ПМ слоем (пунктирные линии) приводит к сдвигу частот выхода новых мод SH-ПАВ и частот $\kappa_{n,p}$ в область более низких значений. Кривые скоростей становятся более пологими, выход на «террасные» участки происходит, а модах с более высоким номером. В случае покрытий m_1/m_{41}-m_4 и m_{41}-m_4/m_1 отмечается уменьшение асимптотических значений скоростей SH-ПАВ относительно структур с однородными покрытиями m_1/m_4 и m_4/m_1 (рис.5а,б). Следует отметить, что в случае внешнего ПЭ слоя в покрытии влияние включений m_2, m_{41} и m_{42} на скорость 1-й моды ПАВ мало и сказывается только в узком диапазоне низких частот (рис.5а,в). С увеличением частоты скорости V_F^I достаточно быстро достигает асимптотического значения V_{GB}^I. Для 2-х и 3-х мод ПАВ влияние неоднородности в покрытиях m_1-m_2/m_{42}-m_4 и m_{42}-m_4/m_1-m_2 (сплошные линии, рис.5в,г) относительно m_1-m_2/m_4 и m_4/m_1-m_2 (пунктирные линии, рис.5в,г) максимально в окрестности V_S^m. Для последующих мод максимальное влияние неоднородности ПМ слоя отмечается на частотах в области $V_F^I > V_S^m$. В области $V_F^I < V_{Sm}^m$ для покрытия m_1-m_2/m_{42}-m_4 отмечено приближение асимптотических значений 3-й и 4-й мод ПАВ к асимптотическому значению 3-й моды ПАВ в структуре с покрытием m_1-m_2/m_4 (рис.5в). В случае покрытия m_{42}-m_4/m_1-m_2 асимптотические значения 2-й и 3-й мод приближаются к асимптотическому значению 2-й моды ПАВ в структуре с покрытием m_4/m_1-m_2 (рис.5г).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В квазистатическом приближении исследованы особенности распространения SH-ПАВ в неоднородных МЭУ структурах, представляющих собой покрытие из ФГПЭМ и ФГПММ слоев на упругой подложке. На примере магнитоэлектроупругих структур на основе PZT-5H/$CoFe_2O_4$/SiO_2

и $CoFe_2O_4$/PZT-5H/SiO_2 исследовано влияние характера и локализации неоднородности покрытия на особенности поведения скоростей SH-ПАВ структуры в широком диапазоне частот. Показано влияние расположения однородных ПЭ и ПМ в покрытии на скорости SH-ПАВ. Установлены характерные особенности влияния локализации высокоскоростного включения ПЭ слоя на скорости и поведение различных мод ПАВ при его внешнем и внутреннем расположении в покрытии. Установлены закономерности влияния неоднородности слоев, локализованные у границы их раздела, на SH-ПАВ структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мэттьюз Г. *Фильтры на поверхностных акустических волнах (расчет, технология и применение).* – М.: Радио и связь, 1981. – 472 с.
2. Maugin G. *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*. North Holland, 1988 – 598 p.
3. Al'shits V.I., Darinskii A.N., Lothe J. *On the existence of surface waves in half-infinite anisotropic elastic media with piezoelectric and piezomagnetic properties* // Wave Motion. – 1992. – Vol.16. – Pp.265-283.
4. Aboudi J. *Micromechanical analysis of fully coupled electro-magneto-thermo-elastic multiphase composites* // Smart Materials and Structures. – 2001. – Vol.10. – No.5. – Pp.867-877.
5. Най Дж. *Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц*. – М.: Мир, 1967. – 385 с.
6. Wei W.Y., Liu J.X., Fang D.N. *Existence of shear horizontal surface waves in a magneto-electro-elastic material* // Chin. Phys. Lett. – 2009. – Vol.26. – 104301.
7. Белянкова Т.И., Ворович Е.И., Калинчук В.В. *Особенности распространения SH-волн в биморфной пьезоэлектрической/пьезомагнитной пластине из функционально градиентных материалов* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – №2. – С.14-29.
8. Belyankova T.I., Vorovich E.I., Kalinchuk V.V., Tukodova O.M. *Peculiarities of surface acoustic waves, propagation in structures with functionally graded piezoelectric materials, coating from different ceramics on the basis of PZT* // Journal of Advanced Dielectrics. – 2020. – Vol.10. – No.1-2. – 2060017.
9. URL:https://delpiezo.com/yahoo_site_admin/assets/docs/Material_Specification_Sheet.254613.pdf
10. Matar B.O., Gasmi N., Zhou H., Goueygou M., Talbi A. *Legendre and Laguerre polynomial approach for modeling of wave propagation in layered magneto-electro-elastic media* // J. Acoust. Soc. Am. – 2013. – Vol.133. – 1415.

УДК 539.3
EDN BDCHDE
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.2

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ ПО ПАРАМЕТРАМ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ*

Бочарова О.В.[1], Анджикович И.Е.[2], Турчин А.С.[1,2]

[1]Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону
[2]Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону

Неразрушающий контроль и диагностика композитных материалов, является одним из актуальных направлений современной дефектоскопии. Скрытые неоднородности, возникающие как при производстве, так и при эксплуатации в условиях высоких нагрузок и вибраций могут привести к непоправимым последствиям. Этот факт определяет необходимость использования различных методов неразрушающего контроля [1-3], а также развития новых методов диагностики наличия дефектов в различных объектах. Особый интерес представляют вибрационные методы, основанные на возбуждении низкочастотных колебаний в объектах контроля с последующей регистрацией особенностей поверхностного волнового поля [4]. В работах [5,6] показана высокая чувствительность волнового поля к свойствам и структуре различных видов среды, а также наличию начальных напряжений. Достоинством таких подходов является интегральный характер контроля волнового процесса, позволяющий оценивать общее состояние объекта.

В настоящей работе предлагается подход, цель которого – по отклику поверхности среды на ударное воздействие получить информацию о состоянии среды. В качестве образца рассмотрен двухслойный материал. Первый слой – полоса из пенополистирола, моделирующая заполнитель сэндвич-композита, 2-ой слой – тонкий из плотной лакостеклоткани, моделирует несущий слой сэндвич-композита. Размеры образца – $50 \times 50 \times 1000$ мм.

Для проверки эффективности контроля параметров поверхностного волнового поля использовалась многофункциональная измерительная система. Она включает в себя блок управления возбуждением импульсного сигнала, блок регистрации и блок математической обработки сигнала. Блок возбуждения включает генератор, усилитель мощности и электродинамический вибратор B&K 4810. Подаваемый на вибратор электрический импульс формируется генератором сигналов DG1022 фирмы RIGOL и усиливается усилителем мощности B&K 2706. Блок регистрации включает два акселерометра PCB ICP 352A21 со следующими параметрами: чувствительность – 1.0 мВ/(м/с²), частотный диапазон – 0.3-20000 Гц, размер – $3.6 \times 11.4 \times 6.4$ мм, масса – 0.5 г. Первый датчик располагается непосредственно рядом с источником колебаний и используется в качестве триггера для запуска системы записи сигнала. Аналоговые сигналы усиливаются

* *Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации: в части проведения экспериментальных работ - в рамках государственного задания в области научной деятельности для Южного федерального университета, научный проект № FENW-2023-0012; в части разработки методов и проведения численного анализа - в рамках реализации государственного задания для Южного научного центра Российской академии наук (номер госрегистрации 125011200151-9).*

усилителями ZetLab-440 и поступают на аналогово-цифровой преобразователь (АЦП) L-Card E14-140. Далее сигналы в цифровом виде обрабатываются на компьютере.

Было рассмотрено несколько вариантов модели сэндвич-композита: 1) полоса пенополистирола с равномерно наклеенным на верхней стороне поверхности слоем лакостеклоткани; 2) искусственно созданный в середине образца композита отрыв лакостеклоткани, моделирующий дефект типа расслоение («непроклей»). Расслоения выполнены двух размеров – шириной 18 мм и 36 мм. 3) жесткое включение (стальная пластина шириной 18 мм и 36 мм) в середине образца под слоем лакостеклоткани.

Измерения производились датчиком, расположенным в «дальней» зоне поверхности (после расслоения), на расстоянии 720 мм от левого торца образца. Датчик, расположенный в «дальней» зоне, регистрирует прошедшую через дефект волну. Для каждого варианта модели были проведены серии по четыре измерения с целью подтверждения повторяемости эксперимента.

Для повышения информативности предложенного метода был разработан оригинальный подход [4,7-9], позволяющий улавливать незначительные отличия в волновых полях и, тем самым, идентифицировать наличие неоднородностей в исследуемом объекте. В основе этого подхода лежит построение ортонормированного базиса $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\}$ и разложение сигналов $\{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_M\} \in \mathbf{R}^{N\times M}$ по формуле

$$f_i(t) = a_0 + \sum_{l=1}^{2} a_{il}\xi_l(t), \ \left(f_i(t) \in \mathbf{R}^N\right) \to \left((a_{i1}, a_{i2}) \in \mathbf{R}^2\right). \qquad (1)$$

График функции $f_i(t)$ в соответствии с (1) преобразуется в m-мерный образ $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}) \in \mathbf{R}^m$. Особенностью указанного преобразования является адаптивность ортонормированного базиса $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\}$, зависящего от типа преобразуемых функций $f(t)$. Базис $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\}$ определяется как результат решения комплекса следующих оптимизационных задач.

1. Минимизация среднеквадратической ошибки воспроизведения функции $f(t)$ при фиксированном числе m ортонормированных функций

$$\Delta = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left\| f_i(t) - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j(t) - a_0 \right\|_2 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\sqrt{\sum_{k=1}^{N}\left(f_i(k\Delta t) - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j(k\Delta t) - a_0 \right)^2},$$

где M – объем обучающей выборки.

2. Выполнение условия ортонормированности базисных функций

$$\left(\xi_i, \xi_j\right) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, m}.$$

3. Обеспечение наибольшей разнесенности образов в признаковом пространстве, соответствующих различным типам дефектов

$$d^2\left(A_i, A_l\right) = \frac{1}{M}\sum_{\substack{i,l=1 \\ i\neq j}}^{M} \left\| A_i - A_l \right\|^2.$$

Для простоты графической и физической интерпретации дефектоскопия образцов осуществлялась по образам $A_i = (a_{i1}, a_{i2}) \in \mathbf{R}^2$ в двумерном признаковом пространстве. Как показали исследования, указанная размерность признакового пространства достаточна для проведения качественной диагностики образцов.

Таким образом, предлагаемый подход основан на использовании оптимальных ортогональных разложений сигналов по базису, который специально настраивается на максимально возможную чувствительность к типу, размерам и расположению того или иного дефекта. Данный подход позволяет обеспечить визуализацию контроля наличия дефекта за счет преобразования амплитудно-временного сигнала в определенную точку в двумерном пространстве признаков.

Проведена серия экспериментов по численной обработке сигнала. Исследовалась возможность распознавания наличия неоднородности и ее характеристик по прошедшему волновому полю.

На рис.1 приведены результаты построения признакового диагностического пространства и расположения двумерных образов для трех вариантов модели. Цифрой 1 показаны образы (4 измерения), соответствующие цельному сэндвич-композиту, цифрой 2 – сэндвич-композиту с отрывом лакостеклоткани 18 мм, цифрой 3 – сэндвич-композиту с отрывом лакостеклоткани 36 мм. Результаты этого эксперимента демонстрируют чувствительность метода к размеру расслоения в сэндвич-композите.

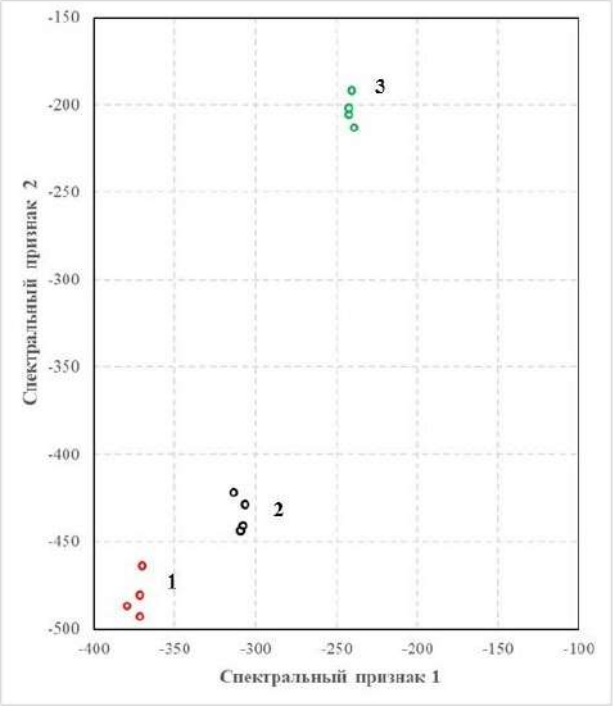


Рис.1. Расположение образов в пространстве распознавания для сэндвич-композитов с расслоениями различного размера.

На рис.2 приведены результаты построения признакового диагностического пространства и расположения двумерных образов для трех вариантов модели. Цифрой 1 показаны образы, соответствующие цельному сэндвич-композиту, цифрой 2–сэндвич-композиту с жестким включением 18 мм под слоем лакостеклоткани, цифрой 3 – сэндвич-композиту с жестким включением 36 мм под слоем лакостеклоткани. Результаты проведенного

эксперимента демонстрируют чувствительность метода к размеру включения в сэндвич-композите.

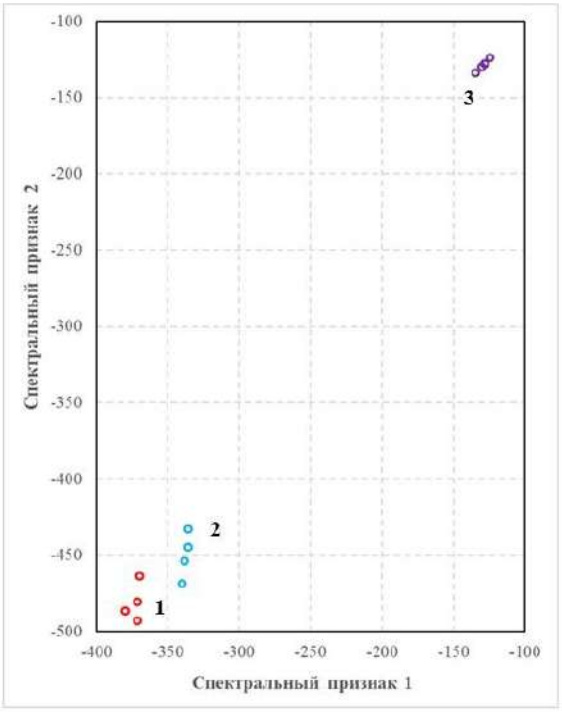


Рис.2. Расположение образов в пространстве распознавания для сэндвич-композитов с жесткими включениями различного размера.

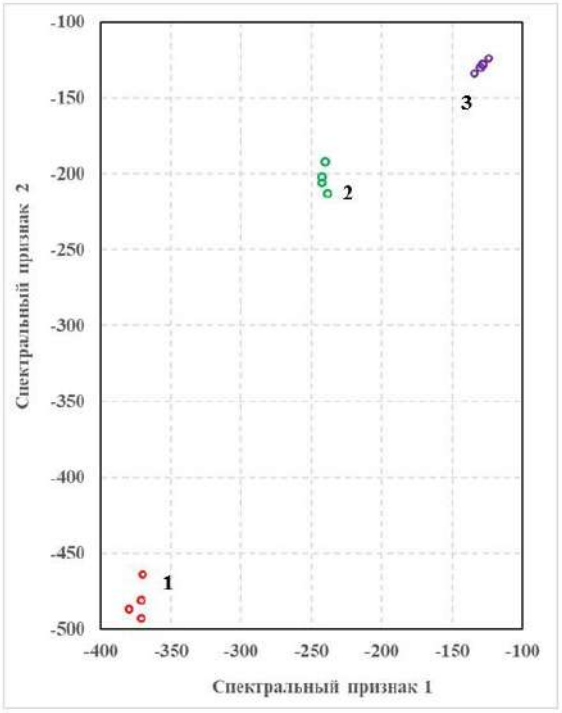


Рис.3. Расположение образов в пространстве распознавания для сэндвич-композитов с различными дефектами.

На рис.3 приведены результаты построения признакового диагностического пространства и расположения двумерных образов для трех вариантов модели. Цифрой 1 показаны образы, соответствующие цельному

сэндвич-композиту, цифрой 2 – сэндвич-композиту с отрывом лакостеклоткани 36 мм, цифрой 3 – сэндвич-композиту с жестким включением 36 мм под слоем лакостеклоткани. Результаты данного эксперимента демонстрируют чувствительность метода к структуре среды.

Таким образом, результаты проведенных экспериментов показали достаточно хорошую чувствительность предложенного метода к определению структуры среды, типа дефекта (расслоение, жесткое включение), а также к определению размера дефекта.

Разработанный подход может стать основой для создания эффективных систем контроля напряженного состояния и ресурсной способности деталей и узлов конструкций, выполненных из композиционных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кершенбаум В.Я. *Неразрушающие методы контроля*. – М.: Б. и., Б. г., 1992, 254 с.
2. Zhao Z. *Review of non-destructive testing methods for defect detection of ceramics* // Ceramics International. – 2021. – Vol.47. – Pp.4389-4397.
3. Boopathy G., Surendar G., Nema A., Anand T.P.P. *Review on non-destructive testing of composite materials in aircraft applications* // International Journal of Mechanical Engineering and Technology. – 2017. – Vol.8. – Pp.1334-1342.
4. Бочарова О.В., Седов А.В., Анджикович И.Е., Калинчук В.В. *Об одном методе идентификации дефектов, основанном на контроле структуры и особенностей поверхностных волновых полей* // Дефектоскопия. – 2016. – Т.52. – №7. – С.21-28.
5. Белянкова Т.И., Калинчук В.В. *Динамика массивного тела, осциллирующего на поверхности предварительно напряженного слоя* // Известия академии наук. Механика твердого тела. – 1998. – №2. – С.89-102.
6. Калинчук В.В., Лысенко И.В., Полякова И.Б. *Об особенностях взаимодействия колеблющегося штампа с неоднородным тяжелым основанием* // Прикладная математика и механика. – 1989. – Т.53. – №2. – С.301-308.
7. Бочарова О.В., Анджикович И.Е., Седов А.В., Калинчук В.В. *Возможности биспектрального подхода к обработке сигнала* // Измерительная техника. – 2017. – №9. – С.62-65.
8. Bocharova O.V., Andzjikovich I.E., Sedov A.V., Kalinchuk V.V. *An effective method of signal processing in problems of low-frequency defectoscopy* // ScienceDirect. Procedia Engineering. – 2017. – Vol.199. – Pp.2043-2039.
9. Bocharova O.V., Andzhikovich I.E., Sedov A.V., Kalinchuk V.V. *Low frequency method for monitoring the state of structural heterogeneous objects* // Procedia Structural Integrity. – 2021. – Vol.32. – Pp.299-305.

УДК 539.24
EDN BLFPOY
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.3

АТОМНО–СИЛОВАЯ МИКРОСКОПИЯ ЭЛАСТОМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ С НАПОЛНИТЕЛЕМ ТЕХНИЧЕСКИЙ УГЛЕРОД

Валиев Х.Х.[1], Корнев Ю.В.[1], Молчанов С.П.[2], Гилязова Р.Ф.[1], Власов А.Н.[1], Карнет Ю.Н.[1]

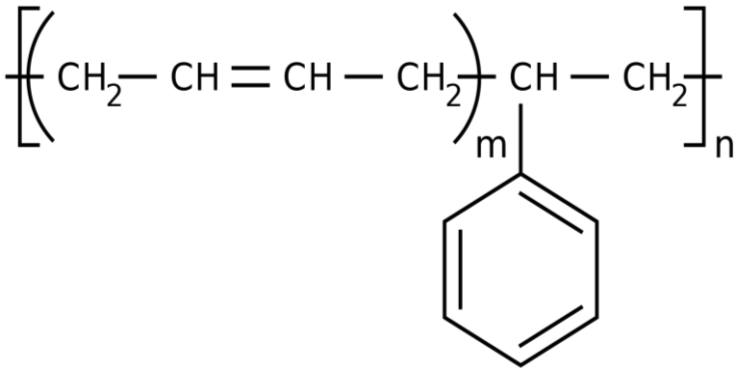
[1]ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия
[2]ФГБУН Институт нефтехимического синтеза им. А.В. Топчиева РАН, г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы существенно изменились приоритетные требования, предъявляемые к автомобильным шинам. Возросло значение безопасности езды, экономии топлива, экологической безопасности. Проблемы чистоты воздуха, воды и сохранения природы стали насущными проблемами. Особенно актуально это для жителей больших городов и мегаполисов. Применительно к шинам на первое место выдвинулись такие требования как высокие сцепные свойства, и, в частности, высокое сцепление с мокрой дорогой, низкие потери на качение, благоприятные экологические характеристики [1,2]. Одним из каучуков, обеспечивающих необходимые требования, является «экологически чистый» бутадиен-стирольный каучук растворной полимеризации со средним и высоким содержанием винильных звеньев. По сравнению с эмульсионным бутадиен-стирольным каучуком каучук растворной полимеризации ДССК обеспечивает более низкий гистерезис, более высокий модуль и когезионную прочность. Известно об оптимальном использовании фирмой «Мишлен» (Франция) метода получения растворного бутадиен-стирольного каучука и применение осажденного кремнекислотного наполнителя. Это позволило добиться значительного уменьшения сопротивления качению при одновременном улучшении сопротивления скольжению по мокрой дороге при тех же параметрах истирания, и снижение расхода топлива на 5-7%. В результате вместо классических полимеров для изготовления протектора перспективно использование растворных бутадиен-стирольных каучуков со специальными свойствами взамен эмульсионных. Большой интерес представляет исследование возможности синтеза композитов ДССК при использовании в качестве наполнителя вместо кремнекислотного наполнителя технического углерода [3-6] с последующим изучением результирующих физико-механических свойств, полученных композитов.

1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В данной работе синтезированы и исследованы эластомерные композиты растворной полимеризации на основе дивинил-стирольного синтетического каучука ДССК-628, наполненного техническим углеродом N234. Каучук ДССК-628 (ПАО Нижнекамск, Россия) – продукт сополимеризации бутадиена-1,3 и стирола в растворе в присутствии литийорганических катализаторов.



Формула ДССК: [(C8H8) m (C4H6) n] x. Технические условия: ГОСТ ТУ 20.17.10-213-05766801-2019. Массовая доля 1,2-звеньев (на бутадиеновую часть цепи), %, в пределах 54-64. Массовая доля связанного стирола, %, в пределах 24-30. Высокодисперсный усиливающий технический углерод N 234 (ООО «Омсктехуглерод») ГОСТ 25699.13 печной, активный, получаемый при термоокислительном разложении жидкого углеводородного сырья, с высоким показателем дисперсности, обладает повышенной структурностью, и обычно обеспечивает высокое сопротивление истиранию и высокую степень усиления различных каучуков. N 234 применяется в протекторах легковых шин с высокими эксплуатационными характеристиками, а также в высококачественных резинотехнических изделиях и конвейерных лентах. Синтез композитов проводился на лабораторном смесителе Haake Polylab. Были синтезированы композиты ТУ-15 с концентрацией частиц наполнителя 70.9 масс частей на 100 масс частей каучука. Структура поверхности композитов изучалась на атомно-силовом микроскопе АСМ EasyScan (Nanosurf, Швейцария), работавшем в контактном режиме на воздухе при комнатной температуре [7] с дополнительным использованием моды модуляции силы. При этом применялась защита АСМ от внешних помех с помощью динамического антивибрационного столика TS-150 (Fabrik am Weiher, Швейцария). Снимки АСМ обрабатывались с использованием программных алгоритмов SPIP (Image Metrology, Дания). В соответствии с ГОСТ 270-75 после вулканизации резиновых смесей из специальных заготовок (квадратных пластин толщиной порядка 2 мм) были вырублены образцы в виде лопаток по 5 шт. Образцы испытывали на разрывной машине модели UTS-10 (Zwick, Германия). Скорость деформирования 500 мм/мин.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис.1-2 представлены АСМ снимки поверхности композита ТУ-15. Обработка полученных снимков проводилась с помощью алгоритмов программы SPIP. Светлые области – агломераты наполнителя – на снимках топографии и на снимках материального контраста размерами порядка 100 нм - 4 мкм визуализированы на фоне структуры поверхности полимерной матрицы ДССК-628. Распределение расстояний между частицами микро- и нанонаполнителя находится в диапазоне 4-25 мкм. Для полученных образцов композитов определялись также упруго-прочностные свойства (Таблица 1).

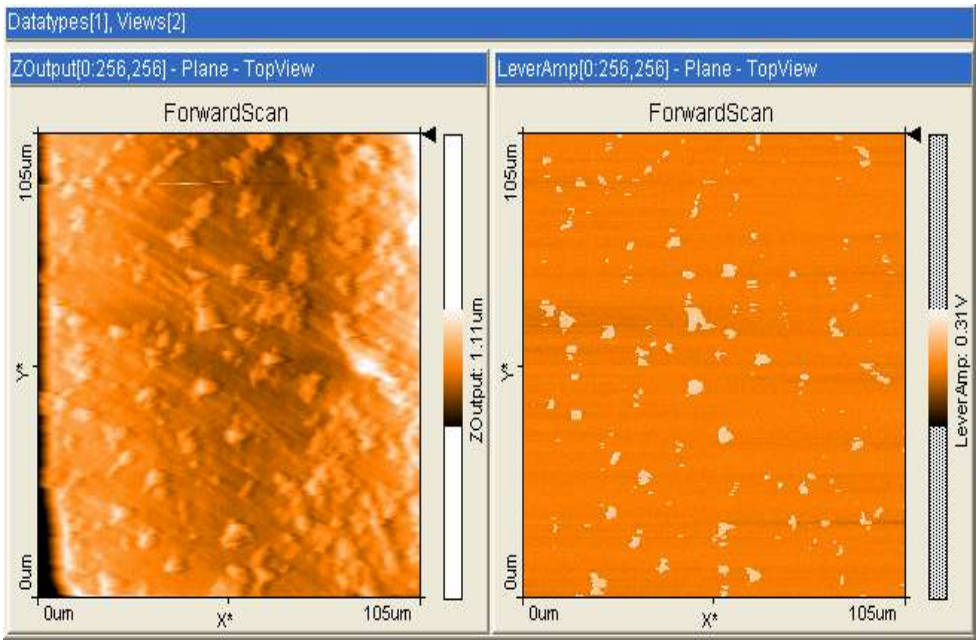


Рис.1. АСМ изображение структуры поверхности эластомерного композита ТУ 15 в режиме модуляции силы: слева – топография, справа – материальный контраст. Скан 105×105 мкм.

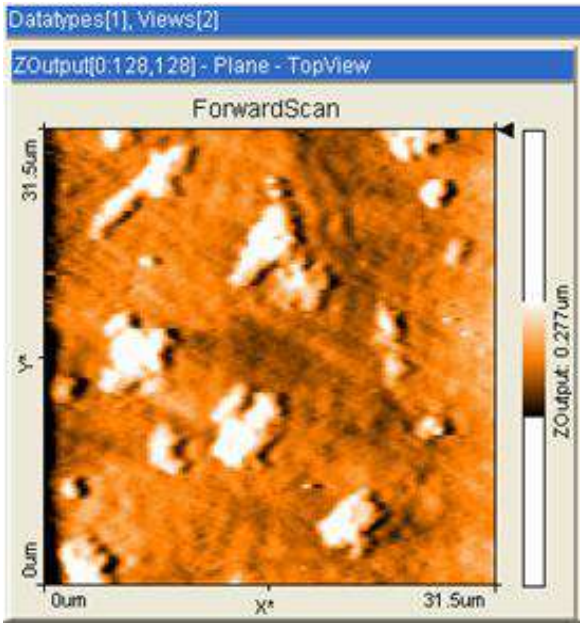


Рис.2. АСМ изображение топографии структуры поверхности эластомерного композита ТУ 15 в режиме модуляции силы. Скан 31.5×31.5 мкм.

Таблица 1.

Упругопрочностные свойства исследуемых эластомерных композитов ТУ-15.

Образец	ТУ-15	
Показатели	Значение	Погрешность, %
Напряжение при удлинении 200%, МПа	11,17	0,38
Условная прочность при растяжении, МПа	14,35	3,94
Относительное удлинение, %	249,21	3,94

Из полученных экспериментальных данных следует вывод, что с добавлением в каучук технического углерода растет условная прочность при растяжении, которое для композита ТУ-15 составляет 14,35 Мпа, что почти в 4 раза превышает аналогичный показатель для не наполненного каучука. То же отмечается для напряжений при удлинении.

Качественное распределение частиц влияет на механические свойства полимерных композитов с дисперсионным наполнителем. Адсорбционным связыванием сегментов каучука технический углерод формирует полифункциональные физические узлы в виде коллоидных частиц, которые при вулканизации превращаются в химические узлы сетки, способные изменять её структуру и упрочнять резину при деформационных воздействиях. Важную роль в усилении играет полимерная природа и высокая адсорбционная и электронообменная активность технического углерода. Одним из перспективных направлений дальнейшего повышения усиления дивинил-стирольного синтетического каучука ДССК-628, наполненного техническим углеродом N 234 заключается в создании его модифицированных типов.

ВЫВОДЫ

Синтезированы новые композиты ДССК-628 с использованием в качестве наполнителя технического углерода N 234. С помощью АСМ установлены размеры, межчастичные расстояния и однородное распределение наполнителя в матрице эластомера. Определены упруго-прочностные свойства композитов на разрывной машине модели UTS-10 (Zwick, Германия). Полученные результаты важны для корреляции результирующих физико-механических свойств полученных композитов с особенностями распределения наполнителя в каучуке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яновский Ю.Г. *Наномеханика и прочность композиционных материалов*. – М.: ИПРИМ РАН, 2008. – 179 с.
2. Donnet Jean-Baptiste. *Black and white fillers and tire compound* // Rubber Chem. Technol., Rubber reviews. – 1998. – Vol.71. – Pp.323-334.
3. Корнев Ю.В., Валиев Х.Х., Власов А.Н., Карнет Ю.Н., Семенов Н.А. *Эластомерные композиты, упрочненные высокодисперсными минеральными наполнителями на основе диоксида кремния и углерода* / 12-я Всероссийская научная конференция с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред». Сборник трудов. – М.: СамПолиграфист, 2022. – С.151-158.
4. Корнев Ю.В., Семенов П.Е., Семенов Н.А., Соляев Ю.О., Валиев Х.Х. *Механические свойства эластомерных композитов, упрочненных частицами минеральных наполнителей на основе диоксида кремния и углерода* / XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник материалов. В 4-х томах. – Москва, 2019. – С.1433-1435.
5. Garishin O.K., Shadrin V.V., Kornev Yu.V. *Mechanical studies of rubber micro and nanocomposites promising for the tire industry. Uniaxial and biaxial tests* // Materials Physics and Mechanics. – 2019. – Vol.42. – Pp.445-454.

6. Kornev Yu.V., Semenov N.A., Vlasov A.N., Valiev Kh.Kh. *Reinforcing effects in elastomeric composites, filled with particles of mineral fillers, based on silicon dioxide and carbon* // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol.1942. – 012031.
7. Valiev H.H., Cherepanov V.M., Karnet Yu.N., Minaev A.Ya., Stepanov G.V. *Atomic force microscopy and Mössbauer spectroscopy of magnetically active silicone elastomers* // IOP Conf. Series Materials: Science and Engineering. – 2020. – Vol.862. – 022062.

УДК 539.422.52
EDN HVVAMT
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.4

РАСЧЁТ ВОЗДЕЙСТВИЯ ЛОПАТКИ ДВИГАТЕЛЯ НА ПАНЕЛЬ ИЗ ПОЛИМЕРНОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА МЕТОДОМ ГИДРОДИНАМИКИ СГЛАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Вестяк В.А., Мартиросов М.И., Занина Э.А.

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Полимерные композиционные материалы (ПКМ) – это слоистые композиты, в которых углеродные волокна объединяются полимерным связующим. Они отличаются высокой удельной прочностью и жёсткостью, износостойкостью, хорошим сопротивлением к воздействию агрессивных сред, высокой технологичностью, а также стойкостью к циклическим нагрузкам. ПКМ широко используются в современной авиационной технике. Из них изготавливают панели фюзеляжа, поверхности крыла и хвостового оперения, лопатки турбин и другие элементы авиаконструкций. Такие конструкции особенно подвержены ударным воздействиям из плоскости. Работы по подтверждению соответствия материалов данного типа сертификационным требованиям не могут быть ограничены только натурными испытаниями, так как существует большое количество форм разрушения, а также бесконечное число комбинаций структур из ПКМ. Весьма актуальной является разработка методики конечно-элементного моделирования данного типа материалов для расчёта ударных повреждений от различных источников.

В данной работе проводится расчет ударного воздействия оторвавшейся титановой лопатки авиационного двигателя по панели из ПКМ (конструкционный углепластик) с применением программного комплекса LS-DYNA (Ansys inc.). Ранее в работах [1], [2] и [3] была представлена методика моделирования панелей из ПКМ. Для моделирования монослоёв композитного пакета там использовалась модель материала «221_MAT_ORTHOTROPIC_SIMPLIFIED_DAMAGE», а для межслоевого взаимодействия – «138_MAT_COHESIVE_MIXED_ MODE». Повреждения монослоев оценивались по отношению жёсткости поврежденного элемента к жёсткости неповреждённого в соответствующем направлении – коэффициенту деградации. В данной работе используется тот же метод оценки повреждений. Лопатка моделируется с помощью метода гидродинамики сглаженных частиц (SPH) [4].

1. МЕТОД SPH

Метод SPH – это бессеточный лагранжев метод, использующий интегральное представление в качестве метода аппроксимации [5]. Метод разработан Джингольдом, Монаганом и Люси в 1977 г. для астрофизических задач, а затем для потоков жидкости [6]. При конечно-элементном анализе область дискретизируется на элементы, в то время как в SPH она разбивается на частицы. Вместо сетки и функций формы используется функция ядра. Значение функции

$f(x)$ в точке x представляется интегральной формой произведения функции на весовой коэффициент, $W(x-y,h)$ – функция ядра

$$\Pi^h f(x) = \int f(y) \cdot W(x-y)\, dy. \quad (1)$$

Данная функция может быть дискретизирована для N дискретных частиц

$$\Pi^h f(x_i) = \sum_{j=1}^{N} w_j \cdot f(x_j) \cdot W(x_i - x_j, h), \quad (2)$$

где W – функция ядра, $w_j = \dfrac{m_j}{\rho_j}$ – «вес» частицы, x_i – координата *i*-й частицы. Функция ядра, также называемая функцией сглаживания, играет важную роль в приближениях SPH, поскольку она определяет точность представления функции и эффективность вычислений. Функция ядра не только определяет шаблон аппроксимации функции, но и определяет размер области сглаживания. Существуют различные функции ядра, такие как гауссовские и полиномиальные. Наиболее известной из них, доступной в LS-DYNA, является кубический B-сплайн

$$\begin{aligned} W(r,h) &= \frac{C}{h^d} \cdot \left(1 - \frac{3}{2}u^2 + \frac{3}{4}u^3\right) \quad \text{для} \quad |u| = \frac{r}{h} \le 1, \\ W(r,h) &= \frac{C}{h^d} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2-u)^3 \quad \text{для} \quad 1 \le |u| = \frac{r}{h} \le 2, \\ W(r,h) &= 0 \quad \text{для} \quad 2 \le |u| = \frac{r}{h}, \end{aligned} \quad (3)$$

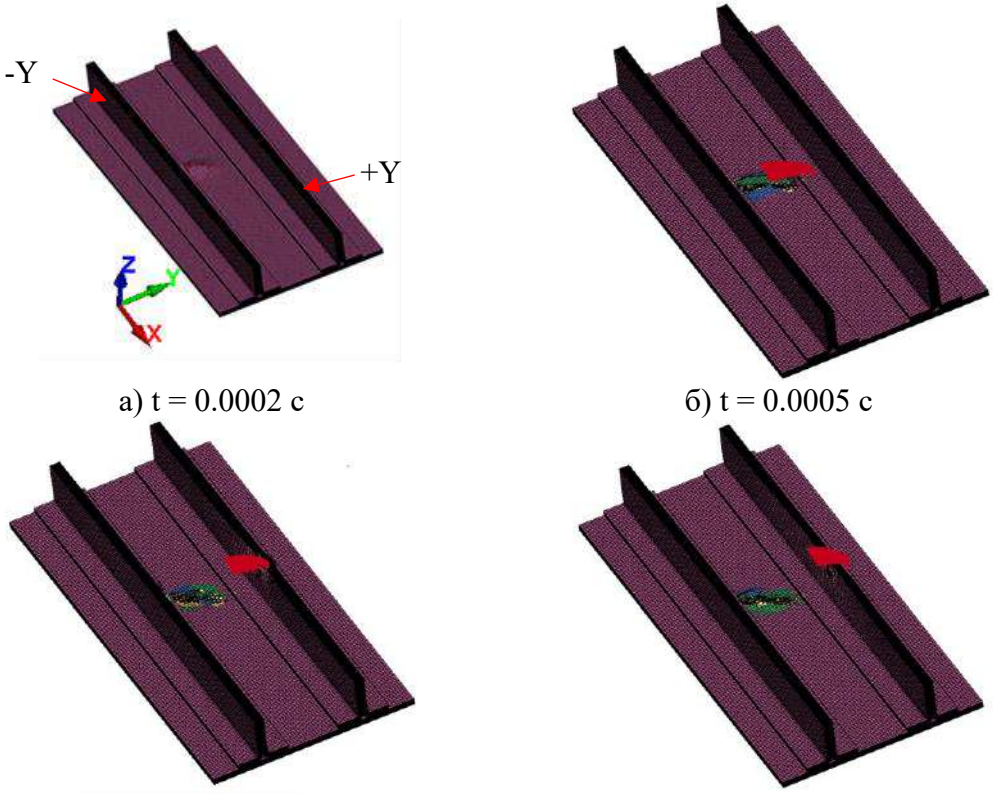
где d – число пространственных измерений (1, 2 или 3), h – длина сглаживания, которая измеряется во времени и пространстве, $r = x_i - x_j$ – расстояние между частицами i и j, C – константа нормировки, зависящая от числа пространственных измерений (для $d = 3$ $C = \dfrac{1}{\pi}$) [5].

Достоинством бессеточных методов является возможность решать задачи, связанные с большими деформациями без необходимости удаления частиц. Это позволяет сохранять массу, импульс и энергию внутри системы.

SPH имеет ряд недостатков, среди которых неустойчивость при растяжении и непоследовательность частиц. Неустойчивость при растяжении относится к тенденции частиц к локальному скоплению, что приводит к нереалистичному разрушению материала. Эта проблема возникает из-за эйлеровой характеристики метода SPH, где область поддержки интересующей частицы имеет определённые границы. Соседние частицы обновляются на каждом шаге расчёта, что позволяет им входить и выходить из этой границы. Следовательно, метод SPH проявляет эйлеровы характеристики, что приводит к неустойчивости при растяжении. Чтобы решить эту проблему, формулировка полного лагранжиана вычисляет функцию ядра на основе начальной конфигурации частиц. Проблема неустойчивости при растяжении решается гарантируя, что частица взаимодействует с теми же соседними частицами на протяжении всего анализа. Однако, этот метод испытывает трудности с обработкой больших перемещений.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На рис.1 показано взаимодействие фрагмента лопатки со стрингерной панелью, выполненной из ПКМ.

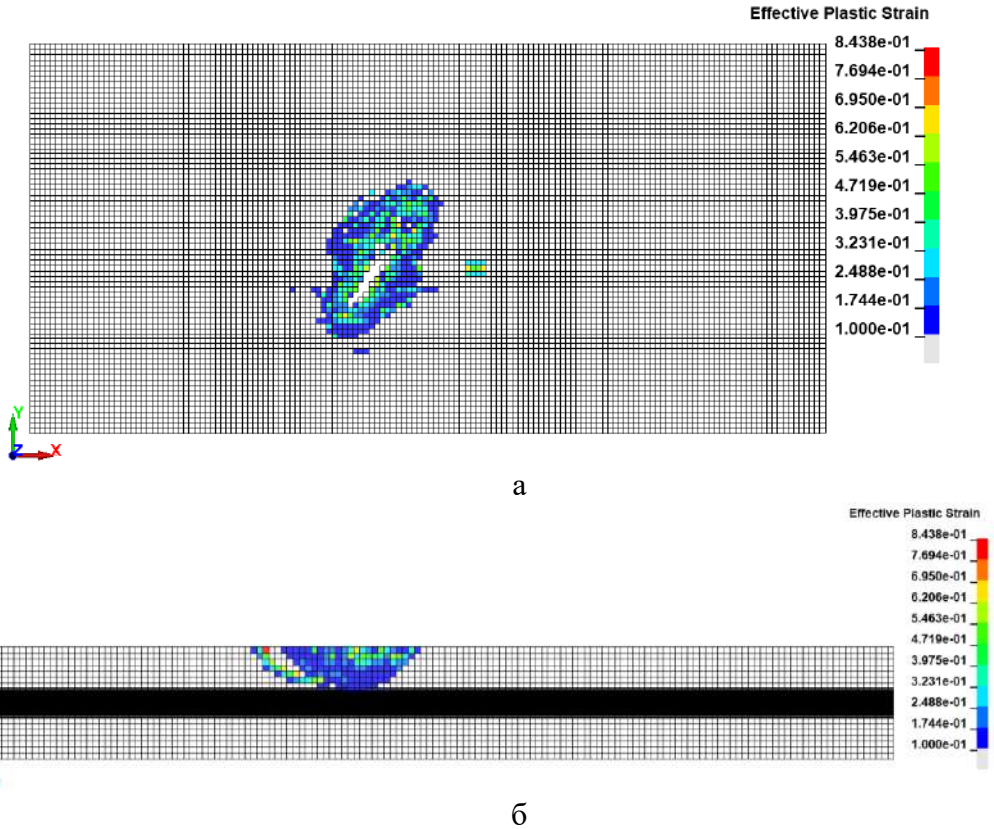


а) t = 0.0002 с б) t = 0.0005 с

в) t = 0.0008 с г) t = 0.001 с

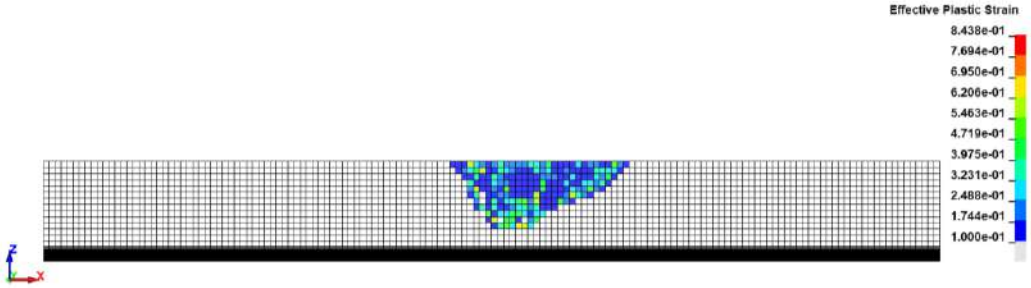
Рис.1. Взаимодействие фрагмента лопатки со стрингерной панелью в разные моменты времени.

На рис.2 показаны пластические деформации панели после воздействия лопатки.



а

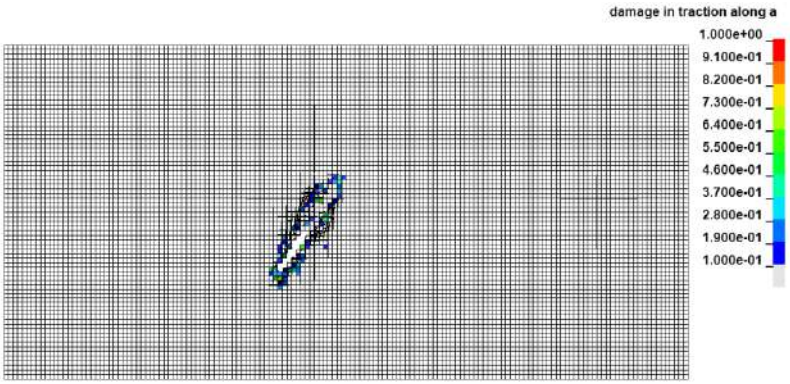
б



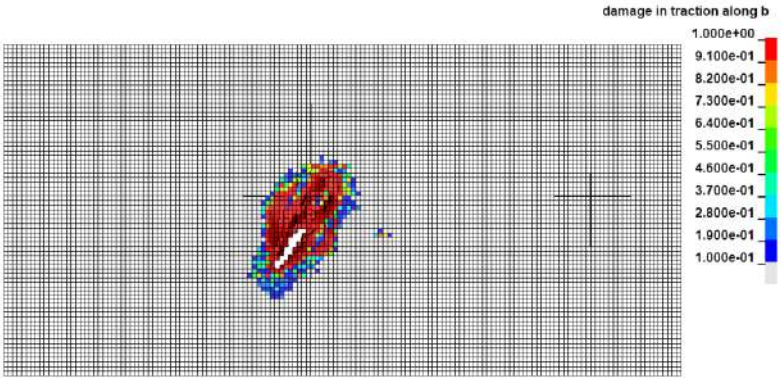
в

Рис.2. Пластические деформации: а) панели; б) стрингера -Y; в) стрингера +Y.

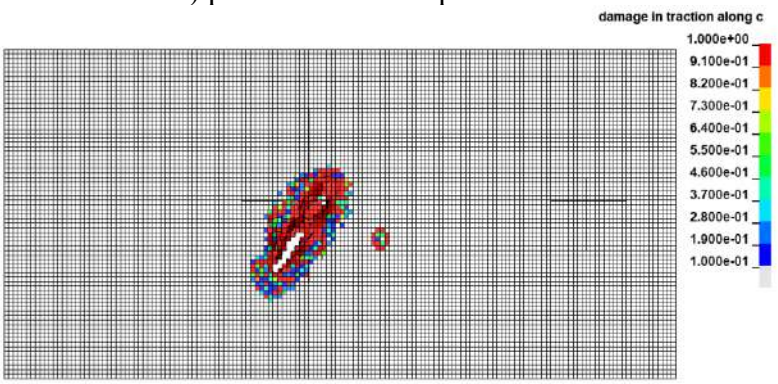
На рис.3 показаны коэффициенты деградации панели после воздействия лопатки.



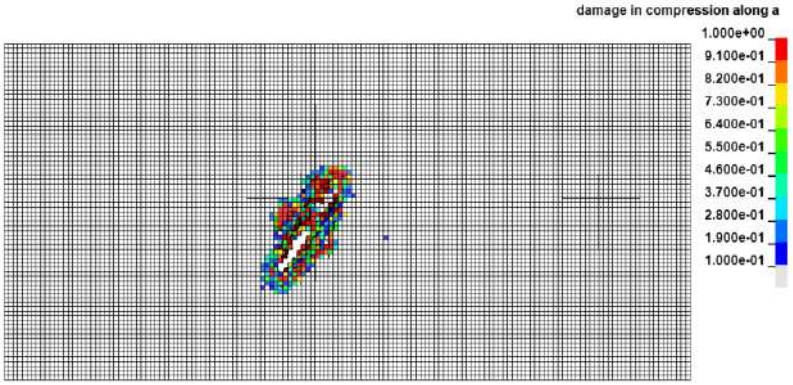
а) растяжение вдоль волокон



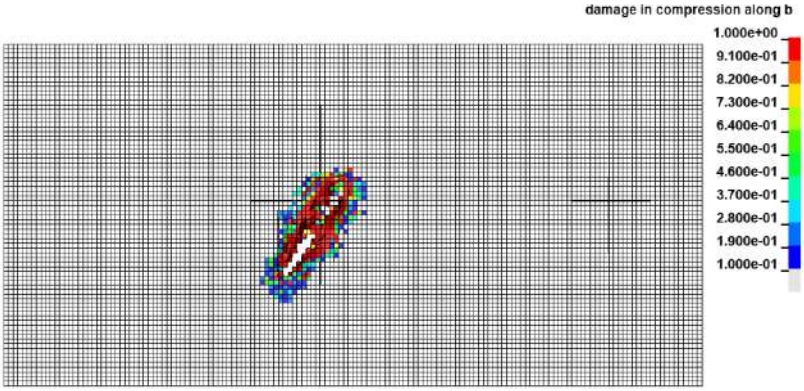
б) растяжение поперек волокон



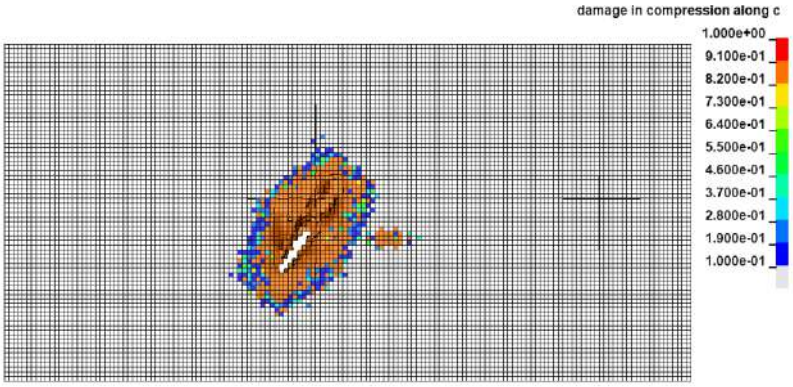
в) растяжение из плоскости монослоя



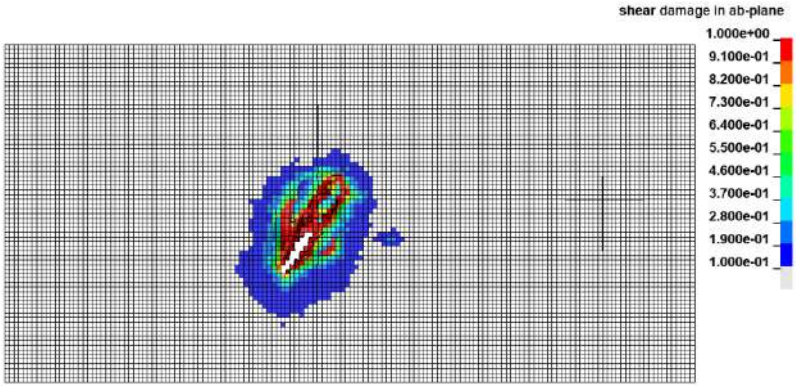
г) сжатие вдоль волокон



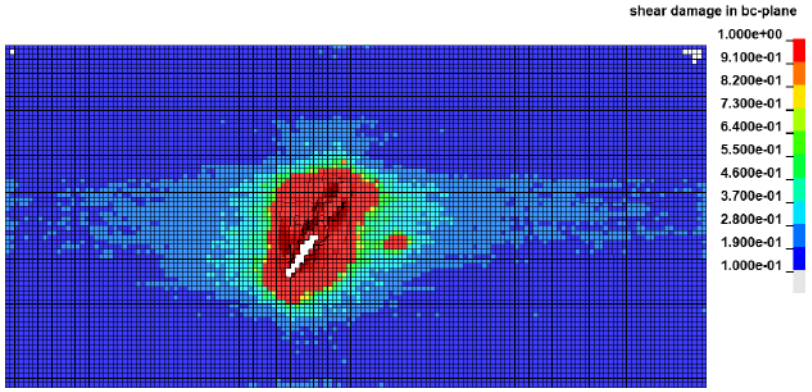
д) сжатие поперек волокон



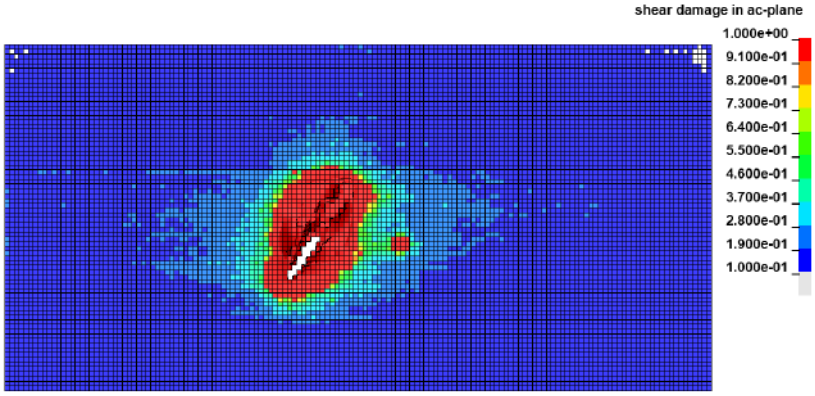
е) сжатие из плоскости монослоя



ж) сдвиг 12



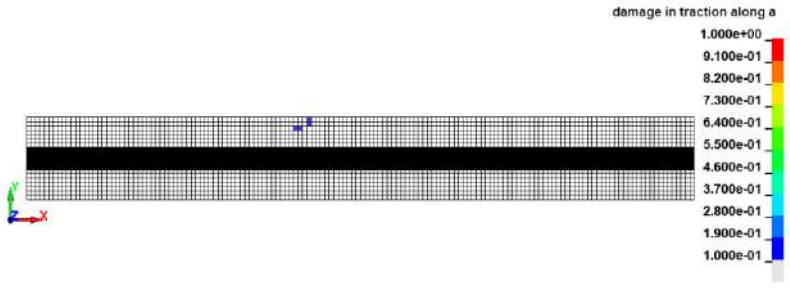
з) сдвиг 23



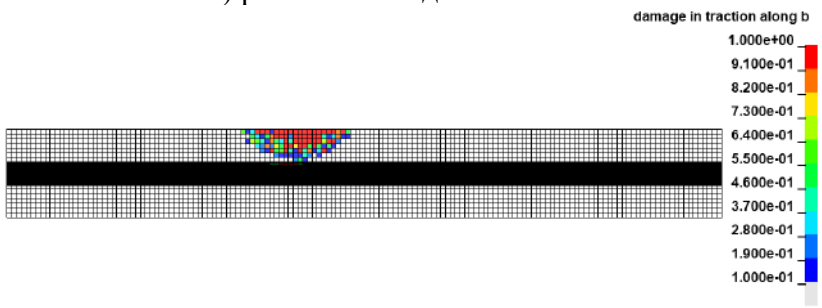
и) сдвиг 31

Рис.3. Коэффициенты деградации панели после воздействия лопатки.

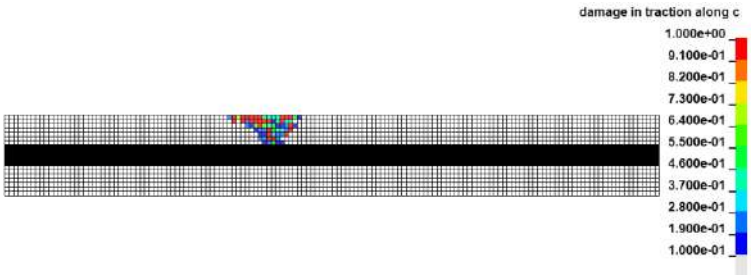
На рис.4 представлены коэффициенты деградации стрингера –Y после воздействия лопатки.



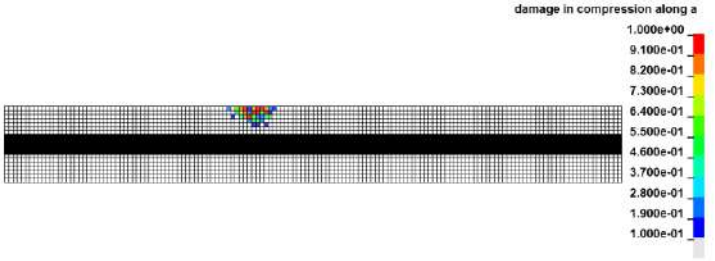
а) растяжение вдоль волокон



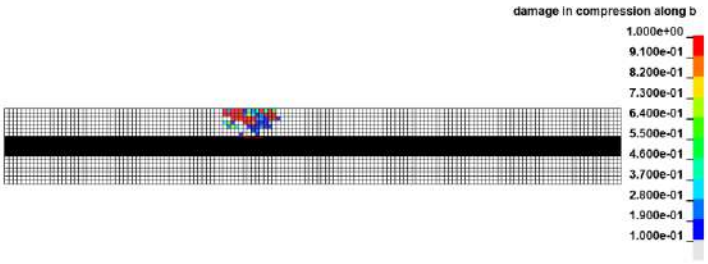
б) растяжение поперек волокон



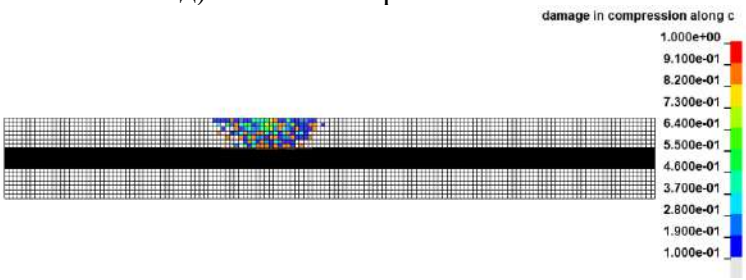
в) растяжение из плоскости монослоя



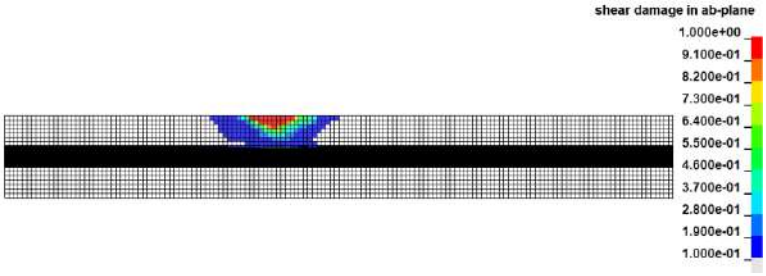
г) сжатие вдоль волокон



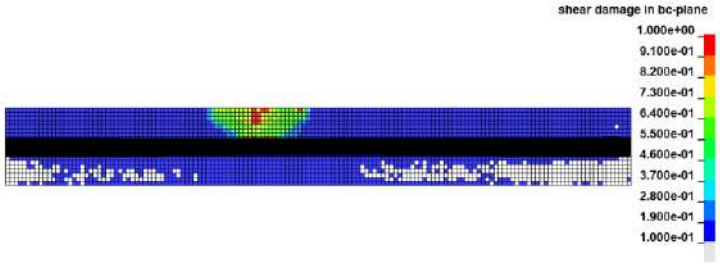
д) сжатие поперек волокон



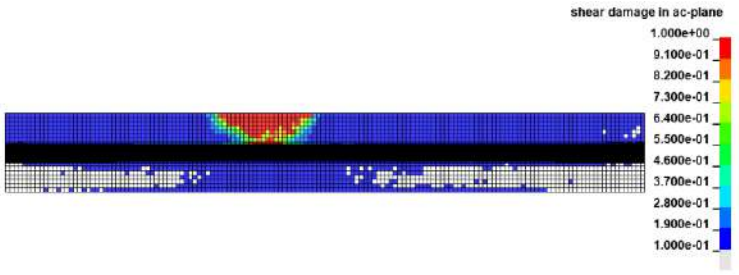
е) сжатие из плоскости монослоя



ж) сдвиг 12



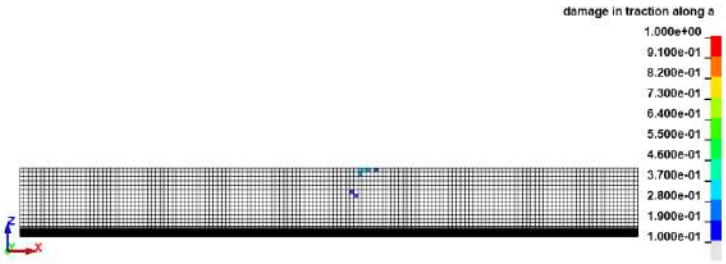
з) сдвиг 23



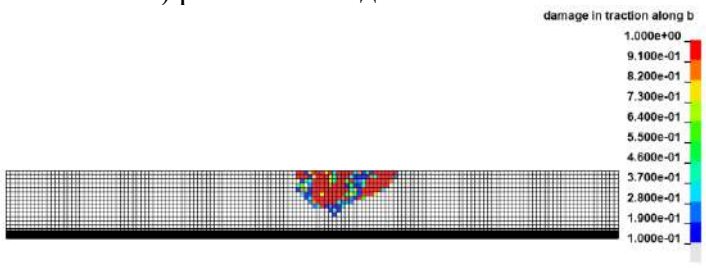
и) сдвиг 31

Рис.4. Коэффициенты деградации стрингера –Y после воздействия лопатки.

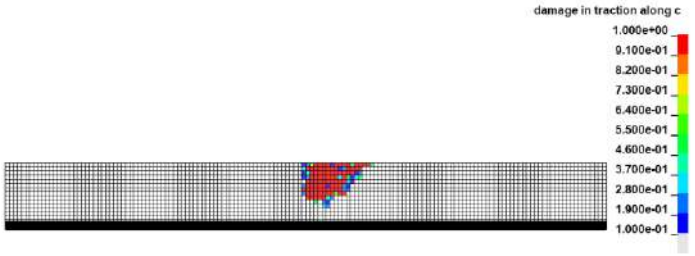
На рис.5 показаны коэффициенты деградации стрингера +Y после воздействия лопатки.



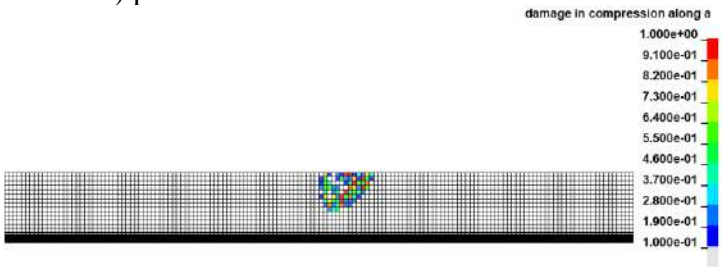
а) растяжение вдоль волокон



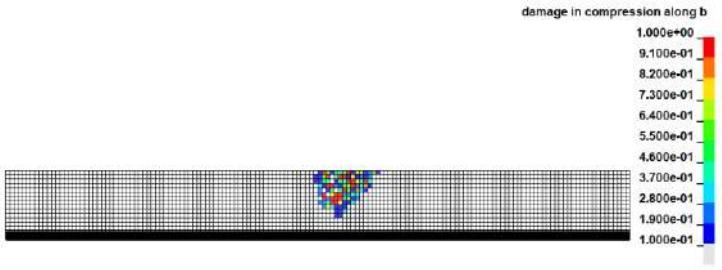
б) растяжение поперек волокон



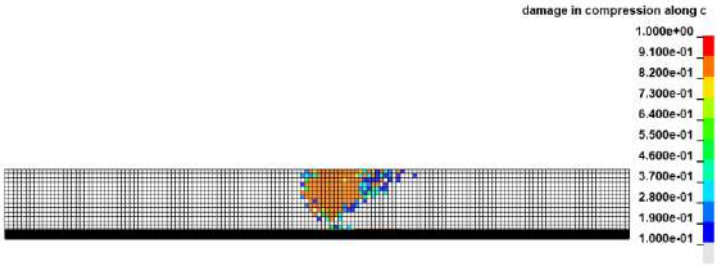
в) растяжение из плоскости монослоя



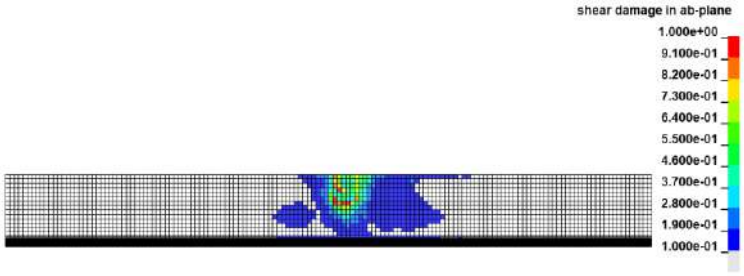
г) сжатие вдоль волокон



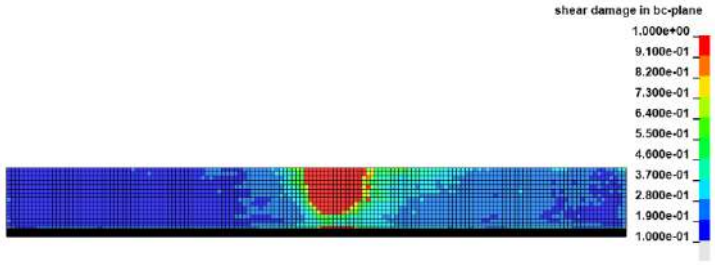
д) сжатие поперек волокон



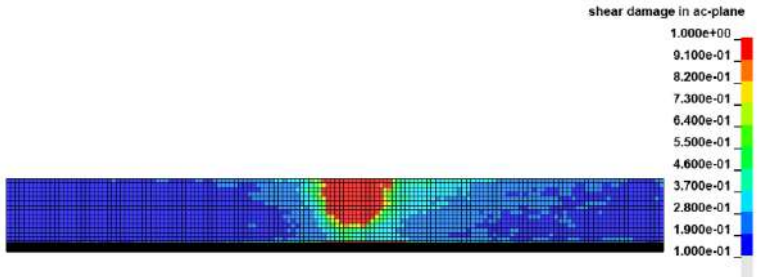
е) сжатие из плоскости монослоя



ж) сдвиг 12



з) сдвиг 23



и) сдвиг 31

Рис.5. Коэффициенты деградации стрингера +Y после воздействия лопатки.

На рис.6 представлена зависимость кинетической энергии лопатки от времени.

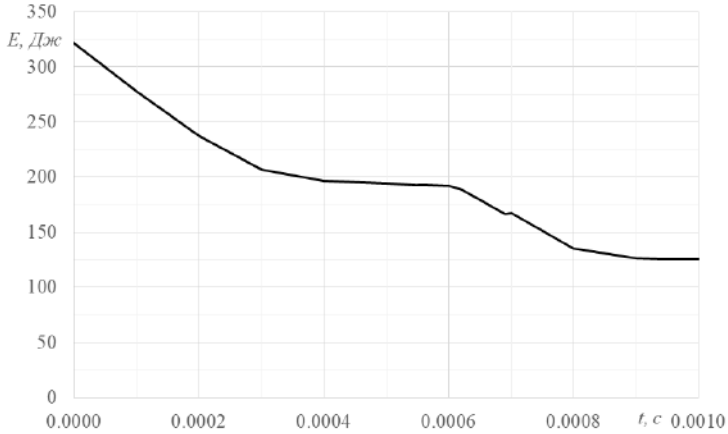


Рис.6. Кинетическая энергия лопатки.

ВЫВОДЫ

Рассмотрено ударное воздействие титановой лопатки авиационного двигателя, движущейся со скоростью 220 м/с, на стрингерную панель из ПКМ с применением метода гидродинамики сглаженных частиц (SPH). Получены зависимости кинетической энергии лопатки от времени, а также пластические деформации панели после удара лопаткой по панели. В графической форме показано взаимодействие стрингерной панели и лопатки. Повреждения в панели оценивались по коэффициентам деградации монослоёв.

ЛИТЕРАТУРА

1. Медведский А.Л., Мартиросов М.И., Хомченко А.В., Занина Э.А. *Численное исследование ударного взаимодействия фрагментов пневматика авиационной шины с панелью из углепластика* // Труды МАИ. – 2024. – №137.
2. Медведский А.Л., Мартиросов М.И., Хомченко А.В., Занина Э.А. *Численный анализ воздействия града на панель из углепластика* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2024. – Т.30. – №3. – С.387-399.
3. Вестяк В.А., Занина Э.А., Мартиросов М.И., Хомченко А.В. *Моделирование множественных повреждений высокой плотности при ударном взаимодействии с поверхностью композитного пакета* / 14-я Всероссийская научная конференция «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского». Сборник трудов – М.: ООО «СамПолиграфист», 2024. – С.48-58.
4. Roashe P.J. *Computational Fluid Dynamics*. – Albuquerque: Hermosa Pub, 1975. – 446 p.
5. Giannaros E., Kotzakolios A., Kostopoulos V., Campoli G. *Hypervelocity impact response of CFRP laminates using smoothed particle hydrodynamics method: Implementation and validation* // International Journal of Impact Engineering. – 2018. – Vol.123. – Pp.56-69.
6. Liu G.R., Liu M.B. *Smoothed Particle Hydrodynamics. A meshfree particle methods*. – World Scientific Publishing Co.Ltd, 2003. – 472 p.

УДК 621.315.17
EDN IHVTEG
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.5

СОВРЕМЕННЫЕ УСТРОЙСТВА ОГРАНИЧЕНИЯ АМПЛИТУД СУБКОЛЕБАНИЙ НА ВОЗДУШНЫХ ЛИНИЯХ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ СВЕРХВЫСОКОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Виноградов А.А.[1], Данилин А.Н.[1], Киселев А.В.[2], Платонова И.А.[3], Котухов М.А.[4], Привалов А.Н.[5]

[1]ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия
[2]ООО «НИК», г. Жуковский, Россия
[3]ФГБОУ ВО «Московский энергетический университет (национальный исследовательский институт)», г. Москва, Россия
[4]ООО «Промтайм-Энерго», г. Москва, Россия
[5]ООО СЦ «Энергомаш», г. Москва, Россия

Настоящая статья посвящена проблеме защиты проводов воздушных линий сверхвысокого напряжения 330 кВ и выше (ВЛ СВН) от субколебаний. Дано краткое описание причин возникновения и механизма развития колебаний проводов в подпролетах между распорками. Рассмотрена хронология развития конструкций внутрифазных дистанционных распорок и особенности их работы, а также математические методы исследований. Изложены новые подходы к выбору механизма рассеяния энергии колебаний демпферными узлами распорки. Представлены некоторые результаты стендовых испытаний одного из перспективных вариантов конструктивного исполнения современной распорки-гасителя. Показана необходимость доработки конструкций демпферных узлов распорок-гасителей для повышения их надежности и эффективности.

ВВЕДЕНИЕ

Начиная со второй половины XX века, в передовых странах мира развернулось активное строительство воздушных линий (ВЛ). Рост их протяженности и необходимость увеличения передаваемых мощностей привели к повсеместному освоению и сооружению ВЛ все более высокого, а затем и сверхвысокого напряжения (далее СВН), уже требующего расщепления фазных проводов на составляющие по условию минимизации потерь на корону [1].

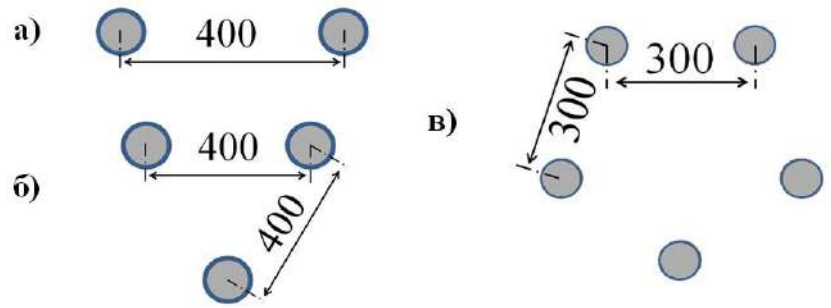


Рис.1. Геометрия расщепленных фаз, применяемых в России: а) ВЛ 330 кВ; б) ВЛ 500 кВ; в) ВЛ 750 кВ. Показаны расстояния в мм между осями проводов – составляющих фазы. Не в масштабе.

Для сохранения проектной геометрии расщепленных фаз (рис.1) и предотвращения схлестывания проводов, внутри каждого пролета необходимо устанавливать *внутрифазные дистанционные распорки*. Они делят протяженный пролет между опорами ВЛ на несколько меньших участков, которые получили название ***подпролеты*** (рис.2).



Рис.2. Воздушная линия электропередачи сверхвысокого напряжения 500..525 кВ. Расщепленные фазы содержат по три провода в пучке. Дистанционные распорки установлены вдоль пролета с интервалами (подпролетами) между ними.

1. АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕСТАБИЛЬНОСТЬ РАСЩЕПЛЕННЫХ ПРОВОДОВ

По мере расширения сети воздушных линий СВН и накопления опыта эксплуатации, стали проявляться и некоторые негативные явления, связанные с влиянием окружающей среды на эксплуатируемое оборудование. Одним из важных факторов стало возникновение и длительное существование вызываемых ветром колебаний расщепленных проводов, появлявшихся при ветре, но и полном отсутствии каких-либо осадков, снега и льда, чего не было никогда на линиях с одиночными проводами. По мере накопления информации об этих колебаниях, стало ясно, что такую нестабильность проявляют сами провода расщепленной фазы, а именно те, которые оказываются расположенными в ветровой тени проводов наветренных. Колебания этого типа достаточно хорошо изучены в авиации; они имеют общее наименование как колебания в спутной струе. Применительно к воздушным линиям электропередачи и конкретно к расщепленным проводам ВЛ СВН, такие движения проводов получили название *субколебания* (от английского «subspan oscillations», колебания в подпролетах). На рис.3 они показаны на примере четырехпроводной расщепленной фазы [2]. Это вытянутые горизонтально эллипсы, наиболее распространенная форма движения поводов, вовлеченных в процесс субколебаний.

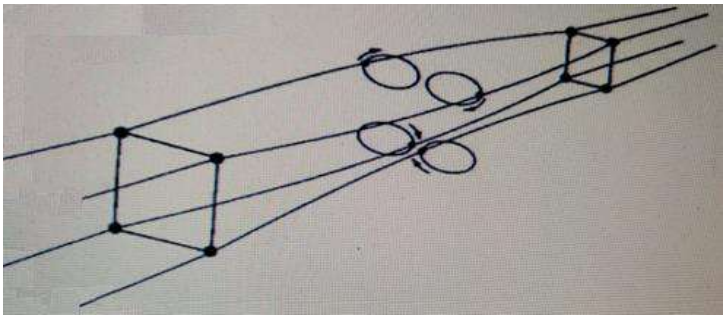


Рис.3. Субколебания.

1.1. Аэродинамический след.

Уже достаточно давно, в 1960-1970-е годы, энергетикам стало понятно, что причиной субколебаний является шлейф турбулентного движения воздуха, возникающий при ветре за первым по потоку проводом. Наглядное представление о распределенном в пространстве силовом поле, существующем за наветренным проводом, дает относительно простая схема рис.4 (коэффициенты C_D, C_L суть быстропеременные величины, усредняемые по времени) [2].

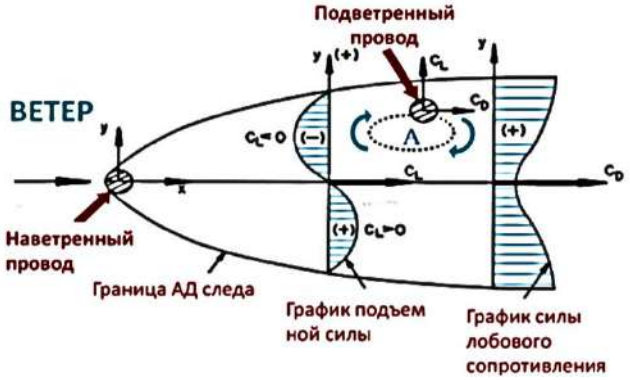


Рис.4. Аэродинамический след и поле сил, возникающих за наветренным проводом. Показанный на схеме эллипс «А» со стрелками дает представление о положительной энергии, извлекаемой подветренным проводом из зоны турбулентности.

Картина воздействующих на подветренный провод сил довольно упрощенная, но она позволила перейти к математическому моделированию процесса субколебаний, см. ниже.

1.2. Численная математическая модель субколебаний.

МЕТОДИКА РАСЧЕТА. Для описания динамики каждого из проводов-составляющих расщепленной фазы (рис.5) используется следующее исходное гиперболическое уравнение второго порядка

$$\frac{\partial T}{\partial s}\cdot\frac{\partial \bar{R}}{\partial s}+T\frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial s^2}+\bar{P}=\rho\frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

где s – координата вдоль провода, t – время (эти два параметра используются в качестве независимых переменных), T – модуль тяжения; $\bar{R}$ – радиус-вектор, который определяет расположение рассматриваемого сегмента провода; ρ – масса провода на единицу длины; $\bar{P}$ – векторная сумма всех сил, приложенных к проводу на единицу длины. Каждый провод рассматривается

как гибкая, однородная, растяжимая нить. Принятое уравнение позволяет учесть реальные свойства проводов, т.е. их несовершенную упругость и (при необходимости) температурные деформации.

В более общем плане, данное уравнение позволило, меняя воздействующие силы, построить целый ряд важных математических моделей, в том числе по динамике проводов электроустановок энергосистем при коротких замыканиях, по твердотельным колебаниям пучков на ЛЭП СВН [3].

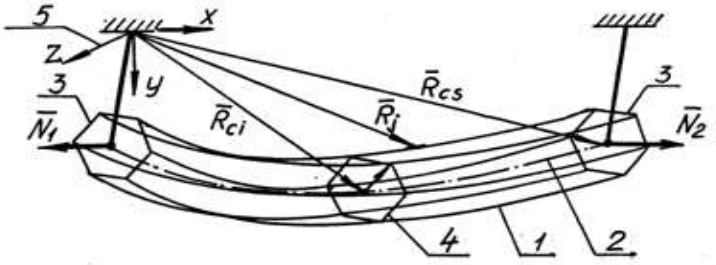


Рис.5. Расчетная модель пролета воздушной ЛЭП: 1 – расщепленная фаза, 2 – ось пучка, 3 – точки подвески, 4 – распорки, 5 – 3D-координаты.

Использование приведенного выше уравнения для построения математической модели и ряд вычислительных экспериментов показали, что постановка и решение трехмерной задачи являются избыточными при моделировании субколебаний. Учитывая, что колебания тяжения невелики, а стрела провеса обычно не превышает 5% длины пролета, исходные уравнения для построения работающей программы сведены к виду

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P_y, \qquad \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T(t) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P_z, \tag{2}$$

где P_y, P_z – проекции вектора суммарной нагрузки, приложенной к единице длины провода, на оси y и z соответственно; y и z – проекции координат точки провода на те же оси. Удлинение провода во всем пролете может быть определено через тяжение, принимаемое при расчете постоянным. Теперь, чтобы получить

в модели субколебания, необходимо ввести в расчеты ветровую нагрузку, принимая также во внимание изменения величины сил, действующих на второй по потоку (подветренный) провод. Этот учет осуществляется посредством введения аэродинамических коэффициентов лобового сопротивления C_x и подъемной силы C_y , которые изменяются по всему объему аэродинамического следа между наветренным и подветренным проводами. Численно эти коэффициенты определялись многими исследователями; в модели используются данные Diana [4].

Предполагается, что вектор скорости ветра перпендикулярен оси пролета. Направление силы лобового сопротивления совпадает с направлением движения провода относительно воздушного потока. Подъемная сила приложена к подветренному проводу в направлении, перпендикулярном к относительной скорости его движения в потоке. С учетом сказанного проекции сил на оси координат определяются по следующим соотношениям

$$\left.\begin{aligned} F_{wy} &= 0.5\rho_a D C_{x0} V_w V_{wy} \\ F_{wz} &= 0.5\rho_a D C_{x0} V_w V_{wz} \\ F_{ly} &= 0.5\rho_a D V_C \left(V_{ly} C_x + V_{lz} C_y\right) \\ F_{lz} &= 0.5\rho_a D V_C \left(V_{lz} C_x + V_{ly} C_y\right) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где V_{wy}, V_{wz} – проекции $\bar{V}_w$ (вектора скорости наветренного провода относительно воздушного потока) на координатные оси OY и OZ; соответственно, V_{ly}, V_{lz} – проекции $\bar{V}_l$ (вектора скорости подветренного провода относительно воздушного потока).

На основе кратко изложенного метода представления уравнений движения провода, названного векторно-параметрическим и численного интегрирования, выведенных для ансамбля проводов, систем дифференциальных уравнений второго порядка, построена трехмерная математическая модель расщепленной фазы. Рассмотрение ведется в пределах одного пролета, движение лучей распорок задает граничные условия для проводов в подпролетах.

Более подробно принятые решения по архитектуре программы и по ее другим блокам изложены в [5].

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА. На рис.6 представлены исходные данные, которые были выбраны для более подробного ознакомления с возможностями разработанного пакета программ. Пятипроводная расщепленная фаза (с расстоянием между проводами 400 мм), распорка с незначительной подвижностью лучей, подпролеты были взяты из типового проекта линии 750 кВ.

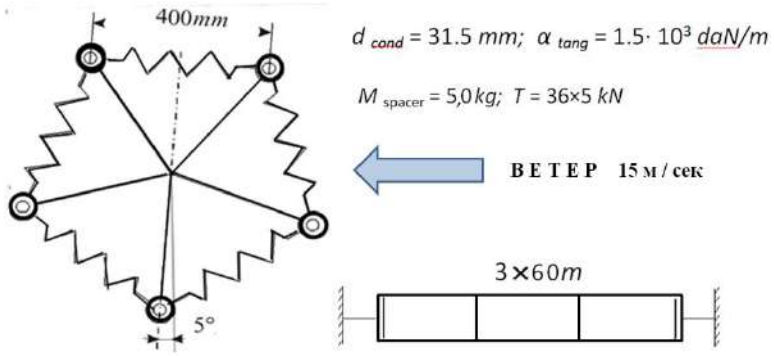


Рис.6. Исходные данные к расчету.

На рис.7 представлены траектории движения осей проводов. Можно видеть, что провода близки к соударению. Характерная особенность поведения расщепленной фазы данной конструкции – «раскачка» крайнего левого провода (подветренного) до заметных амплитуд, хотя влияние наветренных проводов не может быть значительным, плюс, несомненно, существующие колебания всего пучка проводов вокруг положения равновесия. Жесткость лучей и имевшийся люфт в распорках были оценены путем прямых измерений на образцах близкой конструкции. Длины подпролетов взяты равными, чтобы получить верхний предел возможных на практике субколебаний.

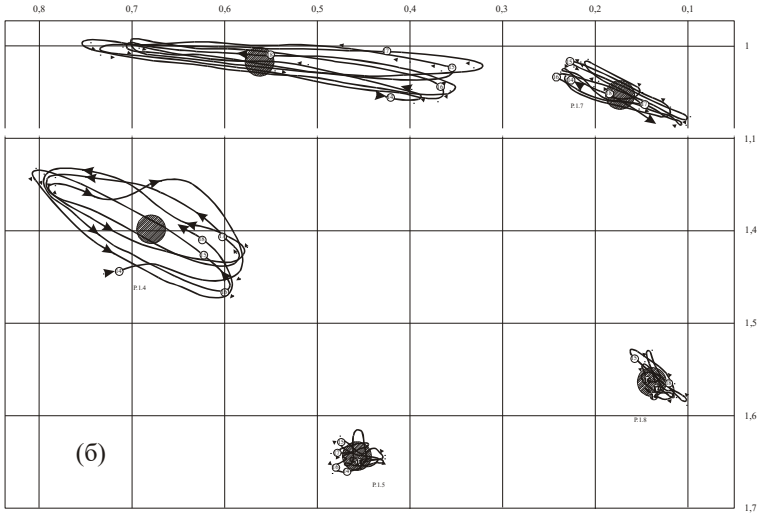


Рис.7. Результаты численного моделирования субколебаний.

БЕНЧМАРКИНГ-ОЦЕНКИ АМПЛИТУД СУБКОЛЕБАНИЙ В РАМКАХ СЕРИИ СОПОСТАВИТЕЛЬНЫХ РАСЧЕТОВ, ОРГАНИЗОВАННЫХ РАБОЧЕЙ ГРУППОЙ B2-06 CIGRE. Данные для расчетов заимствованы из отчета института ***Instituit de recherché d`Hydro-Quebec (IREQ)*** для фирмы **DAMP S.p.a.** (Италия). Материал был предоставлен профессором Миланского Университета г-м Джорджио Диана. Благодаря приведенным в отчете результатам полевых измерений возникла возможность провести сопоставление данных расчёта и натурных субколебаний.

Исходные данные для расчета (рис.8). Общая длина пролета – 366 м (п/пролеты 35-56-64-57-65-55-35 м), $D_{\text{пров}} = 33,32$ мм, тяжение – $T = 29,1$ кН×4.

Четырехлучевые распорки-гасители схематически показаны на рис.8, вместе с их параметрами.

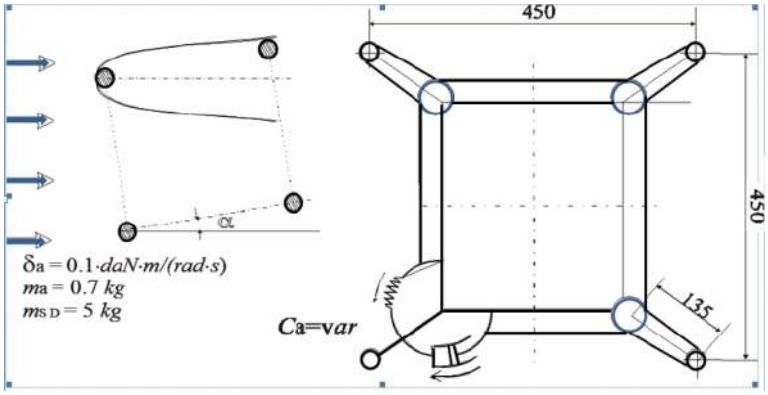


Рис.8. Схематическое изображение распорок, использовавшихся в полевых испытаниях Instituit de recherché d`Hydro-Quebec. Исходные данные модельной задачи расчета субколебаний заданы по отчету IREQ (см. в тексте). Следует подчеркнуть, что демпферные узлы распорок отображены в модели как упруго-вязкие элементы.

На рис.9 показаны данные расчёта для всех семи подпролётов (круглые точки – наветренный провод, ромбы – подветренный провод). Для каждого подпролёта приведены амплитуды колебаний для скорости ветра 10; 12; 14; 16 м/с. Данные измерений на полигоне IREQ показаны в виде увеличенных точек той же формы. Хотя индивидуальные амплитуды отличаются, общая

колебательная активность пролета по результатам измерений примерно соответствует расчету. Важно отметить также, что при расчетах в ряде случаев имело место возбуждение одновременно колебаний в подпролетах как таковых (субколебаний) и колебаний фазы в целом (твердотельных колебаний), что целиком соответствует современному представлению об инициации этих форм колебаний [2,5].

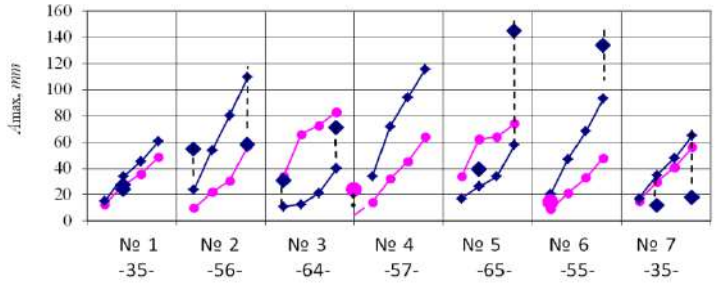


Рис.9. Сопоставление результатов расчета и полевых измерений на стенде. Указаны и номера подпролетов и их длины в метрах. Пояснения к графику см. в тексте.

Осциллограмма горизонтальных перемещений проводов при субколебаниях для расщепленной фазы приведена на рис.10.

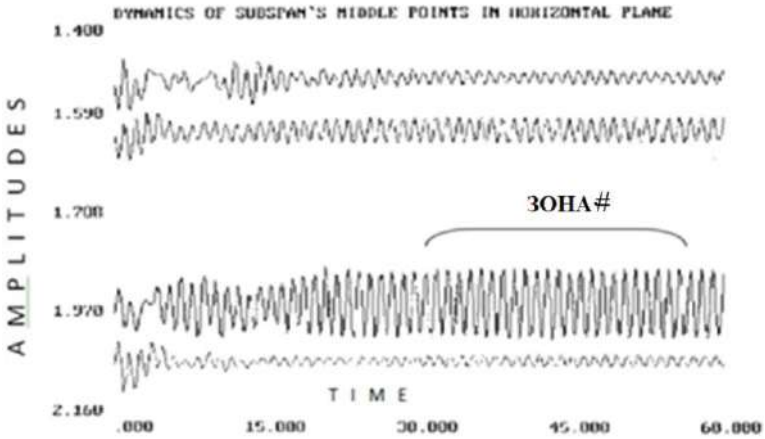


Рис.10. Осциллограмма горизонтальных колебаний проводов.

Данные для: расщепленная фаза 4 провода ø 33,32 мм, $T = 29{,}1$ кН×4. Скорость ветра 12 м/с, жесткость лучей 25 даН·м/рад. Расчет проводился для струнной модели провода. Третий подпролет ($l = 64$ м). В начале процесса видно воздействие пускового импульса для инициации колебаний. Зона «#» осциллограммы использу-ется для оценки «срока жизни» проводов.

Заключение по проведенным расчетно-теоретическим разработкам с привлечением пакета компьютерных программ «ВЕТЕР». Получены надежные результаты, которые позволили глубже понять явление субколебаний и сформулировать важные для практики решения о дальнейших работах. Но в современных реалиях требования к результатам вычислений уже значительно объемнее. В частности, необходимо учесть: а) вошедшую в практику конструирования, асимметрию расположения лучей распорок (рис.11,12,), б) новые решения по размещению распорок в пролете (рис.13), а также новые

принципы создания узлов демпфирования, они почти всегда включают в себя существенно нелинейные диссипативные элементы.

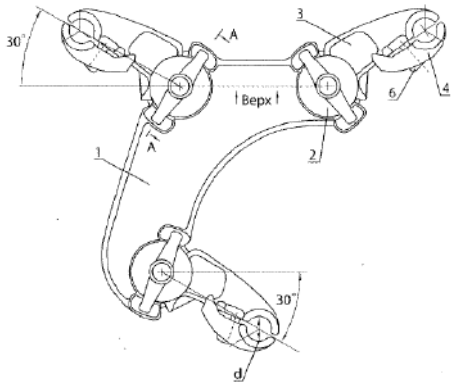


Рис.11. Новая асимметричная 3х-лучевая распорка.

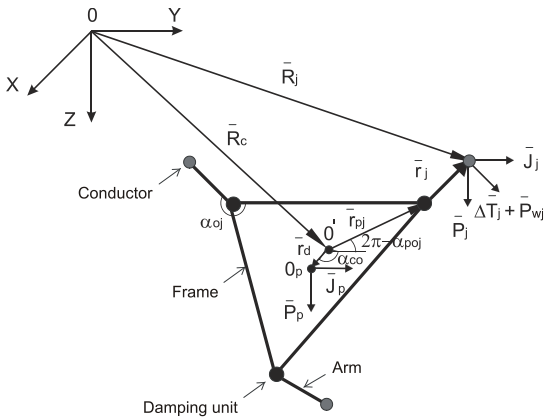


Рис.12. Расчетная схема распорки.

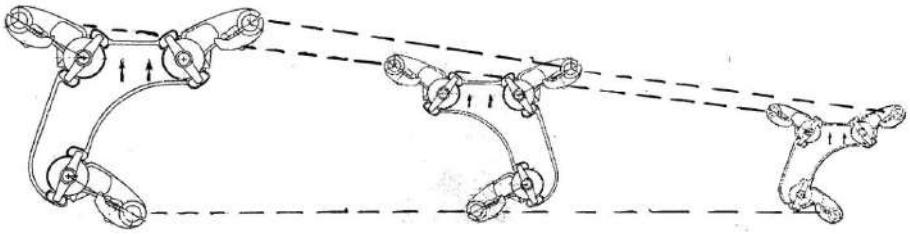


Рис.13. Порядок монтажа асимметричных распорок на воздушной линии, обеспечивающий снижение амплитуд субколебаний.

2. НЕДОСТАТОЧНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ РЯДА СОВРЕМЕННЫХ РАСПОРОК ГАСИТЕЛЕЙ И ПУТЬ ПРЕОДОЛЕНИЯ

2.1. Распорки с демпферами, выполненными из вязкой резины.

Результаты математического моделирования, простота реализации и управления параметром вязкости путем изменения рецептуры демпферного эластомерного элемента сделали этот метод создания распорок гасителей популярным на ряд лет. Расчеты, проводившиеся на численных моделях, позволяли простым образом сопоставлять эффективность той или иной защиты расщепленной фазы, по количеству циклов колебаний до начала разрушения проводов (начальная фаза такого расчета показана на рис.10). На рис.14-16 изображены такие конструкции распорок, запатентованные разными авторами.

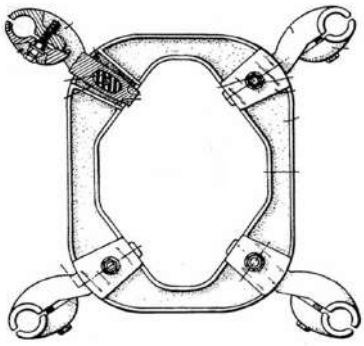


Рис.14. Патент US 4242537 D. Hearnshaw (1980).

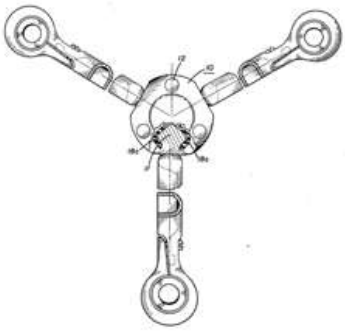


Рис.15. Патент US 4113979 Treicy (1988).

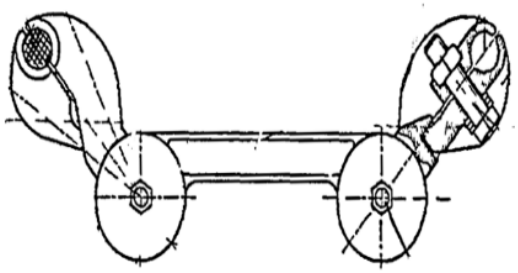


Рис.16. Патент RU89779U1 С.В. Колосов, С.В. Рыжов (2009).

2.2. Распорки с демпферами в виде фрикционных пар.

Первые конструкции таких распорок гасителей были предложены практически одновременно с вязкостными. Основой, вокруг которой выстраивается такая распорка, является эластомерный вкладыш, прижатый к каким-либо металлическим поверхностям луча или рамы, или к тем и другим одновременно.

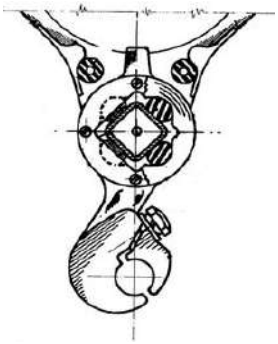


Рис.17. Патент US 374837 Dalia, 1973.

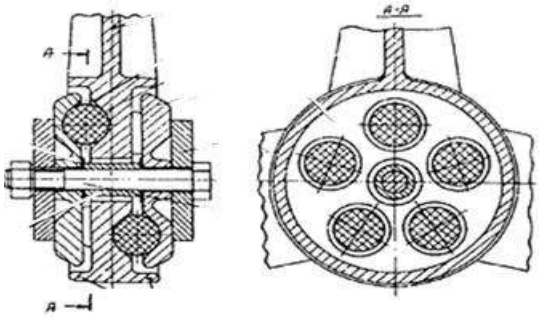


Рис.18. SU2045800C1 Дистанционная распорка – гаситель колебаний, Виноградов, Крупичев, Майоров, Цветков, 1993, опубл. 1995.

Это направление разработок демпферных узлов стало привлекать конструкторов, когда участились случаи массовых отказов распорок гасителей с вязкостными элементами, которые понижали свои характеристики заметно раньше, чем было указано в нормативной документации. За последние годы прибавилось патентов распорок гасителей с фрикционными демпферами.

Сопоставление реакций двух типов демпферов на возникающие в эксплуатации сочетания воздействий представлены в Таблице 1. Преимущества фрикционных демпферов ощутимы, но необходимо оценивать возможности той или иной компоновки демпферного узла поддерживать условия плотного контакта металл-эластомер в диапазоне рабочих режимов при эксплуатации распорки.

Таблица 1.

Сопоставление свойств двух типов демпферов по целевым показателям для режимов.

Режимы и свойства	Вязкостный демпфер	Фрикционный демпфер
Температурная зависимость	Очень большая зависимость твердости от температуры (-)	Температура практически не влияет, т.к. прогрев происходит очень быстро (+)
Тепловая инерция	Большая инерция (необходимо прогреть весь объем демпфера) (-)	Малая инерция (необходимо прогреть только малую часть демпфера) (+)
Теплоотдача	Плохая из-за низкой теплопроводности резины (-)	Хорошая, благодаря высокой теплопроводности, только малый объем металла
Возможность управления	Нет	Есть (+)
Ресурсная стойкость	Вязкостная компонента постепенно разрушает резину (-)	Малый износ (+)
Замерзание-оттаивание	Нет влияния (+)	Влияние имеется. Обеспечить прижатие во всех режимах (-)
Влияние увлажнения	Нет влияния (+)	Влияние имеется. Обеспечить прижатие во всех режимах (-)

2.3. Анализ выявленных отказов демпферных элементов.

Повреждения эластомерных элементов может происходить двумя путями: а) просто при низкой температуре (-25…-30 град С); б) из-за перегрева от длительных субколебаний и превращения резины в эбонит.

Выход из строя из-за исчерпания ресурса маловероятен. При испытаниях при комнатной температуре эластомерного материала на основе СКЭПТ резина выдерживает без повреждения 10^7 циклов с частотой около 1 Гц. Нагрев на открытом воздухе при этом невелик.

3. НАЧАЛЬНАЯ ФАЗА РАБОТ ПО СОЗДАНИЮ ДЕМПФЕРНОГО УЗЛА НОВОГО ТИПА

Созрело понимание, что необходима смена парадигмы конструирования распорок гасителей. Ведутся поиски (а) обеспечения плотности контактов металл-эластомер, (б) путей эвакуации влаги из имеющихся зон примыкания резины к металлу. Одно из перспективных направлений реализовано в представленном на рис.19 опытном макете демпферного узла. Полученная петля гистерезиса для комнатной температуры показана на рис.20.



Рис.19. Фото луча распорки гасителя, снятого с экспериментального стенда для проверки сохранения геометрии и параметров демпферного узла.

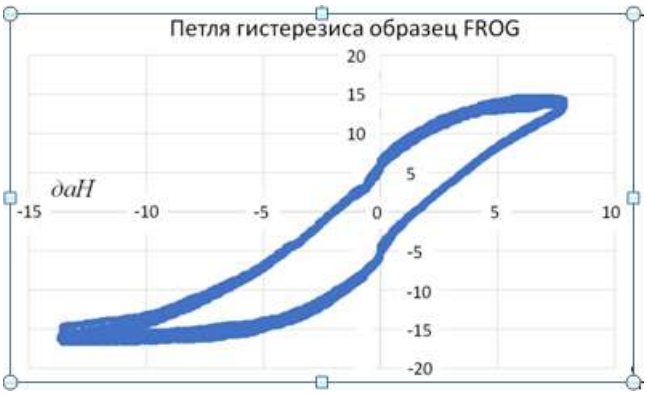


Рис.20. Петля гистерезиса для образца, показанного на рис.19. Частота 1,0..1,5 Гц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время предъявляются достаточно жесткие требования к конструкции и качеству изготовления распорок-гасителей, которые должны обеспечивать их работоспособность в течение всего срока эксплуатации воздушной линии. В соответствии с п.4.1.13 ГОСТ Р 51177-2017 срок службы

линейной арматуры должен составлять не менее 40 лет, но в отношении дистанционных демпфирующих распорок в п.4.1.4.3 СТО 56947007-29.120.10.158-2013 установлен срок службы – 50 лет. Кроме того, в п.4.1.4.2 указано, что дистанционные демпфирующие распорки должны обеспечивать исправную работу в течение срока эксплуатации без технического обслуживания и ремонта.

Эластомерные материалы, которые часто используются как в конструкции зажимов, так и в качестве демпфирующих элементов распорок-гасителей, должны хорошо зарекомендовать себя с точки зрения усталостной прочности, долговременной стабильности и старения, электрической проводимости, а также способности противостоять всем неблагоприятным климатическим и эксплуатационным условиям, включая УФ-излучение и озон.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров Г.Н. *Коронный разряд на линиях электропередачи*. – М.-Л.: Энергия, 1964. – 228 с.
2. *Wind-Induced Conductor Motion: Transmission Line Reference Book,* EPRI, Palo Alto; Jacson: Gilbert, 1979. – 244 pp.
3. Streljuk M.I., Serguey I.I., Vinogradov A.A., Krasnov V.A. *Dynamic Loads in UHV Transmission Line Spacers at Subspan Vibrations* // Energ. Project Constr. – 1986. – No.1. – Pp.68-71.
4. Кларен, Диана, Николини. *Колебания проводов в расщепленных фазах* / В книге: Воздушные линии электропередачи (СИГРЭ-74). – М.: Энергия, 1977. – С.36-67.
5. Сергей И.И., Виноградов А.А., Климкович П.И. *Вычислительный эксперимент для различных видов динамики проводов электроустановок энергосистем* / Конференция «Перенапряжения и надежность эксплуатации электрооборудования». Сборник трудов. Вып.3. – СПб.: Издательство ПЭИПК, 2004. – С.226-235.
6. Виноградов А.А., Крупичев Н.И., Майоров В.А., Цветков Ю.Л. *Патент RU2045800C1. Дистанционная распорка – гаситель колебаний*, 1993, опубл. 1995.

УДК 539.31
EDN PTVNQL
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.6

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ ОСОБЕННОСТЕЙ МАТЕРИАЛА ЗАПОЛНИТЕЛЯ*

Градсков С.А.[1], Курбатов А.С.[1], Локтева Н.А.[2]

[1]ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия
[2]ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

Целью данной работы является нахождение фундаментальных решений системы уравнений, описывающих движение бесконечной трехслойной пластины.

Основное внимание уделяется построению функций влияния нормальных и касательных перемещений, а также тангенциальных напряжений в заполнителе панели, возникающих при воздействии силы в виде дельта-функции. Заполнитель обладает регулярной структурой, а в модели учитываются трансверсальные сдвиговые деформации, что позволяет корректно оценивать демпфирующие свойства конструкции. Кроме того, в модель введен учет демпфирующих свойств заполнителя на основании модели Кельвина-Фойхта для нормальных перемещений заполнителя. В качестве материала заполнителя выбрана сталь 01Ю5Т.

Полученные аналитические решения позволяют исследовать влияние демпфирующих свойств материала, а также проводить дальнейшие оценки динамического поведения конструкций с учетом характеристик используемых материалов.

Результаты исследования могут быть полезны для проектирования виброзащитных экранов, элементов конструкций летательных аппаратов и морских судов, а также в инженерных приложениях, требующих анализа устойчивости и колебаний многослойных панельных структур.

Ключевые слова: трехслойная пластина; компенсирующие нагрузки; функция влияния; стационарный случай; гармоническое воздействие

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность данной работы заключается в разработке универсального подхода к решению связанных задач о взаимодействии гармонических волн, индуцированных в различных средах, окружающих пластину, с преградами в виде трёхслойной панели, закреплённой различным способом. В данной работе основная цель заключается в определении функций влияния нормальных, касательных перемещений. Обладая всем спектром функций влияния, полученных в результате как воздействия по нормали, так и по касательной, становится возможной реализация любых необходимых граничных условий, соответствующих различным способам закрепления преграды. Для решения поставленной задачи использован метод компенсирующих нагрузок [1], который позволяет решать подобные задачи для любых реальных видов закрепления преград.

Предлагаемый подход даёт возможность строить математические модели движения преград в различных средах, максимально приближенные по своим параметрам к реальным физическим объектам. Это, в свою очередь, обеспечивает

* *Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант №24-19-00845.*

возможность достижения наибольшей эффективности вибропоглощающих преград в заданных точках среды. Поскольку метод компенсирующих нагрузок базируется на определении функций влияния, он обладает высокой универсальностью и может применяться к широкому спектру инженерных задач.

1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПРЕГРАДЫ В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПЛОСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Общий подход к решению данной задачи представляет собой набор решений вспомогательных задач, результаты которых применяются в решении связанной задачи.



Рис.1. Последовательность действий при решении связанной задачи о прохождении волны сквозь преграду ограниченной длины в среде.

В пункте 1 (рис.1) решается задача о движении бесконечной трехслойной преграды в среде под воздействием плоской гармонической волны. В качестве примера можно рассматривать движение трехслойной преграды в акустической среде. Решение данной задачи приведено в публикации автора Сердюка Д.О. [2].

Затем, в рамках отдельной задачи, определяются функции влияния для перемещений, вызванных воздействием гармонической силы, представленной в виде дельта-функции и направленной нормально к поверхности. На следующем этапе объединяются все полученные решения. Далее, используя граничные условия, соответствующие способу закрепления пластины, определяются значения компенсирующих нагрузок. После этого вычисляется перемещение бесконечной трёхслойной пластины, подвергаемой воздействию плоской волны и компенсирующих нагрузок. Это движение на участке, который соответствует реальной преграде, эквивалентно движению трёхслойной пластины конечной длины с заданными граничными условиями (рис.2)

$$w^{(i)}\left(x,\omega\right)=w_{\infty}^{(i)}\left(\omega\right)+\sum_{n=1}^{k}G_{wj}^{(i)\sigma}\left(x-\xi_{f},\omega\right)*P_{n}+\sum_{m=1}^{l}G_{wj}^{(i)\tau}\left(x-\xi_{f},\omega\right)*P_{m}. \quad (1)$$

где $i = 1,2$ – номер несущего слоя трехслойной преграды, перемещение которого ищется; $j = 1,2$ – номер несущего слоя преграды к которому прикладывается компенсирующая нагрузка; σ – нормальное по отношению к несущему слою приложение компенсирующей нагрузки; τ – тангенциальное по отношению к несущему слою приложение компенсирующей нагрузки; G_w – функции влияния для нормальных перемещений; $w_\infty^{(i)}(\omega)$ – нормальные перемещения трехслойной бесконечной пластины под воздействием плоской гармонической волны; ξ_f – координаты точек приложения компенсирующих нагрузок, соответствующих расположению опор в пластине конечной длины; f – номер опоры.

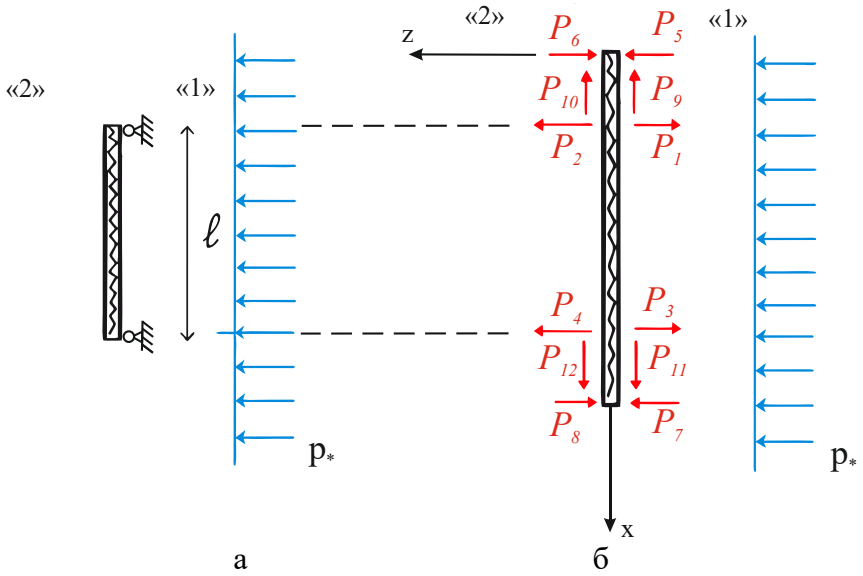


Рис.2. Движение преграды под воздействием гармонической волны: а) исходная задача для трехслойной пластины ограниченной длины; б) эквивалентная задача для бесконечной преграды, где удовлетворение граничных условий достигается за счет компенсирующих нагрузок.

Предложенный подход подразумевает возможность реализации любых граничных условий. Для этого необходимо найти все фундаментальные решения системы уравнений трехслойной преграды как при воздействии нормальной по отношению к несущим слоям сосредоточенной силы в виде дельта-функции, так и при воздействии касательной сосредоточенной силы.

Данная работа посвящена определению функций влияния трехслойной преграды (пункт 2 рис.1) под воздействием нормальной силы в виде дельта-функции.

2. ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПРЕГРАДЫ И УЧЕТ ДЕМПФИРОВАНИЯ СРЕДНЕГО СЛОЯ ПЛАСТИНЫ

Движение преграды описывается с помощью уравнений движение трехслойной пластины Паймушина В.Н. [3]. В данной работе сразу приведем выражения для бесконечной трехслойной пластины в перемещениях (2)

$$
\begin{aligned}
&Bu_{1,xx}(x)-\rho_a\omega^2u_1^a(x)+2q_1(x)=0,\\
&-Dw_{c,xxxx}(x)-\rho_c\omega^2w_c(x)+2k_1q_{1,x}(x)+p_1-p_2=0,\\
&-Dw_{a,xxxx}(x)-\rho_{an}\omega^2w_a(x)-2c_3w_a(x)+p_1+p_2=0,\\
&u_1^a(x)-k_1w_{c,x}(x)-k_2q_{1,xx}(x)+k_3q_1=0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_i^c=u_i^{(1)}+u_i^{(2)},\ \ u_i^a=u_i^{(1)}-u_i^{(2)}\ \ (i=1,2),\\
&w_c=w^{(1)}+w^{(2)},\ \ w_a=w^{(1)}-w^{(2)}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Трехслойная пластина, расположенная в декартовой системе координат $Oxyz$, при этом, предполагается, что плоскость Oxy для пластины является срединной.

Несущие слои пластины являются упругими и изотропными, с модулем упругости первого рода E и коэффициентом Пуассона ν, имеют толщину $2t_1$. Заполнитель ортотропный, сотовой конфигурации, с модулем упругости E_z и коэффициентом Пуассона ν_z, имеет толщину $2h$. Заполнитель имеет модуль обжатия E_3 и модули поперечного сдвига G_1 и G_2 в направлениях осей Ox и Oy соответственно.

Полагаем, что на несущие слои действуют внешние нормальные давления p_1 и p_2. Через $u_1^{(k)}$ и $u_2^{(k)}$ обозначим амплитуды тангенциальных перемещений вдоль осей Ox и Oy соответственно, а через $w^{(k)}$ нормальное перемещение *k*-го несущего слоя. q^1 и q^2 – постоянные по толщине поперечные касательные напряжения в заполнителе, направленные по осям Ox и Oy. Тогда уравнения движения пластины принимают вид (наличие координаты после запятой соответствует дифференцированию по ней, а точки – дифференцированию по времени t).

В формулах (2) B – жесткость несущих слоев на растяжение-сжатие, D – жёсткость несущих слоев на изгиб

$$
B=\frac{2Et_1}{1-\nu^2},\quad D=\frac{Bt_1^{\,2}}{3},\quad c_3=\frac{E_3}{2h}.
\tag{4}
$$

Модуль обжатия заполнителя E_3

$$
E_3=\frac{4dE_z}{3\left(1-\nu_z^{\,2}\right)a\sin(\varphi)},\quad \rho_a=2\rho_b t,\quad \rho_c=\rho_a+\rho h,\quad \rho_{aw}=\rho_a+\frac{\rho h}{3}.
\tag{5}
$$

где ρ_b – плотность материала несущих слоев, α – угол между стенками заполнителя, а ρ – осредненная плотность заполнителя $\rho=\dfrac{4d\rho_z}{3a\sin(\varphi)}$. В формуле d – толщина стенки заполнителя, a – длина стенки заполнителя, ρ_z – плотность материала заполнителя

$$
m_c=k_b\rho_b+\frac{\rho h^3}{3},\quad k_b=\frac{2t^3}{3},\quad m_a=k_b\rho_b+\rho\left(\frac{2h^3}{15}+ht^2+\frac{2th^2}{3}\right).
\tag{6}
$$

Рассматривается частный случай трансверсально-мягкого заполнителя, где модули поперечного сдвига заполнителя равны между собой – $G_1=G_2=G$. В этом случае

$$\rho_{wq1}=\rho_{wq2}=\rho_{wq}=\frac{2\rho h^3}{3G},\quad \rho_{q1}=\rho_{q2}=\rho_q=\frac{2\rho_{wq}}{G},$$
$$k_{31}=k_{32}=k_3=\frac{2h}{G},\quad k_1=t+h,\quad k_2=\frac{h^2}{3c_3}. \tag{7}$$

Модуль поперечного сдвига заполнителя G и модуль сдвига материала заполнителя G_z определяется как

$$G=G_z\frac{2d\left(1+\cos^2(\varphi)\right)}{3a\sin(\varphi)},\quad G_z=\frac{E_z}{2\left(1+\nu_z\right)}. \tag{8}$$

Для учета демпфирующих свойств заполнителя в направлении, нормальном по отношению к несущим слоям используется модель Кельвина-Фойхта [4]. Так как поперечное обжатие задано через упругое обжатие слоев, то внутреннее давление заполнителя на несущие слои с учетом гармоничности всех функций будет определяться как

$$w_a(x)c_3+i\omega c_3^V w_a(x), \tag{9}$$

где $c_3^V=\eta/2h$, η – коэффициент демпфирования по толщине.

Тогда, система уравнений (2) перепишется в следующем виде

$$\begin{aligned}
&Bu_{1,xx}(x)-\rho_a\omega^2u_1^a(x)+2q_1(x)=0,\\
&-Dw_{c,xxxx}(x)-\rho_c\omega^2w_c(x)+2k_1q_{1,x}(x)+p_1-p_2=0,\\
&-Dw_{a,xxxx}(x)-\rho_{an}\omega^2w_a(x)-2w_a(x)\left(c_3+i\omega c_3^V\right)+p_1+p_2=0,\\
&u_1^a(x)-k_1w_{c,x}(x)-k_2q_{1,xx}(x)+k_3q_1=0.
\end{aligned} \tag{10}$$

3. ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Исходя из заявленного подхода необходимо определить значения функций влияния, которые в дальнейшем будут использоваться при реализации метода компенсирующих нагрузок. Таким образом, будем рассматривать бесконечную трехслойную пластину, находящуюся под воздействием гармонических колебаний. Все функции, входящие в систему уравнений (3), будем считать гармоническими.

Для нахождения функций влияния необходимо приложить сосредоточенную силу в виде дельта-функции вместо давлений в системе уравнений (10). Рассмотрим случай, когда сила в виде дельта-функции $\delta(x-\xi,\omega)$ приложена к первому несущему слою (рис.3).

С учетом гармоничности всех функций, а также того, что все они зависят только от координат x и z, а также с учетом примененного прямого преобразования Фурье система уравнений (2) приобретает следующий вид

$$\begin{aligned}
&-Bq^2G_{u1}^F-\rho_a\omega^2G_{u1}^F+2G_{q1}^F=0,\\
&Dq^4G_{wc}^F-\rho_c\omega^2G_{wc}^F+iq2k_1G_{q1}^F+1=0,\\
&Dq^4G_{wa}^F-\rho_a\omega^2G_{wa}^F-2G_{wa}^F\left(c_3+i\omega c_3^V\right)+1=0,\\
&u_1^F-iqk_1G_{wc}^F+q^2k_2G_{q1}^F+k_3G_{q1}^F=0.
\end{aligned} \tag{11}$$

где G_{wc}^F, G_{wa}^F, G_{u1}^F, G_{q1}^F – функции влияния для нормальных перемещений, сдвигового перемещения и напряжения в заполнителе в пространстве изображений.

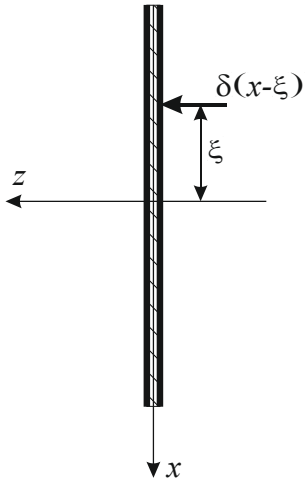


Рис.3. Сосредоточенная сила в виде дельта-функции, действующая по на первый несущий слой трехслойной преграды по нормали.

Решение системы (11) в пространстве изображений решение будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
&G_{wa}^F = -\frac{1}{Dq^4 - 2\left(c_3 + i\omega c_3^V\right) - \omega^2\rho_a};\\
&G_{wc}^F = \frac{-Bk_2q^4 - Bk_3q^2 - k_2\omega^2q^2\rho_a - k_3\omega^2\rho_a - 2}{R_1\left(\omega,q\right)};\\
&G_{u1}^F = \frac{2ik_1q}{-R_1\left(\omega,q\right)}; \quad G_{q1}^F = \frac{iBk_1q^3 + ik_1\omega^2q\rho_a}{-R_1\left(\omega,q\right)}.\\
&R_1\left(\omega,q\right) = BDk_2q^8 + BDk_3q^6 - 2Bk_1^2q^4 - Bk_2\omega^2q^4\rho_c - Bk_3\omega^2q^2\rho_c +\\
&\quad + Dk_2\omega^2q^6\rho_a + Dk_3\omega^2q^4\rho_a + 2Dq^4 - 2k_1^2\omega^2q^2\rho_a -\\
&\quad - k_2\omega^4q^2\rho_a\rho_c - k_3\omega^4\rho_a\rho_c - 2\omega^2\rho_c.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Далее необходимо найти оригиналы полученных функций влияния. Воспользуемся подходом, реализованном в [5]. Данный подход подразумевает установление связи между интегралом и рядом Фурье

$$
\begin{aligned}
&G_{wa}\left(x,\omega\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_{wa,n}^F\left(q,\omega\right)e^{-iqx}dq =\\
&\quad = \frac{1}{2L}\sum_{m=-\infty}^{\infty} G_{wa,n}^F\left(q,\omega\right)e^{-i\frac{\pi m}{L}x}H\left(L-\left|x\right|\right),\\
&G_{wa}\left(x,\omega\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_{wa,n}^F\left(q,\omega\right)e^{-iqx}dq =\\
&\quad = \frac{1}{2L}\sum_{m=-\infty}^{\infty} G_{wa,n}^F\left(q,\omega\right)e^{-i\frac{\pi m}{L}x}H\left(L-\left|x\right|\right).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где $H\left(x\right)$ – Это функции Хэвисайда.

На основании (3) находятся функции влияния нормальных перемещений в несущих слоях.

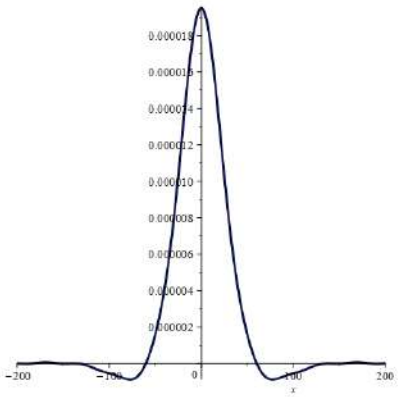


Рис.4. Функции влияния для нормальных перемещений (1) и (2) несущих слоев.

Функции влияния для (1) и (2) несущих слоев трехслойной пластины представлены на рис.4. Визуально графики неотличимы, полученные значения начинают отличаться на 12 знаке после запятой. Для $x=0$ при частоте $\omega=1$ значения функций влияния для (1) им (2) слоев принимают вид

$$G_{w(1)} = 0.00001951157354,$$
$$G_{w(2)} = 0.00001951157116. \qquad (14)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построены и определены функции влияния для нормальных перемещений бесконечной трехслойной пластины под влиянием гармонической нагрузки в виде дельта-функции с учетом демпфирования в заполнителе пластины. Полученные функции влияния позволяют обеспечивать выполнение граничных условий в заданной точке пластины, что позволяет в дальнейшем реализовывать решения связанных задач о движении преграды в различных средах, имеющих заданные граничные условия в точках закрепления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Venzel E.S., Dzhan-Temirov K.E., Trofimov A.M., Non E.V. *The method of compensating loads in the tasks of the theory of thin plates and shells*. – Kharkov: B.i., 1992. – 92 p.
2. Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В. *Исследование звукоизоляционных свойств трехслойной пластины при воздействии плоской волны* // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2016. – №1. – С.167-171.
3. Иванов В.А, Паймушин В.Н. *Уточненная постановка динамических задач трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем численно-аналитический метод их решения* // Прикладная механика и техническая физика. – 1995. – Т.36. – №4. – С.147-151.
4. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. *Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций*. – М.: Физматлит, 2005. – 576 с.

5. Митин А.Ю., Федотенков Г.В. *Метод и алгоритм решения пространственных нестационарных контактных задач для абсолютно твердых ударников и тонкой упругой цилиндрической оболочки* / XXV Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А.Г. Горшкова». Сборник материалов. – Москва, 2019. – С.113-114.

УДК 538.9, 539.4
EDN PWVMHT
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.7

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ЧАСТИЦ РАЗЛИЧНОГО СОСТАВА И ДИСПЕРСНОСТИ В ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТАХ

Драч Е.А.[1], Корнев Ю.В.[1], Джага А.О.[1], Симонов-Емельянов И.Д.[2]

[1]ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия
[2]ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет», г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Механические характеристики полимерных и эластомерных композитов во многом определяются их составом: полимерной (или эластомерной) матрицей и равномерно распределенными в ней высокодисперсными (микро-, субмикро- и наноразмерными) частицами наполнителя. В связи с этим, актуальными являются исследования, направленные на изучение взаимосвязи между структурой композитов и их свойствами для направленного контроля физико-механических характеристик.

Основные параметры структуры, которые во многом определяют свойства композитов представлены в работах [1-5]. Так, для описания дисперсных структур и прочностных свойств ДНПКМ при разном содержании дисперсного наполнителя с разной удельной поверхностью (Sуд.г) и диаметром частиц (d) были использованы обобщенные (Θ) и приведенные (аср/d, Θ/В и Θ/Sн) параметры, которые позволили определить оптимальные параметры наполнителя, его содержание и тип дисперсной структуры с максимальной прочностью [1]. Оптимальная структура ДНПКМ для получения ДНПКМ с максимальной прочностью – средненаполненная СНС-1 (до предела текучести). Установлено, что оптимальный размер дисперсных частиц в основном определяется взаимодействием растущей трещины с дисперсными частицами при разрушении композита и протяженностью границы раздела фаз (приведенный параметр Θ/Sн). Предложены экспериментальные методики определения основного параметра дисперсного наполнителя для построения структур ДНПКМ максимальная упаковка (kуп) и максимальное содержание дисперсных наполнителей (параметр φm) разных размеров. Показано, что построение всех возможных типов структур и составов ДНПКМ следует начинать с ВНС при содержании дисперсного наполнителя равного φm (фиксированная начальная точка) [2]. Рассматриваются вопросы влияния размера частиц твердых наполнителей на плотность упаковки и максимальную долю наполнителя (φm) в дисперсно-наполненных полимерных композиционных материалах. Приводится зависимость параметра φm от диаметра твердых частиц наполнителей. Показано, что для крупных частиц (более 50 мкм) φm в дисперсно-наполненных полимерных композиционных материалах может достигать ~0.64 об. д., а для наночастиц (1-100 нм) не более ~0.255 об. д. [3]. В работе [4] предложен новый модифицированный метод определения максимального количества дисперсного наполнителя φm (плотности упаковки) в дисперсно-наполненных полимерно-композиционных материалах по маслопоглощению (Х) на основе ГОСТ 21119.8–75. Изучено [5]

пространственное распределение частиц наполнителя и их агломерация в зависимости от концентрации и размера. Наполнителем во всех случаях служили частицы кремнезема. Размер частиц варьировался в широком диапазоне: от наночастиц до стеклянных шариков, но, при этом частицы наполнителя имеют одинаковую природу. Концентрацию наполнителя по сечению образцов определяли визуально, методом электронно-химического анализа и атомно-силовой микроскопии. Показано, что с увеличением размера частиц тенденция к перераспределению концентрации возрастает таким образом, что пристеночная область обедняется наполнителем. Этот эффект более выражен при высоких концентрациях наполнителя и для кристаллизующегося полимера по сравнению с аморфным.

Таким образом, для исследования влияния параметров структуры эластомерных композитов на комплекс механических свойств данного класса материалов следует изготовить образцы таким образом, чтобы были взяты несколько точек по концентрации частиц наполнителя, при этом сохранялся постоянный объём эластомерной матрицы между частицами различной дисперсности (параметр Θ) в соответствии с моделью Шкловского – де Жена [1-4]. Такой подход позволяет сравнивать и описывать структуры композитов с частицами наполнителей, которые сильно отличаются размерами (на несколько порядков), химическим составом и строением (сферические частицы, трубки и др.). Для того, чтобы создавать такие композиты, требуется знать максимально возможную степень наполнения полимерных композитов определённым типом частиц.

В связи с этим, целью настоящей работы является экспериментальное определение максимальной концентрации и дисперсности частиц аморфного диоксида кремния и полиимидов в полимерных композитах.

ОБЪЕКТЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В основе данной работы лежит идея определения и расчета максимальной концентрации частиц различной дисперсности (субмикро-, нано-, микроразмеров), морфологии и составов в полимерных композитах. Исследованиям подвергались частицы полиимидов двух типов (Pyr-O, Pyr-S), а также частицы диоксида кремния (SiO_2).

Все описанные эксперименты и обработка полученных данных проводились в ИПРИМ РАН. Чтобы понять, как изучаемые частицы наполнителей могут ориентироваться и располагаться в пространстве полимерной матрицы, а также гарантировать частоту и корректность экспериментов по расчету предельной концентрации, было проведено исследование формы и размеров отдельных частиц рассматриваемых образов.

Исследование структуры частиц проводилось с использованием оптического микроскопа Альтами МЕТ 5Т. Для возможности корректного и качественного изучения интересующих нас частиц были изготовлены суспензии на основе раствора дибутилфталата (далее – ДБФ). В процессе подготовки к исследованию каждый тип исследуемых частиц подвергался сушке в вакуумном термошкафу. В первой итерации эксперимента было принято решение отказаться от какой-либо дополнительной обработки и сразу приступить к наблюдению изготовленных суспензий. Полученные описанным способом результаты исследования представлены на рис.1. Зафиксированные таким образом данные не представляются возможными для изучения: под объективом микроскопа сложно

увидеть отдельные частицы, так как многие из них сбились друг с другом в крупные агломераты. Далее во избежание агломерации частиц все исследуемые суспензии впоследствии подвергались обработке в ультразвуковой (УЗ) ванне от 3 до 5 минут. Такая дополнительная УЗ обработка образцов позволила получить более качественные результаты, поскольку все «островки» из частиц были разбиты и частицы распределялись в растворе ДБФ равномерно и разрозненно (рис.2).

После этого были даны оценки формы и размеров частиц. Оценка размеров проводилась в программе SPIP 5.0.4.

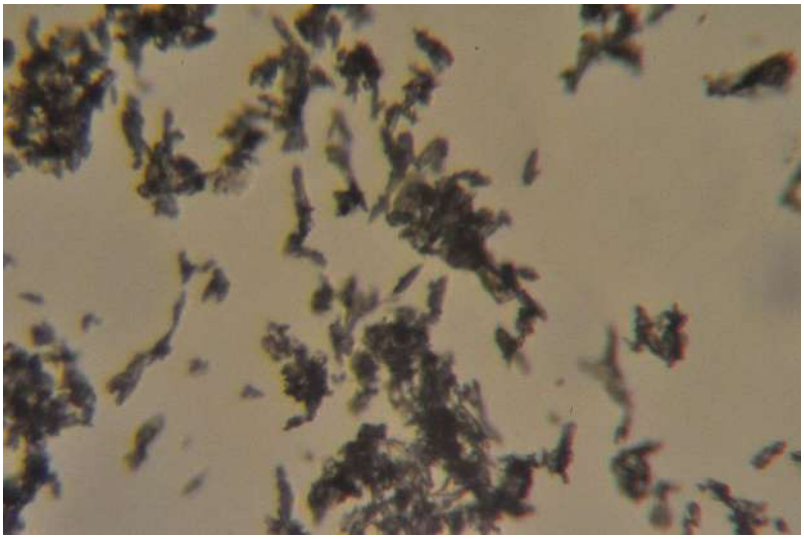


Рис.1. Частицы полиимидов под микроскопом (увеличение 20х), не подвергавшиеся дополнительной обработке.

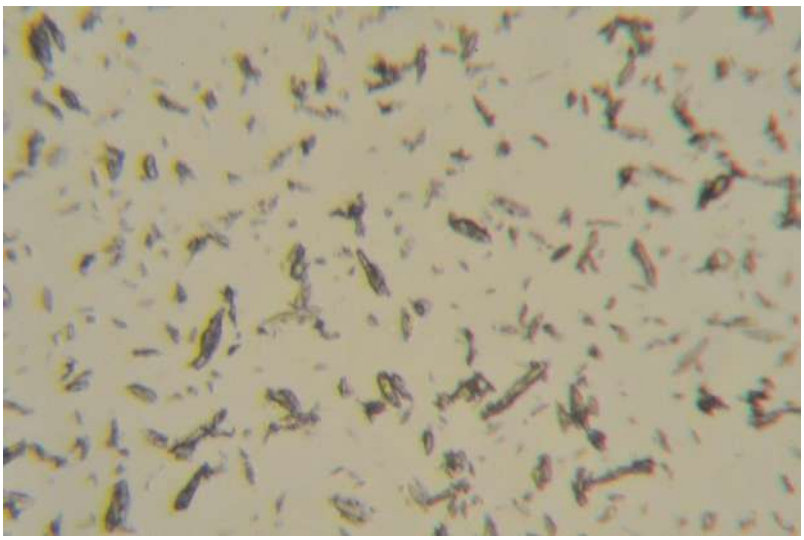


Рис.2. Частицы полиимидов под микроскопом (увеличение 20х), прошедшие обработку ультразвуком.

После того, как геометрические характеристики частиц стали известны, стало понятно, что размеры полиимидных частиц и частиц диоксида кремния оказались довольно большими, что свидетельствует об агломерации данных частиц. Для более адекватной оценки размеров исследуемых частиц и уменьшения размеров агломератов их дополнительно измельчали в ножевой мельнице на следующих режимах: 1 минута – 10 000 оборотов, 15 секунд – 19 000 оборотов.

После того, как все частицы прошли предварительную обработку, можно приступать к оценке максимальной концентрации каждого образца в заданном объеме полимерной матрицы.

Роль полимерной составляющей в эксперименте выполнял раствор ДБФ, представляющий собой бесцветную маслянистую жидкость, используемую, в основном, как пластификатор для полимеров. Использование ДБФ обусловлено тем, что полимеры по своей природе довольно сложны в смешивании с другими компонентами, а этот раствор хорошо имитирует интересующие нас свойства полимеров, а также и не подвергается быстрому испарению или отвердеванию при контакте с воздушной средой.

Перед замешиванием с ДБФ частицы были высушены в вакуумном шкафу, в течение продолжительного времени. Наиболее длительной обработке были подвержены частицы диоксида кремния. Это обусловлено тем, что эти частицы имеют наибольшую площадь поверхности.

Эксперимент по определению предельной концентрации частиц (параметра φ_m) выполнялся в соответствии со следующей методикой. В чашку Петри помещалось отмеренное количество исследуемых частиц. В чашку с частицами постепенно, маленькими дозами, вводился раствор ДБФ. После каждой новой порции полимера происходило замешивание получаемой смеси. При достижении состояния, когда смесь получалось взять в руки и придать ей определенную форму, в нашем случае – шара (рис.3-5), отмечалась точка оптимальной концентрации частиц наполнителя в материале. В этом состоянии смесь сохраняла приданную ей форму, не растекалась, а отдельные частицы не отслаивались от основного объема материала. Максимальная концентрация соответствует границе, предшествующей утрате этих свойств. Все указанные измерения можно легко наблюдать визуально в процессе эксперимента.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

При завершении смешивания всех типов частиц становится возможным рассчитать предельную концентрацию в соответствии с формулами (1.1), (1.2)
– в объемных долях

$$\varphi_m = \frac{\frac{m_н}{\rho_н}}{\frac{m_н}{\rho_н} + \frac{m_{ол}}{\rho_{ол}}}, \qquad (1.1)$$

– в массовых долях

$$\varphi_m = \frac{m_н}{m_н + m_{ол}}, \qquad (1.2)$$

где $m_н$ – масса наполнителя, $\rho_н$ – плотность наполнителя, $m_{ол}$ – масса олигомера, $\rho_{ол}$ – плотность олигомера.

Результаты расчетов параметра φ_m приведены в Таблице 1.

Таблица 1.

Результаты расчета максимальной концентрации частиц в объемных и массовых долях.

SiO_2 (микрочастицы 20 мкм с развитой внешней поверхностью)	$\rho_{ол}$, г/см^3	$m_{ол}$, г	$m_н$, г	$\rho_н$, г/см^3	φ_m
В объемных долях	1,05	5,00	5,00	2,00	0,3442623
В массовых долях	-	5,00	5,00	-	0,5
Pyr – O (средний диаметр: 3,897 мкм)	$\rho_{ол}$, г/см^3	$m_{ол}$, г	$m_н$, г	$\rho_н$, г/см^3	φ_m
В объемных долях	1,05	0,50	3,00	1,37	0,82138201
В массовых долях	-	0,50	3,00	-	0,85714286
Pyr – S (средний диаметр: 13,991 мкм; средняя длина: 23,9478 мкм)	$\rho_{ол}$, г/см^3	$m_{ол}$, г	$m_н$, г	$\rho_н$, г/см^3	φ_m
В объемных долях	1,05	1,75	3,00	1,43	0,55727554
В массовых долях	-	1,75	3,00	-	0,63157895

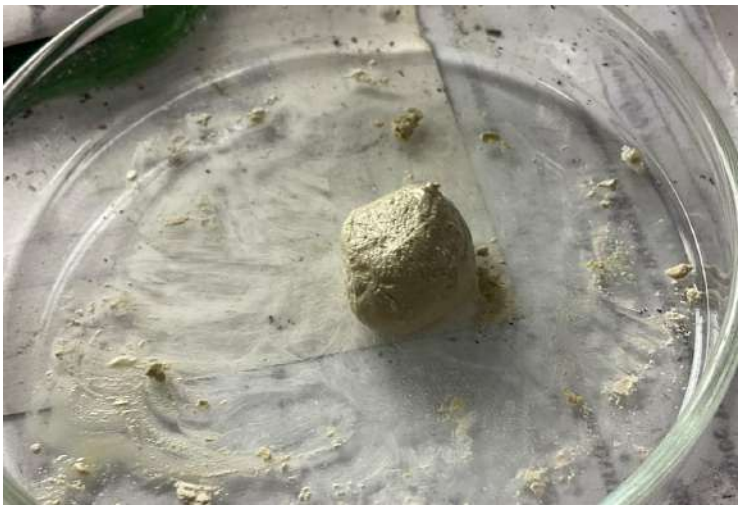


Рис.3. Смесь частиц полиимида (Pyr-O) с раствором ДБФ.



Рис.4. Смесь частиц полиимида (Pyr-S) с раствором ДБФ.



Рис.5. Смесь частиц диоксида кремния (SiO2) с раствором ДБФ.

Определение параметра φ_m позволяет найти наиболее удачное соотношение между частицами наполнителя и связующей матрицы, что, в свою очередь, может представлять интерес для материаловедов при разработке новых рецептов композиционных материалов. Качественная оценка этого параметра позволяет точно и обоснованно определять оптимальное соотношение между фазами, исключая отклонения по типу недобора или избыточного ввода наполнителя либо, наоборот, чрезмерного объёма матрицы, что отрицательно сказывается на прочностные, износостойкие и другие характеристики материала.

Параметр φ_m задаёт верхнюю границу структурно допустимой степени наполнения, при превышении которой нарушаются процессы формообразования и резко ухудшаются эксплуатационные характеристики материала.

Важность изучения определения параметра предельной концентрации и формирования унифицированной методики его вычисления снижает неопределённость, связанную с варьированием концентрации частиц наполнителя, и обеспечивает повышение точности и повторяемости технологических характеристик.

Таким образом, расчёт параметра φ_m является одним из ключевых инструментов при разработке не только новых композиционных материалов, но и уже известных, обеспечивая прогнозированность и стабильность желаемых структурно-механических характеристик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харламова К.И., Селезнева Л.Д., Симонов-Емельянов И.Д. *Оптимизация размеров частиц и параметров структуры для получения дисперсно-наполненных полимерных композитов с максимальной прочностью* // Пластические массы. – 2020. – №9-10. – С.13-18.
2. Симонов-Эмельянов И.Д., Харламова К.И. *Теоретические основы, модели и расчёты составов дисперсно-наполненных полимеров с разными типами структур и свойствами* // Российский химический журнал. – 2024. – Т.68. – №1. – С.58-68.
3. Симонов-Эмельянов И.Д., Харламова К.И. *Размер частиц наполнителя, упаковка и составы наполненных полимерных композитов с разным типом*

структуры и свойствами // Теоретические основы химической технологии. – 2020. – Т.54. – №6. – С.768-774.
4. Simonov-Emelyanov I.D., Kharlamova K.I., Dergunova E.R. *Oil Absorption of Dispersed Powders and Determination of the Maximum Amount of Fillers in Polymer-Composite Materials* // Polymer Science, Series D. – 2022. – Vol.15. – Pp.503-508.
5. Pavlyuchkova E.A., Malkin A.Ya., Kornev Yu.V., Simonov-Emelyanov I.D. et al. *Distribution of filler in polymer composites. The role of particle size and concentration* // Polymer Science, Series A. – 2024. – Vol.66. – Pp.113-120.

УДК 621.315.62:678.5
EDN PZJAOV
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.8

ОЦЕНКА ДОЛГОВЕЧНОСТИ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ВДОЛЬ ВОЛОКОН

Жаринов М.Ю., Марасанов А.И.

Российский университет транспорта, г. Москва, Россия

Рассмотрены результаты длительных испытаний образцов стержней из однонаправленного стеклопластика на эпоксидном связующем при соотношении связующего и заполнителя 0,3:0,7 при растяжении вдоль волокон при температуре $T = 20\,^{o}\text{C}$. Получены оценки средних значений и среднеквадратических отклонений для долговечности при различных уровнях растягивающих напряжений в диапазоне 0,5…0,8 F_p (F_p – разрушающая нагрузка при растяжении вдоль волокон). Показано, что для описания распределения вероятностей случайной величины долговечности можно использовать логарифмически нормальный закон.

С учетом того, что часть образцов при уровнях нагружения 0,5…0,6 F_p не разрушилась в процессе длительных испытаний, для более точной оценки среднего значения и среднеквадратического отклонения долговечности при данных уровнях нагружения был применен принцип максимального правдоподобия.

На основании проведенного исследования получена эмпирическая зависимость долговечности стеклопластика от уровня действующих напряжений, которая была аппроксимирована уравнением Журкова.

Ключевые слова: однонаправленный стеклопластик; долговечность; разрушающее напряжение; принцип максимального правдоподобия; логарифмически нормальный закон

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальному исследованию долговечности однонаправленных стеклопластиков при растяжении посвящено существенное количество исследований (см., например, [1-4]).

Так, в работе [1] предложен метод определения параметров долговечности (длительной прочности) композитных стержней, основанный на анализе статистических данных, полученных в ходе длительных испытаний при постоянной нагрузке, а также кратковременных испытаний.

В статье [2] дана оценка долговечности натяжных (подвесных), фиксаторных и консольных полимерных изоляторов на основе принципа температурно-временной аналогии.

В работе [3] экспериментально исследуется долговечность и длительная прочность однонаправленных стеклопластиков на эпоксидном и полиэфирном связующем при различных значениях растягивающих напряжений и температур.

В статье [4] на основе опытных данных дается оценка влияния интенсивности длительного нагружения на долговечность при растяжении конструкционного пультрузионного стеклопластика.

Представленная работа посвящена экспериментальному исследованию долговечности стержней из однонаправленного стеклопластика на эпоксидном

связующем при соотношении связующего и заполнителя 0,3:0,7 при растяжении при температуре $T = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Длительные испытания были проведены на цилиндрических образцах, геометрическая форма которых представлена в работе [5]. Для испытаний в учебно-экспериментальных мастерских РУТ (МИИТ) была изготовлена партия образцов из стержней диаметром 14 и 22 мм с длиной и диаметром рабочей части 120 мм и 8 мм соответственно и длиной хвостовиков (без учета конусной части) 75 мм при общей длине 300 мм. После токарной обработки поверхность образцов шлифовалась мелкозернистой шкуркой.

Для проведения длительных испытаний были использованы пружинные установки (см. [6]). На этих установках возможно создание нагрузок порядка 40 кН. Нагрузка для рассматриваемых испытаний была принята равной $F_1 = 0,8F_p = 31,71$ кН, $F_2 = 0,7F_p = 27,75$ кН, $F_3 = 0,6F_p = 23,78$ кН и $F_4 = 0,5F_p = 19,82$ кН. Здесь $F_p = 39,64$ кН – разрушающая нагрузка.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В Таблицах 1-4 приведены результаты длительных испытаний образцов однонаправленного стеклопластика при растяжении вдоль волокон при температуре $T = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$ при различных значениях нагрузки в долях от разрушающей.

В Таблице 5 представлены оценки средних значений и среднеквадратических отклонений долговечности, найденные на основе данных Таблиц 1-4.

На рис.1-3 приведены гистограммы случайной величины логарифма долговечности $\ln t$ при уровнях нагружения 0,8, 0,7 и 0,6 F_p соответственно.

Была проведена аппроксимация вероятностного распределения случайной величины долговечности логарифмически нормальным законом, т.е. нормальным законом для величины $\ln t$. На основании критерия согласия χ^2 Пирсона получено, что при уровнях нагружения $0,8\,F_p$ и $0,6\,F_p$ предположение о логарифмически нормальном распределении долговечности не противоречит опытным данным (вероятность случайного характера расхождений между эмпирическим и теоретическим распределениями вероятностей – 0,1 и 0,27 соответственно), а при уровне нагружения $0,7\,F_p$ противоречит (вероятность случайного характера расхождений между эмпирическим и теоретическим распределениями вероятностей – 0,0002).

Таким образом, можно утверждать, что для описания вероятностного распределения случайной величины долговечности допустимо применять логарифмически нормальный закон.

В Таблицах 6-7 приведены значения времени от момента загружения до полной разгрузки неразрушившихся образцов при длительных испытаниях при нагрузках $0,6\,F_p$ и $0,5\,F_p$.

Таблица 1.

Результаты длительных испытаний образцов однонаправленного стеклопластика при нагрузке $0{,}8\,F_p$.

№ образца	Диаметр образца, мм	Длина рабочей части, мм	Время t_i до разрушения, час
1	8,1	110	0,15
2	7,9	125	0,13
3	7,9	-	2,93
4	7,9	-	2,77
5	7,9	-	50,87
6	8,1	114	0,58
7	8,2	119	13,78
8	8,1	119	0,02
9	8,1	127	34,30
10	8,3	118	0,03
11	8,3	117	72,00
12	8,1	115	2,83
13	8,1	117	32,17
14	8,0	115	14,67
15	7,8	120	0,15
16	8,1	120	1,23
17	8,3	120	0,02
18	8,3	117	0,07
19	8,0	115	0,07
20	8,0	121	0,02
21	8,2	116	2,25
22	8,0	118	3,62
23	8,0	120	0,00
24	8,2	116	45,00
25	8,2	120	58,88
26	8,3	117	0,68
27	8,2	114	0,02
28	8,2	121	5,57
29	8,1	117	0,23
30	8,1	118	23,45
31	8,1	110	13,33
32	7,7	115	1,13
33	7,9	121	13,72
34	8,1	115	14,35

Таблица 2.

Результаты длительных испытаний образцов однонаправленного стеклопластика при нагрузке $0{,}7\,F_p$.

№ образца	Диаметр образца, мм	Длина рабочей части, мм	Время t_i до разрушения, час
1	8,1	110	0,02
2	8,1	-	370,50
3	8,1	110	0,00
4	8,1	113	5,67
5	8,0	114	3834,00
6	8,1	113	1080,00
7	8,2	111	1848,00
8	8,1	119	0,00
9	8,1	120	446,00
10	8,4	115	0,25
11	8,1	119	7,50
12	8,1	115	164,08
13	8,2	115	0,13
14	7,9	120	47,42
15	8,2	122	1090,00
16	8,1	117	38,17
17	8,1	120	1944,00
18	8,2	118	1896,00
19	8,1	121	3504,00
20	8,1	120	3912,00
21	8,2	118	9240,00
22	8,1	121	12144,00

Таблица 3.

Результаты длительных испытаний образцов однонаправленного стеклопластика при нагрузке $0{,}6\,F_p$.

№ образца	Диаметр образца, мм	Длина рабочей части, мм	Время t_i до разрушения, час
1	8,4	115	5101
2	8,3	110	4608
3	8,0	116	3096
4	8,3	116	7716
5	7,9	113	3570
6	7,8	114	4224
7	8,0	113	18120
8	8,0	111	11112
9	8,0	119	624
10	7,9	120	792
11	7,9	115	150
12	7,9	119	376

Таблица 4.

Результаты длительных испытаний образцов однонаправленного стеклопластика при нагрузке $0{,}5\,F_p$.

№ образца	Диаметр образца, мм	Длина рабочей части, мм	Время t_i до разрушения, час
1	8,0	-	10300
2	8,0	-	15080

Таблица 5.

Оценки средних значений и среднеквадратических отклонений долговечности, найденные на основе данных Таблиц 1-4.

Уровень нагрузки	Количество испытанных образцов	Оценка среднего значения долговечности, час	Оценка среднеквадратического отклонения долговечности, час
$0{,}5\,F_p$	2	12690	3380
$0{,}6\,F_p$	12	4957	5266
$0{,}7\,F_p$	22	1890	3163
$0{,}8\,F_p$	34	12	19

Таблица 6.

Данные по неразрушившимся образцам однонаправленного стеклопластика при нагрузке $0{,}6\,F_p$.

№ образца	Диаметр образца, мм	Длина рабочей части, мм	Время t_i до разгрузки образца, час
13	8,0	120	58320
14	7,5	112	56160
15	-	-	79560
16	-	-	75840

Таблица 7.

Данные по неразрушившимся образцам однонаправленного стеклопластика при нагрузке $0{,}5\,F_p$.

№ образца	Диаметр образца, мм	Длина рабочей части, мм	Время t_i до разгрузки образца, час
3	8,0	-	103640
4	8,0	-	59130

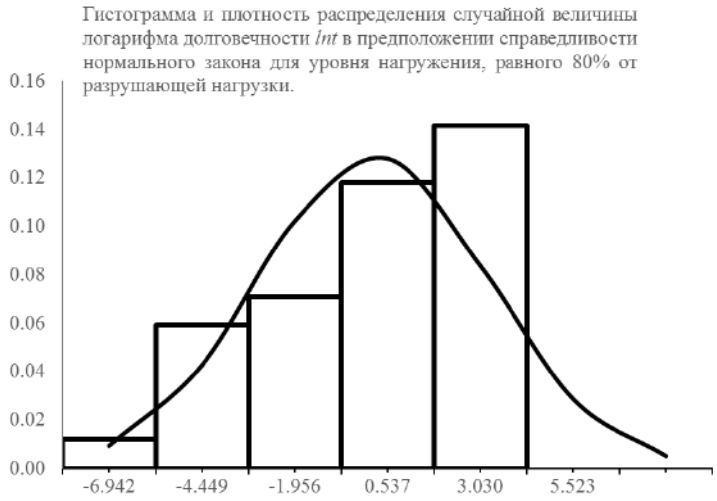


Рис.1. Гистограмма и плотность распределения логарифма случайной величины долговечности $\ln t$ в предположении справедливости нормального закона для уровня нагружения, равного $0{,}8\,F_p$.

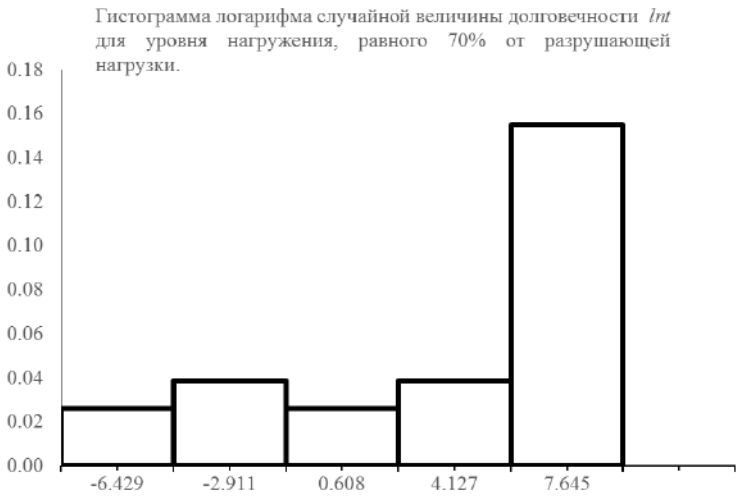


Рис.2. Гистограмма случайной величины логарифма долговечности $\ln t$ для уровня нагружения, равного $0{,}7\,F_p$.

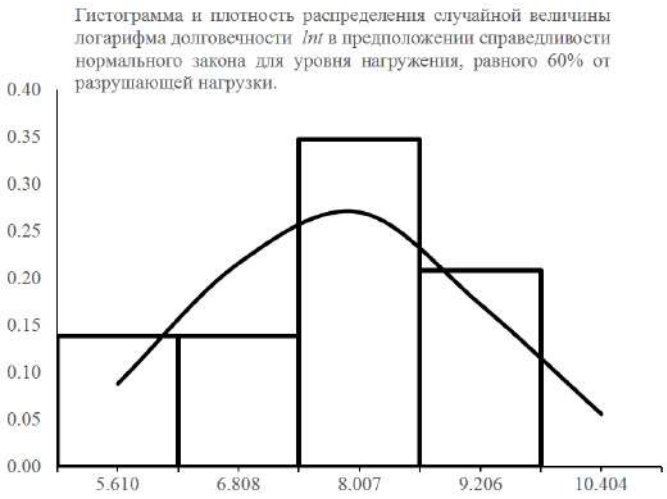


Рис.3. Гистограмма и плотность распределения случайной величины логарифма долговечности $\ln t$ в предположении справедливости нормального закона для уровня нагружения, равного $0{,}6\,F_p$.

Поскольку при уровнях нагружения $0{,}5\,F_p$ и $0{,}6\,F_p$ часть испытываемых образцов не разрушилась, то для нахождения оценок среднего значения $\langle \ln t \rangle$ и среднеквадратического отклонения S логарифма долговечности в этом случае можно воспользоваться принципом максимального правдоподобия.

Запишем функцию правдоподобия

$$L = \frac{1}{\sqrt{2\pi S^2}} e^{-\frac{1}{2S^2}\sum_{i=1}^{k}\left(\ln t_i - \langle \ln t \rangle\right)^2} \left[0{,}5 - \Phi\left(\frac{\ln t_\delta - \langle \ln t \rangle}{S} \right) \right]^{n-k}.$$

Здесь n – объем изучаемой выборки; k – число испытаний, в которых зафиксировано разрушение образцов; t_i – долговечность i-го разрушившего образца; t_δ – база испытаний; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – интеграл вероятностей.

Вместо функции L из соображений удобства обычно рассматривают функцию $\ln L$. Тогда

$$\ln L = -0{,}5 \ln(2\pi) - k \ln S - \frac{1}{2S^2} \sum_{i=1}^{k} \left(\ln t_i - \langle \ln t \rangle \right)^2 + \\ + (n-k) \ln \left[0{,}5 - \Phi\left(\frac{\ln t_\delta - \langle \ln t \rangle}{S} \right) \right].$$

Согласно принципу максимального правдоподобия наилучшими оценками параметров $\langle \ln t \rangle$ и S являются те, при которых функция $\ln L$ принимает максимальное значение. Это требование соблюдается, если выполняются следующие соотношения

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \langle \ln t \rangle} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \ln L}{\partial S} = 0. \tag{1}$$

Соотношения (1) можно привести к виду

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \langle \ln t \rangle} = \frac{k}{S^2} \left[\langle \ln t_* \rangle - \langle \ln t \rangle \right] + (n-k) \frac{1}{S} \psi(u) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial S} = -\frac{k}{S} + \frac{1}{S^3} \left[(k-1) S_*^2 + k \left(\langle \ln t_* \rangle - \langle \ln t \rangle \right)^2 \right] + \frac{n-k}{S} u\, \psi(u) = 0. \tag{3}$$

Здесь $\langle \ln t_* \rangle$ и S_*^2 – среднее значение и дисперсия логарифмов долговечности разрушившихся в ходе испытаний образцов; $u = \frac{\ln t_\delta - \langle \ln t \rangle}{S}$;

$\psi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{0{,}5 - \Phi(u)} e^{-\frac{u^2}{2}}$.

Систему нелинейных уравнений (2) и (3) относительно неизвестных $\langle \ln t \rangle$ и S можно решить методом Ньютона-Рафсона.

Для уровня нагружения $0{,}5\,F_p$ принято $t_\delta = 103640$ часов, $n = 4$, $k = 2$.

В итоге имеем следующие оценки величин $\langle \ln t \rangle$ и S – 11,21 и 1,95 соответственно. Тогда оценка среднего значения долговечности равна 73784 часа $\approx 8{,}4$ года.

Для уровня нагружения $0{,}6\,F_p$ принято $t_\delta = 79560$ часов, $n = 16$, $k = 12$.

Оценки величин $\langle \ln t \rangle$ и S равны 9,01 и 2,48. Тогда оценка среднего значения долговечности равна 8194 часа $\approx 0,94$ года.

На рис.4 показана эмпирическая зависимость долговечности стеклопластика от уровня нагружения с учетом выполненных на основе принципа максимального правдоподобия уточнений оценок долговечностей для уровней нагружения $0,5\,F_p$ и $0,6\,F_p$.

Указанная зависимость была аппроксимирована на основе уравнения Журкова: $t = ae^{-b\frac{F}{F_p}}$ (см. рис.4). Коэффициенты $a = 5986395$ и $b = 26$ были найдены на основе метода наименьших квадратов.

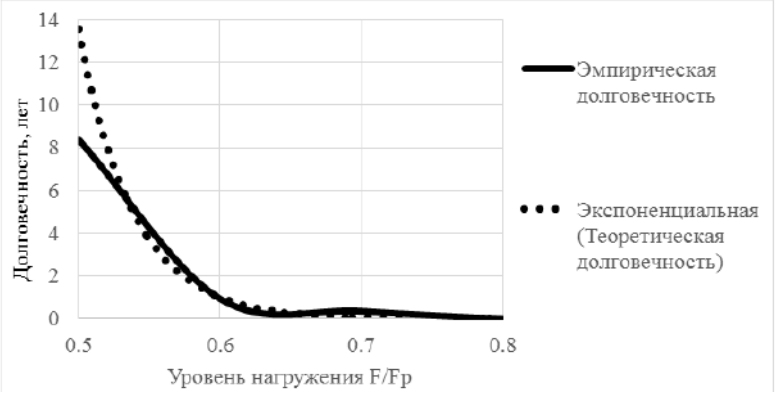


Рис.4.

ВЫВОДЫ

1. Вероятностное распределение случайной величины долговечности стеклопластика при растяжении можно аппроксимировать логарифмически нормальным законом, что согласуется с результатами предыдущих исследований (см., например, [3]).

2. Эмпирическая зависимость долговечности стеклопластика удовлетворительно аппроксимируется уравнением Журкова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савин В.Ф., Петров М.Г., Блазнов А.Н., Жаринов Ю.Б., Краснов А.А. *Метод определения эмпирических параметров уравнения долговечности композитных материалов* // Ползуновский вестник. – 2014. – Т.2. – №4. – С.80-85.
2. Лукьянов А.М., Чепелев Ю.Г., Лукьянова А.А. *Надежность и долговечность полимерных изоляторов контактной сети* // Вестник научно-исследовательского института железнодорожного транспорта. – 2018. – Т.77. – №2. – С.110-117.
3. Потапов В.Д., Горошков Ю.И., Лукьянов А.М. и др. *Полимерные материалы в устройствах контактной сети*. – М.: Транспорт, 1988. – 224 с.
4. Батрак В.Е., Бобряшов В.В., Бобряшов В.М. *Влияние нагруженности на долговечность конструкционных стеклопластиков* // Строительные материалы, оборудование, технологии XXI века. – 2018. – №7-8(234-235). – С.41-43.

5. Жаринов М.Ю., Марасанов А.И. *Исследование прочности однонаправленных стеклопластиков при растяжении* / 14-я Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред». Сборник трудов. – М.: ООО «Сам Полиграфист», 2024. – С.67-76.
6. Потапов В.Д., Лукьянов А.М., Жаринов М.Ю., Ступников С.А. *Ползучесть и долговечность однонаправленных стеклопластиков, используемых в полимерных изоляторах* // Электротехническая промышленность: Серия электротехнические материалы. – 1983. – №1.

УДК 539.3
EDN WWEXFM
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.9

НЕУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ФТОРОПЛАСТОВ, НАПОЛНЕННЫХ ГРАФЕНОМ*

Зайцев А.В.[1], Лобанов П.А.[1], Банников М.В.[2], Уваров С.В.[2], Лукьянов Н.С.[1], Зубко И.А.[3]

[1]Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Россия
[2]Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия
[3]Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск, Россия

Современные полимерные материалы играют ключевую роль в различных отраслях промышленности, авиастроении, электроники и медицины. Особый интерес представляют фторопласты – фторполимеры, обладающие высокой химической стойкостью, низким коэффициентом трения и термостабильностью. Однако их применение ограничено недостаточной механической прочностью и адгезионными свойствами. Одним из перспективных направлений модификации таких материалов является введение графена, который способен значительно изменить их эксплуатационные характеристики. Функциональные полимеры могут рассматриваться в качестве функциональных сенсоров, которые способны обеспечить мониторинг состояния элементов конструкций на этапах создания и эксплуатации. Последнее может быть осуществлено на основе экспериментального измерения тепло- и электропроводимости. Полимерные материалы являются диэлектриками. Однако их наполнение графеном и композициями на его основе позволяет получить новые классы тепло- и электропроводящих функциональных материалов.

При изготовлении функциональных полимерных материалов, наполненных графеном и композициями на его основе, остается технологически нерешенным вопрос сопряжения фаз и их адгезии, а также образования межфазных слоев. Характер механического поведения функциональных полимеров при нагружении, закономерности проявления эффектов изменения электрического сопротивления для окруженных слоем диэлектрика проводящих частиц, закономерности зарождения и роста дефектов внутри полимера и на межфазных поверхностях, закономерности изменение сопротивления в ансамбле контактирующих проводящих частиц предопределяют необходимость разработки программ и методик проведения экспериментальных исследований тепло- и электропроводности в процессе растяжения с непрерывной записью сигналов акустической эмиссии. Последнее может позволить оценить прочность адгезионных связей и провести идентификацию дефектов.

Разработана оригинальная семиэтапная программа нагружения, которая позволила исследовать механическое поведение функциональных фторполимеров, модифицированных графеном при «жестком» и «мягком» циклическом и квазистатическом активном нагружении и разгрузке. На первом

* *Работа выполнена в рамках Государственного задания (регистрационный номер темы №124020200116–1).*

этапе реализовано «мягкое» активное нагружение до усилия в 0,3 кН со скоростью 5 мм/мин и 1 мм/мин для «ненаполненных» и образцов с графеновым наполнением. На втором этапе реализовано «мягкое» циклическое нагружение со средней амплитудой 0,1 кН и частотой $f_{\sigma}^{(1)} = 1$ Гц (число циклов – 300). На третьем, четвертом и пятом этапах реализована серия последовательных «жестких» циклических нагружений с постепенно возрастающей частотой (1000, 5000 и 7000 циклов с частотами $f_{\varepsilon}^{(2)} = 5$ Гц, $f_{\varepsilon}^{(3)} = 10$ Гц и $f_{\varepsilon}^{(4)} = 20$ Гц соответственно). «Жесткое» нагружение было выбрано для исключения притока дополнительной энергии со стороны нагружающей системы. На шестом этапе нагружения в разработанной программе предусмотрена монотонная «жесткая» разгрузка до усилия в 0,1 кН (принимается за отсчетное). На седьмом этапе происходило монотонное жесткое активное растяжение до разрушения образца.

Подготовлены образцы из фторполимера НП-Силур в соответствии с требованиями стандарта ГОСТ 11262-2017. Для проведения анализа однородности деформации при одноосном растяжении на предварительно подготовленную поверхность образцов наносилась система реперных точек (15 на образец) с шагом 5 мм. Противоположная поверхность образца использовалась для высокоскоростного ИК-сканирования для исследования эволюции поля температур. На поверхности образца с реперными точками в его рабочей области размещались четыре датчика акустической эмиссии (АЭ) на расстоянии 15 мм между центрами. Такое расположение позволило достичь оптимального соотношения между площадью контроля и точностью локации источников АЭ событий. Испытания на одноосное нагружение образцов из «чистого» (без наполнителя) и функциональных фторполимеров, наполненных графеном до концентрации 0,03 масс. %, 0,3 масс. % и 3 масс. %, осуществлялось по разработанной программе с непрерывной записью in situ сигналов АЭ, поля температур и измерения активного сопротивления на экспериментальном оборудовании Пермского федерального исследовательского центра УрО РАН: система многоканальной регистрации АЭ Vallen AMSY-6; серво-гидравлическая испытательная машина Bi-00-100; ИК-камера CEDIP Silver SC5000 (рис.1). Эксперименты проводились с 4 образцами для каждой концентрации.

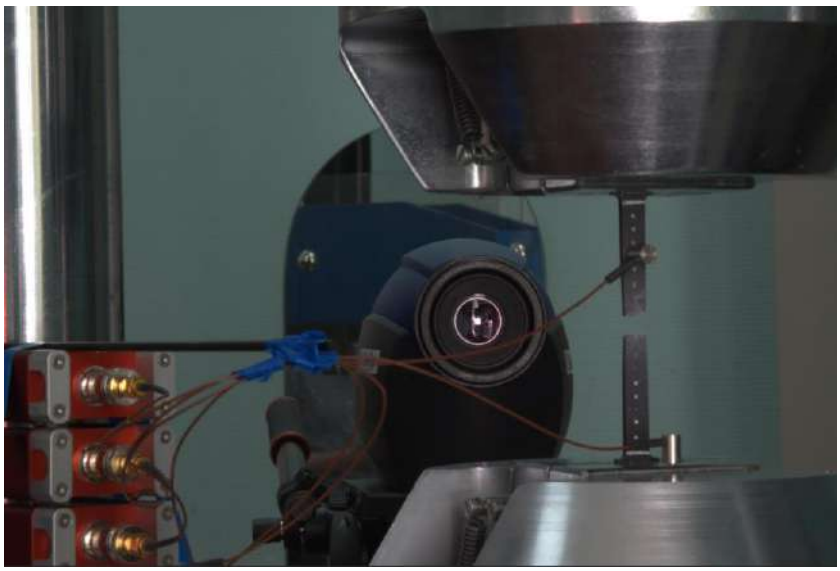


Рис.1. Разрушенный образец из фторсодержащего полимера НП-Силур с концентрацией графена 0,30%.

В результате проведенных испытаний для всех образцов фторполимера НП-Силур был обнаружен эффект Й. Кайзера (АЭ эффект памяти), который проявлялся при возрастании амплитуды нагрузок во время реализации этапов циклического нагружения. Эта общая фундаментальная закономерность поведения материалов при циклическом нагружении, установленная для нового класса материалов – функциональных полимеров, наполненных графеном, свидетельствует о достоверности всех полученных экспериментальных результатов при деформировании по разработанной программе.

Во время отработки первого этапа «мягкого» нагружения с частотой 1 Гц у всех образцов фторполимера «чистого» и с различными концентрациями графена в качестве наполнителя разогрев был или незначительный в пределах 0,01-0,05°С за весь «мягкий» цикл, или не наблюдался вообще.

Для «чистого» фторполимера на этапе «жесткого» нагружения с частотой $f_{\varepsilon}^{(2)} = 5$ Гц в начале отработки цикла с 0 по 2 сек средняя температура по длине рабочей части образца $T_{\text{ср}}$ скачкообразно увеличилась с 23,58°С до 23,62°С. Затем наблюдалось плавное увеличение $T_{\text{ср}}$ до 23,80°С. Далее с 200 сек по 354 сек следовал этап «жесткого» нагружения с частотой $f_{\varepsilon}^{(3)} = 10$ Гц. На этом временном отрезке был установлен немонотонный рост $T_{\text{ср}}$ с 23,70°С до 26,60°С (рис.2). На этапе «жесткого» циклического нагружения с частотой $f_{\varepsilon}^{(4)} = 20$ Гц на временном промежутке 301-558 сек средняя температура $T_{\text{ср}}$ возросла с 26,60°С до 27,60°С. При этом была замечена ярко выраженная локализация температур в нижней части образца. Эта локализация была связана с началом образования шейки (локализацией деформаций). На завершающем этапе программы нагружения, когда было реализовано предельной «жесткое» монотонное растяжение, наблюдался эффект «бегающей шейки», зарожденной в нижней части образца. Температура внутри «шейки» была на 2,0°С больше по сравнению с остальной рабочей частью. Образец был разрушен в нижней рабочей части образца на 400 сек при достижении нагрузки в 1 кН.

Для образца из фторполимера НП-Силур с концентрацией графена 0,3% на этапе «жесткого» циклического нагружения с частотой $f_{\varepsilon}^{(2)} = 5$ Гц в первые 17 сек отработки программы нагружения $T_{\text{ср}}$ линейно увеличивалась с 24,28°С по 24,40°С. Дальнейшее нагружение приводило к заметному снижению скорости нагрева, которое наблюдалось с 17 по 240 сек. К концу второго этапа нагружения $T_{\text{ср}}$ достигла значения 24,64°С. На третьем этапе «жесткого» циклического нагружения с частотой $f_{\varepsilon}^{(3)} = 10$ Гц во временном промежутке с 245 сек по 595 сек. средняя температура $T_{\text{ср}}$ возрастала с 24,30°С до 25,20°С (рис.2). Во время четвертого этапа «жесткого» циклического нагружения с частотой $f_{\varepsilon}^{(4)} = 20$ Гц, который проходил с 595 по 665 сек, скорость нагрева увеличилась и $T_{\text{ср}}$ изменилась с 24,70°С до 26,4°С.

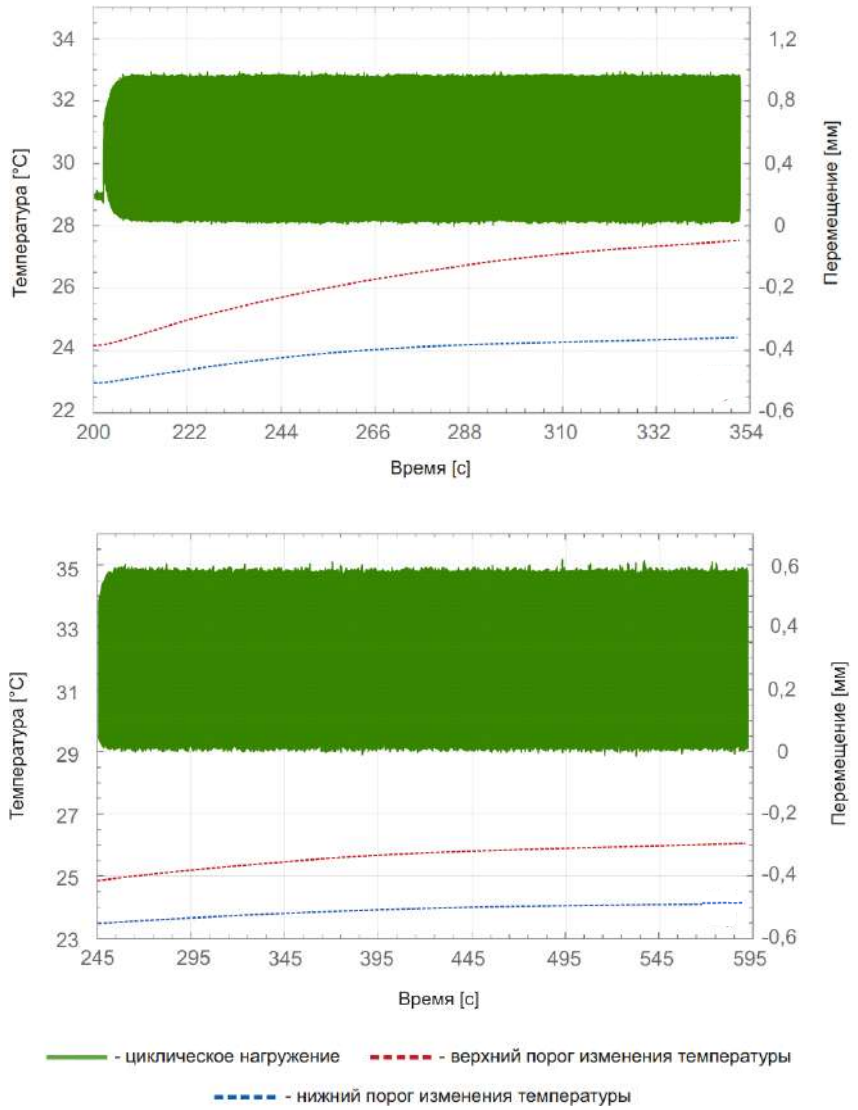


Рис.2. Отработка программы нагружения образцов «чистого» и наполненного графеном до концентрации 0,3 масс. % фторполимера: «жесткое» циклическое нагружение с частотой $f_{\varepsilon}^{(3)} = 10$ Гц, совмещенная эволюциями поля температур в рабочей части образца, регистрируемыми in situ во время испытаний высокоскоростным высокочувствительным тепловизором CEDIP Silver SC5000.

Таблица 1.

Изменение температуры (°C) по нижнему (числитель) и верхнему порогу (знаменатель) образцов из фторполимера НП-Силур, наполненного графеном, на различных этапах «жесткого» циклического нагружения

Концентрация графена, масс. %	$f_{\varepsilon}^{(2)} = 5$ Гц (0-200 сек)	$f_{\varepsilon}^{(3)} = 10$ Гц (200-355 сек)	$f_{\varepsilon}^{(4)} = 20$ Гц (355-455 сек)
0,00 %	0,10 / 0,10	1,50 / 3,50	0,90 / 1,90
0,03 %	0,05 / 0,05	0,10 / 0,50	0,50 / 0,70
0,30 %	0,10 / 0,20	0,80 / 0,50	1,10 / 1,70
3,00 %	0,10 / 0,10	0,50 / 0,40	0,50 / 0,60

В Таблице 1 проиллюстрировано влияние концентрации наполнителя на изменение температуры одной из поверхности рабочей части образцов. Эти изменения, полученные в результате обработки распределений температур, зафиксированных in situ во время испытаний высокоскоростным высокочувствительным тепловизором CEDIP Silver SC5000. Как видим, увеличение концентрации графена приводит к снижению температуры разогрева при циклическом нагружении. Одним из вариантов объяснения этого зарегистрированного эффекта является появление нового механизма деформирования в наполненных полимерах – межслоевого сдвига по плоскостям скольжения в графеноподобных материалах.

Получены новые экспериментальные результаты, иллюстрирующие значительное снижение тепловыделения при циклическом нагружении образцов из функциональных фторполимеров с увеличением концентрации графена (Таблица 2). Особенно показательно уменьшение диссипации энергии (от 3 до 10 раз при 3 масс. % наполнении).

Таблица 2.

Диссипация энергии при «жестком» циклическом нагружении образцов из «чистого» и наполненного графеном фторполимера.

Концентрация графена, масс. %	Энергия, выделяемая при диссипации, Дж/м^3		
	$f_\varepsilon^{(2)} = 5$ Гц, 1 цикл / 1000 циклов	$f_\varepsilon^{(3)} = 10$ Гц, 1 цикл / 5000 циклов	$f_\varepsilon^{(4)} = 20$ Гц, 1 цикл / 7000 циклов
0,00	1862,44 / $1{,}953\cdot10^6$	4073,47 / $5{,}420\cdot10^6$	4044,24 / $13{,}78\cdot10^6$
0,03	1447,08 / $1{,}410\cdot10^6$	1056,63 / 63998	962,02 / $4{,}28\cdot10^6$
0,30	1963,00 / $1{,}523\cdot10^6$	871,86 / $0{,}46\cdot10^6$	788,71 / $6{,}17\cdot10^6$
3,00	642,19 / $1{,}038\cdot10^6$	470,16 / $0{,}52\cdot10^6$	420,92 / $3{,}48\cdot10^6$

Для количественной оценки диссипации энергии были определены площади петель гистерезиса, полученных в результате циклического нагружения. Расчеты проводилась в пакете символьных вычислений Wolfram Mathematica 13.3. Исходные данные, полученные в ходе испытаний на немонотонное одноосное нагружение, представляли собой массивы точек, соответствующих зависимости напряжения от деформации для каждого цикла нагружения. На их основе строились замкнутые гистерезисные кривые, после чего применялся метод Гаусса для вычисления площади. Было замечено, что увеличение концентрации графена приводит к снижению потерь энергии. Этот эффект может быть обусловлен несколькими факторами, связанными с особенностями структуры наполненных фторполимеров (появлением новых структурных механизмов деформирования в материале), не свойственными для полимеров. Введение графена в матрицу фторполимера способствует повышению жесткости материала. Графен способен сформировать «жесткий» каркас, который, с одной стороны, ограничивает подвижность полимерных цепей, а с другой – позволяет реализовать «легкое» скольжение по графеновым слоям, которое также снижает трение макромолекул и глобул, и, как следствие, приводит к снижению механических потерь.

Если предположить, что все потери энергии связаны с выделением тепла, и иметь информацию о распределении температур на поверхности рабочей части образца, можно провести оценку теплоемкости «чистого» и наполненного графеном фторполимера (Таблица 3) и показать ее зависимость от частоты циклического нагружения.

Таблица 3.

Зависимость теплоемкости от частоты «жесткого» циклического нагружения «чистого» и наполненного графеном фторполимера.

Концентрация графена, масс. %	Нормированные теплоемкости Дж/°С		
	$f_{\varepsilon}^{(2)} = 5$ Гц	$f_{\varepsilon}^{(3)} = 10$ Гц	$f_{\varepsilon}^{(4)} = 20$ Гц
0,00	3,49	0,31	0,54
0,03	5,43	0,66	0,30
0,30	2,45	0,25	0,11
3,00	1,20	0,20	0,14

Как видим, экспериментальные данные выявили тенденцию снижения теплоемкости фторполимера НП-Силур с увеличением концентрации графенового наполнителя. Этот эффект может быть объяснен несколькими причинами. Во-первых, графен обладает значительно меньшей теплоемкостью по сравнению с матрицей из фторполимера. Поэтому эффективная теплоемкость композита уменьшается. Во-вторых, введение графеновых наночастиц во фторполимер ограничивает подвижность полимерных цепей и молекул, снижая их вклад в «колебательную составляющую» теплоемкости. А это подтверждается снижением уровня диссипации энергии при циклическом деформировании наполненного фторполимера.

При проведении экспериментов получены новые результаты эволюции удельного сопротивления функциональных фторполимеров, модифицированных графеном, при in situ нагружении по разработанной программе. Получены пороговые зависимости сопротивления, связанные с нарушением проводимости. Наблюдаемые изменения сопротивления при деформации могут служить функциональным сенсором (индикатором) для процессов неупругого деформирования и повреждения материала.

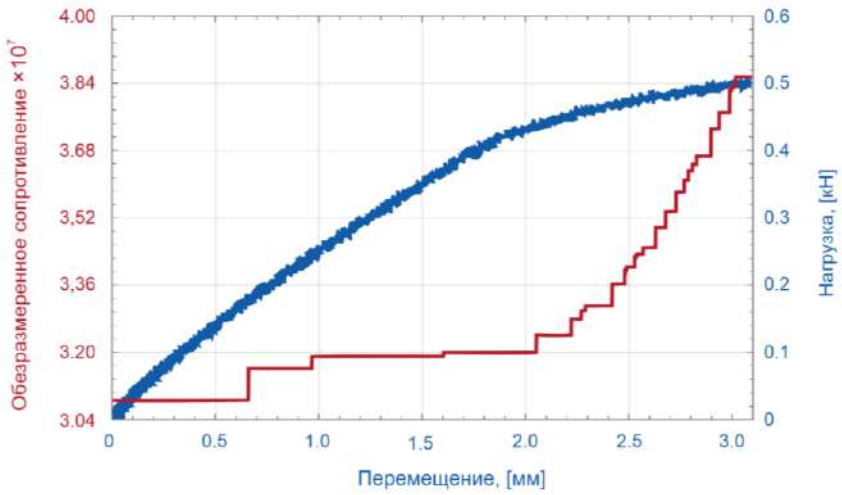


Рис.3. Эволюция обезразмеренного удельного сопротивления функционального фторполимера, наполненного графеном до концентрации 3 масс. %, на этапе монотонного «жесткого» одноосного растяжения.

На рис.3 представлены совмещенные диаграмма деформирования функционального фторполимера, наполненного графеном до концентрации 3 масс. %, построенная для этапа монотонного «жесткого» одноосного растяжения и зависимость обезразмеренного удельного сопротивления

(отнесенного к удельному сопротивлению графита от $2{,}83 \cdot 10^{-7}$ Ом·м до $3{,}18 \cdot 10^{-7}$ Ом·м) от перемещения. Обратим внимание на то, что, несмотря на кажущуюся эквивалентность кривых для обезразмеренного удельного сопротивления и зависимости эволюции дефектной структуры при растяжении, эти зависимости имеют принципиально иной характер. Рост сопротивления связан не только с зарождением и ростом дефектов, но и с потерей связности в цепочке проводящих частиц графена.

Самостоятельный интерес представляет исследование влияния истории нагружения на характер эволюции электросопротивления функциональных фторполимеров, наполненных графеном.

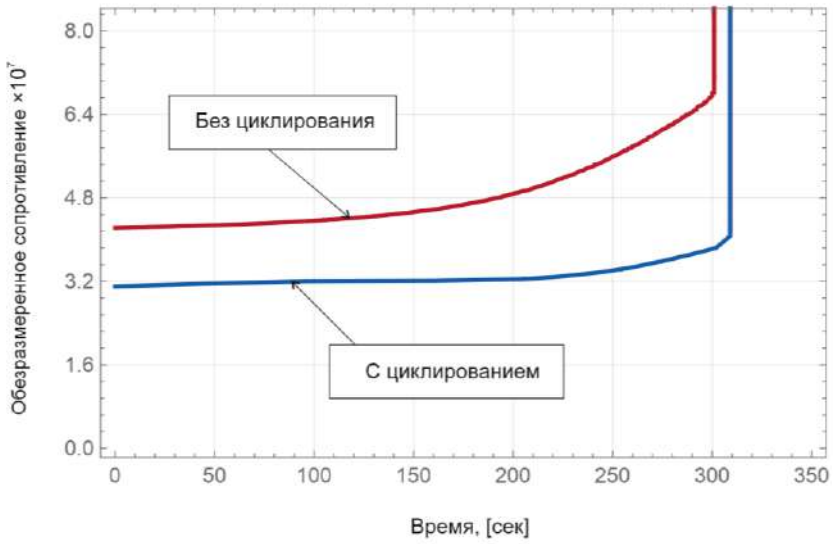


Рис.4. Эволюция обезразмеренного удельного сопротивления для двух образцов функционального фторполимера, наполненного графеном до концентрации 3 масс. %, на этапе монотонного «жесткого» одноосного растяжения.

Специально проведенные экспериментальные исследования показали, что у образцов, для которых не были реализованы первый – шестой этапы программы нагружения (подвергались монотонному «жесткому» растяжению без предварительных этапов циклического нагружения) скорость роста сопротивления была выше, чем у образца, испытавших циклическое нагружение. Это происходит из-за разрушения адгезионных связей и появления новых механизмов деформирования, которые ранее были обнаружены при помощи АЭ. Таким образом история нагружения оказывает существенное влияние на удельное сопротивление функциональных фторполимеров.

УДК 539.3:539.37
EDN QAWDDS
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.10

ЗАДАЧА ЭШЕЛБИ И ГОМОГЕНИЗАЦИЯ КОМПОЗИТОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ МАТРИЦЫ

Зборовский В.Г.

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Троицкое обособленное подразделение (ТОП ФИАН), г. Троицк, Москва, Россия
НИЦ «Курчатовский институт», г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Задача о деформациях неограниченной упругой среды при наличии деформации неупругой природы (собственной деформации, СД) внутри эллипсоидальной области (включения) была рассмотрена Эшелби [1] для случая изотропной среды. Если собственная деформация постоянна по объему включения, полная деформация внутри него также оказывается постоянной. В силу линейности задачи связь между полной и собственной деформациями выражается тензором 4-го порядка (тензором Эшелби) [1-4]. К этому решению сводится задача об эллипсоидальном включении в однородно нагруженной неограниченной среде («матрице»), когда упругие модули матрицы и включения различаются. А именно, внутри включения возникает однородная деформация [1-4] (что можно назвать упругой поляризацией). Тензор Эшелби изотропно-упругой среды выражается через эллиптические интегралы [1,2,4], а в общем случае анизотропной упругости его удается привести к квадратурам на сфере [2-4].

Указанные результаты Эшелби являются частным случаем свойства полиномиальной консервативности, которое доказано для эллипсоидальных включений в произвольной анизотропной упругой среде: если внешнее поле есть полином степени m в окрестности включения, то поле внутри эллипсоида – также полином степени m [4-6].

Полезность результатов Эшелби для задач микромеханики и, в частности, для оценок эффективных свойств композитов объясняется тем, что они позволяют найти факторы концентрации для включений в аналитическом или полуаналитическом виде. На решении Эшелби основаны разнообразные схемы гомогенизации, в частности теория Мори-Танака, самосогласованный метод, а также границы Хашина-Штрикмана-Уолпола для эффективных упругих модулей [3].

Расширение вышеупомянутых подходов на неупругие среды является нетривиальной задачей даже для случая линейных вязкоупругих материалов [7], поскольку деформации сложным образом зависят от истории нагружения. Наиболее простые подходы, сочетающие обычную гомогенизацию упругой части и усреднение неупругих деформаций по фазам, не учитывают локальные поля в матрице вблизи включения и неправильно описывают ее релаксацию. Принцип упруго-вязкоупругого соответствия позволяет получать точные аналоги соотношений для упругих сред (в частности, решения Эшелби) в виде преобразования Лапласа [2,3,8]. Однако его применение требует аналитического или численного обращения преобразования Лапласа, что в общем случае является

затруднительным (дополнительная проблема – учет сложных сценариев нагружения и зависимости механических свойств от времени).

Выход видится в разработке моделей вязкоупругих гетерогенных сред, использующих понятие внутренних переменных [7] и эволюционные уравнения для них. К сожалению, внутренние переменные нелегко идентифицировать. Обзор разнообразных приближенных подходов, основанных на физических соображениях, представлен в [7]. Недавно получена простая система дифференциальных уравнений, которой точно удовлетворяет решение задачи Эшелби для изотропной максвелловской среды [7,9]. Для вывода используются явное представление функции Грина [7] или представление тензора Эшелби в виде рациональной функции упругих модулей [9], что затрудняет обобщение подхода на анизотропные среды. Получение требуемых соотношений возможно в особом случае включения в форме эллиптического цилиндра, ориентированного вдоль оси симметрии трансверсально-изотропной среды [9], однако на момент публикации такие работы автору неизвестны.

В данной работе представлен метод решения задачи Эшелби для линейных анизотропных сред, основанный на спектральном разложении преобразования Фурье от поля перемещений по сферическим гармоникам. Полученные разложения позволяют эффективным способом вычислить тензор Эшелби для упругих сред и вывести систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для спектральных компонент тензора деформаций, обобщающую решение Эшелби на случай вязкоупругих сред. Метод может использоваться для нахождения среднего и локального отклика гетерогенной среды в зависимости от истории нагружения.

1. ЗАДАЧА ЭШЕЛБИ ДЛЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ В КОМПОНЕНТАХ ФУРЬЕ

Далее в работе будет использоваться следующая система обозначений. Индексы у тензоров будут опускаться, если в них нет необходимости. Скалярное произведение и свертка по паре индексов обозначены как «·» и «:», соответственно. Компоненты и операторы в фурье-пространстве обозначены акцентами «~» и «^». Для коэффициентов разложения и матричных элементов операторов в базисе сферических гармоник применяются обозначения «бра-кет» Дирака [10]. Индекс «*» означает комплексное сопряжение, I – единичный тензор, Ω – телесный угол.

Перемещения в задаче Эшелби вычисляются путем свертки производной от функции Грина для упругой среды с распределением тензора собственной деформации в среде [2-4,6]. В общем случае анизотропно-упругой среды для функции Грина известны ее компоненты Фурье [2]. Поэтому тензор Эшелби выражается через интеграл по объему эллипсоида и фурье-пространству, включающий образ функции Грина. Путем различных преобразований [2,4] его удается свести к интегралу по единичной сфере S. Полученное выражение (интегральная формула Мура) позволяет численно находить тензор Эшелби для произвольной формы эллипсоида и упругих модулей среды.

Чтобы получить систему ОДУ для дискретных переменных, характеризующих вязкоупругие деформации среды при наличии включения, полезно от интегрирования по телесному углу перейти к суммированию ряда по каким-либо базисным функциям на сфере. Оказывается, что сферические гармоники, образующие базис в пространстве $L^2(S)$ [10], хорошо подходят даже для анизотропных сред. Разложение целесообразно проводить для фурье-

компонент перемещений, поскольку именно в этом представлении дифференциальные операторы теории упругости имеют простой вид. Вместо использования функции Грина имеет смысл напрямую решать уравнения равновесия, так как это сократит путь к ответу.

В работах [2,4-6] вводится замена координат, преобразующая эллипсоидальное включение в единичный шар. Это позволяет упростить геометрию задачи, не жертвуя в общем случае симметрией упругих свойств. Пусть центр включения совпадает с началом координат, а его поверхность описывается уравнением $x_j T_{jk} x_k = 1$, где T – симметричный положительно-определенный тензор 2-го ранга (тензор формы). Далее будет использован симметричный тензор $\gamma = \sqrt{T}$, и введены новые координаты $z_j = \gamma_{jk} x_k$, в которых граница эллипсоида становится единичной сферой: $z_j z_j = 1$. Собственные значения γ суть обратные полуоси эллипсоида. Производные преобразуются как $\partial/\partial x_j = \gamma_{kj}\, \partial/\partial z_k$. Компоненты тензоров u_j, ε_{jk}, σ_{jk} и т.п. будут рассматриваться в исходной (не преобразованной) системе координат.

Пусть $\tilde{u}_k\left(\vec{\xi}\right)$ – преобразование Фурье вектора перемещений, рассматриваемого в зависимости от координат z

$$\tilde{u}_k\left(\vec{\xi}\right) = (2\pi)^{-3/2} \int u_k\left(\vec{z}\right) \exp\left(-i\vec{\xi}\cdot\vec{z}\right) d^3 z. \tag{1.1}$$

Далее будет использоваться представление вектора $\vec{\xi}$ в виде $\xi_j = \xi \cdot n_j$, где ξ – длина, $\vec{n}$ – единичный вектор. Тензор деформаций Коши

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)$$

при переходе к компонентам Фурье записывается в следующем виде

$$\tilde{\varepsilon} = i\xi \hat{D}\tilde{u}, \text{ где } \hat{D}\tilde{u} = (\gamma n) \odot \tilde{u}, \ (a \odot b)_{jk} = \left(a_j b_k + a_k b_j\right)/2, \tag{1.2}$$

где $\odot$ означает симметричное тензорное произведение векторов.

Введенный оператор $\hat{D}$ уместно назвать угловым оператором деформации, поскольку в него не входит абсолютная величина ξ.

Равнодействующая внутренних сил упругости в единице объема $f'_k = \partial \sigma_{jk} / \partial x_j$ выражается через оператор $\hat{D}^\dagger$, эрмитово сопряженный с $\hat{D}$

$$\tilde{f}' = i\xi \hat{D}^\dagger \tilde{\sigma}. \tag{1.3}$$

Эрмитово сопряжение понимается в смысле тензорной свертки и последующего интегрирования по телесному углу

$$\int a^* : (Db)\, d\Omega = \int \left(D^\dagger a\right)^* \cdot b\, d\Omega. \tag{1.4}$$

Закон Гука для анизотропной упругой среды имеет вид $\sigma = L : \varepsilon$, где L – тензор упругих модулей. По аналогии оператор действия упругих модулей $\hat{L}$ определяется равенством $\hat{L}\tilde{\varepsilon} = L : \tilde{\varepsilon}$.

При наличии внешних объемных сил f уравнение равновесия имеет вид $f' + f = 0$. С учетом формул (1.2), (1.3) оно записывается через компоненты Фурье перемещений в следующем виде

$$-\xi^2 \hat{W}\tilde{u} + \tilde{f} = 0, \text{ где } \hat{W} = \hat{D}^\dagger \hat{L} \hat{D}. \tag{1.5}$$

Линейный оператор $\hat{W}$ является эрмитовым и, как можно показать, ограничен сверху и снизу, если только тензор формы эллипсоида и матрица упругих модулей среды не является вырожденными. Его можно назвать угловым оператором Ламе [4]. Для тензорных компонент $\hat{W}$ справедливо выражение

$$\hat{W}_{jk} = L_{jrks}\zeta_r\zeta_s \text{, где } \zeta_j = \gamma_{jk}n_k \,. \tag{1.6}$$

Уравнение (1.5) имеет следующее решение в компонентах Фурье

$$\tilde{u} = \xi^{-2}\hat{W}^{-1}\tilde{f} \,. \tag{1.7}$$

Если в среде задано поле собственных деформаций, которое описывается тензором μ, закон Гука принимает вид $\sigma = L:(\varepsilon - \mu)$. Подстановка его в уравнения равновесия показывает, что СД эквивалентны объемным силам с плотностью $f_k = -\partial\left(L_{jkrs}\mu_{rs}\right)\big/\partial x_j$ [2-4]. Пусть другие источники объемных сил отсутствуют, тогда решение (1.7) для деформаций с учётом (1.2) принимает следующий вид

$$\tilde{\varepsilon} = \hat{S}\tilde{\mu} \text{, где } \hat{S} = \hat{P}\hat{L} \,,\ \hat{P} = \hat{D}\hat{W}^{-1}\hat{D}^{\dagger} \,. \tag{1.8}$$

В классической задаче Эшелби тензор μ постоянен внутри включения и равен 0 за его пределами. В этом случае эквивалентные объемные силы сосредоточены на границе включения [1,4]. Тензор Эшелби *S* и родственный ему тензор Хилла *P* определяются из соотношений $\varepsilon = S:\mu$ и $S = P:L$ [1-4]. Поэтому можно считать, что формула (1.8) обобщает решение упругой задачи Эшелби, а операторы $\hat{S}$ и $\hat{P}$ логично назвать операторами Эшелби и Хилла соответственно.

2. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ГАРМОНИКАМ

Полученные в разделе 1 результаты не являются принципиально новыми, однако операторная форма записи ответа позволяет использовать разложения поля $\tilde{u}$ по дискретному базису сферических гармоник (СГ). Наиболее простой способ перейти к такому разложению – подстановка в формулу (1.1) разложения плоской волны [10]

$$\exp(i\vec{z}\cdot\vec{\xi}) = 4\pi\sum_{l=0,|m|\le l}^{\infty} i^l j_l\left(z\xi\right)Y_{lm}\left(\vec{n}\right)Y_{lm}^{*}\left(\vec{e}\right), \tag{1.9}$$

где вектор $\vec{z}$ представлен в виде $\vec{z} = z\cdot\vec{e}$ с единичным вектором $\vec{e}$, а j_l и Y_{lm} суть сферические функции Бесселя и сферические гармоники, соответственно. С использованием свойств симметрии СГ равенство (1.1) приводится к следующему виду

$$\left\langle lm\middle|\tilde{u}\left(\xi,\vec{n}\right)\right\rangle = i^{-l}H_l\left\{\left\langle lm\middle|u\left(z,\vec{e}\right)\right\rangle\right\}, \tag{1.10}$$

где

$$H_l\left\{\varphi\right\}\left(\xi\right) = \xi^{-1}\int_0^{\infty}\sqrt{z\xi}J_{l+1/2}\left(z\xi\right)z\varphi\left(z\right)dz \,. \tag{1.11}$$

Из определения (1.11) видно, что функция $\xi H_l\left\{\varphi\right\}\left(\xi\right)$ является преобразованием Ганкеля с индексом $l+1/2$ от функции $z\varphi\left(z\right)$. Обращение формулы (1.10) имеет вид

$$u\left(\vec{z}\right) = \sum_{l,m} i^l H_l\left\{\left\langle lm\middle|\tilde{u}\left(\xi,\vec{n}\right)\right\rangle\right\}Y_{lm}\left(\vec{e}\right), \tag{1.12}$$

поскольку преобразование Ганкеля является обратным к себе [11].

Формулы (1.10), (1.12) применимы и другим тензорным полям.

Полученный в разделе 1 ответ (1.8) остается без изменений, если под $\tilde{u}$, $\tilde{\varepsilon}$ и т.д. понимать бесконечные векторы их компонент в базисе сферических гармоник: $\langle lm|\tilde{u}\rangle$, $\langle lm|\tilde{\varepsilon}\rangle$ и т.д. Операторы $\hat{D}$, $\hat{L}$, $\hat{W}$ в этом базисе оказываются бесконечными матрицами. Их элементы могут быть вычислены по общим формулам, известным в квантовой механике [10]. Важно отметить, что $\langle l'm'|\hat{D}|lm\rangle = 0$, если $l' \neq l \pm 1$, то есть оператор $\hat{D}$ изменяет четность гармоники. Соответственно, операторы $\hat{L}$, $\hat{W}$ и $\hat{W}^{-1}$ не изменяют четность.

Пусть теперь $\tilde{\mu}$ представимо в виде $\tilde{\mu} = A\Phi(\xi)Y_{l'm'}(\vec{n})$, где A – постоянный тензор, а Ф – некоторая функция (далее будет показано, что этот случай включает задачу Эшелби). Угловые операторы, определенные в разделе 1, не будут действовать на функцию Ф. Поэтому решение (1.8) для деформаций принимает следующий вид

$$\langle lm|\tilde{\varepsilon}\rangle = \Phi(\xi)\langle lm|\hat{S}|l'm'\rangle : A. \tag{1.13}$$

При переходе в координатное пространство по формуле (1.12) это дает

$$\varepsilon(\vec{z}) = \left[\sum_{l,m} i^l H_l\{\Phi\}\langle lm|\hat{S}|l'm'\rangle Y_{lm}(\vec{e})\right] : A. \tag{1.14}$$

Стоящие в правой части матричные элементы не зависят от ξ. Из вышеприведенных соображений четности следует, что они равны нулю, если l' и l отличаются на нечетное число.

Формула (1.14) естественным способом обобщается на линейные комбинации членов типа $\Phi(\xi)Y_{l'm'}(\vec{n})$. Предлагаемый подход позволяет свести вычисление деформаций к определению матричных элементов и преобразований $H_l\{\Phi\}$. Матричные элементы находятся либо интегрированием на сфере с использованием выражений (1.2), (1.6) для угловых операторов, либо напрямую через матричные представления операторов. Для приближенного вычисления матрицы $\hat{W}^{-1}$ можно использовать метод Ритца, то есть решать систему линейных уравнений с конечномерной аппроксимацией оператора $\hat{W}$. Для задач типа Эшелби величины $H_l\{\Phi\}$ находятся аналитически [12].

Для классической задачи Эшелби тензор μ равен произведению постоянного тензора СД ω на характеристическую функцию единичного шара. Вычисление преобразования Фурье позволяет найти

$$\tilde{\mu} = \sqrt{4\pi}\omega\,\Phi(\xi)Y_{00}(\vec{n}),\ \Phi(\xi) = \xi^{-3/2}J_{3/2}(\xi), \tag{1.15}$$

что соответствует вышеуказанной форме.

Вычисление $H_l\{\Phi\}$ сводится к разрывному интегралу Вебера-Шафхейтлина [11] и при $z<1$ (то есть для внутренних точек шара) дает следующий ответ

$$H_l\{\Phi\} = \begin{cases} 1, & l = 0 \\ 0, & l = 2q > 0 \end{cases}. \tag{1.16}$$

Подстановка в (1.14) позволяет записать окончательный результат для деформаций внутри включения

$$\varepsilon(\vec{z}) = S : \omega, \text{ где } S = P : L,\ P = \langle 00|\hat{P}|00\rangle. \tag{1.17}$$

Поскольку правая часть не зависит от $\vec{z}$, равенство (1.17) доказывает свойство Эшелби. По определению S и P суть тензоры Эшелби и Хилла, соответственно, причем из формул (1.5), (1.17) очевидно, что тензор Хилла является симметричным.

Свойство полиномиальной консервативности может быть доказано аналогичным образом с использованием соотношений типа (1.16), но для большего l. Доказательство представлено в работе [12].

Чтобы вычислить матричный элемент оператора $\hat{P}$ по формуле (1.17) в пространстве функций на сфере, нужно подставить $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$ и выражения (1.2), (1.6) для угловых операторов. Это дает

$$P_{jkrs} = \left(\frac{1}{4\pi} \int \zeta_j \left[L_{karb} \zeta_a \zeta_b \right]^{-1} \zeta_s d\Omega(\vec{n}) \right)_{(jk)(rs)}, \tag{1.18}$$

где под $[\ ]^{-1}$ понимается нахождение обратного тензора 3×3, а круглые скобки означают симметризацию по парам jk и rs. С точностью до обозначений и множителя $L\omega$ равенство (1.18) есть интегральная формула Мура (17.14) [2] (см. также формулу (2.42) [4]).

Другой способ вычисления матричного элемента заключается в использовании матричных представлений операторов и метода Ритца. Такой подход позволяет получать экспоненциальную по числу сферических гармоник сходимость численного решения для P, если форма эллипсоида и модули упругости не близки к вырожденным.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭШЕЛБИ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Если в среде имеется включение с собственной деформацией, за счет напряжений снаружи включения [1] матрица будет неупруго деформироваться. Это, в свою очередь, будет влиять на поля напряжений и деформаций во включении. Разработанный в разделах 1, 2 аппарат позволяет свести задачу Эшелби для эллипсоидального включения в линейной анизотропной вязкоупругой среде к системе ОДУ, записанной для коэффициентов разложения компонент Фурье по сферическим гармоникам.

Для определенности будет рассматриваться максвелловское тело, характеризуемое тензором упругих модулей L и тензором вязких податливостей B, причем на последний не будет наложено никаких ограничений. Тензоры L и B могут зависеть от времени, но не от механических полей.

В закон Гука, помимо полных и собственных деформаций, войдет тензор вязких деформаций η, эволюция которого определяется локальным значением тензора напряжений

$$\sigma = L : (\varepsilon - \mu - \eta), \ \dot{\eta} = B : \sigma. \tag{1.19}$$

Соотношения (1.19) справедливы при замене деформаций и напряжений на их фурье-компоненты (по пространству). Это позволяет использовать общее решение (1.8) с заменой $\tilde{\mu}$ на $\tilde{\mu} + \tilde{\eta}$. Дифференциальное уравнение на фурье-компоненты $\tilde{\eta}$ записывается в виде:

$$\dot{\tilde{\eta}} = -\hat{B}\hat{Q}(\tilde{\mu} + \tilde{\eta}), \text{ где } \hat{Q} = \hat{L} - \hat{L}\hat{P}\hat{L} \tag{1.20}$$

(оператор $\hat{B}$ введен аналогично $\hat{L}$). Эрмитов оператор $\hat{Q}$ является аналогом второго тензора Хилла $Q = L(I - S)$ [3]. Соответственно, $\tilde{\varepsilon} = \hat{S}(\tilde{\mu} + \tilde{\eta})$.

Уравнение (1.20) дополняется начальным условием $\tilde{\eta}\left(t=0\right)=0$. Решение его строится благодаря тому, что операторы в правой части содержат только угловые переменные в пространстве Фурье. В классической задаче Эшелби $\tilde{\mu}$ допускает разложение (1.15), поэтому для $\tilde{\eta}$ будет справедливо разложение того же типа $\tilde{\eta}=\sqrt{4\pi}\Phi\left(\xi\right)\Psi\left(\vec{n}\right)$ с некоторой угловой тензорной функцией Ψ. В отличие от $\tilde{\mu}$, функция Ψ будет содержать все четные сферические гармоники.

Множитель $\Phi\left(\xi\right)$ сокращается, и разложение уравнения (1.20) по сферическим гармоникам позволяет найти следующую (бесконечную) систему ОДУ для коэффициентов $\left\langle lm\middle|\Psi\right\rangle$

$$\frac{d}{dt}\left\langle lm\middle|\Psi\right\rangle=-\left\langle lm\middle|\hat{B}\hat{Q}\middle|00\right\rangle:\omega-\left\langle lm\middle|\hat{B}\hat{Q}\middle|\Psi\right\rangle. \tag{1.21}$$

Для вычисления тензора деформаций внутри включения можно воспользоваться формулой типа (1.14), однако при вычислении вклада $\tilde{\eta}$ необходимо заменить угловую функцию в виде гармоники $\left|l'm'\right\rangle$ на $\left|\Psi\right\rangle$. Это дает следующий ответ, обобщающий формулу (1.17) на вязкоупругий случай

$$\varepsilon\left(\vec{z}\right)=S:\omega+\varepsilon^{\mathrm{A}},\text{ где }\varepsilon^{\mathrm{A}}=\left\langle 00\middle|\hat{S}\middle|\Psi\right\rangle. \tag{1.22}$$

Член ε^{A} обозначает деформации, возникающие внутри включения за счет взаимодействия с неупруго деформированной матрицей. Напряжение внутри включения выражается через вторые тензор и оператор Хилла

$$\sigma=-Q:\omega+\sigma^{\mathrm{A}},\text{ где }\sigma^{\mathrm{A}}=-\left\langle 00\middle|\hat{Q}\middle|\Psi\right\rangle. \tag{1.23}$$

Система (1.21) и формула (1.22) решают поставленную задачу об определении деформации эллипсоидального включения в вязкоупругой среде. Как и для упругого случая, выполняется свойство Эшелби: деформации внутри включения оказываются однородными по объему. Этот факт был установлен в работе [8], исходя из принципа упруго-вязкоупругого соответствия (в частном случае, когда вязкоупругий отклик описывается сверткой). При численном решении, как и в упругом случае, угловые операторы аппроксимируются матрицами, что позволяет свести систему (1.21) к конечной системе ОДУ.

4. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Если включение и матрица обладают различными механическими модулями (случай неоднородности), наложение внешнего поля создает дополнительные напряжения и деформации. Для эллипсоидальной неоднородности в изотропной упругой среде Эшелби предложил метод эквивалентного включения [1], который легко обобщается на анизотропные упругие среды [2-4]. Метод позволяет заменить неоднородность включением со свойствами матрицы и наложенной дополнительной собственной деформацией. Величина ее определяется из равенства напряжений и деформаций в исходном и эквивалентном включении, и пропорциональна внешнему полю в отсутствие истинных СД среды и включения (как и должно быть). Замена позволяет доказать однородность напряжений и деформаций внутри включения. Добавочную СД («поляризацию») наиболее просто получить, формально рассматривая ее при заданных значениях напряжения во включении [4,5]. В свою очередь, напряжение определяется через

собственную деформацию в силу решения Эшелби, что замыкает систему уравнений метода.

Целесообразно вывести метод эквивалентного включения для анизотропных вязкоупругих сред из соотношения для добавочной поляризации, записывая ОДУ только для величин, которые определяются вязкими деформациями.

Пусть матрица и включение описываются материальными уравнениями (1.19), однако тензоры L^k, B^k, μ^k для них различаются, что обозначено индексом «k» фазы (0 для матрицы, 1 для включения). Истинные собственные деформации μ^k однородны в каждой из фаз. Тензоры упругих податливостей будут обозначены как $M^k = L_k^{-1}$.

Чтобы получить материальное уравнение (1.19) для включения из уравнения для матрицы, необходимо формально добавить в последнее фиктивные СД внутри включения, которые при заданном поле напряжений σ^{I} определяются равенством (сравни с [4])

$$\omega = \Delta M : \sigma^{\mathrm{I}} + \Delta\mu + \Delta\eta^{\mathrm{I}}, \tag{1.24}$$

где

$$\Delta M = \left(M^1 - M^0\right),\ \Delta\mu = \mu^1 - \mu^0,\ \frac{d}{dt}\Delta\eta^{\mathrm{I}} = \left(B^1 - B^0\right) : \sigma^{\mathrm{I}}. \tag{1.25}$$

Из уравнений (1.24), (1.25) следует, что ω может быть выбрано постоянным по объему включения, если напряжения σ^I удовлетворяют тому же условию. Поэтому внутри эллипсоидальной неоднородности в вязкоупругой среде «индуцируются» постоянные напряжения и деформации при наложении на среду однородного внешнего поля. Иными словами, свойство Эшелби выполняется, как и для упругой среды.

Пусть в среде задано однородное внешнее поле напряжений σ^X. Напряжение внутри включения $\sigma^{\mathrm{I}} = \sigma^{\mathrm{X}} + \sigma^{\mathrm{E}}$, где σ^E – поле (1.23), создаваемое СД ω с учетом неупругой деформации матрицы. Подстановка позволяет найти ω и σ^I как функцию внешнего поля и истинных собственных деформаций

$$\omega = \left[I + \Delta M : Q\right]^{-1} : \left[\Delta M : \left(\sigma^{\mathrm{X}} - \left\langle 00\middle|\hat{Q}\middle|\Psi\right\rangle\right) + \Delta\eta^{\mathrm{I}} + \Delta\mu\right], \tag{1.26}$$

$$\sigma^{\mathrm{I}} = \left[I + Q : \Delta M\right]^{-1} : \left[\left(\sigma^{\mathrm{X}} - \left\langle 00\middle|\hat{Q}\middle|\Psi\right\rangle\right) - Q : \left(\Delta\eta^{\mathrm{I}} + \Delta\mu\right)\right]. \tag{1.27}$$

Система (1.26), (1.27) замыкается уравнениями (1.25) и системой (1.21) для динамики спектральных компонент неупругой деформации матрицы. Величины Q, $\hat{Q}$ и система (1.21) определяются тензором упругих модулей матрицы L^0. Без учета вязкости равенства (1.26), (1.27) переходят в известные соотношения для упругих сред [3,4].

Для нахождения деформаций включения проще всего воспользоваться эквивалентной постановкой и добавить к выражению (1.22) вклад внешнего поля с учетом однородных внешних вязких деформаций. Ответ имеет вид

$$\varepsilon^{\mathrm{I}} = \varepsilon^{\mathrm{X}} + S : \omega + \left\langle 00\middle|\hat{S}\middle|\Psi\right\rangle, \tag{1.28}$$

$$\varepsilon^{\mathrm{X}} = M^0 : \sigma^{\mathrm{X}} + \mu^0 + \eta^{\mathrm{X}}, \text{ где } \frac{d}{dt}\eta^{\mathrm{X}} = B^0 : \sigma^{\mathrm{X}}. \tag{1.29}$$

Если задано поле внешних деформаций, а не напряжений, величина σ^X предварительно находится из решения уравнений (1.29) при заданном ε^X. Можно проверить, что прямое наложение внешних деформаций ε^X на среду с неоднородностью дает такой же ответ. К примеру, такие уравнения

использованы в работе [9] (с замыкающими аналитическими соотношениями для изотропной матрицы).

5. ГОМОГЕНИЗАЦИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Результаты, полученные в предыдущих разделах, могут использоваться в ряде подходов к гомогенизации композитов и неоднородных сред, которые рассматривают в качестве составного элемента поведение уединенного неоднородного включения в некоторой «эталонной» среде (reference medium) [3]. Для этого требуется, чтобы вязкоупругий отклик эталонной среды был известен. К данному классу относятся, в частности, линейные методы, в которых эталонной средой является сама матрица, то есть составляющая композита с наибольшей объемной долей. Для упрощения изложения далее будет рассматриваться два распространенных линейных метода на примере двухфазного композита из матрицы и включений, объемные доли которых будут обозначены как c^0 и c^1, соответственно $\left(c^0 + c^1 = 1\right)$.

Простейшим подходом является приближение малой доли включений (diluted approximation) [3], в котором уединенное включение рассматривается в осредненном по композиту среднем поле: $\bar{\sigma}$ или $\bar{\varepsilon}$ (в зависимости от выбора, результаты будут различаться во втором порядке по c^1). Далее будет рассмотрен первый вариант. Ответ получается подстановкой $\sigma^{\mathrm{X}} = \bar{\sigma}$ в уравнениях (1.26) – (1.29). Средние деформации композита находятся интегрированием материального уравнения (1.19) по всему представительному объему композита, что дает [9]

$$\bar{\varepsilon} = M^0 : \bar{\sigma} + \bar{\eta} + c^1\omega, \text{ где } \frac{d}{dt}\bar{\eta} = B^0 : \bar{\sigma}. \tag{1.30}$$

Данное приближение полностью пренебрегает взаимодействием включений. Более точной является теория Мори-Танака [3], согласно которой включения взаимодействуют через матрицу. На каждое включение воздействует внешнее поле матрицы σ^X, которое связано со средним по композиту и полем во включениях: $c^0\sigma^{\mathrm{X}} + c^1\sigma^{\mathrm{I}} = \bar{\sigma}$. С другой стороны, $\sigma^{\mathrm{I}} = \sigma^{\mathrm{X}} + \sigma^{\mathrm{E}}$ (раздел 4), откуда получается $\sigma^{\mathrm{I}} = \bar{\sigma} + c^0\sigma^{\mathrm{E}}$ (и аналогично для деформаций). Подстановка этого равенства позволяет получить уравнения типа (1.26)-(1.29), в которых тензоры *Q*, *P* и аналогичные операторы формально умножены на c^0. Для справки соответствующие формулы теории Мори-Танака приведены далее (сравни с [9])

$$\omega = \left[I + c^0\Delta M : Q\right]^{-1} : \left[\Delta M : \left(\bar{\sigma} - c^0\left\langle 00\middle|\hat{Q}\middle|\Psi\right\rangle\right) + \Delta\eta^{\mathrm{I}} + \Delta\mu\right], \tag{1.31}$$

$$\sigma^{\mathrm{I}} = \bar{\sigma} - c^0 Q : \omega - c^0\left\langle 00\middle|\hat{Q}\middle|\Psi\right\rangle, \tag{1.32}$$

$$\varepsilon^{\mathrm{I}} = \bar{\varepsilon} + c^0 S : \omega + c^0\left\langle 00\middle|\hat{S}\middle|\Psi\right\rangle. \tag{1.33}$$

Уравнение (1.30) справедливо и в этом случае. Можно показать, что в теории Мори-Танака результаты не зависят от того, в какое среднее поле ($\bar{\sigma}$ или $\bar{\varepsilon}$) помещается включение.

Для проверки предлагаемого подхода он сравнивается с результатами расчета согласно модели [9] для эллипсоида общего положения (условия описаны в [9], приложение Е), где вместо деформаций амплитудные факторы задаются

для напряжений по формуле $\bar{\sigma}_{\mathrm{A}} = K\bar{\varepsilon}_{\mathrm{A}}$, $K = 10\,\text{ГПа}$; объемная доля $c^1 = 0.1$. Совпадение результатов показано на рис.1.

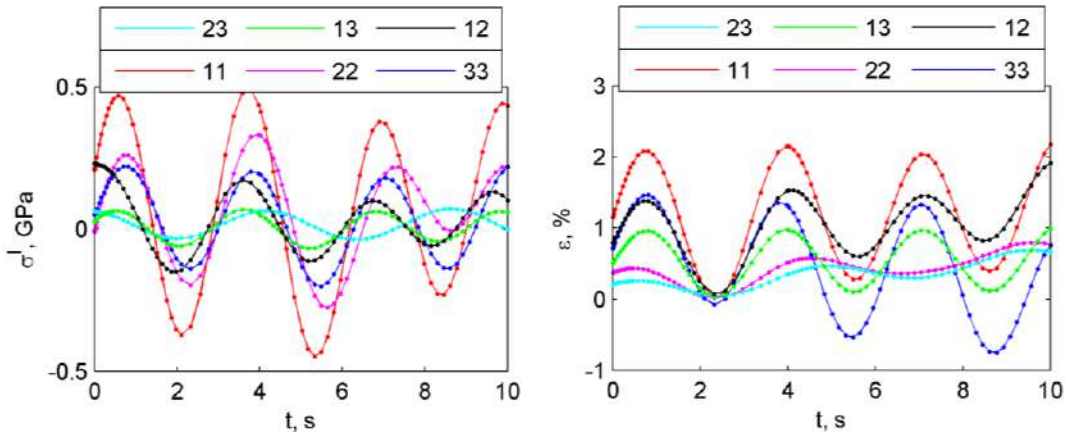


Рис.1. Сравнение подхода данной работы (линии) и уравнений [9] (точки).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен спектральный метод решения задачи Эшелби и связанных задач для эллипсоидального включения в анизотропных упругих и вязкоупругих средах, основанный на разложении по сферическим гармоникам в пространстве Фурье (метод СГФ). В результате удается перейти к дискретному представлению для угловой переменной. Для упругих сред доказана интегральная формула Мура для вычисления тензора Эшелби и предложен подход, альтернативный интегрированию по единичной сфере. Для вязкоупругих сред выведена система ОДУ для эволюции неупругих деформаций эллипсоидального включения и матрицы. Получены соотношения, позволяющие свести задачу о гетерогенном включении в вязкоупругой среде, к задаче Эшелби (метод эквивалентного включения). Применение метода позволяет находить как средний отклик композита, так и локальные характеристики фаз при произвольном сценарии нагружения и зависимости механических свойств от времени. Проведен тестовый расчет для вязкоупругого композита в рамках теории Мори-Танака.

Фундаментальные аспекты представленного метода для анизотропной упругой среды, в том числе, решения для внутренних и внешних точек и свойство полиномиальной консервативности, излагаются в статье [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Эшелби Дж. *Континуальная теория дислокаций*. – М.: ИИЛ, 1963. – 248 с.
2. Mura T. *Micromechanics of defects in solids, 2nd edition*. – M. Nijhoff, 1987. – 602 с.
3. Dvorak G. J. *Micromechanics of composite materials*. – Springer, 2013. – 460 с.
4. Фрейдин А.Б. *Задача Эшелби. Учебное пособие*. – СПб.: Политех-Пресс, 2022. – 148 с.
5. Кунин И. А., Соснина Э. Г. *Эллипсоидальная неоднородность в упругой среде* // Докл. АН СССР. – 1971. – Т.199. – №3 . – С.571-574.
6. Asaro R.J., Barnett D.M. *The non-uniform transformation strain problem for an anisotropic ellipsoidal inclusion* // J. Mech. Phys. Solids. – 1975. – Vol.199. – Pp.77-83.

7. Berbenni S., Dinzart F., Sabar H. *A new internal variables homogenization scheme for linear viscoelastic materials based on an exact Eshelby interaction law* // Mechanics of Materials. – 2015. – Vol.81. – Pp.110-124.
8. Laws N., McLaughlin R. *Self-consistent estimates for the viscoelastic creep compliances of composite materials* // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1978. – Vol.359. – Pp.251-273.
9. Zborovskii V.G. *Rate equations for locally adjusted homogenization of viscoelastic composites* // Lett. Mater. – 2024. – Vol.14(4). – Pp.325-331.
10. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. *Квантовая теория углового момента*. – Л.: Наука, 1975. – 439 с.
11. Ватсон Г.Н. *Теория бесселевых функций*. – М.: ИИЛ, 1949. – 799 с.
12. Зборовский В.Г. *Упругие поля эллипсоидальных неоднородностей в анизотропных средах* (готовится к публикации).

УДК 539.3
EDN QBGRBF
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.11

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИНТРАОКУЛЯРНЫХ ЛИНЗ С ТКАНЯМИ ГЛАЗА

Зябков П.С.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время аспекты механики деформируемого твердого тела активно используются в различных областях медицины. Теория биохимии, биомеханики, физиологии позволяет создать математические модели глаза и его болезней, а также найти наиболее приемлемые и эффективные способы их решения.

Для анализа поставленных задач использовались методы по биомеханике поведения интраокулярных линз, а также теория по аккомодации (наводки глаза на фокус).

Для получения уравнений Рауса и Лагранжа, позволяющих расчет ИОЛ, использовались методы иерархической теории высокого порядка нетонких оболочек, основанные на Лагранжевой механике континуальных систем со связями. Данные модули рассматривались в предыдущих работах.

Метод конечных элементов использовался для построения численных решений задач нетонких оболочек в виде интраокулярной линзы.

Для получения максимально реалистичного представления модель глаза включает в себя наиболее важные компоненты: оболочку глаза, состоящую из роговицы и склеры; радужную оболочку; ядро, кору и капсулу хрусталика; цинновы связки, разделенные на передние и экваториальные связки, и цилиарное тело, которое состоит из цилиарной мышцы и ее отростков.

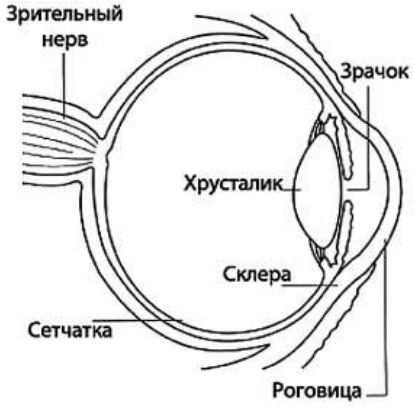


Рис.1. Строение глаза.

Цель работы состоит в построении модели глаза и его напряженного состояния с помощью численного моделирования.

ДЕТАЛЬНЫЙ РАСЧЕТ ГЛАЗА

На рис.2 показаны размеры различных компонентов конечно-элементной модели в неаккомодационном состоянии.

Пример модели глаза было принято использовать из статьи [1].

Для изучения моделей хрусталика глаза в до- и послеоперационный период применялись источники [2,3].

Следует провести анализ деформированного состояния модели глаза и проверку сходимости нашей системы.

Передняя и задняя толщина коркового слоя хрусталика составляли 0,8 мм и 0,5 мм соответственно. Диаметр кольца цилиарного тела составил 11,9 мм.

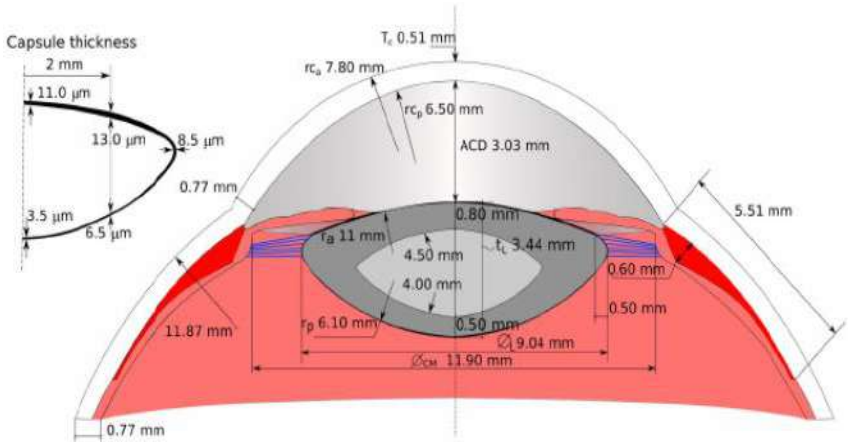


Рис.2. Модель глаза. Циновы связки (синий), цилиарные мышцы (красный), хрусталик (серый, светло-серый), радужка и цилиарное тело (розовый), роговица и склера (белый), передняя камера (бело-серый). Слева сверху – капсульный мешок.

Было решено вместо цилиарных связок использовать усилия, растягивающие хрусталик и цилиарные мышцы. Нагрузка, тянущая хрусталик $Q = 1$ мПа, нагрузка (обозначается, как давление), направленное усилие в центр глаза $P = 0.5$ кН.

Граничные условия – на краю оболочки (в нашем случае в области зрительного нерва и склеры) создаем жесткое закрепление

$$u = 0, \; w = 0.$$

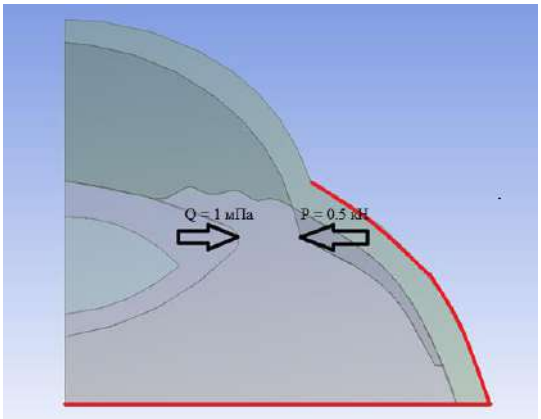


Рис.3.Обозначение граничных условий (красная – жесткое закрепление модели, черная стрелка – приложенные нагрузки).

Модель разбивалась на элементы, каждый из которых имеет форму тетраэдра. Количество узлов – 2767, элементов – 876. Было получено, что максимальный размер элемента 0.00037 м, минимальный – 0.0000037 м. В среднем размер каждого элемента равен 0.0000018 м. Данные значения указаны по умолчанию.

Таблица 1.

Механические характеристики элементов глаза.

Элемент/характеристика	E (МПа)	ν
Цилиарное тело	200	0.3
Передняя капсула	1	0.49
Задняя капсула	0.7	0.49
Роговица	0.3	0.49
Склера	0.3	0.49
Капсульный мешок	0.05	0.45

Ниже представлены результаты расчета в программном комплексе ANSYS WORKBENCH.

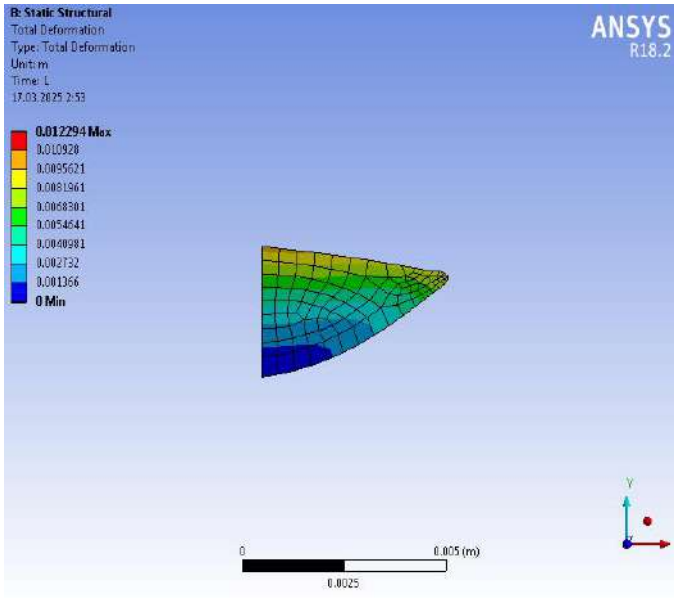


Рис.4. Деформации хрусталика (м).

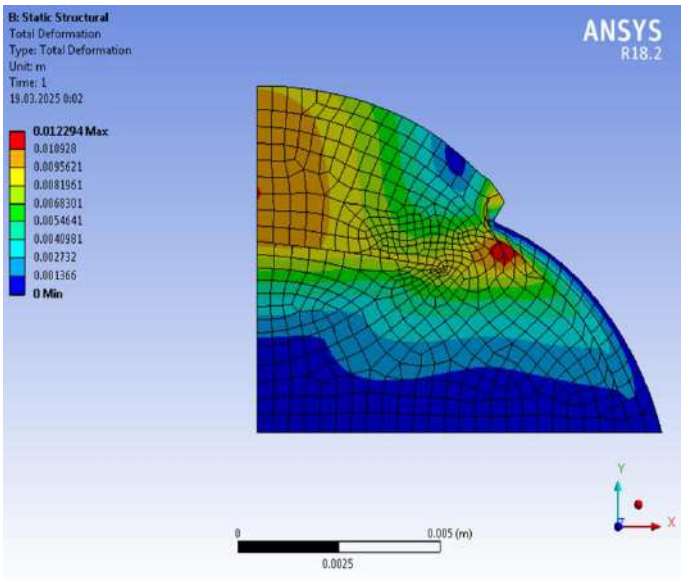


Рис.5. Деформации модели глаза (м).

Видим, что деформации получились близкими к реальному, что составляет примерно 1% от общей модели, но разбиение на элементы показывают достаточно грубые результаты. Для проверки сходимости и получения более точных результатов разобьем модель на большее количество элементов.

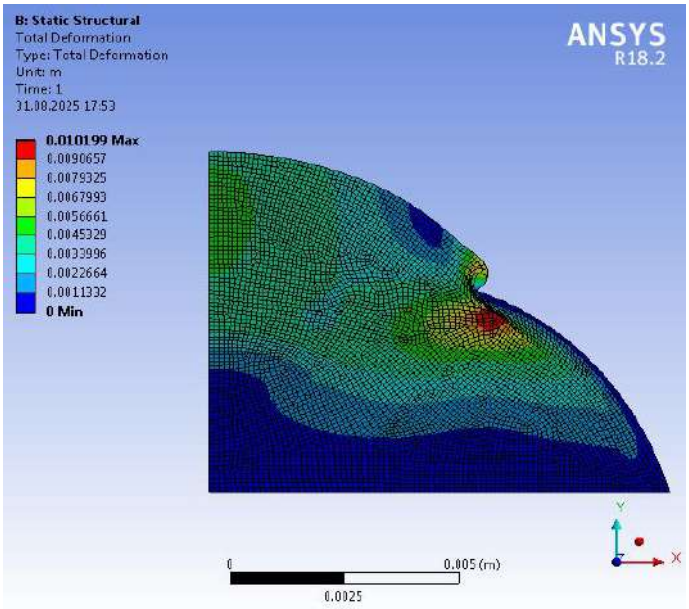


Рис.6. Деформации глаза после сгущения сетки.

Размеры элементов по умолчанию изменились. Максимальный размер стал равен 0.00039 м, минимальный – 0.0000039 м. В среднем размер каждого элемента равен 0.0000002 м.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исходя из произведенных вычислений были получены деформации модели хрусталика и глаза, построенной на двух типах сетки. При уменьшении сетки результаты практически не изменяются, проверка сходимости пройдена. Дальнейшее разбиение модели на элементы не требуется. Данная конструкция подходит для построения модели уже в трехмерной постановке, которая позволит рассчитать системы с несимметричным приложением нагрузок. Получена конечно-элементная модель глаза и хрусталика для расчетов механики и заменой его на ИОЛ в дальнейших исследованиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Iulen Cabeza- Gil, Jorge Grasa, Begoña Calvo. *A validated finite element model to reproduce Helmholtz's theory of accommodation: a powerful tool to investigate presbyopia* // Ophthalmic Physiol Opt. – 2021. – Vol.41. – Pp.1241-1253.
2. Ameku K.A., Berggren C.C., Pedrigi R.M. *Implantation of a capsular tension ring during cataract surgery attenuates predicted remodeling of the post-surgical lens capsule along the visual axis* // Frontiers in Bioengineering. – 2024. – Vol.11. – Pp.1-12.
3. Harvey John Burd. *A structural constitutive model for the human lens capsule* // Biomech Model Mechanobiol. – 2009. –Vol.8. – Pp.217-231.

УДК 539.3
EDN QCCAQD
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.12

ТЕРМОФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НИОБАТА ЛИТИЯ*

Калинчук В.В.[1], Пименов М.С.[1,2], Турчин А.С.[1,2], Широков В.Б.[1,2]

[1]Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону, Россия
[2]Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

ВВЕДЕНИЕ

К одному из наиболее востребованных разработчиками материалов следует отнести монокристалл ниобат лития, обладающий целым спектром уникальных пьезоэлектрических, электрооптических и нелинейно-оптических свойств [1]. Они в основном определяют широкое применение ниобата лития в различных приборах и устройств радио- и акустоэлектроники, оптоэлектроники, в том числе в радиочастотных фильтрах, линиях задержки, резонаторах, в интегрированной микроэлектронике и фотонике, в акустооптических преобразователях и др. [2]. Важным этапом уже на стадии проектирования микроэлектронных устройств является их моделирование, которое должно базироваться на достоверной информации обо всем спектре материальных постоянных выбранных кристаллов. Ниобат лития в этом случае является одним из наиболее исследованных материалов, для которого, в частности, проведен широкий спектр экспериментов по изучению его свойств и определению диэлектрических, пьезоэлектрических, оптических и механических констант. Достаточно полный обзор публикаций с результатами экспериментального определения материальных констант ниобата лития представлен в работе [3]. В подавляющем большинстве исследований значения материальных констант определялись при комнатной температуре. Этого в принципе достаточно для успешного моделирования работы микроэлектронных устройств с использованием различных срезов произвольной ориентации монокристалла ниобата лития, но лишь в ограниченном диапазоне температур. В то же время бурное технологическое развитие микроэлектроники определяет необходимость прогнозирования работы устройств в сложных термомеханических условиях. Это, в свою очередь, обуславливает необходимость наличия достоверной информации о поведении материальных констант в условиях повышенных температур, воздействия внешних механических и физических полей различной природы. Проведение соответствующих экспериментальных исследований требует обеспечения дорогостоящим оборудованием и использования значительных трудовых и материальных затрат. Существенным подспорьем для планирования и проведения экспериментов является разработка и исследование адекватных математических моделей, детально описывающих поведение сегнетоэлектрических материалов в сложных условиях воздействия факторов различной физической природы [4,5]. Повышение диапазона рабочих частот, миниатюризация и переход к планарным технологиям изготовления микроэлектронных устройств обуславливает необходимость использования тонких пленок в качестве активных элементов

* *Работа выполнена в рамках реализации государственного задания Южного научного центра Российской академии наук (номер госрегистрации 125011200151-9).*

из сегнетоэлектрических материалов. Широко распространенная до сего дня технология изготовления тонких пленок предусматривает наличие высокой температуры в процессе их нанесения. В условиях существенного различия термомеханических свойств материалов пленки и подложки это приводит к возникновению в пленке больших деформаций и, как следствие, к значительному изменению значений ее диэлектрических, механических и пьезоэлектрических констант. Это существенно усложняет процесс проектирования и требует предварительного анализа поведения пленки в сложных термомеханических условиях. Вопросам моделирования поведения пленок из пьезоэлектрических материалов в условиях воздействия полей различной физической природы, изучению изменения их материальных констант посвящено достаточно много работ [6,7]. Альтернативой пленкам выступают тонкие пластины сегнетоэлектрических кристаллов. Их появление обусловлено значительным прогрессом в усовершенствовании технологических методов обработки кристаллов, позволяющих изготавливать тонкие, толщиной до 200 нм пластины. Их можно наносить на подложки при низких температурах, что существенно снижает степень влияния подложки на пластину. Однако при переходе к более высоким рабочим частотам его все равно необходимо учитывать, поскольку оно остается достаточно ощутимым. Значительным преимуществом тонких пластин является то, что технология их изготовления позволяет производить пластины срезов монокристаллов различной ориентации. В связи с этим возникает потребность построения более сложных математических моделей, учитывающих кристаллофизические свойства пластин.

1. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ НИОБАТА ЛИТИЯ

Для описания поведения материальных констант обычно используется нелинейный потенциал Ландау фазовых переходов. Пример построения такого потенциала, позволяющего удовлетворительно описывать поведение кристалла ниобата лития при комнатной температуре, можно найти в работе [7]. Там же представлен набор констант потенциала, который является неполным и позволяет найти лишь часть коэффициентов для линейных уравнений пьезоэффекта при комнатной температуре. Для полного описания поведения ниобата лития при внешних термосиловых воздействиях этого недостаточно. В настоящей работе для полноформатного описания поведения кристалла предлагается разложение термодинамического потенциала в ряд по компонентам поляризации в виде

$$\Phi\left(J_1,J_2,J_3\right)+I_4\Psi\left(J_1,J_2,J_3\right), \tag{1}$$

где Φ и Ψ – являются полиномами от функций J_1, J_2, J_3, представляющих собой целый рациональный базис инвариантов поляризации

$$\begin{aligned} J_1 &= p_1^2 + p_2^2, \\ J_2 &= p_3^2, \\ J_3 &= p_2^2\left(3p_1^2 - p_2^2\right)^2, \\ I_4 &= p_2 p_3\left(3p_1^2 - p_2^2\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Термодинамический потенциал в виде разложения до четвертой степени частично был использован в [8]. Первые три инварианта в представлениях (2) являются независимыми, последний инвариант I_4 составляет линейный базис [9].

Анализ показал, что он неудовлетворительно описывает температурное поведение спонтанной поляризации поскольку рассчитанное с помощью этого потенциала значение существенно отличается от экспериментальных результатов. Для устранения этой проблемы предлагается рассмотреть потенциал *Fp* шестой степени в виде ряда по инвариантам (2) следующего вида

$$Fp = a_1 J_1 + a_2 J_2 + a_{11} J_1^2 + a_{12} J_1 J_2 + a_{22} J_2^2 + a_4 I_4 + a_{122} J_1 J_2^2 + a_{222} J_2^3. \qquad (3)$$

Полный термодинамический потенциал Гиббса для ниобата лития можно представить в виде

$$F = Fp + Ft, \qquad (4)$$

где

$$\begin{aligned} Ft = &-\frac{1}{2} s_{11}\left(t_1^2 + t_2^2 + 2t_6^2\right) - \frac{1}{2} s_{33} t_3^2 - \frac{1}{2} s_{44}\left(t_4^2 + t_5^2\right) - s_{12}\left(t_1 t_2 - t_6^2\right) - s_{13}\left(t_1 t_3 + t_2 t_3\right) - \\ &- s_{14}\left(t_1 t_4 - t_2 t_4 + 2t_5 t_6\right) - Q_{11}\left(t_1 p_1^2 + 2t_6 p_1 p_2 + t_2 p_2^2\right) - \\ &- Q_{33} t_3 p_3^2 - Q_{44}\left(t_5 p_1 p_3 + t_4 p_2 p_3\right) - Q_{21}\left(t_2 p_1^2 - 2t_6 p_1 p_2 + t_1 p_2^2\right) - \\ &- Q_{31}\left(t_1 + t_2\right) p_3^2 - Q_{13}\left(p_1^2 + p_2^2\right) t_3 - Q_{14}\left(2t_5 p_1 p_2 + \left(p_1^2 - p_2^2\right) t_4\right) - \\ &- Q_{41}\left(2t_6 p_3 p_1 + t_1 p_3 p_2 - t_2 p_3 p_2\right) - \lambda_1\left(t_1 + t_2\right) - \lambda_3 t_3. \end{aligned} \qquad (5)$$

Здесь s_{ij} – податливости в нотации Фойгта, t_i – напряжения, Q_{ij} – электрострикционные константы. Коэффициенты λ_i характеризуют тепловое расширение, которые будем предполагать линейными по температуре. Уравнения состояния

$$\begin{cases} E_i = \dfrac{\partial F}{\partial p_i} \\ u_i = -\dfrac{\partial F}{\partial t_i} \end{cases} \qquad (6)$$

позволяют найти спонтанную поляризацию и деформации основного состояния. Первая вариация уравнений системы (6) вблизи основного состояния позволяет определить коэффициенты уравнений пьезоэффекта, из второй вариации уравнений (6) находятся коэффициенты электро- и акустооптических эффектов.

2. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ПЬЕЗОЭФФЕКТА

Пусть **P**, **U**, **T**, $\mathbf{E}_0$ представляют собой параметры, определяющие некоторое основное статическое состояние кристалла, а параметры **p**, **u**, **t** и **E** представляют собой малые отклонения от статических. Для построения линеаризованных уравнений следует сделать замену переменных

$$\begin{aligned} &\mathbf{p}' = \mathbf{P} + \mathbf{p}, \\ &\mathbf{u}' = \mathbf{U} + \mathbf{u}, \\ &\mathbf{t}' = \mathbf{T} + \mathbf{t}, \\ &\mathbf{E}' = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E} \end{aligned} \qquad (7)$$

и внести переменные $\mathbf{p}'$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{t}'$ и $\mathbf{E}'$ в уравнения (6). При отсутствии внешних сил и полей $\left(\mathbf{T} = 0,\ \mathbf{E}_0 = 0\right)$ основное состояние для ниобата лития представляется в виде $\mathbf{P} = \left(0, 0, P\right)$ [6,7]. Линеаризуя уравнения (6) по малым отклонениям (7)

(p_i, t_k) получим линейные уравнения, из которых можно найти диэлектрические, пьезоэлектрические и упругие коэффициенты пьезоэффекта

$$\varepsilon_{11}^T = \frac{1}{2\left(a_1 + a_{12}P_3^2 + a_{122}P_3^4\right)\varepsilon_0},$$
$$\varepsilon_{33}^T = \frac{1}{2\left(a_2 + 6a_{22}P_3^2 + 15a_{222}P_3^4\right)\varepsilon_0}; \quad (8)$$

$$d_{15} = Q_{44}P_3\varepsilon_0\varepsilon_{11}^T,$$
$$d_{22} = -Q_{41}P_3\varepsilon_0\varepsilon_{11}^T,$$
$$d_{31} = 2Q_{31}P_3\varepsilon_0\varepsilon_{33}^T, \quad (9)$$
$$d_{33} = 2Q_{33}P_3\varepsilon_0\varepsilon_{33}^T;$$

$$s_{11}^E = s_{11} + P_3^2\left(4Q_{31}^2\varepsilon_{33}^T + Q_{41}^2\varepsilon_{11}^T\right)\varepsilon_0,$$
$$s_{12}^E = s_{12} + + P_3^2\left(4Q_{31}^2\varepsilon_{33}^T - Q_{41}^2\varepsilon_{11}^T\right)\varepsilon_0,$$
$$s_{13}^E = s_{13} + 4P_3^2Q_{31}Q_{33}\varepsilon_0\varepsilon_{33}^T,$$
$$s_{14}^E = s_{14} + P_3^2Q_{41}Q_{44}\varepsilon_0\varepsilon_{11}^T, \quad (10)$$
$$s_{33}^E = s_{33} + 4P_3^2Q_{33}^2\varepsilon_0\varepsilon_{33}^T,$$
$$s_{44}^E = s_{44} + P_3^2Q_{44}^2\varepsilon_0\varepsilon_{11}^T.$$

Так как индукция связана с поляризацией формулой

$$D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0\left(1 + \chi\right)E, \quad (11)$$

а у сегнетоэлектриков $\chi \gg 1$, то далее в уравнениях пьезоэффекта величины D и P не различаются. Если для нахождения констант термодинамического потенциала F (4) брать экспериментальные значения материальных постоянных уравнений пьезоэффекта, то, как видно из представлений (8)-(10), их будет недостаточно для определения всех констант потенциала. Как минимум константы Q_{11}, Q_{13}, Q_{14}, Q_{21} из выражения (5) остаются неопределенными. Для их определения целесообразно обратиться к коэффициентам электрооптического и акустооптического эффектов.

3. ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИЕ И АКУСТООПТИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Электрооптические и акустооптические эффекты описываются через малые отклонения тензора невосприимчивости, матрица которого является обратной по отношению к матрице тензора диэлектрической проницаемости

$$\Delta\eta_m = r_{mi}^T E_i + g_{mk}t_k = r_{mi}^S E_i + p_{mk}^* u_k. \quad (12)$$

Выражения (12) записаны в нотации Фойгта. При использовании обычных переменных их правую часть следует заменить выражением

$$\Delta\eta_m = r_{mi}^S E_i + p_{mk}S_k,$$

где S_k – деформации, а акустооптические коэффициенты $p_{mk}^* = p_{mk}$ для $k \le 3$, и $p_{mk}^* = p_{mk}/2$ при $k > 3$. Далее будем предполагать, что малые отклонения тензора обратной восприимчивости совпадают с малыми отклонениями тензора невосприимчивости

$$\Delta\boldsymbol{\eta} = \Delta\boldsymbol{\chi}^{-1} = \varepsilon_0 \Delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j}\right). \tag{13}$$

Первая вариация представления (10) дает линейную зависимость тензора невосприимчивости от переменных состояния. Выражая эту зависимость, с помощью уравнений пьезоэффекта, можно получить выражения для нужных переменных в представлении (9), которые можно использовать для нахождения коэффициентов термодинамического потенциала ниобата лития 6-ой степени.

Для коэффициентов электрооптического эффекта с учетом условия (8) имеем

$$\begin{aligned} &r_{12}^T = 6\varepsilon_0^2 \varepsilon_{11}^T P_3 \Psi,\ r_{51}^T = 4\varepsilon_0^2 \varepsilon_{11}^T P_3 D_{12}, \\ &r_{33}^T = \frac{3\varepsilon_0}{P_3} + 8\varepsilon_0^2 \varepsilon_{33}^T P_3^3 D_{222}, \quad r_{13}^T = \frac{\varepsilon_{33}^T}{\varepsilon_{11}^T} r_{51}^T \end{aligned} \tag{14}$$

В качестве определяющих возьмем первые два соотношения из (11). Тогда из соотношений для акустооптических коэффициентов можно найти коэффициенты

$$\begin{aligned} Q_{11} &= -\frac{p_{11}s_{11}^E + p_{12}s_{12}^E + p_{13}s_{13}^E + p_{14}s_{14}^E}{2\varepsilon_0} - \frac{R_{12}d_{22} - R_{51}d_{31}}{2\varepsilon_0^2 \varepsilon_{11}^T}, \\ Q_{13} &= -\frac{p_{11}s_{13}^E + p_{12}s_{13}^E + p_{13}s_{33}^E}{2\varepsilon_0} + \frac{R_{51}d_{33}}{2\varepsilon_0^2 \varepsilon_{11}^T}, \\ Q_{14} &= -\frac{p_{11}s_{14}^E - p_{12}s_{14}^E + p_{14}s_{44}^E}{2\varepsilon_0} + \frac{R_{12}d_{15}}{2\varepsilon_0^2 \varepsilon_{11}^T}, \\ Q_{21} &= -\frac{p_{11}s_{12}^E + p_{12}s_{11}^E + p_{13}s_{13}^E - p_{14}s_{14}^E}{2\varepsilon_0} + \frac{R_{12}d_{22} + R_{51}d_{31}}{2\varepsilon_0^2 \varepsilon_{11}^T}, \end{aligned} \tag{15}$$

Оставшиеся акустооптические коэффициенты определяются выражениями

$$\begin{aligned} p_{31} &= \frac{2\left(d_{31}s_{33}^E - d_{33}s_{13}^E\right)\left(1 + 4D_{222}P_3^4 \varepsilon_0 \varepsilon_{33}^T\right)}{P_3 \varepsilon_{33}^T \left(\left(s_{11}^E + s_{12}^E\right)s_{33}^E - 2\left(s_{13}^E\right)^2\right)}, \\ p_{33} &= \frac{\left(2\left(s_{11}^E + s_{12}^E\right)d_{33} - 4d_{31}s_{13}^E\right)\left(1 + 4D_{222}P_3^4 \varepsilon_0 \varepsilon_{33}^T\right)}{P_3 \varepsilon_{33}^T \left(\left(s_{11}^E + s_{12}^E\right)s_{33}^E - 2\left(s_{13}^E\right)^2\right)}, \\ p_{41} &= -\frac{\left(d_{15}s_{14}^E + d_{22}s_{44}^E\right)\left(P_3 R_{51} - \varepsilon_0\right)}{P_3 \varepsilon_0 \varepsilon_{11}^T \left(\left(s_{11}^E - s_{12}^E\right)s_{44}^E - 2\left(s_{14}^E\right)^2\right)}, \\ p_{44} &= \frac{\left(d_{15}\left(s_{11}^E - s_{12}^E\right) + 2d_{22}s_{14}^E\right)\left(P_3 R_{51} - \varepsilon_0\right)}{P_3 \varepsilon_0 \varepsilon_{11}^T \left(\left(s_{11}^E - s_{12}^E\right)s_{44}^E - 2\left(s_{14}^E\right)^2\right)} \end{aligned} \tag{16}$$

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для проведения численного эксперимента используются константы, приведенные в работах [8,10] для ниобата лития при комнатной температуре и спонтанной поляризации $P_3 = 0.71$ Кл/м^2. Использование этих коэффициентов дает значения $D_1 = 6.723 \times 10^8$ Дж·м/Кл^2, $\Psi = -2.424 \times 10^8$ Дж·м^5/Кл^4,

$D_{12} = 1.743\times10^{9}$ Дж·м^5/Кл^4, $D_{22} = 1.867\times10^{9}$ Дж·м^5/Кл^4. Эти значения позволяют построить потенциал четвертой степени по поляризации

$$F4 = a_1\left(p_1^2+p_2^2\right)+b_1p_3^2+a_{11}\left(p_1^2+p_2^2\right)^2+ab\left(p_1^2+p_2^2\right)p_3^2 + b_{11}p_3^4+a_4p_2p_3\left(3p_1^2-p_2^2\right)+Ft \tag{17}$$

с коэффициентами $a_1 = -2.064\times10^{8}$, $b_1 = -9.412\times10^{8}$ в единицах Дж·м/Кл^2, $b_{11} = 9.335\times10^{8}$, $ab = 1.743\times10^{9}$ и $a_4 = -2.424\times10^{8}$ в единицах Дж·м^5/Кл^4. Для нахождения коэффициента a_{11} рассмотренных выше материальных постоянных недостаточно. Необходимо отметить, что слагаемое с этим коэффициентом должно присутствовать в термодинамическом потенциале (17). Если константу a_{11} положить равной нулю, то потенциал *F4* в качестве основного состояния будет иметь только фазу с поляризацией, направленной вдоль третьей оси. С точки зрения глобальной устойчивости, при произвольных больших значениях компонент поляризации, потенциал (17) при $a_{11}=0$ неустойчив, поскольку коэффициент $a_1<0$. Таким образом, слагаемое с коэффициентом a_{11} должно присутствовать в термодинамическом потенциале (14). Однако работы с результатами экспериментов по нахождению этого коэффициента отсутствуют. Далее, в связи с отсутствием экспериментальных данных, предлагается положить $a_{11} = 1.0\times10^{10}$ Дж·м^5/Кл^4, что для дальнейшего рассмотрения не существенно.

Выше рассмотрен потенциал (17) при комнатной температуре. При рассмотрении температурной зависимости будем считать, как это принято в теории Ландау, что коэффициенты a_1 и b_1 линейно зависят от температуры $a_1 = A_x\left(T-T_k\right)$, $b_1 = A_z\left(T-T_c\right)$. Тогда выражения компонент диэлектрической проницаемости будут иметь вид

$$\varepsilon_{33}^{T} = -\frac{1}{4A_z\left(T-T_c\right)\varepsilon_0}$$
$$\varepsilon_{11}^{T} = \frac{1}{\left(2A_x\left(T-T_k\right)-\dfrac{ab}{b_{11}}A_z\left(T-T_c\right)\right)\varepsilon_0} \tag{18}$$

Недостающие коэффициенты потенциала определяются из поведения диэлектрической проницаемости, которые дают значения, удовлетворяющие ранее найденным значениям при комнатной температуре $a_1 = 5\times10^{5}\left(T-703\right)$, $b_1 = 8.653\times10^{5}\left(T-1388\right)$ в единицах Дж·м/Кл^2. На рис.1 представлено температурное поведение спонтанной поляризации, рассчитанное с использованием восстановленного потенциала *F*4 (сплошная линия). Кружками отмечены представленные в работе [10] результаты эксперимента. Как следует из рис.1, поведение спонтанной поляризации с использованием потенциала *F*4 существенно отличается от эксперимента, хотя и сохраняет качественный характер. Для лучшего количественного описания температурного поведения спонтанной поляризации предлагается рассмотреть потенциал шестой степени в виде

$$F6 = F4 + a_{112}\left(p_1^2+p_2^2\right)^2p_3^2+a_{122}\left(p_1^2+p_2^2\right)p_3^4+a_{222}p_3^6. \tag{19}$$

Результаты расчетов с использованием этого потенциала представлены в виде штриховой линии на рис.1. Как следует из рисунка, рассчитанная

с помощью потенциала $F6$ спонтанная поляризация в полной мере совпадает с экспериментальными значениями.

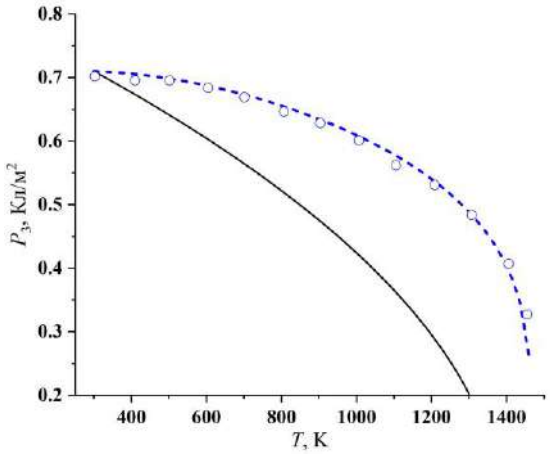


Рис.1. Зависимость спонтанной поляризации ниобата лития от температуры. Символами в виде кружков представлены результаты экспериментальных исследований [10]. Сплошная линия представляет результаты расчета с использованием потенциала $F4$, штриховая линия – результаты расчета с использованием потенциала $F6$.

Для практических приложений важной характеристикой является описание упругого поведения кристалла в широком диапазоне изменения температуры. Результаты расчетов поведения компонент вектора спонтанной деформации представлены на рис.2. Как и ранее, сплошная линия представляет результаты расчетов с использованием потенциала $F4$, пунктирная линия – результаты с использованием потенциала $F6$.

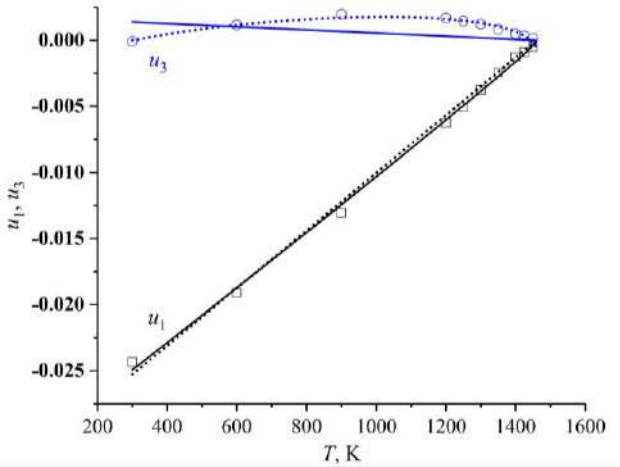


Рис.2. Зависимость спонтанной деформации ниобата лития от температуры. Символами в виде квадратов и кружков отмечены результаты экспериментов [10]. Сплошная линия представляет результаты расчетов с использованием потенциала $F4$, пунктирная линия – с использованием потенциала $F6$.

Кружками и квадратами отмечены результаты экспериментальных исследований [10]. Как следует из графиков, компоненту u_1 с высокой точностью описывают оба потенциала. Имеет место полное совпадение с результатами экспериментов. Компоненту u_3 с высокой точностью описывает только

потенциал 6-ой степени. Потенциал 4-ой степени демонстрирует лишь качественное совпадение, поскольку результаты расчетов в значительной мере отличаются от результатов экспериментов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены новые термодинамические модели ниобата лития с потенциалами Ландау четвертой и шестой степени. Использование экспериментальных значений материальных постоянных линейных уравнений пьезоэффекта, электрооптических и акустооптических постоянных, полученных при комнатной температуре, а также температурное поведение диэлектрической проницаемости, спонтанной поляризации и деформации, позволило определить коэффициенты потенциалов Ландау 4-ой и 6-ой степени, а тем самым вычислить полный набор материальных констант ниобата лития в широком диапазоне изменения температуры. Вычислительный эксперимент показал, что потенциал шестой степени хорошо описывает поведение спонтанной поляризации и деформации в диапазоне 300-1400 К.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wong K.K. *Properties of Lithium Niobate*. – London, United Kingdom: INSPEC, The Institution of Electrical Engineers, 2002, 417p.
2. Chen G., Li N., Ng J.D., Lin H.-L., Zhou Y., Fu Y.H., Ting Lee L.Y., Yu Y., Liu A.-Q., Danner A.J. *Advances in lithium niobate photonics: development status and perspectives* // Advanced photonics. – 2022. – Vol.4. – Iss.3. – 034003.
3. Ogi H., Kawasaki Y., Hirao M., Ledbetter H. *Acoustic spectroscopy of lithium niobate: Elastic and piezoelectric coefficients* // Journal of Applied Physics. – 2002. – Vol.92. – 2451.
4. Shostak R.I., Yevdokimov S.V., Yatsenko A.V. *An Analysis of the Temperature Dependence of the Spontaneous Polarization of LiNbO3 Crystals* // Crystallography Reports. – 2009. – Vol.54. – No.3. – Pp.492-495.
5. Калинчук В.В., Белянкова Т.И. *К проблеме исследования динамических смешанных задач электроупругости и термоупругости для слоисто неоднородного полупространства* // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2000. – №3(111). – С.72-74.
6. Широков В.Б., Калинчук В.В., Шаховой Р.А, Юзюк Ю.И. *К проблеме определения упругих постоянных тонких сегнетоэлектрических пленок,* Доклады академии наук, физика. – 2015. – Т.463. – №6. – С.655-660.
7. Scrymgeour D.A., Gopalan V., Itagi A., Saxena A., Swart P.J. *Phenomenological theory of a single domain wall in uniaxial trigonal ferroelectrics: Lithium niobate and lithium tantalate* // Physical Review B. – 2005. – Vol.71. – 184110.
8. Shirokov V.B. *Basis of Invariants for Multiferroic* // Crystallography Reports. – 2011. – Vol.56. – No.3. – Pp.475-476.
9. Широков В.Б., Пименов М.С., Михайлова И.Б., Турчин А.С., Калинчук В.В. *Особенности возбуждения акустических волн на поверхности гетероструктуры $LiNbO_3/Si$* // Наука Юга России. – 2024. – Т.20. – №3. – С.7-15.

10. Warner A.W., Onoe M., Coquin G.A. *Determination of Elastic and Piezoelectric Constants for Crystals in Class (3m)* // The Journal of the Acoustical Society of America. – 1967. – Vol.42. – No.6. – Pp.1223-1231.

УДК 539.3
EDN QRIBIP
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.13

КЛАССИЧЕСКИЕ И НЕКЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ*

Кержаев А.П.[1], Коваленко М.Д.[2], Меньшова И.В.[1,3], Власов Д.А.[4], Мороз А.И.[5]

[1]*Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва, Россия*
[2]*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*
[3]*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*
[4]*Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия*
[5]*Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), г. Москва, Россия*

ВВЕДЕНИЕ

В статье классическими называются решения, удовлетворяющие всем уравнениям теории упругости, а неклассическими – решения, в которых не выполняются условия совместности деформаций, т.е. решения с остаточными (начальными, собственными) напряжениями [1,2]. Обсуждаются представления Шермана [3] для классических решений и Гольденблата [4] для неклассических решений. Для простоты схемы всех задач представлены в четно-симметричной постановке.

Классическое и неклассическое решения сравниваются между собой на примере задачи для полосы с центральной поперечной трещиной. В первом случае задан профиль трещины, а во втором случае известно, что в результате сброса остаточных напряжений в полосе образуется поперечная трещина с тем же профилем, что и в первой задаче. Решения обеих задач представляются в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля, коэффициенты которых определяются по простым замкнутым формулам.

1. КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ШЕРМАНА

Пусть дана полоса $\{S:|x|<\infty,|y|\le 1\}$, на сторонах которой заданы нормальные напряжения $\sigma_y(x,\pm 1)=q(y)$. Для простоты будем считать, что касательные напряжения равны нулю (рис.1). Следуя Шерману [3], рассмотрим неограниченную плоскость. Разделим ее на одинаковые полосы, совпадающие с полосой S (рис.2). Проведем вдоль границ полос разрезы и сделаем здесь симметричные вкладки (термин Мусхелишвили [5]). На рис.2 они показаны сплошными линиями.

* *Исследование А.П. Кержаева и И.В. Меньшовой выполнено в рамках государственного задания ИТПЗ РАН.*
Исследование М.Д. Коваленко выполнено в рамках государственного задания ИПРИМ РАН.

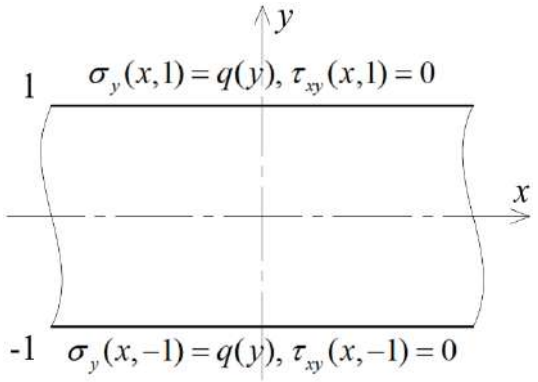


Рис.1. Бесконечная полоса $\{S:|x|<\infty,|y|\le 1\}$ с заданными на ее сторонах нормальными напряжениями $\sigma_y(x,\pm 1)=q(y)$.

Согласно [5] создание вкладок предполагает добавление или удаление (нет «наползания сторон») материала. Тогда на осях вкладок (пунктирные линии), совпадающих с первоначально прямолинейными границами полос, возникнут нормальные напряжения σ_y (касательные напряжения в силу симметрии вкладок будут равны нулю). Форму вкладок можно выбрать так, чтобы напряжения σ_y на их осях были равны заданным, т.е. $q(y)$. Границы вкладок для простоты будем представлять в виде выпукло-вогнутых кривых. Вырежем из плоскости полосу S (заштрихована на рис.2), проведя разрезы вдоль осей вкладок. Тогда получим схему задачи, показанную на рис.1. Отсюда следует, что в модели Шермана граничные условия не «сносятся условно на недеформируемую поверхность», а ставятся на прямолинейных сторонах полосы, совпадающих с осями вкладок. Следовательно, поперечные перемещения сторон полосы – это профиль вкладок. Таким образом, по Шерману стороны полосы, прямолинейные до деформации, остаются прямолинейными и после. Поэтому уравнения совместности деформаций выполняются (нет пустот и наползания материала).

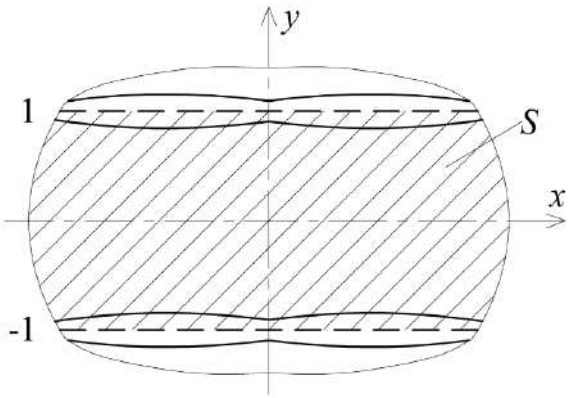


Рис.2. Неограниченная плоскость с симметричными горизонтальными вкладками (сплошные линии).

Рассмотрим теперь представления Шермана в задаче для полуполосы $\{\Pi:|x|\ge 0,|y|\le 1\}$ со свободными длинными сторонами и с заданными на торце нормальными напряжениями $\sigma_x(0,y)=p(y)$ $(|y|\le 1)$ (рис.3). Касательные напряжения на торце полуполосы для простоты считаем равными нулю. В этом случае в плоскости, показанной на рис.2, вдоль вертикальной оси y в пределах каждой полосы дополнительно создаются одинаковые вкладки (рис.4). Профили

вертикальных и горизонтальных вкладок согласованы так, что, когда нормальные напряжения на осях вертикальных вкладок равны $p(y)$, нормальные напряжения на осях горизонтальных вкладок будут равны нулю. Вырезав из плоскости полуполосу П (заштрихована на рис.4) разрезами, лежащими на осях вкладок, придем к задаче, схема которой показана на рис.3. И в этом случае стороны полуполосы, прямолинейные до деформации, остаются прямолинейными и после. Поэтому опять выполняются условия совместности деформаций. Таким образом, согласно [3], классические решения в полосе и в полуполосе связаны с продолжениями этих решений во всю плоскость. Продолжения могут быть как четно-, так и нечетно-симметричными относительно какой-либо из осей (x, y). Они могут не быть периодическими. В зависимости от того, какое продолжение выбрано, будут изменяться и граничные условия на сторонах полуполосы П. Все сказанное относится и к решениям в прямоугольнике.

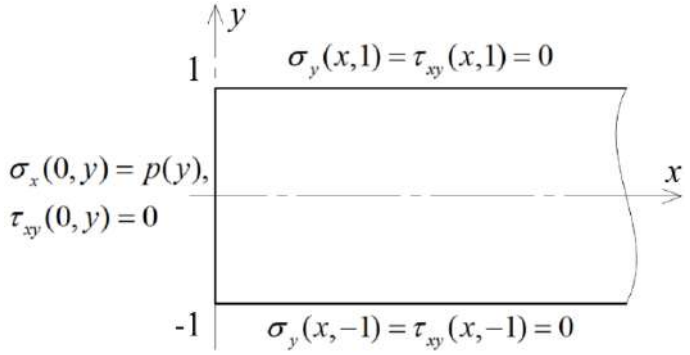


Рис.3. Полуполоса $\{\Pi :| x |\geq 0, | y |\leq 1\}$ со свободными длинными сторонами и с заданными на торце нормальными напряжениями $\sigma_x(0, y) = p(y)$.

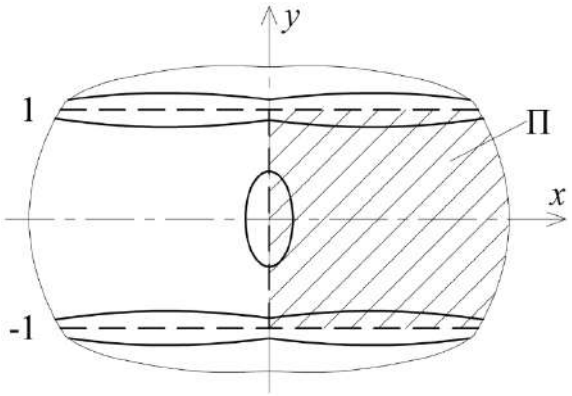


Рис.4. Неограниченная плоскость с симметричными горизонтальными и вертикальными вкладками (сплошные линии).

Приведем решение для полуполосы П со свободными длинными сторонами и заданными на ее торце продольными перемещениями. Будем считать, что решение из правой полуполосы в левую продолжено как четно-симметричное. Тогда касательные напряжения на торце полуполосы П будут равны нулю. Это решение имеет вид [6]

$$\sigma_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left[A_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|} \right],$$

$$\sigma_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left[A_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|} \right],$$

$$\tau_{xy}(x,y)=\operatorname{sign}x\sum_{k=1}^{\infty}2\operatorname{Re}\left[A_k t_{xy}(\lambda_k,y)e^{\lambda_k|x|}\right],\qquad(1)$$

$$U(x,y)=\operatorname{sign}x\left\{U_0+\sum_{k=1}^{\infty}2\operatorname{Re}\left[A_k\xi(\lambda_k,y)e^{\lambda_k|x|}\right]\right\},$$

$$V(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}2\operatorname{Re}\left[A_k\chi(\lambda_k,y)e^{\lambda_k|x|}\right],$$

где

$$s_x(\lambda_k,y)=(1+\nu)\lambda_k\{(\sin\lambda_k-\lambda_k\cos\lambda_k)\cos\lambda_k y-\lambda_k y\sin\lambda_k\sin\lambda_k y\},$$

$$s_y(\lambda_k,y)=(1+\nu)\lambda_k\{(\sin\lambda_k+\lambda_k\cos\lambda_k)\cos\lambda_k y+\lambda_k y\sin\lambda_k\sin\lambda_k y\},$$

$$t_{xy}(\lambda_k,y)=(1+\nu)\lambda_k^2(\cos\lambda_k\sin\lambda_k y-y\sin\lambda_k\cos\lambda_k y),\qquad(2)$$

$$\xi(\lambda_k,y)=\left(\frac{1-\nu}{2}\sin\lambda_k-\frac{1+\nu}{2}\lambda_k\cos\lambda_k\right)\cos\lambda_k y-\frac{1+\nu}{2}\lambda_k y\sin\lambda_k\sin\lambda_k y,$$

$$\chi(\lambda_k,y)=\left(\frac{1+\nu}{2}\lambda_k\cos\lambda_k+\sin\lambda_k\right)\sin\lambda_k y-\frac{1+\nu}{2}\lambda_k y\sin\lambda_k\cos\lambda_k y$$

– собственные функции Папковича–Фадля; $U(x,y)$ и $V(x,y)$ – умноженные на модуль сдвига G продольное и поперечное перемещения соответственно; U_0 – перемещения правой и левой полуполос как недеформируемых; ν – коэффициент Пуассона; $\pm\lambda_k$, $\pm\overline{\lambda_k}$ $(k=1,2,...)$ – четверки комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения

$$\lambda+\sin\lambda\cos\lambda=0.\qquad(3)$$

Для затухающего на бесконечности решения $\operatorname{Re}\lambda_k<0$. Ступенчатая функция $\operatorname{sign}x$ в формулах (1) для $\tau_{xy}(x,y)$ и $U(x,y)$ свидетельствует о том, что при построении решения в полуполосе Π решение из правой полуполосы в левую было продолжено как четно-симметричное.

Собственные функции $s_x(\lambda_k,\pm1)=\tau_{xy}(\lambda_k,\pm1)=0$, поэтому однородные граничные условия на длинных сторонах полуполосы удовлетворяются точно.

Коэффициенты A_k определяются с помощью соотношения ортогональности Папковича [7]

$$A_k=\frac{1}{2(1+\nu)\lambda_k^3}\int_{-\alpha}^{\alpha}s_x(\lambda_k,y)u(y)dy\quad(k\ge1).\qquad(4)$$

В (4) $u(y)$ – заданное на отрезке $[-\alpha,\alpha]$ $(\alpha\le1)$ продольное перемещение на торце полуполосы Π. Будем считать, что

$$u(y)=\begin{cases}\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{\alpha}\right)^2}, & |y|\le\alpha;\\ 0, & \alpha<|y|<1.\end{cases}\qquad(5)$$

В том случае, когда на торце полуполосы на интервале $(-\alpha,\alpha)$ заданы самоуравновешенные нормальные напряжения, для решения задачи нужно воспользоваться результатами статьи [6].

2. НЕКЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГОЛЬДЕНБЛАТА ДЛЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Следуя книге [4], рассмотрим неограниченную плоскость. Разрежем ее на одинаковые элементарные квадратики (рис.5а) и заменим каждый из них деформированным квадратиком (рис.5б). Приложим к каждому деформированному квадратику некоторые напряжения, которые придадут ему первоначальный вид. После этого все квадратики опять склеим. В результате получим плоскость, в которой есть остаточные напряжения. По теореме «сила-дислокация» [8] эта задача эквивалента неоднородной задаче для неограниченной плоскости, в каждой точке которой приложены внешние нагрузки $X(x,y)$ и $Y(x,y)$, действующие в направлениях осей x и y соответственно. Если из плоскости вырезать прямолинейный квадратик, то напряжения на его сторонах исчезнут, и он примет вид деформированного квадратика, что является признаком того, что в плоскости есть остаточные напряжения.

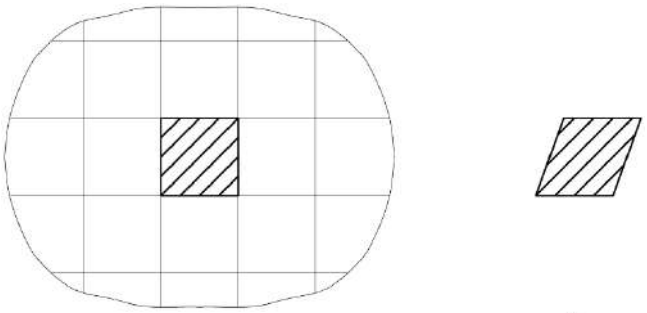


Рис.5. а) неограниченная плоскость, разрезанная на одинаковые элементарные квадратики; б) деформированный квадратик.

Деформированные элементарные квадратики заменим бесконечным набором правых и левых полуполос с симметрично искривлёнными длинными сторонами и торцами. Левые полуполосы являются зеркальным отображением правых относительно вертикальной оси y (рис.6). Пунктиром показаны контуры недеформированных полуполос Π.

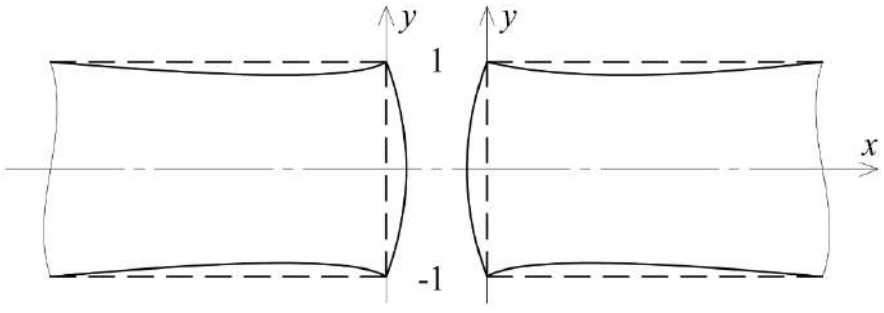


Рис.6. Деформированные правые и левые полуполосы.

Приложим к границам каждой деформированной полуполосы некоторые нормальные и касательные напряжения, которые придадут им вид полуполос Π, а затем склеим их в бесконечную плоскость, как показано на рис.7, где сплошными линиями показаны контуры полуполос после их соединения в плоскость, а пунктирными – границы деформированных полуполос (до соединения в плоскость). В результате получим плоскость, составленную из полуполос Π,

в которой, согласно [4], есть остаточные напряжения. Профили длинных сторон и торцов деформированных полуполос согласованы так, что в зависимости от профиля длинных сторон можно так подобрать профиль торцов, что после склеивания полуполос в плоскость напряжения $\sigma_y(x,\pm 1)$ на длинных сторонах полуполос Π будут равны нулю.

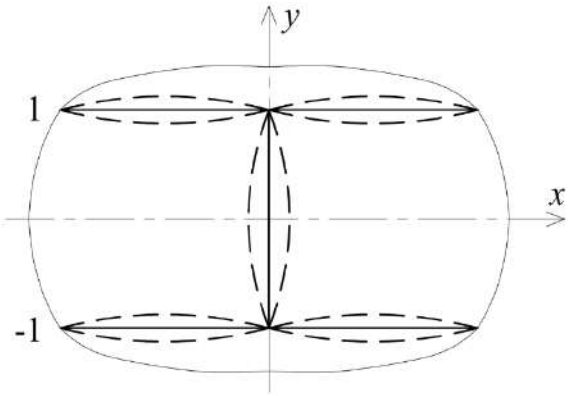


Рис.7. Плоскость, составленная из полуполос Π, в которой есть остаточные напряжения.

Задача для плоскости с остаточными напряжениями эквивалентна неоднородной задаче для неограниченной плоскости, в которой приложены внешние нагрузки $X(x,y)$ и $Y(x,y)$, как показано на рис.8. Причем, согласно [9], нагрузки $X(0,y)$ и $Y(0,y)$ можно выразить через форму профиля торцов деформированных полуполос, а нагрузки $X(x,\pm 1)$ и $Y(x,\pm 1)$ – через форму профиля горизонтальных сторон деформированных полуполос. Поэтому слова, с которых начинается абзац «Приложим к границам каждой деформированной полуполосы некоторые нормальные и касательные напряжения, которые придадут им вид полуполос Π, а затем склеим их в бесконечную плоскость», можно заменить словами «Стянем стороны деформированных полуполос по длинным сторонам и торцам, а затем склеим в бесконечную плоскость».

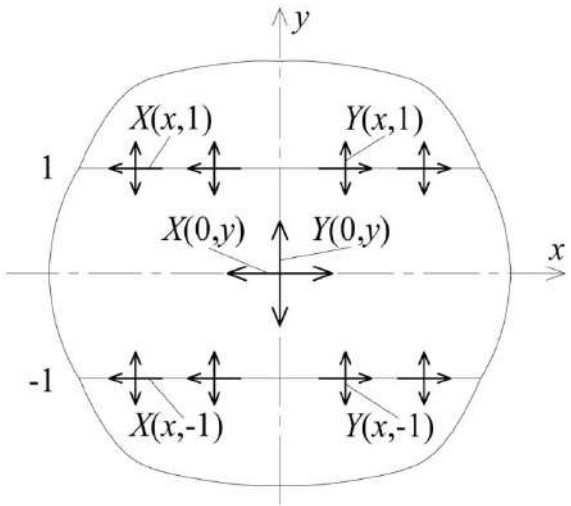


Рис.8. Схема неоднородной задачи для неограниченной плоскости.

Если из плоскости вырезать полуполосу Π, то ее стороны искривятся, и она приобретет первоначальный вид деформированной полуполосы, что говорит о том, что в плоскости есть остаточные напряжения.

Приведем решение для бесконечной полосы с остаточными напряжениями [10], считая, что продольные перемещения на торце правой полуполосы после сброса остаточных напряжений принимают вид (5)

$$\sigma_x^r(x,y) = -\sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{u_k}{\overline{\lambda_k}}\frac{s_x(\lambda_k,y)}{M_k}\frac{\mathrm{Im}(\overline{\lambda_k}e^{\lambda_k|x|})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k}\right\},$$

$$\sigma_y^r(x,y) = -\sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left\{u_k\lambda_k\frac{s_y(\lambda_k,y)}{M_k\lambda_k^2}\frac{\mathrm{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k|x|})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k}\right\},$$

$$\tau_{xy}^r(x,y) = -\mathrm{sign}\,x\sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left\{u_k\lambda_k\frac{t_{xy}(\lambda_k,y)}{\lambda_k M_k}\frac{\mathrm{Im}(e^{\lambda_k|x|})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k}\right\}, \qquad (6)$$

$$U^r(x,y) = \mathrm{sign}\,x\left\{U_0^r + \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left[u_k\frac{\xi(\lambda_k,y)}{\lambda_k M_k}\frac{\mathrm{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k|x|})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k}\right]\right\},$$

$$V^r(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{u_k}{\overline{\lambda_k}}\frac{\chi(\lambda_k,y)}{M_k}\frac{\mathrm{Im}(\overline{\lambda_k}e^{\lambda_k|x|})}{\mathrm{Im}\,\lambda_k}\right\}.$$

Числа u_k находятся по формуле

$$u_k = \int_{-\alpha}^{\alpha} u(y)u_k(y)dy,\ u_k(y) = \frac{\lambda_k\cos\lambda_k y}{(1+\nu)\sin\lambda_k}.$$

Постоянная U_0^r в (6) в общем не равна постоянной U_0 в решении (1). Она имеет следующий физический смысл: это перемещения правой и левой полуполос (как недеформируемых) в результате образования разрыва после сброса остаточных напряжений.

3. СРАВНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО И НЕКЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЙ

Примем далее $\alpha = 0.1,\ \nu = 0.33$. Сплошным кривым соответствует классическое решение, точечным – неклассическое.

На рис.9 показаны распределения нормальных напряжений $\sigma_x(x,y)$ и $\sigma_x^r(x,y)$ в сечении $x = 0.0015$. Они имеют схожий характер распределения, но разные знаки, т.к. в первом случае берега разреза раздвигаются, а во втором они стягиваются. Напряжения на разрезе в обоих случаях постоянны, но не равны по величине и знаку. Это же относится и к нормальным напряжениям $\sigma_y(x,y)$ и $\sigma_y^r(x,y)$, показанным на рис.10.

На рис.11 и 12 показаны кривые распределения нормальных напряжений вдоль горизонтальной оси полуполосы при $y = 0$. Кривые имеют одинаковый характер, близки по модулю, но имеют разные знаки.

На рис.13 показаны форма профиля вертикальной вкладки в классическом решении и форма первоначального профиля торца деформированной полуполосы в неклассическом решении ($|y| \le 1,\ x = 0$) . Профили смещены относительно друг друга на некоторую постоянную, зависящую от U_0 и U_0^r .

На рис.14 показаны форма профиля горизонтальных вкладок в классическом решении и форма профиля горизонтальных сторон деформированных полуполос в неклассическом решении.

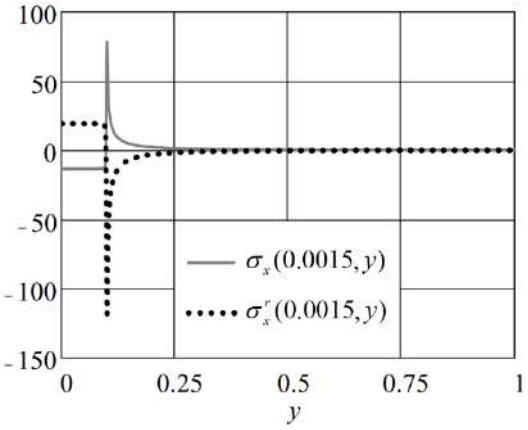


Рис.9. Нормальные напряжения $\sigma_x(x,y)$ и $\sigma_x^r(x,y)$ в сечении $x = 0.0015$.

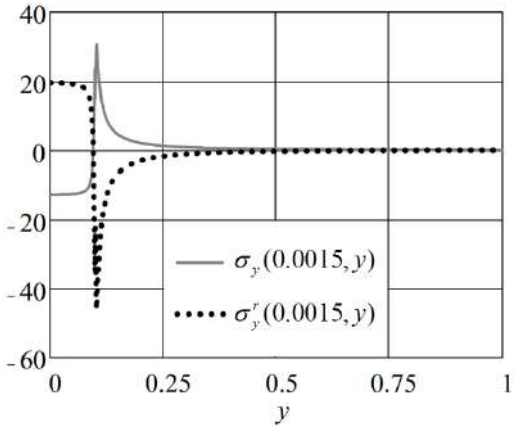


Рис.10. Нормальные напряжения $\sigma_y(x,y)$ и $\sigma_y^r(x,y)$ в сечении $x = 0.0015$.

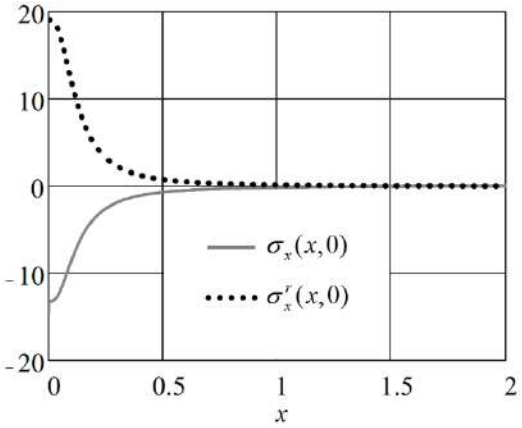


Рис.11. Нормальные напряжения $\sigma_x(x,y)$ и $\sigma_x^r(x,y)$ при $y = 0$.

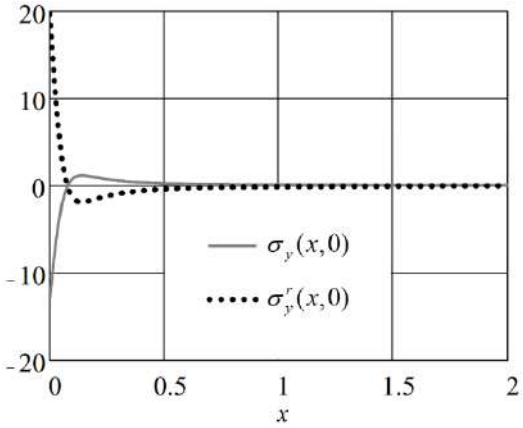


Рис.12. Нормальные напряжения $\sigma_y(x,y)$ и $\sigma_y^r(x,y)$ при $y = 0$.

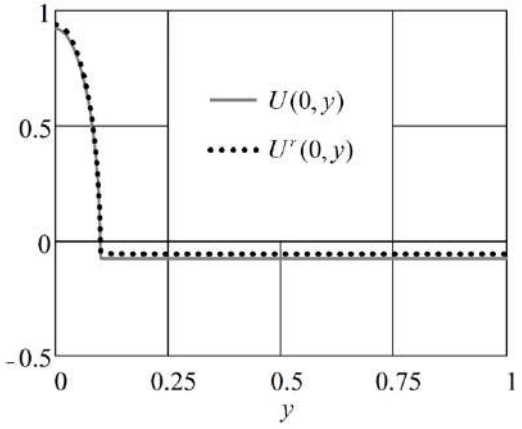


Рис.13. Продольные перемещения $U(x,y)$ и $U^r(x,y)$ при $x = 0$.

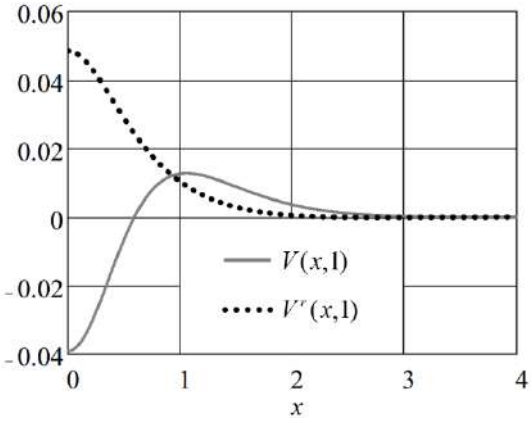


Рис.14. Поперечные перемещения $V(x,y)$ и $V^r(x,y)$ при $y = 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Формулами (1) и (6) описываются решения для полуполосы со свободными длинными сторонами и с заданными на торце продольными перемещениями

(касательные напряжения равны нулю). В первом случае все три стороны полуполосы, прямолинейные до деформации, остаются прямолинейными и после. При этом выполняются все уравнения теории упругости. Во втором случае все три стороны полуполосы не прямолинейны до деформации, но становятся прямолинейными после. В этом случае уравнения совместности деформаций не выполняются. И качественно, и количественно модули соответствующих напряжений не сильно отличаются друг от друга. Заметное различие в вертикальных перемещениях горизонтальных сторон полуполос можно объяснить тем, что в классическом решении стороны полуполосы, прямолинейные до деформации, остаются прямолинейными и после, тогда как в неклассическом решении они могут свободно деформироваться от первоначально искривленных до прямолинейных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мороз А.И. *Самонапряженное состояние горных пород*. – М.: Изд-во Московского государственного горного университета, 2004. – 288 с.
2. Тажибаев К.Т. *Напряжения, процессы деформации и динамического разрушения горных пород*. *В 2 томах*. – Бишкек: Алтын Принт, 2016.
3. Шерман Д.И. *Об одной задаче теории упругости* // Докл. АН СССР. – 1940. – Т.27. – №9. – С.907-913.
4. Гольденблат И.И. *Нелинейные проблемы теории упругости*. – М.: Наука, 1969. – 336 с.
5. Мусхелишвили Н.И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
6. Коваленко М.Д., Кержаев А.П., Меньшова И.В., Власов Д.А. *Упругая полоса с трещиной. Точное решение* // Докл. РАН. Физика, технические науки. – 2024. – Т.518. – №1. – С.51-56.
7. Папкович П.Ф. *Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы* // Докл. АН СССР. – 1940. – Т.27. – №4. – С.335-339.
8. Касахара К. *Механика землетрясений*. – М.: Мир, 1985. – 264 с.
9. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Vlasov D.A. *A half-strip with a clamped end. A solution in series in Papkovich–Fadle functions* // Mechanics of Solids. – 2024. – Vol.59. – No.7. – Pp.3769-3780.
10. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Yu G. *A boundary value problem in the theory of elasticity for a rectangle: exact solutions* // Z. Angew. Math. Phys. – 2020. – Vol.71. – No.6. – 199.

УДК 539
EDN QVKSYI
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.14

УЛУЧШЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АДДИТИВНОЙ СТАЛИ 03Х16Н15М3 ПРИ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОИМПУЛЬСНОЙ ОБРАБОТКЕ

Кукуджанов К.К.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Аддитивное производство (АП) позволяет создавать трехмерные объекты любой сложности на основе цифровых моделей. Наиболее распространенный метод АП – селективное лазерное плавление (СЛП), при котором частицы порошков металлов и сплавов расплавляются лазером. Механические свойства деталей, изготовленных методом СЛП, отличаются от традиционных из-за быстрого остывания и кристаллизации, что вызывает высокие локальные остаточные напряжения и деформации. Остаточные напряжения могут достигать нескольких сотен МПа. Основные отличия:

А) Пористость, снижающая прочность и усталостные характеристики из-за распространения макротрещин, особенно от пор неправильной формы.

Б) Сложная микроструктура материала, повышающая твердость и прочность, но снижающая пластичность сталей.

Промышленное применение технологии СЛП, как и других методов аддитивного производства, не позволяет достичь бездефектного изготовления металлических деталей. Неправильная оптимизация параметров процесса приводит к повышенной пористости и другим технологическим дефектам, таким как газовые поры, зоны неполного плавления, трещины и структурные неоднородности. Эти дефекты снижают механические характеристики изделий и увеличивает дисперсию этих характеристик, что делает АМ менее качественными и ограничивает возможности применения по сравнению с традиционными методами, такими как литье.

Для улучшения характеристик деталей, изготовленных аддитивными методами, и в том числе по технологии СЛП, используются термические (высокотемпературный отжиг), термомеханические (горячее пластическое деформирование, горячее изостатическое прессование) и методы электроимпульсной обработки. Термические и термомеханические методы повышают пластичность за счет снятия остаточных напряжений и уменьшения пористости, но снижают предел прочности и усталостные характеристики. При этом происходит термическая деградация микроструктуры. Они требуют значительных затрат энергии и времени, что делает их менее эффективными. Механизм залечивания пористости при применении термомеханических методов обработки основан на термодиффузии атомов при высоких температурах.

Под залечиванием микродефектов, далее понимается восстановление сплошности материала за счет уменьшения в нем объема внутренних пор и трещин, а также сглаживание формы этих дефектов, уменьшающее концентрацию механических напряжений в их острых вершинах.

Методы электроимпульсной обработки (ЭИО) стали, предполагают индуцирование в проводящем материале токов высокой плотности за счет воздействия внешним интенсивным электромагнитным полем (ЭМП). При этом для изделий из сталей, изготовленных традиционными методами, используются широкий диапазон режимов ЭИО с импульсами длительности 10^{-5}-10^{-2} с и плотностями токов порядка 10^{1}-10^{3} А/мм^2. Это приводит к рассеиванию в материале удельной энергии в диапазоне 10^{5}-10^{9} Дж/м^3.

Далее будем называть ЭМП высокоэнергетическим (далее – ВЭМП) в случае рассеивания в проводящем материале удельной энергии в диапазоне 10^{7}-10^{9} Дж/м^3 при сравнительно малых длительностях единичных импульсов 10^{-5}-10^{-4} с [1], а электроимпульсную обработку образцов ВЭМП далее будем сокращенно называть – высокоэнергетической электроимпульсной обработкой (ВЭИО). Другие виды ЭИО будем называть низкоэнергетическими (НЭИО). Д Данное разделение основано на наблюдениях за значительными различиями в механизмах залечивания микродефектов при низкоэнергетической и высокоэнергетической ЭИО [1].

Следует заметить, что вопрос улучшения механических свойств аддитивных материалов посредством ЭИО является малоизученным. Исследованию воздействия ЭМП на механические свойства аддитивных материалов посвящено незначительное число работ [2-7]. Все эти известные автору работы (не только со сталью 316L, но и с другими АМ) посвящены исследованиям в области НЭИО [9].

Отдельно отметим работы [7] и [8], в которых их авторы не уделяли внимания исследованиям изменений пластических и прочностных свойств, однако наблюдали явления, схожие с исследуемым в настоящей работе.

В [7] при электромеханической обработке (одновременном действии НЭИО и прижимающего усилия) в образце из сплава Ti-6Al-4V авторы наблюдали сглаживание границ дефектов в АМ после электромеханической обработки.

В [8] при ВЭИО с последовательно возрастающими импульсами тока (всего 75 импульсов) в 2-х образцах из композитного материала TiC/316L удалось частично залечить длинные макротрещины путем сварки их берегов. Кумулятивный нагрев многократными импульсами тока приводил к сильному термическому сжатию берегов трещин и способствовал их сварке и залечиванию. Улучшение механических свойств образцов после ВЭИО в работе не изучалось.

В работах [2-7] наблюдаются качественные изменения микроструктуры аддитивных материалов под действием НЭИО, вызванные кумулятивным высокотемпературным нагревом образцов, действие которого оказывалось аналогично отжигу. Их авторы подтверждают значительный рост температуры и отмечают сходство воздействия НЭИО с термомеханической обработкой как в части изменений микрострутуры, таки и в части улучшения механических свойств. Более подробный обзор этих работ приведен в [9].

В аддитивных материалах (впрочем, как и в материалах, изготовленных традиционными методами) под действием ВЭИО будут происходить иные эволюционные изменения, чем при термомеханической обработке или НЭИО. В частности, при ВЭИО залечивание дефектов, приводящее к улучшению механических характеристик, протекает по иному механизму, нежели при термомеханической обработке или электромеханической обработке (НЭИО + механическое сжатие). Так, при воздействии импульсов ВЭМП в острых вершинах внутренних микротрещин и микропор происходит сильная концентрация электромагнитного поля, интенсивное выделение Джоулева тепла в короткий промежуток времени, возникновение сжимающих термических напряжений с одновременным разупрочнением и плавлением металла в этих областях.

В совокупности это приводит к тому, что внутренние микротрещины и микропоры изменяют форму, уменьшаются в объеме, а их берега свариваются расплавленным металлом. Результаты моделирования [10-12] подтверждают реальность именно такого механизма залечивания внутренних дефектов в проводящем материале при ВЭИО. В данных работах на основе связанной конечноэлементной электротермоупругопластической моделей было показано, что при ВЭИО металла с микродефектами в нем происходит уменьшение объема микродефектов и, как следствие, пористости материала, вплоть до полного залечивания некоторых микропор и микротрещин посредством сварки их берегов расплавленным металлом. Численное исследование по залечиванию усталостных макротрещин в стали 316L при ВЭИО по другой конечноэлементной модели [13] также косвенно подтверждают вышеописанный механизм. Также это наблюдалось в экспериментах по залечиванию усталостных макротрещин в АМ при ВЭИО [8] в традиционных материалах. При термомеханической обработке (горячем изостатическом прессовании, горячей пластической деформации) и НЭИО, когда тепловая энергия выделяется в течение более продолжительных интервалов времени по сравнению с ВЭИО, залечивание дефектов происходит по иному механизму – за счет термодиффузии атомов между берегами дефектов при высоких температурах нагрева. Интенсивное плавление в вершинах микродефектов и сварка их берегов при НЭИО и термомеханической обработке не происходит.

Таким образом, исследования воздействия ВЭМП на АМ с целью улучшения их механических свойств не проводились. Возможность залечивания в них внутренних микродефектов аддитивных материалов в процессе ВЭИО также не изучалась [9]. Безотносительно ВЭИО, также следует отметить чрезвычайно широкий диапазон параметров импульсов (плотностей токов, форм и длительностей импульсов) используемый в исследованиях по НЭИО. Кроме того, в [2-8] авторы никак не объясняли и не обосновывали выбор ими тех или иных значений параметров проведенной ими ЭИО (далее – режима ЭИО). То есть выбор режима ЭИО осуществлялся ими чисто эмпирическим путем.

Настоящая работа является попыткой восполнить эти пробелы. В работе используется новый подход для определения режима ВЭИО, ориентированный на залечивание внутренних микродефектов в металлических материалах.

2. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Развиваемый подход применен для определения предпочтительного режима ВЭИО нержавеющей стали 03Х16Н15М3 (AISI 316L) изготовленной аддитивным методом (СЛП). Эта марка стали популярна в промышленности благодаря отличным физико-механическим свойствам, высокой стойкости к окислению и хорошей свариваемости. Она широко применению в СЛП печати. Стальные образцы (рис.1А) для экспериментов имеют низкое качество печати с крупными дефектами, такими как несплавления до 250 мкм, поры и трещины, возникающими в процессе послойной наплавки порошка. Наличие этих дефектов предпочтительно для демонстрации возможностей ВЭИО по их залечиванию.

Образцы были изготовлены методом СЛП на 3D-принтере SLM Kings 3D Printer M280HD (Китай). Для эксперимента 10 случайных образов были разделены на две группы по 5 штук в каждой. Первая группа (UNT – untreated) тестировалась на разрыв без предварительной обработки ВЭМП. Вторая группа (TR – treated) проходила ВЭИО на лабораторной установке ГИТ 20-40 (рис.1Б), а затем тестировалась на разрыв согласно ГОСТ 1497-2023 на электромеханической

универсальной испытательной машине ГОСТ МИМ.2-100 (Россия) со скоростью растяжения 0.15 мм/мин, с базой экстензометра – 35 мм. Микроструктуру до и после ВЭИО исследовали с помощью СЭМ Coxem EM-30AX Plus (Китай) и оптического микроскопа Zeiss Axio Imager.D1m (Германия).

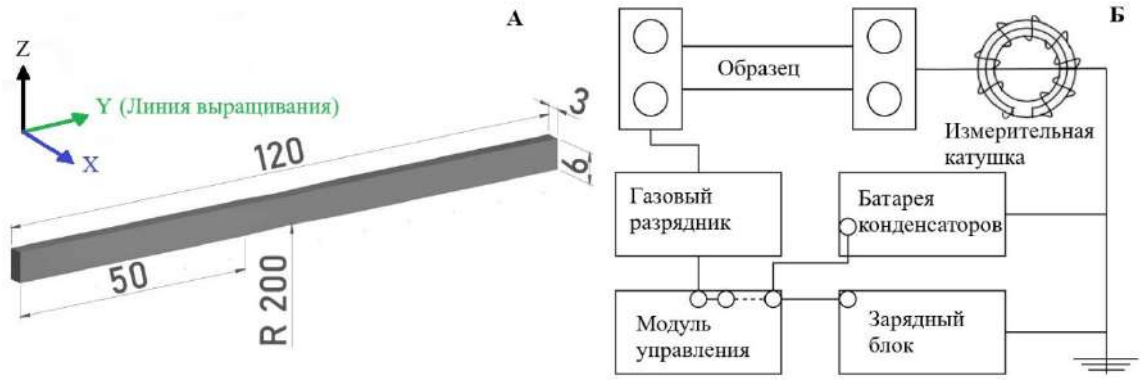


Рис.1. Печатные образцы для экспериментов из стали 03Х16Н15М3 (А) и принципиальная схема экспериментальной установки (Б).

Режим высокоэнергетической электроимпульсной обработки был выбран в соответствие с подходом, предложенным в работы [1]. Подход использует один параметр управления – удельную энергию импульса тока q, вместо подбора нескольких: плотности тока $j_\infty(t)$, длительности $t=\tau_0$ и формы импульса, как это делалось в предшествующих исследованиях. Удельная энергия импульса тока рассчитывается по формуле

$$q=\int_0^{\tau_0}\frac{j_\infty^2(t)}{\sigma^E}dt, \qquad (1)$$

где σ^E – коэффициент электропроводности материала. Формула (1) определяет удельную электромагнитную энергию, рассеянную в образце (на достаточном удалении от вершины трещины) при прохождении импульса с плотностью тока $j_\infty(t)$ и длительностью $t=\tau_0$.

Допустим, что все микродефекты имеют форму эллипсов, размер малой полуоси $b=b_0$ которых не изменяется при ВЭИО (ток в образце течет в направлении малой полуоси). Кроме того предположим, что дефекты при каждом импульсе тока залечиваются в вершинах на малую величину Δa своей большой полуоси a, а расстояния до соседних дефектов велико. Тогда на основании уравнения (35) работы [1] с учетом налагаемого условия о постоянстве изменения внутренней энергии в перемещающейся вершине микродефекта при каждом новом импульсе получаем следующую зависимость для изменения энергии импульса от его номера $n=0,1,...N$ в предпочтительном режиме ВЭИО.

1. $q_n=q_0'\left(1+2n\Delta a'/a_0\right)$

   При $n=0,1\ldots4;\quad q_0=0,14\cdot10^8\ J/m^3;\quad \Delta a'/a_0=7,5\cdot10^{-3}.$

2. $q_n=q_0''\left(1+2\left(n-5\right)\left(\Delta a''/a_0\right)\right)$

   При $n=5\ldots9;\quad q_0=1,51\cdot10^8\ J/m^3;\ \Delta a''/a_0=4\cdot10^{-2},$

где q_0 – энергия начального импульса.

Изменение единственного параметра режима эксперимента q_n графически представлено на рис.2, а числовые значения приведены в Таблице 1.

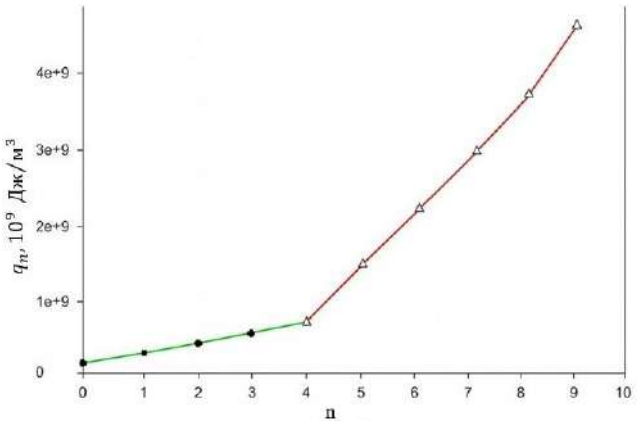


Рис.2. Изменение удельной рассеянной энергия импульса q_n от порядкового номера импульса n в предпочтительном режиме ВЭИО.

Таблица 1.

n	q_n , 10^9, Дж/м^3
0	0,014
1	0,027
2	0,042
3	0,058
4	0,074
5	0,151
6	0,221
7	0,301
8	0,376
9	0,475
Итого:	1,739

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты эксперимента представлены на рис.3 в виде кривых номинальные напряжение–деформация образцов до и после ВЭИО. Также в Таблице 2 указаны результаты теста на разрыв. С помощью воздействия предпочтительным режимом ВЭИО удалось увеличить показатель средней предельной пластической деформации до разрушения $\bar{\varepsilon}_F$ на 26,64% (с 24,73% до 31,32%) при незначительном снижении среднего предела прочности $\bar{\sigma}_в$ на 4,2% (с 0,655 кН/мм^2 до 0,627 кН/мм^2). То есть пластичность материала существенно возрастает при незначительных потерях в прочности материала. Снижение показателей стандартного отклонения ε_F на 31,7% и $\sigma_в$ на 45,2% соответственно. Снижение дисперсии говорит о том, что в результате предложенного воздействия ВЭМП пластические свойства образцов стали более предсказуемыми и менее изменчивыми от образца к образцу.

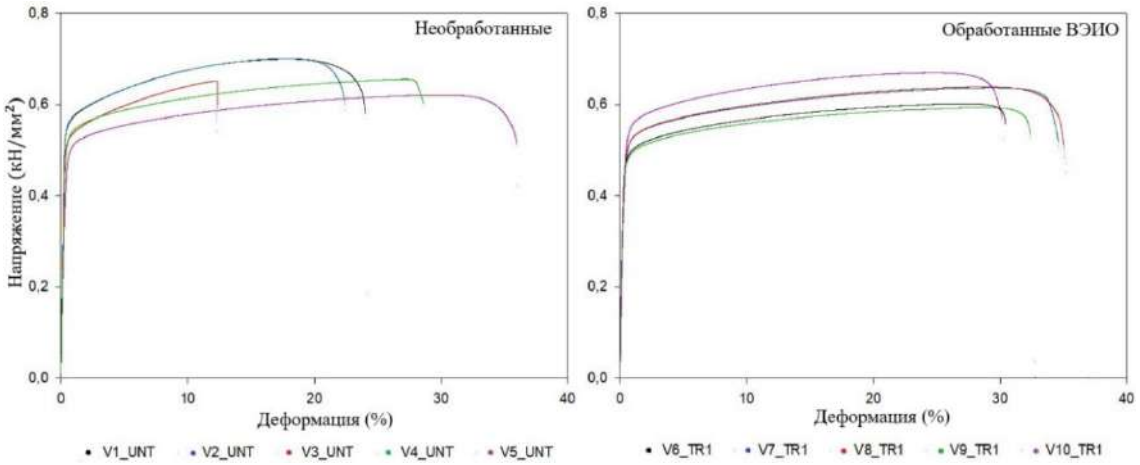


Рис.3. Кривые номинальное напряжение-деформация необработанных образцов (слева) и образцов, обработанных ВЭМП (справа).

Таблица 2.

Результаты теста на разрыв.

Группа	$\bar{\sigma}_в$, кН/мм^2	$\bar{\varepsilon}_F$, %	Sd $\sigma_в$, кН/мм^2	Sd ε_F, %	$\sum q_i$ 10^9 Дж/м^3
Обработанные (5 шт.)	0,655	24,73%	0,041	7,78%	-
Небработанные (5 шт.)	0,627	31,32%	0,028	4,26%	1,73

Также одной из целей настоящей работы является экспериментальное подтверждение залечивания микропор и микротрещин в широком диапазоне размеров (от 5 мкм до 250 мкм), образовавшихся в АМ в результате СЛП, при предпочтительном режиме ВЭИО с выбранными параметрами. До настоящего времени такие экспериментальные подтверждения отсутствовали. При этом объектом исследования является непосредственно изменения пористости и микроструктуры дефектов АМ.

Типичные крупные микродефекты до и после ВЭИО показаны на рис.4. Сравнение подтверждает, что форма дефектов после ВЭИО стала значительно более гладкой. После ВЭИО в стали произошли твердотельные фазовые переходы с образованием новой фазы (темные пятнышки на рис.4Б). Тогда как в окрестности дефекта новая фаза отсутствует (светлая область вокруг дефекта на рис.4А), что, по нашему мнению, свидетельствует о произошедшем в окрестности дефекта плавлении.

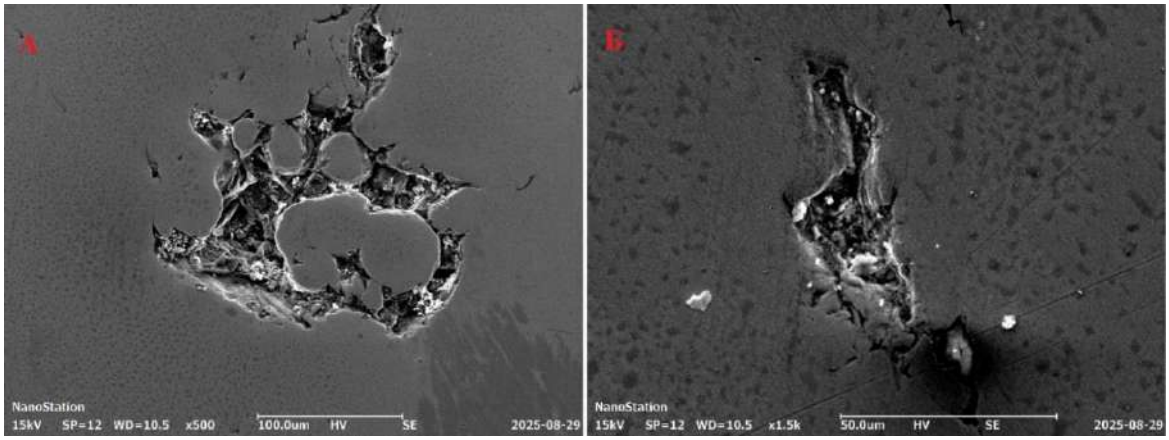


Рис.4. Типичные внутренние микродефекты образцах до (А) и после ВЭИО (Б).

С помощью Porosity Calculator Matlab было обработано и рассчитана пористость на суммарной площади шлифов 9,9 мм2 (в трех сечениях) образцов до и после ВЭИО. Получено, что в результате ВЭИО пористость залечилась с 0,93% до 0,63%, то есть уменьшилась на 32%.

ВЫВОДЫ

ВЭИО в предложенном предпочтительном режиме способна залечивать микротрещины и микропоры с линейными размерами 5-250 мкм в нержавеющей стали 03Х16Н15М3, изготовленной методом СЛП. Вследствие залечивания и улучшения морфологии внутренних микродефектов произошло существенное пористости и улучшение механических характеристик образцов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kukudzhanov K.V., Chentsov A.V. *The energy of short current pulses required for healing cracks in conductive materials* // Mechanics of Solids. – 2024. – Vol.59. – No.8. – Pp.3929-3948.
2. Noell Philip J., Rodelas Jeffrey M., Ghanbari Zahra N., Laursen Chris M. *Microstructural modification of additively manufactured metals by electropulsing* // Addit. Manuf. – 2020. – Vol.33. – 101128.
3. Xue Ling, Liao Chengzhi, Wu Mingxia, Li Qiang, Hu Zhenshang, Yang Yi, Liu Jian. *Improvement of mechanical properties and corrosion resistance of SLM-AlSi10Mg alloy by an eco-friendly electric pulse treatment* // J. Clean. Prod. Elsevier Ltd. – 2024. – Vol.439. – 140864.
4. Guo Haojie, Liu Pu, Qin Xunpeng, Song Yanli, Qian Dongsheng, Xie Lechun, Wang Liqiang, Zhang Lai Chang, Hua Lin. *Electroshock treatment dependent microstructural evolution and mechanical properties of near-β titanium alloy manufactured by directed energy deposition* // Mater. Des. Elsevier Ltd. – 2021. – Vol.212. – 110286.
5. Xie L., Guo H., Song Y., Liu C., Wang Z., Hua L., Wang L., Zhang L.-C. *Effects of electroshock treatment on microstructure evolution and texture distribution of near-b titanium alloy manufactured by directed energy deposition* // Mater. Charact. – 2020. – Vol.161. – 110137.
6. Fan Shijing, He Bo, Liu Meishuai. *Effect of Pulse Current Density on Microstructure of Ti-6Al-4V Alloy by Laser Powder Bed Fusion* // Metals (Basel). – 2022. – Vol.12. – No.8. – 1327.
7. Yan Xudong, Xu Xiaofeng, Wu Chao, Zhao Yang, Li Dongdong, Zhou Yachong, Wu Zhicheng, Wei Lai. *A novel electropulsing treatment to improve the surface strength and repair the pore of additively manufactured Ti-6Al-4V alloy* // Surf. Coatings Technol. Elsevier B.V. – 2023. – Vol.458. – No.5988. – 129364.
8. Cai Qing, Rey Rodriguez Pilar, Carracelas Santos Sara, Castro Gemma, Mendis Chamini L., Chang Isaac T.H., Assadi Hamid. *Crack healing via electropulsing treatment applied to additive-manufactured TiC/316L stainless steel composites* // Mater. Lett. Elsevier B.V. – 2024. – Vol.365. – 136410.
9. Kukudzhanov K.K. *A Review of Studies on Improving the Plastic Properties of Additive Materials Under Strong Pulsed Current* // Mech. Solids. – 2025. – Vol.60. – No.4. – Pp.2353-2369.

10. Kukudzhanov K.V. *Modeling the treatment of high-energy pulsed electromagnetic field of the micro-cracks in a polycrystalline metal* // Vestnik PNIPU. Mekhanika. – 2015. – No.4. – Pp.138-158.
11. Kukudzhanov K.V. *Modeling the healing of damage of metal by high-energy pulsed electromagnetic field* // Letters on Materials. – 2018. – Vol.8. – No.1. – Pp.27-32.
12. Kukudzhanov K.V., Levitin A.L. *The processes of transformation and interaction of microcracks in the metal under the influence of high-energy pulsed electromagnetic field* // Vestnik PNIPU. Mekhanika. – 2016. – No.2. – Pp.89-110.
13. Cai Q., Zhou M., Bagherpou E., Hosseini S. et al. *New Insight Into Crack-Healing Mechanism via Electropulsing Treatment* // Metallurgical and Materials Transactions A. – 2023. – Vol.54. – No.7. – Pp.2960-2974.

УДК 539.3
EDN RLRDMY
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.15

УРАВНЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ*

Курбатов А.С., Жаворонок С.И.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Оболочки из сплавов с эффектом памяти формы (СПФ), судя по имеющимся в открытой печати результатам экспериментальных исследований [1,2], проведенным в последние 5-7 лет, представляются перспективными элементами различных конструкций, в первую очередь противосейсмических систем. Основным эффектом, используемым при создании устройств противосейсмической защиты, является режим сверхупругости СПФ – высокоамплитудное деформирование при циклическом нагружении-разгрузке вследствие протекающих в сплаве фазовых переходов «аустенит-мартенсит-аустенит» под действием напряженного состояния с диаграммой деформирования, обладающей достаточно широким гистерезисом. Преимуществом виброгасителей из СПФ перед аналогичными стальными элементами, работающими в упругопластическом режиме, является обратимое в сверхупругом состоянии деформирование, обеспечивающее возврат защищаемой конструкции к исходной конфигурации. Тонкостенные криволинейные виброзащитные элементы, работающие в сложном напряженно-деформированном состоянии изгиба и растяжения-сжатия срединной поверхности, обладают достаточно большой по сравнению с однонаправленными элементами амплитудой рабочего хода [3]. Особенно эффективными представляются тонкостенные элементы в форме сильфонов – как для виброзащиты [4], так и в качестве различных компенсаторов [5]. В то же время проектирование тонкостенных активно-силовых элементов из СПФ сопряжено с трудностями моделирования, связанных со сложностью математического описания термоупругих фазово-структурных переходов в СПФ при изменении напряженного состояния и температуры, существенной нелинейностью определяющих соотношений [6], в том числе связанной с разносопротивляемостью материала, а также с недостаточно изученным (особенно для оболочек) явлением потери устойчивости при аномально низких критических напряжениях (см., напр., [7]). Неустойчивость равновесных состояний тонкостенных конструкций СПФ является еще одним ключевым препятствием к их практическому применению; устранение данного препятствия требует разработки теории оболочек с памятью и теории устойчивости тонкостенных криволинейных элементов на ее основе. В основу такой теории может быть положена феноменологическая модель термоупругих фазово-структурных переходов в бинарных сплавах с памятью [8], причем в случае тонких оболочек одно из известных затруднений, а именно сложность аналитического обращения определяющих уравнений, разрешенных изначально относительно приращений фазовых и структурных деформаций,

* *Работа выполнена в рамках Государственного задания ИПРИМ РАН (номер гос. регистрации темы 1023032300192-8-2.3.2).*

может быть преодолено переходом к постановке задачи относительно тензоров тангенциальных сил и моментов [8-10]; в такой формулировке деформирование оболочки описывается уравнениями статического равновесия и уравнениями совместности деформаций [10]. Ниже предложены новые инкрементальные определяющие уравнения общей моментной теории оболочек, учитывающие, в отличие от [8-10], существенную зависимость материальных констант модели СПФ от вида напряженного состояния (разносопротивляемость сплава).

1. ИНКРЕМЕНТАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ, ПРЕТЕРПЕВАЮЩЕГО НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ

Пусть СПФ занимает область $V \subseteq \mathbb{R}^3$, соответствующую некоторой промежуточной конфигурации сплошной среды. Пусть данная конфигурация характеризуется метрическим тензором с ковариантными компонентами g_{ij}, $i,j \in [1,3] \cap \mathbb{N}$. Рассмотрим некоторую конфигурацию $V' \subseteq \mathbb{R}^3$ с метрикой g'_{ij}, связанной с g_{ij} тензором деформации $\delta e_{ij} = \frac{1}{2}(g'_{ij} - g_{ij})$. Пусть V и V' являются достаточно близкими, чтобы погрешность линейного приближения тензора δe_{ij} была пренебрежимо малой. В таком случае справедливо аддитивное разложение $\delta e_{ij} = \delta e^E_{ij} + \delta e^T_{ij} + \delta e^{\pm}_{ij} + \delta e^S_{ij}$, где упругое и температурное слагаемые определяются законом Гука-Дюамеля с модулем Юнга и коэффициентом линейного расширения, соответствующими фазовому составу СПФ в промежуточной конфигурации V, заданному полем $q \in [0,1]$ – объемной долей мартенсита, где $q = 1$ соответствует M - фазе, $q = 0$ – A - фазе [8], $\Delta_{ijkl} = \frac{1}{2} g_{ik} g_{jl} + \frac{1}{2} g_{il} g_{jk} - \frac{1}{3} g_{ij} g_{kl}$

$$E^{-1}(q) = qE_{\text{M}}^{-1} + (1-q)E_{\text{A}}^{-1}; \quad \alpha(q) = q\alpha_{\text{M}} + (1-q)\alpha_{\text{A}}; \tag{1.1}$$

$$\delta e^E_{ij} = \Delta_{ijkl}\left\{\left[qE_{\text{M}}^{-1} + (1-q)E_{\text{A}}^{-1}\right]\delta\sigma^{kl} + E_{\Delta}^{-1}\delta q\right\}, \quad E_{\Delta}^{-1} = E_{\text{M}}^{-1} - E_{\text{A}}^{-1}; \tag{1.2}$$

$$\delta e^T_{ij} = g_{ij}\left\{\left[q\alpha_{\text{M}} + (1-q)\alpha_{\text{A}}\right]\delta T + \alpha_{\Delta}(T - T_0)\delta q\right\}, \quad \alpha_{\Delta} = \alpha_{\text{M}} - \alpha_{\text{A}};$$

ν – коэффициент Пуассона, независимый от фазового состава, T – температура в конфигурации V, T_0 – начальная температура. Деформации $e^{\pm}_{\alpha\beta}$, порождаемые фазовым переходом, определяются инкрементальными уравнениями [9]

$$\delta e^{\pm}_{ij} = \left\{\tfrac{3}{2}\rho_{D1}(s)\left[1 - qf^{\pm}(q)\right]\varphi_1(\sigma_i)\Sigma_{ij} + f^{\pm}(q)\bar{\Delta}^{\cdot\cdot kl}_{ij\cdot\cdot} e^{\pm,S}_{kl} + \tfrac{1}{3}\varepsilon_0 g_{ij}\right\}\delta q; \tag{1.3}$$

$$\Sigma_{ij} = \sigma_i^{-1}\bar{\Delta}_{ijkl}\sigma^{kl}, \quad \sigma = \tfrac{1}{3} g_{kl}\sigma^{kl}, \quad \sigma_i = \sqrt{\tfrac{3}{2}\bar{\Delta}_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl}}; \tag{1.4}$$

$$s = \tfrac{27}{2}\left|\Sigma_{ij}\right|; \quad \left|\bullet\right| \equiv \det(\bullet), \quad \bar{\Delta}_{ijkl} = \tfrac{1}{2} g_{ik} g_{jl} + \tfrac{1}{2} g_{jl} g_{ik} - \tfrac{1}{3} g_{ij} g_{kl}; \tag{1.5}$$

$\rho_{D1}(s)$ – точная верхняя грань деформации изменения формы $e^{\pm}_{ij}$ при фазовом переходе, s – параметр вида напряжённого состояния; Σ_{ij}, σ_i – направляющий тензор и интенсивность девиатора напряжения, $f^{\pm}(q) = (1 \pm 1 + q)^{-1}$. Приращения объемной доли мартенсита определяются соотношениями (1.6)

$$\begin{aligned} \delta q^+ &= \pi\Delta T_+^{-1}(1-q)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\pi t^+\left(\delta T_S^+ - \delta T\right), \quad t^+ = \Delta T_+^{-1}\left[T_S^+\left(\sigma^{ij}\right) - T\right]; \\ \delta q^- &= -\pi\Delta T_-^{-1} q \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\pi t^-\left(\delta T - \delta T_S^-\right), \quad t^- = \Delta T_-^{-1}\left[T - T_S^-\left(\sigma^{ij}\right)\right]; \end{aligned} \tag{1.6}$$

$\Delta T_+ = T_S^+ - T_F^+$, $\Delta T_- = T_F^- - T_S^-$, $T_{S,F}^{\pm}(\sigma^{ij})$ – границы диапазонов фазовых переходов

$$T_{S,F}^{\pm}\left(\sigma^{ij}\right) = T_{S,F}^{\pm}(0) - \Delta S^{-1}\left[\bar{\omega}^{\pm} + \left(f^{\pm}(q)\hat{e}_{ij}^{\pm} + \tfrac{1}{2}E_{\Delta}^{-1}\Delta_{ijkl}\sigma^{kl} + \tfrac{1}{3}\varepsilon_0 g_{ij}\right)\sigma^{ij}\right], \quad (1.7)$$

$$\bar{\omega}^{+} = 2\rho_{D1}(s)\left(2+q\right)^{-1}\varphi_1\left[\sigma_i/\sigma_1(s)\right]\sigma_i, \quad \bar{\omega}^{-} = 0;$$

ΔS – разность энтропий мартенситного и аустенитного фазовых состояний.

2. МОДЕЛЬ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ В ПЕРЕМЕННЫХ ПОЛЯ III РОДА

Пусть S – гладкое многообразие с криволинейными координатами $\xi^{\alpha}: S \to D_{\xi} \subseteq \mathbb{R}^2$, TS – его касательное расслоение с определенными на нем полями метрического тензора $a_{\alpha\beta}: TS \otimes TS \to \mathbb{R}_+$, $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, $\forall M \in S \setminus S^{\times}$ $a = |a_{\alpha\beta}| \equiv \det(a_{\alpha\beta}) \neq 0$, $\mu(S^{\times}) = 0$, и тензора кривизны $b_{\alpha\beta}: TS \otimes NS \to \mathbb{R}$, $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$, связанными между собой соотношениями Петерсона-Кодацци-Гаусса

$$\epsilon^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha} b_{\beta\gamma} = 0, \quad \epsilon^{\alpha\beta}(\partial_{\alpha}\Gamma_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}\Gamma_{\alpha\lambda,\delta}) = \epsilon^{\alpha\beta} b_{\alpha\delta} b_{\beta\gamma}, \quad \alpha,\beta,\gamma\ldots = 1,2; \qquad (2.1)$$

$\epsilon_{\alpha\beta}$ – компоненты дискриминантного тензора, $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{1}{2}\left(-\partial_{\gamma}a_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha}a_{\beta\gamma} + \partial_{\beta}a_{\gamma\alpha}\right)$ – символы Кристоффеля. При условиях (2.1) $S \subset \mathbb{R}^3$, т.е. $\exists \mathbf{r}(\xi^{\alpha})$ – радиус-вектор

$$\forall M \in S \quad \exists\, \mathbf{r}:\, D_{\xi} \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r} = x^i\left(\xi^{\alpha}\right)\mathbf{e}_i, \quad i = 1,2,3;$$

$x^i \in C^{(n)}(D_{\xi})$, $n \geqslant 2$ – прямоугольные декартовы координаты, $\mathbf{e}_i$ – декартов базис;

$$TS = \bigcup\nolimits_{M\in S} M \times T_M S; \quad NS = \bigcup\nolimits_{M\in S} M \times N_M S;$$

$$T_M S = \left\{ d\xi^{\alpha}\mathbf{r}_{\alpha} : \mathbf{r}_{\alpha} = \partial_{\alpha}\mathbf{r} = \partial_{\alpha}x^i\mathbf{e}_i \right\}; \quad N_M S = N_M^* S = \left\{ d\zeta\mathbf{n} : \mathbf{n} = \epsilon^{\alpha\beta}\mathbf{r}_{\alpha}\times\mathbf{r}_{\beta} \right\};$$

NS – нормальное расслоение S, $T_M S$ и $N_M S$ – касательное и нормальное пространства в точке $M \in S$, $\mathbf{r}_{\alpha}$ и $\mathbf{n}$ – элементы локальной базисной тройки, нормально связанной с многообразием S. Пусть S соответствует некоторой промежуточной конфигурации деформируемой поверхности, принимаемой далее за локальную отсчетную; рассмотрим близкую к ней некоторую актуальную конфигурацию S' с соответствующими ей метрикой $a'_{\alpha\beta}$ и кривизной $b'_{\alpha\beta}$ (2.2)

$$a'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + 2\delta\varepsilon_{\alpha\beta}; \quad b'_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + \delta\varkappa_{\alpha\beta}; \qquad (2.2)$$

$\delta\varepsilon_{\alpha\beta}$ – тангенциальная деформация, $\delta\varkappa_{\alpha\beta}$ – изменение кривизны поверхности при малом отклонении от S, являющиеся переменными поля третьего рода континуальной механической системы. Если приращения обобщенных деформаций (2.2) удовлетворяют уравнениям совместности I порядка, в силу малости компонентов $\delta\varepsilon_{\alpha\beta}, \delta\varkappa_{\alpha\beta}$ линеаризуемым и приводимым к виду (2.3) [9]

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\beta}\left(\epsilon^{\gamma\beta}\epsilon^{\alpha\delta}\delta\mu_{\gamma\delta}\right) = -b^{\alpha}_{\lambda}\nabla_{\beta}\left(\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\lambda\delta}\delta\varepsilon_{\gamma\delta}\right);\\
&\nabla_{\beta}\epsilon^{\beta\gamma}\delta\psi_{\gamma} = b_{\alpha\beta}\left(\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon^{\beta\delta}\delta\mu_{\gamma\delta}\right); \qquad (2.3)\\
&\nabla_{\beta}\left(\epsilon^{\beta\gamma}\epsilon^{\alpha\delta}\delta\varepsilon_{\gamma\delta}\right) = \epsilon^{\alpha\gamma}\delta\psi_{\gamma},
\end{aligned}$$

то и возмущенная конфигурация погружена в аффинное пространство: $S' \subset \mathbb{R}^3$, так что $\forall M' \in S'\ \exists \mathbf{r}'(\xi^{\alpha}) = \mathbf{r} + \mathbf{u}$, $\mathbf{u}(M) = u_{\beta}\mathbf{r}^{\beta} + w\mathbf{n}$ – смещение точки $M \in S$. Здесь $\delta\mu_{\alpha\beta} = -\varkappa_{\alpha\beta} + b^{\gamma}_{\alpha}\varepsilon_{\beta\gamma}$ – изгибная деформация поверхности.

Пусть далее h – толщина оболочки, $\zeta \in [-h/2, h/2]$ – нормальная координата; срединная поверхность оболочки S в некоторой рассмотренной выше промежуточной конфигурации является реперной. При достаточно малой толщине, т.е. $h^{-1}\max k_\alpha \gg 1$, где $k_\alpha : |b_{\beta\gamma} - k a_{\beta\gamma}| = 0$ – главные кривизны поверхности S, оболочка, тело $V \in \mathbb{R}^3$, является h-окрестностью поверхности S: $\forall M_S \in V\ \exists \mathbf{R} = \mathbf{r} + \zeta\mathbf{n}, \forall M_S' \in V',\ \forall M_S \in V'\ \exists \mathbf{R}' = \mathbf{r} + \mathbf{u} + \zeta(\mathbf{n} + \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} = \delta\theta^\alpha \mathbf{r}_\alpha + \delta\omega_n \mathbf{n}$ – вектор вращения в точке $M \in S$, $\delta\theta^\alpha = K^{-1}\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon^{\beta\delta}(\delta\psi_\beta - \nabla_\beta \delta\omega_n)$, $K = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon^{\beta\delta}b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta}$ – гауссова кривизна S. Деформирование при предполагаемой в процессе перехода $V \to V'$ малости искажений задается линейным тензором с компонентами e_{ij}, в случае канонической теории оболочек определенным деформациями S [9]

$$e_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \zeta\kappa_{\alpha\beta} + \overline{o}\left(h^2\right) \approx \varepsilon_{\alpha\beta} - \zeta\varkappa_{\alpha\beta}, \quad \kappa_{\alpha\beta} = -\varkappa_{\alpha\beta} + b_\alpha^\gamma \varepsilon_{\beta\gamma} + b_\beta^\gamma \varepsilon_{\alpha\gamma}; \qquad (2.4)$$

$e_{\alpha 3} \to 0$, при этом $\| e_{33} \| \ll \| e_{\alpha\beta} \|$, а $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\varkappa_{\alpha\beta}$ – коэффициенты ряда Маклорена для $e_{\alpha\beta}$ в окрестности промежуточной конфигурации поверхности $S : \zeta = 0$, так что

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}\Big|_{S=0}; \quad -\varkappa_{\alpha\beta} = \tfrac{\partial}{\partial\zeta} e_{\alpha\beta}\Big|_{\zeta=0}. \qquad (2.5)$$

Напряжённое состояние оболочки, соответствующее конфигурации S, определяется тензорными полями тангенциальных сил $N^{\alpha\beta}$ и моментов $M^{\alpha\beta}$

$$\sigma^{\alpha\beta} = h^{-1}N^{\alpha\beta} + 12\zeta h^{-3}M^{\alpha\beta} + \overline{o}(h^2), \quad \left\|\sigma^{\alpha 3}\right\| \ll \left\|\sigma^{\alpha\beta}\right\|, \quad \sigma^{33} \to 0; \qquad (2.6)$$

$$N^{\alpha\beta} \approx \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\beta} d\zeta; \quad M^{\alpha\beta} \approx \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\beta}\zeta d\zeta. \qquad (2.7)$$

Пусть состояние оболочки в промежуточной конфигурации S является равновесным; его возмущению при переходе $S \to S'$ и $V \to V'$ соответствуют малые приращения компонентов δq^α, δp главного вектора внешних сил $\mathbf{q} = q^\alpha \mathbf{r}_\alpha + p\mathbf{n}$ в точке $M \in S$; следовательно, тензоры приращений $\delta N^{\alpha\beta}$ и $\delta M^{\alpha\beta}$, отнесенные к реперной тройке $\mathbf{r}_\alpha$, $\mathbf{n}$ и удовлетворяющие уравнениям равновесия в производных I порядка (2.8) и их краевым условиям (2.9)

$$\nabla_\beta \delta N^{\alpha\beta} = b_\gamma^\alpha \delta Q^\gamma - \delta q^\alpha; \quad \nabla_\alpha \delta Q^\alpha = -b_{\alpha\beta}\delta N^{\alpha\beta} - \delta p; \quad \nabla_\beta \delta M^{\alpha\beta} = \delta Q^\alpha, \qquad (2.8)$$

$$\begin{gathered} \left(\delta N^{\alpha\beta}\nu_\beta + \tau_\Gamma \delta M^{\alpha\beta}\tau_\beta\right)\Big|_{\Gamma\sigma} \nu_\alpha = \delta N^\star; \quad \left(\delta N^{\alpha\beta} - \sigma_\Gamma \delta M^{\alpha\beta}\right)\Big|_{\Gamma\sigma} \nu_\alpha \tau_\beta = \delta T^\star; \\ \delta M^{\alpha\beta}\Big|_{\Gamma\sigma} \nu_\alpha \nu_\beta = \delta M^\star; \quad \left(\delta Q^\alpha + \tau_\beta \partial_s \delta M^{\alpha\beta}\right)\Big|_{\Gamma\sigma} \nu_\alpha = \delta Q^\star, \end{gathered} \qquad (2.9)$$

соответствуют переходу оболочки в состояние S'. Здесь δQ^α – компоненты приращения вектора поперечной силы, ν_α, τ_α – компоненты тангенциальной нормали $\boldsymbol{\nu} = \nu^\alpha \mathbf{r}_\alpha$ и касательного вектора $\boldsymbol{\tau} = \tau^\alpha \mathbf{r}_\alpha$ сопровождающего трехгранника контура оболочки Γ в промежуточной конфигурации S; $s \in l_\Gamma$ – длина дуги контура Γ, ∂_s – производная по s; $\tau_\Gamma = \boldsymbol{\nu} \cdot \partial_s \mathbf{n}$, $\sigma_\Gamma = -\boldsymbol{\tau} \cdot \partial_s \mathbf{n}$; $\delta N^\star$, $\delta T^\star$ – нормальная и касательная к Γ_σ компоненты приращения главного вектора тангенциальной внешней силы, $\delta Q^\star$ – приращение трансверсального компонента главного вектора внешней силы, $\delta M^\star$ – приращение нормального компонента главного момента внешних сил на Γ [9]. Постановка линеаризованной краевой задачи канонической теории оболочек приводится к инкрементальным уравнениям равновесия (2.8) и их краевым условиям (2.10), инкрементальным

уравнениям совместности (2.3) и деформационным краевым условиям, записанным в форме [9]. Замыкают постановку задачи определяющие уравнения; ниже рассмотрен частный случай фазовых переходов, протекающих в оболочке из СПФ, при учете влияния вида напряженного состояния.

3. ИНКРЕМЕНТАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПАМЯТЬЮ, УЧИТЫВАЮЩИЕ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЕМОСТЬ СПФ В ПРОЦЕССЕ ТЕРМОУПРУГОГО ФАЗОВОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ

Инкрементальные определяющие уравнения для претерпевающей фазовое превращение тонкой оболочки, соответствующие модели (1.3), однако пренебрегающие эффектом вида напряженного состояния, приведены в [8,9]. Ниже получены линеаризованные инкрементальные определяющие соотношения для случая фазовых переходов, учитывающие зависимость параметра вида напряженного состояния для моментной тонкой оболочки, и уравнения совместности, разрешенные относительно ковариантных производных I порядка.

Уравнения состояния оболочки строятся путем редукции пространственной размерности модели термоупругих фазовых переходов, заданной соотношениями (1.1)-(1.7), основанной на разложении Маклорена основных переменных – компонентов тензора напряжения $\sigma^{\alpha\beta}$ (2.6) и температуры в окрестности промежуточной конфигурации S срединной поверхности оболочки $\zeta = 0$

$$T = T^0 + \zeta T^1; \quad T^0 = T\big|_{\zeta=0}; \quad T^1 = \tfrac{\partial}{\partial\zeta} T\big|_{\zeta=0}. \tag{3.1}$$

Параметр фазового состава оболочки $q = q(\xi^\alpha, \zeta)$ в промежуточной конфигурации и его приращение δq также задается частичной суммой двух членов ряда Маклорена в окрестности срединной поверхности S

$$\begin{aligned} &q = q^0 + \zeta q^1, \quad \delta q = \delta q^0 + \zeta \delta q^1; \\ &q^0 = q\big|_{\zeta=0}; \quad q^1 = \tfrac{\partial}{\partial\zeta} q\big|_{\zeta=0}; \quad \delta q^0 = \delta q\big|_{\zeta=0}; \quad \delta q^1 = \tfrac{\partial}{\partial\zeta} \delta q\big|_{\zeta=0}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Действующие в оболочке напряжения (2.6) порождают упругие тангенциальные деформации и изменения кривизны (2.4), соотношения для которых в соответствии с (2.5) следуют из (1.2). При малых относительно конфигурации S деформациях оболочки приращения определяются согласно [9]

$$\begin{aligned} &\delta\varepsilon^E_{\alpha\beta} = A^E_{\alpha\beta\gamma\delta}\delta N^{\gamma\delta} + \Theta^E_{\alpha\beta,0}\delta q^0; \\ &-\delta\varkappa^E_{\alpha\beta} = 12h^{-2}A^E_{\alpha\beta\gamma\delta}\delta M^{\gamma\delta} + B^E_{\alpha\beta\gamma\delta}\delta N^{\gamma\delta} + \Theta^E_{\alpha\beta,0}\delta q^1 + \Theta^E_{\alpha\beta,1}\delta q^0; \end{aligned} \tag{3.3}$$

здесь симметрические тензоры $A^E_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $B^E_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\Theta^E_{\alpha\beta,01}$ задаются следующим образом

$$\begin{aligned} &A^E_{\alpha\beta\gamma\delta} = h^{-1}\left[E_{\text{A}}^{-1} + q^0 E_\Delta^{-1}\right]\Delta_{\alpha\beta\gamma\delta}; \quad B^E_{\alpha\beta\gamma\delta} = h^{-1}E_\Delta^{-1}q^1\Delta_{\alpha\beta\gamma\delta}; \\ &\Theta^E_{\alpha\beta,0} = h^{-1}E_\Delta^{-1}\Delta_{\alpha\beta\gamma\delta}N^{\gamma\delta}; \quad \Theta^E_{\alpha\beta,1} = 12h^{-3}E_\Delta^{-1}\Delta_{\alpha\beta\gamma\delta}M^{\gamma\delta}; \\ &\Delta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \tfrac{1+\nu}{2}(a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} + a_{\alpha\delta}a_{\beta\gamma}) - \tfrac{\nu}{3}a_{\alpha\beta}a_{\gamma\delta}; \end{aligned} \tag{3.4}$$

Аналогично записываются соотношения (3.5), (3.6) для приращений температурных тангенциальной деформации $\delta\varepsilon^T_{\alpha\beta}$ и изменения кривизны $\delta\varkappa^T_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} &\delta\varepsilon^T_{\alpha\beta} = A^T_{\alpha\beta}\delta T^0 + \Theta^T_{\alpha\beta,0}\delta q^0; \\ &-\delta\varkappa^T_{\alpha\beta} = A^T_{\alpha\beta}\delta T^1 + B^T_{\alpha\beta}\delta T^0 + \Theta^T_{\alpha\beta,0}\delta q^1 + \Theta^T_{\alpha\beta,1}\delta q^0; \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$A^T_{\alpha\beta} = \left(\alpha_A + q^0\alpha_\Delta\right)a_{\alpha\beta};\quad B^T_{\alpha\beta} = q^1\alpha_\Delta a_{\alpha\beta};$$
$$\Theta^T_{\alpha\beta,0} = \alpha_\Delta\left(T^0 - T^0_0\right)a_{\alpha\beta};\quad \Theta^T_{\alpha\beta,1} = \alpha_\Delta\left(T^1 - T^1_0\right)a_{\alpha\beta}. \tag{3.6}$$

Здесь $T^{0,1}_0$ – первые два члена ряда Маклорена начальной температуры T_0.

Девиатор и направляющий тензор напряжения, среднее напряжение и интенсивность напряжения в тонкой оболочке определяются соотношениями (3.7)

$$s_{\alpha\beta} = \overline{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta}\sigma^{\gamma\delta};\quad \sigma_i = \sqrt{\tfrac{3}{2}\overline{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta}\sigma^{\alpha\beta}\sigma^{\gamma\delta}};\quad \Sigma_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{\sigma_i}\overline{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta}\sigma^{\gamma\delta};\ \sigma = \tfrac{1}{3}a_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}; \tag{3.7}$$
$$\overline{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \tfrac{1}{2}a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} + \tfrac{1}{2}a_{\alpha\delta}a_{\beta\gamma} - \tfrac{1}{3}a_{\alpha\beta}a_{\gamma\delta}.$$

Направляющий тензор $\Sigma_{\alpha\beta}$ также приблизим частичной суммой ряда Маклорена $\Sigma_{\alpha\beta} = \Sigma^0_{\alpha\beta} + \zeta\Sigma^1_{\alpha\beta} + o(h^2)$ с тензорными коэффициентами (3.8)

$$\Sigma^0_{\alpha\beta} = \sigma_i^{-1}\overline{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta}\sigma^{\gamma\delta}\Big|_{\zeta=0} = h^{-1}\left(\sigma^0_i\right)^{-1}\overline{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta}N^{\gamma\delta};$$
$$\Sigma^1_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial\zeta}\Sigma_{\alpha\beta}\Big|_{\zeta=0} = \frac{\sigma^1_i}{\sigma^0_i}\left[\Sigma^{10}_{\alpha\beta} - \frac{\sigma^1_i}{\sigma^0_i}\Sigma^0_{\alpha\beta}\right];\quad \Sigma^{10}_{\alpha\beta} = \frac{12}{h^3\sigma^0_i}\overline{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta}M^{\gamma\delta}. \tag{3.8}$$

Интенсивности σ^{10}_i смешанного и σ^1_i моментного напряжённых состояний определяются соотношениями (3.9), среднее моментное напряжение – (3.10)

$$\sigma^{10}_i = \frac{2\sqrt{3}}{h^2}\sqrt{\tfrac{3}{2}\overline{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta}N^{\alpha\beta}M^{\gamma\delta}};\quad \sigma^1_i = \frac{12}{h^3}\sqrt{\tfrac{3}{2}\overline{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta}M^{\alpha\beta}M^{\gamma\delta}}; \tag{3.9}$$

$$\sigma^1 = \frac{\partial\sigma}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=0} = \frac{4}{h^3}a_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}; \tag{3.10}$$

инвариант направляющего тензора $\Sigma^{10}_{\alpha\beta}$ смешанных напряжений – (3.11)

$$\left|\Sigma^{10}_{\alpha\beta}\right| = \frac{12}{h^4}\left(\sigma^{10}_i\right)^{-2}\tilde{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta}N^{\alpha\beta}M^{\gamma\delta}. \tag{3.11}$$

В свою очередь, при учете (2.6) параметр вида напряженного состояния (1.5) также может быть представлен частичной суммой степенного ряда (3.12)

$$s = -\frac{27}{2}\frac{\sigma}{\sigma_i}\left|\Sigma_{\alpha\beta}\right| = s^0 + \zeta s^1 + o\left(h^2\right); \tag{3.12}$$

при этом для мембранного напряженного состояния $s^0 = s\big|_{\zeta=0}$ (3.13)

$$s^0 = -\tfrac{27}{2}\sigma^0\left(\sigma^0_i\right)^{-1}\left|\Sigma^0_{\alpha\beta}\right|; \tag{3.13}$$

среднее мембранное σ^0 и интенсивность мембранного напряжения σ^0_i имеют вид

$$\sigma^0 = \tfrac{1}{3}a_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}\Big|_{s=0} = \tfrac{1}{3h}a_{\alpha\beta}N^{\alpha\beta};\quad \sigma^0_i = \sigma_i\big|_{s=0} = h^{-1}\sqrt{\tfrac{3}{2}\overline{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta}N^{\alpha\beta}N^{\gamma\delta}}; \tag{3.14}$$

Так как квадратичный инвариант направляющего тензора имеет вид (3.15),

$$\left|\Sigma^0_{\alpha\beta}\right| = \tfrac{1}{2}\left(\sigma^0_i\right)^{-2}\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon^{\beta\delta}s^0_{\alpha\beta}s^0_{\gamma\delta} = h^{-2}\left(\sigma^0_i\right)^{-2}\tilde{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta}N^{\alpha\beta}N^{\gamma\delta};$$
$$\tilde{\Delta}_{\lambda\mu\nu\rho} = \tfrac{1}{2}\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon^{\beta\delta}\overline{\Delta}_{\alpha\beta\lambda\mu}\overline{\Delta}_{\gamma\delta\nu\rho} = \tfrac{1}{4}(\epsilon_{\lambda\nu}\epsilon_{\mu\rho} + \epsilon_{\lambda\rho}\epsilon_{\mu\nu}) - \tfrac{2}{9}a_{\lambda\mu}a_{\nu\rho}, \tag{3.15}$$

для параметра вида мембранного напряженного состояния (3.13) получим (3.16)

$$s^0 = -\tfrac{9}{2}\left(\sigma^0_i h\right)^{-3}a_{\alpha\beta}\tilde{\Delta}_{\gamma\delta\varepsilon\lambda}N^{\alpha\beta}N^{\gamma\delta}N^{\varepsilon\lambda}. \tag{3.16}$$

В результате линейный по ζ член ряда Маклорена s^1 определяется (3.17)

$$s^1 = \left.\frac{\partial s}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0} = s^0 \Delta s, \quad \Delta s = \sigma^1/\sigma^0 + \left(\sigma_i^{10}/\sigma_i^0\right)^2 \left(\left|\Sigma_{\alpha\beta}^{10}\right|/\left|\Sigma_{\alpha\beta}^0\right| - 2\right). \tag{3.17}$$

Примем кусочно-линейную аппроксимацию зависимости точной верхней грани деформации фазового превращения $\rho_{D1}(s)$ и порогового напряжения $\sigma_1(s)$ от параметра вида напряженного состояния в виде (3.19) и (3.19):

$$\rho_{D1}(s) = \rho_{D1}(1)\begin{cases} 1, & s \in [0,1]; \\ 1 + s_\Delta \rho_{D1}, & s \in [-1,0[; \end{cases} \tag{3.18}$$

$$\sigma_1(s) = \sigma_1(1)\begin{cases} 1, & s \in [0,1]; \\ 1 + s_\Delta \sigma_1, & [-1,0[. \end{cases} \tag{3.19}$$

С учетом (3.19), (3.19) и выражения для обобщенных производных ρ_{D1}, σ_1

$$\left.\frac{\partial \rho_{D1}(s)}{\partial s}\right|_{\varsigma=0} = \mathrm{H}\left(-s^1\right)\rho_{D1}(1)\Delta\rho_{D1}; \quad \left.\frac{\partial \sigma_1(s)}{\partial \zeta}\right|_{\varsigma=0} = \mathrm{H}\left(-s^1\right)\sigma_1(1)\Delta\sigma_1,$$

$\mathrm{H}(x) = 1$ $(x \geqslant 0)$, $\mathrm{H}(x) = 0$ $(x < 0)$. Для приращений тангенциальной деформации и изменения кривизны, порождаемых фазовыми переходами $A \to M$ и $M \to A$, с учетом эффекта вида напряженного состояния получим уравнения (3.20)

$$\delta\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm} = \Theta_{\alpha\beta,0}^{\pm}\delta q^0; \quad -\delta\varkappa_{\alpha\beta}^{\pm} = \Theta_{\alpha\beta,0}^{\pm}\delta q^1 + \Theta_{\alpha\beta,1}^{\pm}\delta q^0; \tag{3.20}$$

$$\Theta_{\alpha\beta,0}^{-} = \left(q^0\right)^{-1}\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm,S}; \quad \Theta_{\alpha\beta,1}^{-} = \left(q^0\right)^{-1}\left[-\varkappa_{\alpha\beta}^{\pm,S} + q^1\left(q^0\right)^{-1}\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm,S}\right];$$

$$\Theta_{\alpha\beta,0}^{+} = \left(2 + q^0\right)^{-1}\left(\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm,S} + \tfrac{2}{3}\varepsilon_0 a_{\alpha\beta}\right) + \bar{\Theta}_{\alpha\beta,0}^{+};$$

$$\bar{\Theta}_{\alpha\beta,0}^{+} = 3\left(2 + q^0\right)^{-1}\rho_{D1}\left(s^0\right)\varphi_1\left[\sigma_i/\sigma_1\left(s^0\right)\right]\Sigma_{\alpha\beta}^0;$$

$$\Theta_{\alpha\beta,1}^{+} = -\frac{1}{2+q^0}\varkappa_{\alpha\beta}^{\pm,S} + \left[\left(\frac{\sigma_i^{10}}{\sigma_i^0}\right)^2 - \frac{q^1}{2+q^0}\right]\bar{\Theta}_{\alpha\beta,0}^{+} + \frac{3}{2+q^0}\left\{\varphi_1\left[\frac{\sigma_i^0}{\sigma_1(s^0)}\right]\times\right.$$

$$\times\left[s^0\Delta s\,\mathrm{H}\left(-s^1\right)\rho_{D1}^1\Delta\rho_{D1}\Sigma_{\alpha\beta}^0 + \rho_{D1}\left(s^0\right)\left(\sigma_i^1/\sigma_i^0\right)\Sigma_{\alpha\beta}^1\right] +$$

$$\left. + \rho_{D1}\left(s^0\right)\frac{\sigma_i^0}{\sigma_1(s^0)}\varphi_1'\left[\frac{\sigma_i^0}{\sigma_1(s^0)}\right]\left[s^0\Delta s\,\mathrm{H}\left(-s^1\right)\sigma_1^1\Delta\sigma_1 + \frac{(\sigma_i^{10})^2}{\sigma_1(s^0)\sigma_i^0}\right]\Sigma_{\alpha\beta}^0.\right.$$

Замыкают модель инкрементальные эволюционные уравнения, связывающие малое приращение постоянной и линейно распределенной по толщине оболочки долей мартенситной фазы с приращениями температуры, компонентов тензора тангенциальных сил $\delta N^{\alpha\beta}$ и моментов $\delta M^{\alpha\beta}$

$$0 < \delta q^0 = \frac{\pi\left(1 - q^0\right)}{\Delta T_+}\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}\frac{T_S^{+(0)} - T^0}{\Delta T_+}\left(\delta T_S^{+(0)} - \delta T^0\right); \tag{3.21}$$

$$0 > \delta q^0 = \frac{\pi q^0}{\Delta T_-}\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}\frac{T^0 - T_S^{-(0)}}{\Delta T_-}\left(\delta T_S^{-(0)} - \delta T^0\right); \tag{3.22}$$

где коэффициенты рядов температур начала фазовых переходов имеют вид

$$T_S^{+(0)} = T_S^{+}(0) - \Delta S^{-1}\left\{3\left(2 + q^0\right)^{-1}\rho_{D1}\left(s^0\right)\varphi_1\left(\sigma_i^0/\sigma_1(s^0)\right)\sigma_i^0 + \right.$$

$$\left. + \left[\tfrac{1}{2}E_\Delta^{-1}h^{-2}\Delta_{\alpha\beta\gamma\delta}N^{\gamma\delta} + h^{-1}\left(2 + q^0\right)^{-1}\left(\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm,S} + \tfrac{2}{3}\varepsilon_0 a_{\alpha\beta}\right)\right]N^{\alpha\beta}; \right. \tag{3.23}$$

$$T_S^{+(1)}=T_S^{+}\left(0\right)-\Delta S^{-1}\left\{-3q^1\left(2+q^0\right)^{-2}\rho_{D1}\left(s^0\Delta s\right)\varphi_1\left(\sigma_i^{10}/\sigma_1(s^0\Delta s)\right)\sigma_i^{10}+\right.$$
$$-\left(2+q^0\right)^{-1}\left[\varkappa_{\alpha\beta}^{\pm,S}+q^1\left(2+q^0\right)^{-1}\left(\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm,S}+\tfrac{2}{3}\varepsilon_0 a_{\alpha\beta}\right)\right]N^{\alpha\beta} \qquad (3.24)$$
$$\left.+12h^{-3}\Delta S^{-1}E_\Delta^{-1}\Delta_{\alpha\beta\gamma\delta}N^{\alpha\beta}M^{\gamma\delta}+\left(2+q^0\right)^{-1}\left[12h^{-3}\left(\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm,S}+\tfrac{2}{3}\varepsilon_0 a_{\alpha\beta}\right)\right]M^{\alpha\beta}\right;$$

$$T_S^{-(0)}=T_S^{-}\left(0\right)-\Delta S^{-1}h^{-1}\left[\left(q^0h\right)^{-1}\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm,S}+\tfrac{1}{2}E_\Delta^{-1}h^{-2}\Delta_{\alpha\beta\gamma\delta}N^{\gamma\delta}\right]N^{\alpha\beta}; \qquad (3.25)$$

$$T_S^{-(1)}=T_S^{-}\left(0\right)-\left(q^0\Delta S\right)^{-1}\left\{12h^{-3}\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm,S}M^{\alpha\beta}-\left[\varkappa_{\alpha\beta}^{\pm,S}+\left(q^1/q^0\right)\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm,S}\right]N^{\alpha\beta}\right\}+ \qquad (3.26)$$
$$+12h^{-3}\Delta S^{-1}E_\Delta^{-1}\Delta_{\alpha\beta\gamma\delta}N^{\alpha\beta}M^{\gamma\delta}.$$

С учетом (3.23)-(3.26) выражения для приращений температур начала и окончания фазовых переходов, входящие в (3.21) и (3.22), записываются так

$$\Delta S\delta T_S^{+(0)}=-\frac{3}{2+q^0}\rho_{D1}\left(s^0\right)\varphi_1\left[\frac{\sigma_i^0}{\sigma_1(s^0)}\right]\sigma_i^0-\frac{1}{h}\left[\frac{1}{hE_\Delta}\Delta_{\alpha\beta\gamma\delta}N^{\gamma\delta}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2+q^0}\left(\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm,S}+\tfrac{2}{3}\varepsilon_0 a_{\alpha\beta}\right)\right]\delta N^{\alpha\beta};$$

$$\Delta S\delta T_S^{+(1)}=-\frac{3}{2+q^0}\left\{-\frac{q^1}{2+q^0}\rho_{D1}\left(s^0\right)\varphi_1\left[\frac{\sigma_i^0}{\sigma_1(s^0)}\right]+\right.$$
$$+\mathrm{H}\left(-s^0\Delta s\right)\left[\rho_{D1}^1\Delta\rho_{D1}\varphi\left[\frac{\sigma_i^0}{\sigma_1(s^0)}\right]-\rho_{D1}\left(s^0\right)\frac{\sigma_i^0\sigma_1^1\Delta\sigma_1}{[\sigma_1(s^0)]^2}\varphi_1'\left[\frac{\sigma_i^0}{\sigma_1(s^0)}\right]\right]+$$
$$\left.+\rho_{D1}\left(s^0\right)\left(\sigma_i^{10}\right)^2\left[\frac{1}{(\sigma_i^0)^2}\varphi_1\left[\frac{\sigma_i^0}{\sigma_1(s^0)}\right]+\frac{1}{\sigma_1(s^0)}\varphi_1'\left[\frac{\sigma_i^0}{\sigma_1(s^0)}\right]\right]\right\}\sigma_i^0-$$
$$-\frac{1}{2+q^0}\frac{1}{h}\left\{-\varkappa_{\alpha\beta}^{\pm,S}\delta N^{\alpha\beta}+\left(\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm,S}+\tfrac{2}{3}\varepsilon_0 a_{\alpha\beta}\right)\left[\delta M^{\alpha\beta}-q^1\left(2+q^0\right)^{-1}\delta N^{\alpha\beta}\right]\right\}-$$
$$-\frac{12}{E_\Delta h^4}\Delta_{\alpha\beta\gamma\delta}N^{\alpha\beta}M^{\gamma\delta};$$

$$\Delta S\delta T_S^{-(0)}=-\frac{\rho_{D1}\left(s^0\right)}{q^0}\varphi_1\left[\frac{\sigma_i^0}{\sigma_1(s^0)}\right]\sigma_i^0-\frac{1}{h}\left[\frac{1}{hE_\Delta}\Delta_{\alpha\beta\gamma\delta}N^{\gamma\delta}+\frac{\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm,S}}{q^0}\right]\delta N^{\alpha\beta};$$

$$\Delta S\delta T_S^{-(1)}=-\frac{1}{q^0h}\left\{-\varkappa_{\alpha\beta}^{\pm,S}\delta N^{\alpha\beta}+\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm,S}\left[\delta M^{\alpha\beta}-q^1\left(2+q^0\right)^{-1}\delta N^{\alpha\beta}\right]\right\}-$$
$$-\frac{12}{E_\Delta h^4}\Delta_{\alpha\beta\gamma\delta}N^{\alpha\beta}M^{\gamma\delta}.$$

Линеаризованные инкрементальные уравнения (3.3), (3.5), (3.20) совместно с принципом суперпозиции малых приращений тангенциальных деформаций $\delta\varepsilon_{\alpha\beta}=\delta\varepsilon_{\alpha\beta}^{E}+\delta\varepsilon_{\alpha\beta}^{T}+\delta\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm}$ и изменений кривизны $\delta\varkappa_{\alpha\beta}=\delta\varkappa_{\alpha\beta}^{E}+\delta\varkappa_{\alpha\beta}^{T}+\delta\varkappa_{\alpha\beta}^{\pm}$ на некотором шаге силового и температурного нагружения оболочки с памятью формы образуют систему определяющих соотношений общей теории тонких оболочек с памятью, претерпевающих неизотермические фазовые переходы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены новые обратные инкрементальные определяющие уравнения общей теории тонких оболочек из бинарного сплава с памятью, претерпевающих термоупругие фазовые превращения в переменном поле внешних сил и температуры, основанные на однократно связной феноменологической модели термоупругих фазово-структурных переходов и учитывающие зависимость материальных констант модели от вида напряженного состояния. Уравнения разрешены относительно малых приращений тензоров тангенциальных деформаций и изменения кривизны срединной поверхности оболочки относительно некоторой промежуточной конфигурации, образованной вследствие предшествующего процесса деформирования. Приращения тангенциальной деформации и изменения кривизны зависят от тензоров тангенциальных сил и моментов, отнесенных к промежуточной конфигурации, что обеспечивает возможность описания нелинейного деформирования оболочки при конечных тангенциальных деформациях, наблюдаемых в безмоментных тонких оболочках при фазовых превращениях, а также параметра двух скалярных полей – параметра фазового состава и температуры. Уравнения линеаризованы относительно малых приращений тензоров тангенциальных сил и моментов, а также приращений параметра фазового состава и температуры. Получены линеаризованные инкрементальные эволюционные уравнения для параметра фазового состава. Показано, что зависимость процесса деформирования от вида напряженного состояния тонкой оболочки особенно проявляется при прямом фазовом переходе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wang B., Zhu S., Casciati F. *Experimental study on novel self-centering seismic base isolators incorporating superelastic shape memory alloys* // Journal of Structural Engineering. – 2020. – Vol.116. – 04020129.
2. Güllü A., Danquach J.O., Dilibal S. *Characterization of energy dissipative cushions made of NiTi shape memory alloy* // Smart Materials and Structures. – 2022. – Vol.31. – 615018.
3. Cao S., Ozbulut O.E. *Long-stroke shape memory alloy restrainers for seismic protection of bridges* // Smart Materials and Structures. – 2020. – Vol.29. – 115005.
4. Senba H., Okabe N., Yamaji T., Okita K., Yamauchi K. *Dynamic behavior of single-stage bellows of titanium-nickel shape memory alloy under cyclic loading* // International Journal of Modern Physics B. – 2006. – Vol.20. – Pp.3944-3949.
5. Biesinger D.P., Biesinger J.A. *Fasteners with shape memory changing bellows and methods using same*. – U.S. Patent 9.138.274.B1. – September 22, 2015.
6. Мовчан А.А., Шарунов А.В. *Обращение определяющих соотношений модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы с учетом влияния изменения вида напряженного состояния* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2024. – Т.30. – №2. – С.268-684.
7. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Abnormal buckling of thin-walled bodies with shape memory effects under thermally induced phase transitions* // Advanced Structured Materials. – 2019. – Vol.110. – Pp.493-524.
8. Zhavoronok S.I. *Constitutive relations and compatibility equations for thin shape memory alloy shells* // AIP Confer. Proceedings. – 2022. – Vol.2611. – 100004.
9. Zhavoronok S.I. *On the incremental constitutive relations and compatibility equations for thin shape memory alloy shells undergoing non-isothermal phase*

transitions // Composites: Mechanics, Computations, Applications. – An Int. Journal. – 2023. – Vol.14. – No.1. – Pp.1-27.

10. Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S. *On the incremental intrinsic equations for thin shape memory alloy shells undergoing austenite-to-martensite and martesnite-to-austenite thermoelastic phase transitions* // AIP Conference Proceedings. – 2024. – Vol.3030. – 080003.

УДК 539.3
EDN RMYIIY
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.16

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛАСТОМЕРНОГО КОМПОЗИТА

Майский А.В., Корнев Ю.В., Гилязова Р.Ф., Муромцев Д.Н., Карнет Ю.Н.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Исследование структуры эластомерных композитов, а также взаимосвязи структура материала – механические свойства является важным фактором при прогнозировании характеристик материалов и создании эластомерных композитов с заданным комплексом характеристик. В настоящей работе изучается эластомерный композит на основе бутадиен-стирольного каучука (ДССК-628). При этом исследуется состав, наполненный частицами диоксида кремния различного размера от нано- до микроразмеров.

Целью данной работы является исследование взаимосвязи структуры и механических свойств эластомерного композита с применением методов численного моделирования.

В данной работе проводилось численное моделирование напряженно-деформированного состояния представительного объёма эластомерного композита на основе уже существующих методик [1,2]. Предложена методика 3D-моделирования представительного объёма эластомерного, наполненного наночастицами диоксида кремния, с учётом промежуточного слоя между частицей и эластомерной матрицей [3], а также с учётом их возможного расслоения и отрыва. Выбор параметров и характерных размеров подобных объёмов изложен в работах [4,5]. Используется энергетический критерий – расслоение между частицей и матрицей происходит при превышении энергии взаимодействия материала матрицы и материала наночастицы. Энергия данного взаимодействия была рассчитана с помощью методов молекулярной динамики [6-8] для двух типов поверхностей материала наночастицы диоксида кремния – гидрофобной и гидрофильной.

Было проведено сравнение полученной в результате численного моделирования диаграммы деформирования представительного объёма эластомерного композита с диаграммой деформирования, полученной в результате эксперимента.

1. СВОЙСТВА ПРОМЕЖУТОЧНОГО СЛОЯ

В эластомерном композите, наполненном наночастицами, данные частицы окружены промежуточными слоями материала, отличными по свойствам от материала матрицы [3].

Первичный слой представляет собой эластомер, находящийся в стеклообразном состоянии, характер деформирования которого соответствует характеру деформирования эластомерной матрицы при температуре -80ºС (рис.1).

Данным характером деформирования обладают такие твердые материалы как стёкла и пластики.

В ходе работ определяли упруго-прочностные свойства эластомерной матрицы – вулканизованного каучука (ДССК-628) в стеклообразном состоянии. Для этого эксперимент проводили при температуре ниже температуры стеклования данного полимера (сополимера бутадиена и стирола), образец охлаждали и термостатировали в термокамере разрывной машины. Определение упруго-прочностных свойств эластомерной матрицы (ДССК-628) в стеклообразном состоянии позволит в дальнейших работах при моделировании структуры эластомерных композитов задать упругие характеристики межфазного слоя.

Определение упруго-прочностных свойств образцов эластомерной матрицы (ДССК-628) производилось в соответствии с ГОСТ 252-75 на разрывной машине Zwick UTS-10. Испытания проводили при температуре от -80ºС и скорости движения активного захвата (50±2,5) мм/мин. Образец эластомерных композитов в форме лопатки закрепляют в захватах машины по установочным меткам так, чтобы ось образца совпадала с направлением растяжения. В ходе цикла растяжения образца фиксируют силу, соответствующую заданным удлинениям. Программное обеспечение машины строит непрерывную кривую «напряжение-относительное удлинение» в период растяжения образца до разрыва. Испытания проводили на шести одинаковых образцах – лопатках. Далее полученные зависимости строили на графиках, находили средние значения. Полученные экспериментальные данные представлены на рис.1.

Из результатов экспериментов, представленных на рис.1 видно, что характер деформирования эластомерной матрицы при температуре -80ºС схож с таковым для твердых материалов, стекол, пластиков. Прочность матрицы в стеклообразном состоянии составляет порядка 60 МПа, модуль упругости составляет порядка 5,3 ГПа. Относительное удлинение при разрыве составляет порядка 1,5%.

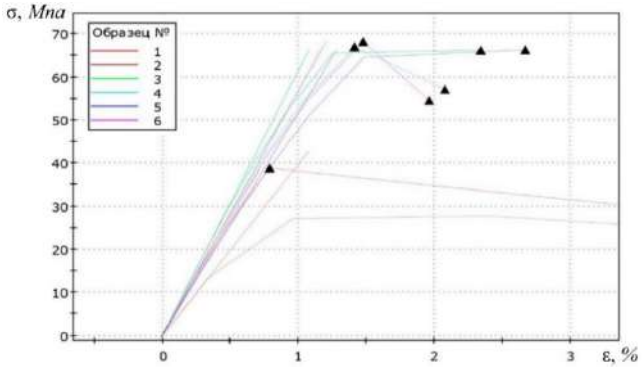


Рис.1. Диаграмма деформирования эластомерной матрицы при растяжении при -80ºС (стеклообразное состояние).

2. РАСЧЁТ ЭНЕРГИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Для расчёта методами молекулярной динамики энергии взаимодействия [10] между наночастицей и эластомерной матрицей были построены молекулярные структуры: слои аморфного диоксида кремния (структура аналогична структуре расплавленного кварца) с гидрофильной и с гидрофобной поверхностями, а также макромолекула каучука бутадиен-стирольного каучука из 60 звеньев (рис.2). Данные структуры были помещены в фазовые пространства (рис.3).

Моделирование молекулярных структур и расчёты были выполнены в программном комплексе BIOVIA Materials Studio [9].

Расчёты проводились в NVE-ансамбле: постоянными в ходе расчёта оставались количество частиц, объем, энергия системы. Взаимодействие между частицами молекул описывалось с помощью непрерывного потенциала Леннард-Джонса.

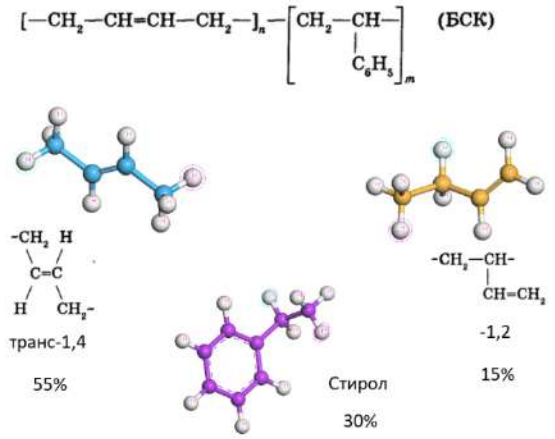
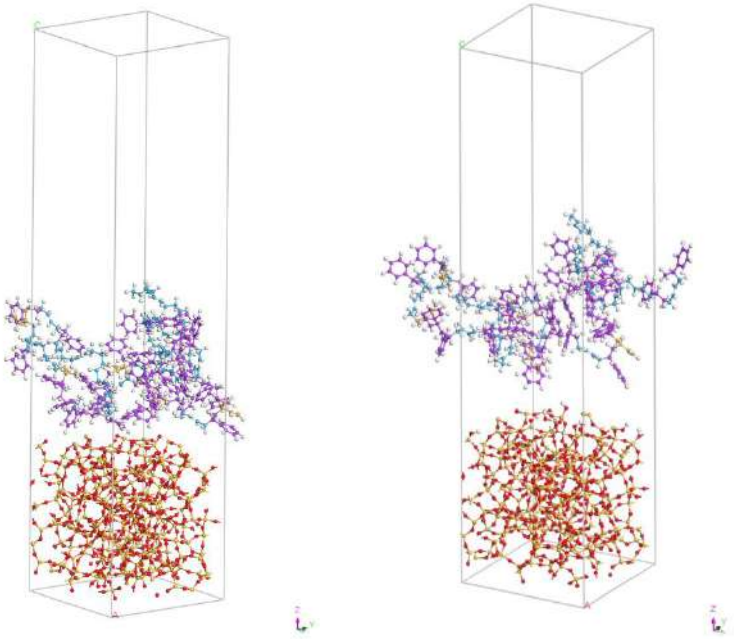


Рис.2. Формула и звенья макромолекулы каучука.



а б

Рис.3. Молекулярные структуры из макромолекулы каучука и слоя диоксида кремния с поверхностью: а) гидрофильной; б) гидрофобной.

Общая схема моделирования:

1. Построение начальной конформации.
2. Минимизация потенциальной энергии системы.
3. Уравновешивание системы методом МД при заданных условиях (NVE-ансамбль).
4. Проведение расчета методом МД с записью траектории системы (координат, а также скоростей и сил).

5. Анализ полученной траектории (файлов) и вычисление различных статистических и динамических функций, в том числе, и энергий.

Энергия взаимодействия вычисляется по формуле [10]

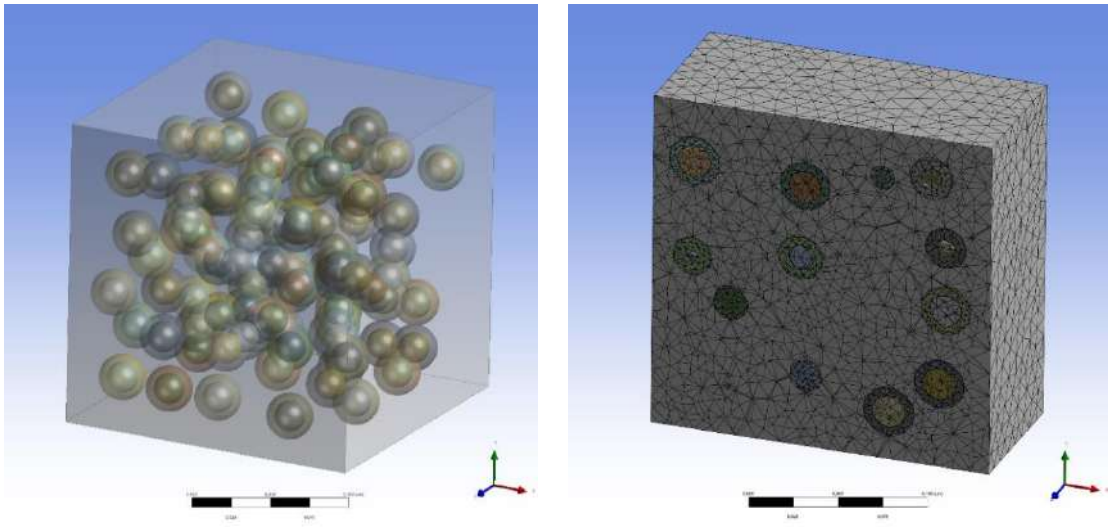
$$E_{iteraction} = E_{total} - \left(E_{surface} + E_{polymer}\right). \quad (1)$$

Для гидрофильной поверхности диоксида кремния $E_{iteraction} = -106$ ккал/моль, для гидрофобной – $E_{iteraction} = -556$ ккал/моль.

Гидрофобная поверхность диоксида кремния имеет большую энергию взаимодействия, чем гидрофильная. Это происходит потому, что неполярная макромолекула каучука хорошо взаимодействует с неполярной гидрофобной поверхностью. Тогда как гидрофильная поверхность является полярной и её энергия взаимодействия с макромолекулой каучука существенно меньше.

3. МОДЕЛЬ МИКРОСТРУКТУРЫ ЭЛАСТОМЕРНОГО КОМПОЗИТА

Модель представительного объёма эластомерного композита (рис.4) представляет собой куб со стороной грани 200 нм заполненный сферическими частицами диаметром 10 нм с промежуточным слоем толщиной 5 нм. Объёмное содержания наночастиц $f_v = 0,07$. Расчётная схема – перемещения ограничены по трём разным граням в трёх разных направлениях, по одной грани, противоположной той, на которой ограничены перемещения по направлению X, приложены принудительные деформации $\varepsilon_x = 80\%$ (одноосное растяжение). Диаграмма деформирования материала эластомерной матрицы задана согласно данным из эксперимента на испытания ненаполненных образцов каучука ДССК-628, в модели аппроксимирована моделью Йео. Материал частиц – диоксида кремния (аморфный) со свойствами $E = 3,1$ Гпа, $\nu = 0,17$. Задано контактное взаимодействие между матрицей и промежуточным слоем (связанный контакт) и между промежуточным слоем и наночастицей (связанный контакт с учётом расслоения и отрыва).

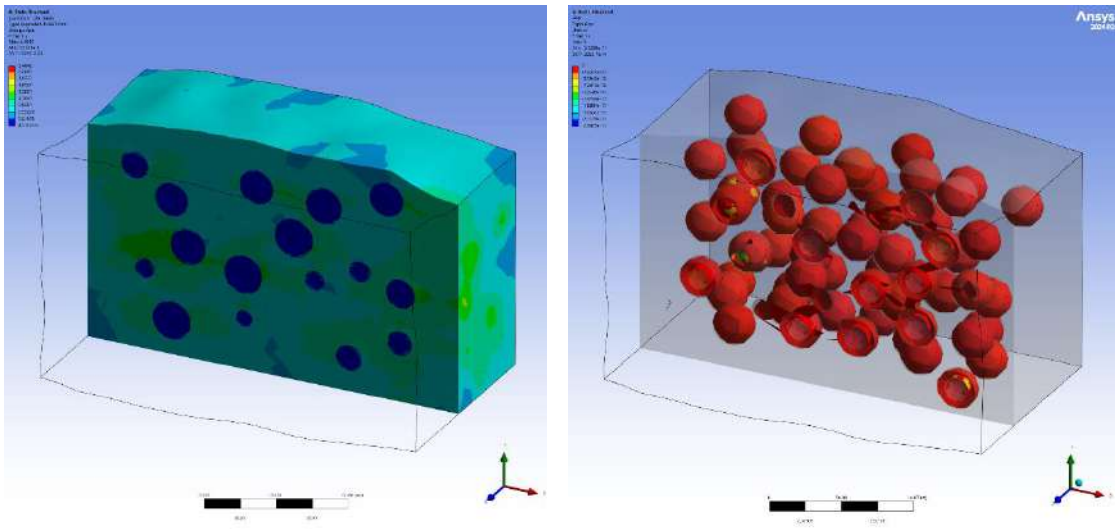


а б

Рис.4. Модель эластомерного композита: а) геометрическая; б) конечно-элементная (в разрезе).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис.5-6 представлены результаты численного моделирования. Диаграмма деформирования эластомерного композита с гидрофильной поверхностью наночастиц не существенно отличается от диаграммы деформирования композита с гидрофобной поверхностью.



а б

Рис.5. Утрированная картина деформирования (масштаб перемещений 1:1), гидрофильная поверхность нано-частиц: а) эквивалентные деформации; б) карта расслоений.

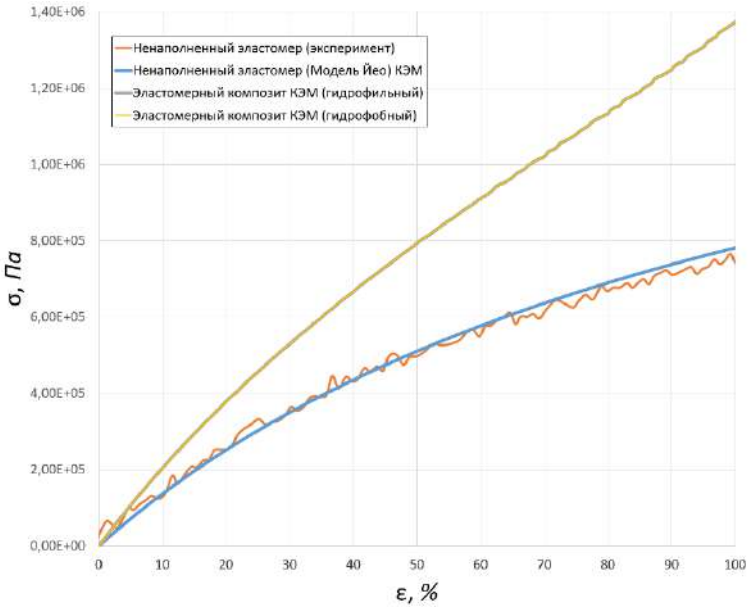


Рис.6. Диаграмма деформирования эластомерного композита, сравнение с экспериментальными данными испытания ненаполненного эластомера.

ВЫВОДЫ

1. Разработана конечно-элементная модель для моделирования напряженно-деформированного состояния эластомерных композитов с учётом параметров их структуры.

2. Предложен способ создания и расчёта различных молекулярных структур эластомеров методом молекулярной динамики, а также способ нахождения энергии взаимодействия слоя аморфного диоксида кремния и макромолекулой бутадиен-стирольного каучука, необходимой для более точного численного моделирования зоны взаимодействия различных фаз частицы-матрица композитного эластомера с учетом их расслоения и отрыва.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hoang T.H., Guerich M., Julien Yvonnet. *Determining the size of RVE for nonlinear random composites in an incremental computational homogenization framework* // Journal of Engineering Mechanics – ASCE. – 2016. – Vol.142(5).
2. Kornev Y.V., Semenov N.A., Babaytsev A.V., Valiev H.H. *Reinforcement effects in SBR rubber/modified shungite nanocomposites* // Nanoscience and Technology. An International Journal.– 2018. – Vol.9(1). – Pp.31-45.
3. Sung-Seen Choi, Eunah Ko. *Novel test method to estimate bound rubber formation of silica-filled solution styrene-butadiene rubber compounds* // Polymer Testing 40. – 2014. – Pp.177-177.
4. Cugnoni J., Galli M. *Representative Volume Element Size of Elastoplastic and Elastoviscoplastic Particle-Reinforced Composites with Random Microstructure* // Tech Science Press CMES. – 2010. – Vol.66. – No.2. – Pp.165-185.
5. Ландик Л.В., Пестренин В.М., Пестренина И.В. *Представительный объем и эффективные термоупругие материальные параметры композиций с периодической структурой* // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2023. – №83. – С.111-126.
6. Sumit Sharma, Pramod Kumar, Rakesh Chandra, Prince Setia. *Prediction of properties of silica nanoparticle/hydroxyapatite fiber reinforced Bis-GMA/TEGDMA composites using molecular dynamics* // Computational Materials Science. – 2019. – Vol.158. – Pp.32-41.
7. Satoru Yamamoto, Riichi Kuwahara, Mika Aoki, Atsuomi Shundo, Keiji Tanaka. *Molecular Events for an Epoxy-Amine System at a Copper Interface* // ACS Applied Polymer Materials. – 2020. – Pp.1474-1481.
8. Dylan M Anstine, Alejandro Strachan and Coray M Colina. *Effects of an atomistic modeling approach on predicted mechanical properties of glassy polymers via molecular dynamics* // Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. – 2020. – Vol.28. – 025006.
9. Sumit Sharma, Prince Setia, Raj Chawla. *Molecular Dynamics Simulation of Nanocomposites Using BIOVIA Materials Studio, Lammps and Gromacs* // Elsevier, Amsterdam, 2019.
10. Songyue Chai, Jiao Liu, Dongshuai Hou, Pan Wang. *Molecular insights into the interfacial adhesion mechanism between carbon nanotubes and epoxy resin* // Royal Society of Chemistry Adv. – 2023. – Vol.13. – Pp.30915-30924.

УДК 539.422.52
EDN SBTSCQ
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.17

ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОШИВКИ НА УДАРОСТОЙКОСТЬ КОМПОЗИТНОЙ ПЛАСТИНЫ

Медведский А.Л.[1], Хомченко А.В.[2], Мартиросов М.И.[3], Бутысин В.Е.[1]

[1]ФАУ «Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского», г. Жуковский, Россия
[2]ООО «АУРУС-АЭРО», г. Москва, Россия
[3]ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Для современного гражданского самолётостроения в последние десятилетия характерно широкое применение полимерных композиционных материалов (ПКМ). Использование ПКМ позволяет значительно повысить весовую культуру конструкции самолета, существенно увеличить жесткость. Несмотря на высокую удельную стоимость элементов конструкций из ПКМ, прирост прочностных свойств агрегатов позволяет уменьшить их массу на 20-30% и, как следствие, увеличить массу топлива и полезной нагрузки. Воздействие эксплуатационных факторов (например, ударного характера) накладывает ограничения на расширение применения ПКМ в авиационной технике (АТ) из-за снижения физико-механических характеристик используемых материалов. Ударные воздействия приводят к возникновению таких дефектов, как межслоевое расклеивание в области воздействия ударника, частичное или полное разрушение слоёв в области удара с образованием сквозных рваных отверстий, расслоение волокон однонаправленных слоёв. Перспективным методом повышения ударной стойкости и остаточной прочности ПКМ является создание межслоевых связей, например, ортогональной прошивкой – одним из достаточно простых и сравнительно дешёвых способов повысить ударостойкость элементов конструкций из ПКМ. В работе рассмотрено влияние ортогональной прошивки различной плотности на ударостойкость прямоугольной пластины из ПКМ.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается поведение прямоугольной пластины длиной a, шириной b и суммарной толщиной t при ударном воздействии стальным ударником с полусферическим наконечником массой m, диаметром D и начальной скоростью V. Рассмотрен вариант пластины без армирования и варианты пластины с ортогональной прошивкой волокном Vectran с плотностью прошивки 6×6 мм и 3×3 мм. Конечно-элементные модели (КЭМ) пластины (с прошивкой и без неё) разработаны в программном комплексе LS-DYNA. Вариант КЭМ пластины без прошивки, ударника и испытательной плиты показан на рис.1.

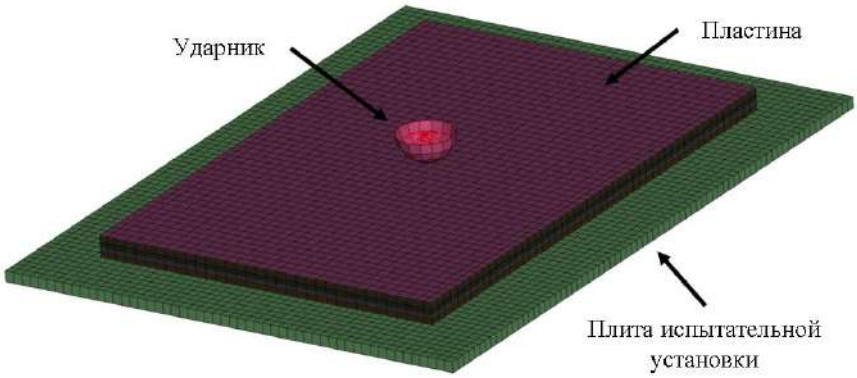


Рис.1. КЭМ пластины, ударника и испытательной плиты.

Точка нанесения удара расположена в центре пластины, вектор скорости удара сонаправлен с нормалью к внешней поверхности пластины в точке удара. Пластина опёрта по краям на испытательную плиту, в которой сделан прямоугольный вырез длиной *e*, шириной *f*. Значения параметров пластины и ударника представлено в Таблице 1. Низкоскоростной удар выполняется с помощью экспериментальной машины Dynatup 9250HV.

Таблица 1.

Параметры пластины и ударника.

Величина	Значение
a, длина пластины	150 мм
b, ширина пластины	100 мм
t, суммарная толщина пластины	6.08 мм
m, масса ударника	6.26 кг
D, диаметр наконечника	15.9 мм
V, начальная скорость ударника	2.82, 3.61 м/с
e, длина выреза в плите	125 мм
f, ширина выреза в плите	75 мм

На рис.2 представлен фрагмент испытательной машины с установленным образцом.

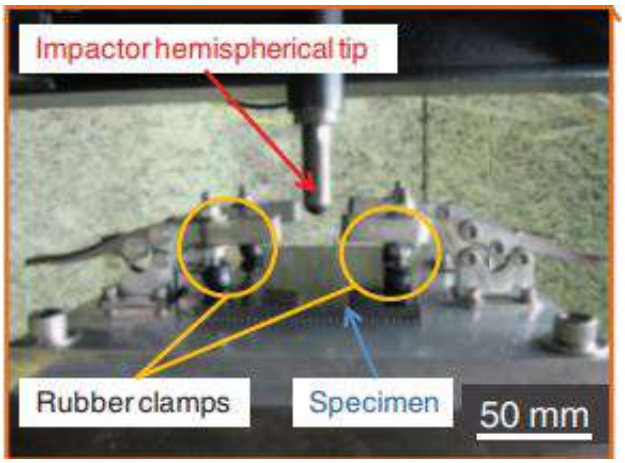


Рис.2. Фрагмент испытательной машины с установленным образцом.

Пластина выполнена из ПКМ на основе углеродного волокна T800SC-24K (Toray Industries, Япония) и эпоксидного связующего XNR/H6813 (Nagase ChemteX

Copr., Япония). Укладка пластины симметричная, сбалансированная и имеет следующий формат: $[+45/90/-45/0/(0/+45/90/90/-45/0)_2]_S$, всего в композитном пакете 32 слоя. Направление укладки совпадает с длинной стороной пластины.

Физико-механические характеристики монослоя пластины представлены в Таблице 2.

Таблица 2.

Физико-механические характеристики монослоя пластины.

Величина	Значение
E_1, модуль упругости в продольном направлении	158 ГПа
E_2, модуль упругости в поперечном направлении	8.6 ГПа
G_{12}, модуль упругости при сдвиге в плоскости листа	4.37 ГПа
μ, коэффициент Пуассона	0.32
ρ, плотность	$1.5 \cdot 10^{-9}$ т/мм^3
σ_{1+}, предел прочности в продольном направлении при растяжении	2900 МПа
σ_{1-}, предел прочности в продольном направлении при сжатии	1461 МПа
σ_{2+}, предел прочности в поперечном направлении при растяжении	50.7 МПа
σ_{2-}, предел прочности в поперечном направлении при сжатии	207 МПа
τ_{12}, предел прочности при сдвиге в плоскости листа	96 МПа
G_{IC}, энергия разрушения при нормальном отрыве, G_{IIC}, энергия разрушения при плоском сдвиге	0.5 Дж/мм^2
h, толщина монослоя	0.19 мм

Ортогональная прошивка пластины осуществлялась волокном Vectran (Kuraray, Япония), которое произведено из жидкокристаллического полимера. Физико-механические характеристики и геометрические параметры армирующего волокна представлены в Таблице 3.

Таблица 3.

Физико-механические характеристики и геометрические параметры армирующего волокна.

Величина	Значение
E, модуль упругости при растяжении	75 ГПа
G, модуль сдвига	3 ГПа
A, площадь поперечного сечения	12.67×10^{-3} мм^2
$P_{осевая}$, предельная осевая сила	40.5 Н

На рис.3 показана ортогональная прошивка образца с различной плотностью прошивки.

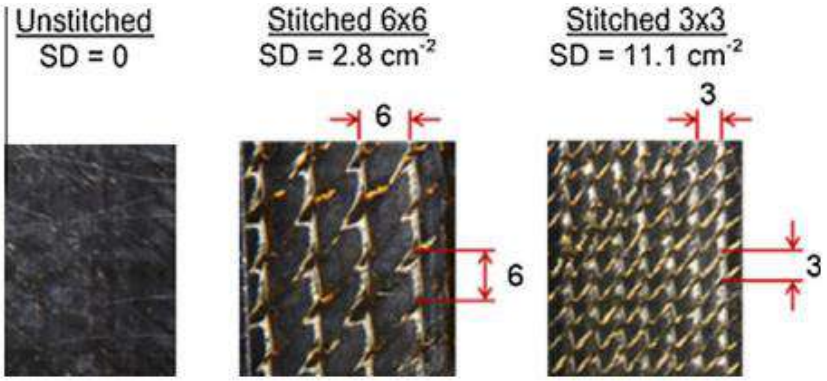


Рис.3. Ортогональная прошивка образца с различной плотностью прошивки.

Моделирование прошивки осуществлялось посредством одномерных двухузловых КЭ типа «BEAM». На рис.4 показан фрагмент КЭ пластины с ортогональной прошивкой.

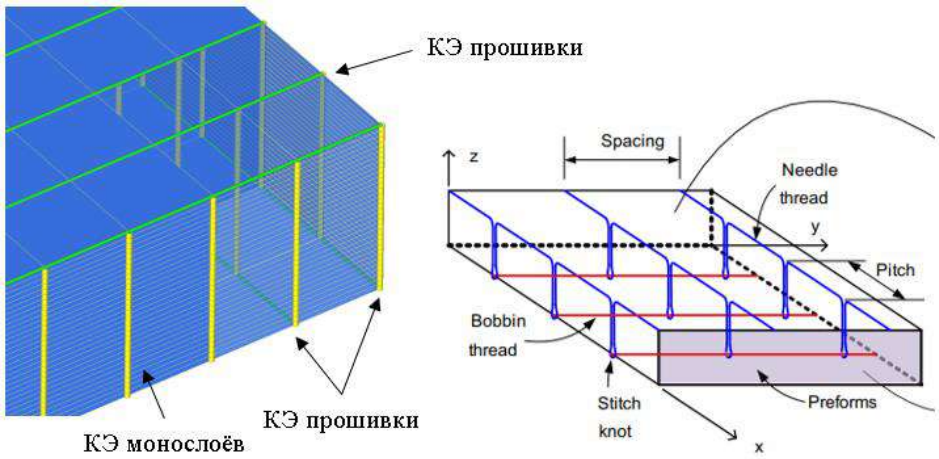


Рис.4. Конечно-элементное моделирование ортогональной прошивки.

В качестве модели материала для моделирования ортогональной прошивки использовалась модель «067_NONLINEAR_ELASTIC_DISCRETE_BEAM» с заданием характеристик жёсткости и предельного усилия на разрыв.

На рис.5,6 показаны зависимости осевых и поперечных усилий в прошивке от перемещений в соответствующих направлениях. Предполагается, что крутящий и изгибающие моменты в прошивке не возникают.

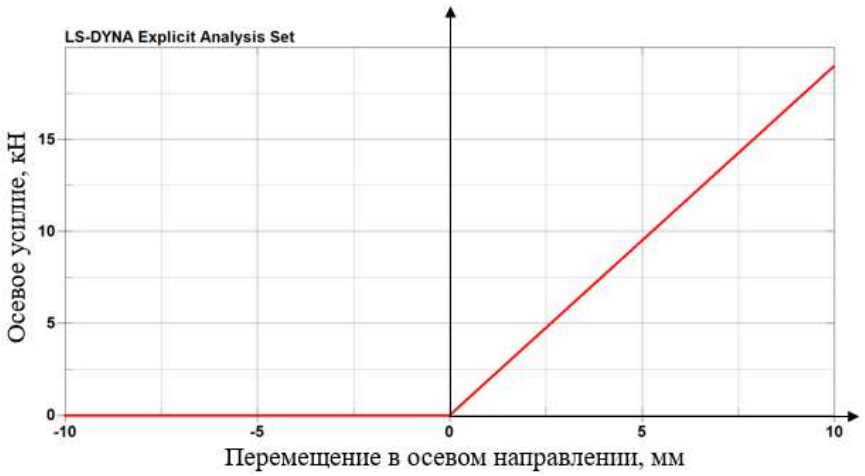


Рис.5. Зависимость осевого усилия от перемещения в осевом направлении.



Рис.6. Зависимость поперечного усилия от перемещения в поперечном направлении.

РЕЗУЛЬТАТЫ

После проведения испытаний с помощью ультразвукового неразрушающего контроля сделаны замеры суммарной площади расслоения, спроецированной на внешнюю поверхность пластины. Результаты сравнения экспериментальных данных с расчётными представлены на рис.7,8.

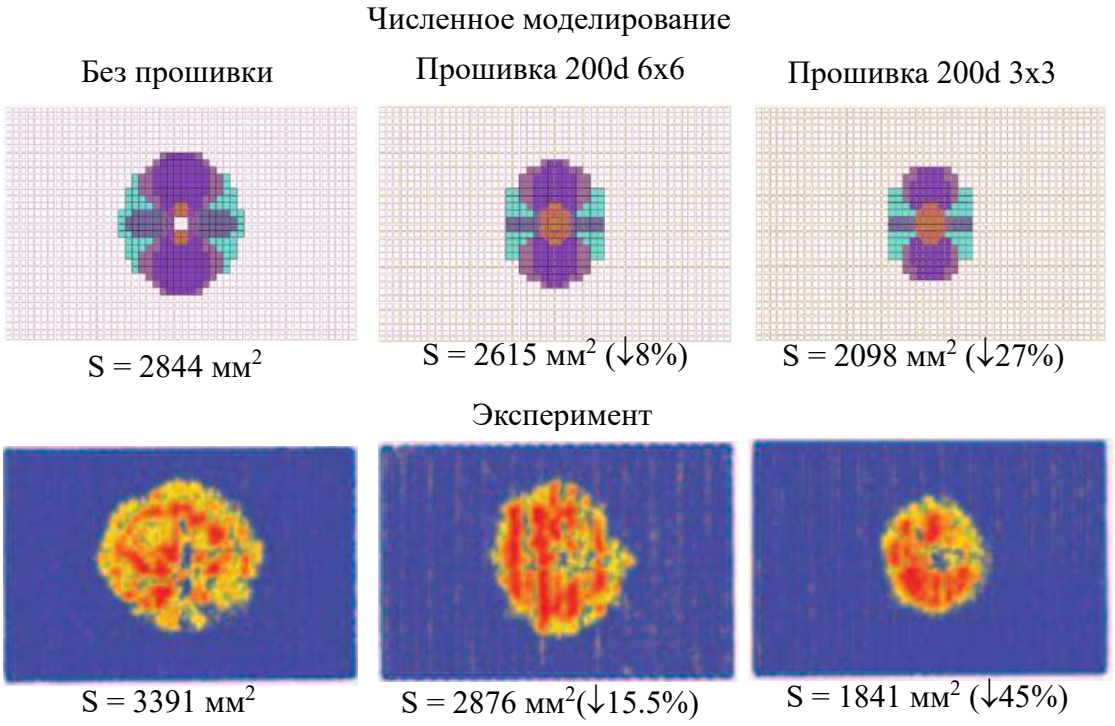


Рис.7. Картина повреждений в пластине при ударе с энергией 25 Дж.

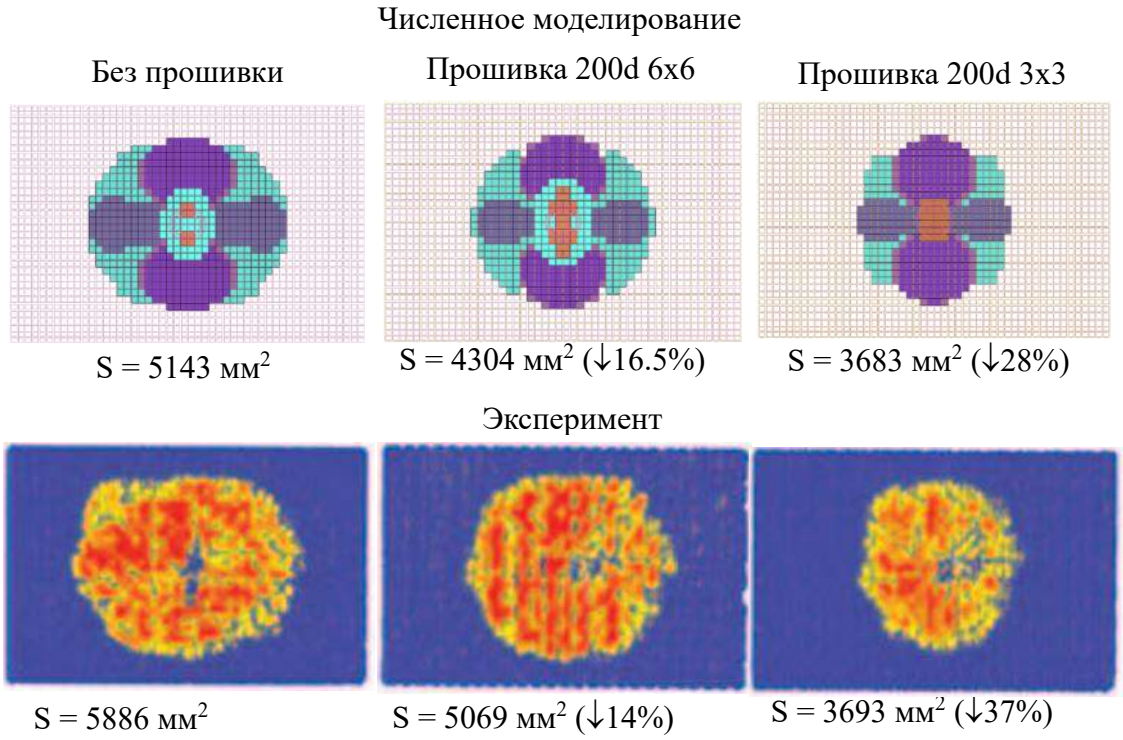


Рис.8. Картина повреждений в пластине при ударе с энергией 40.6 Дж.

На рис.9,10 представлено изменение полной контактной силы ударника от времени для энергий удара 40.6 Дж и 25 Дж соответственно.

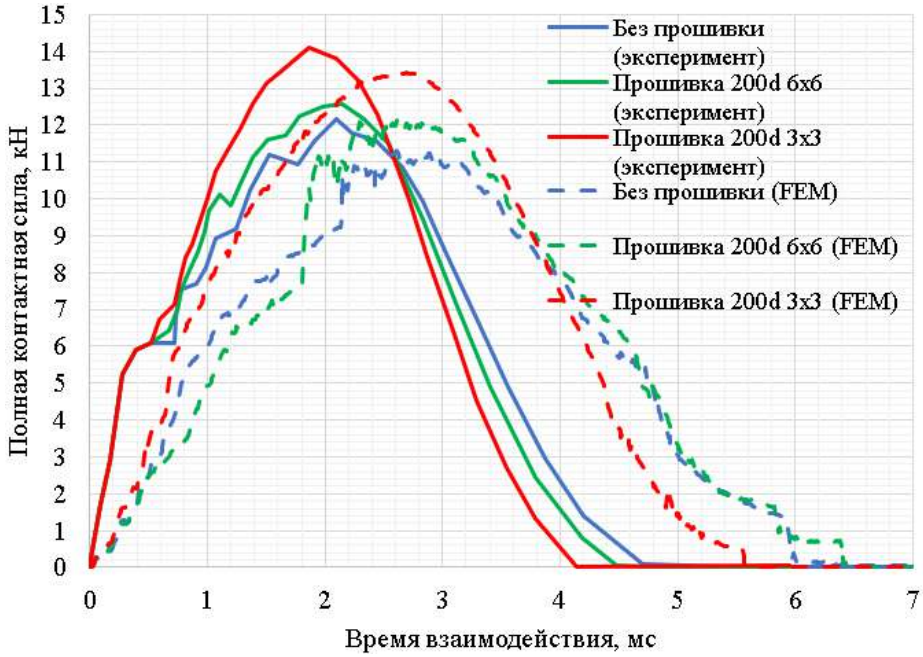


Рис.9. Зависимость полной контактной силы от времени (энергия удара 40.6 Дж).

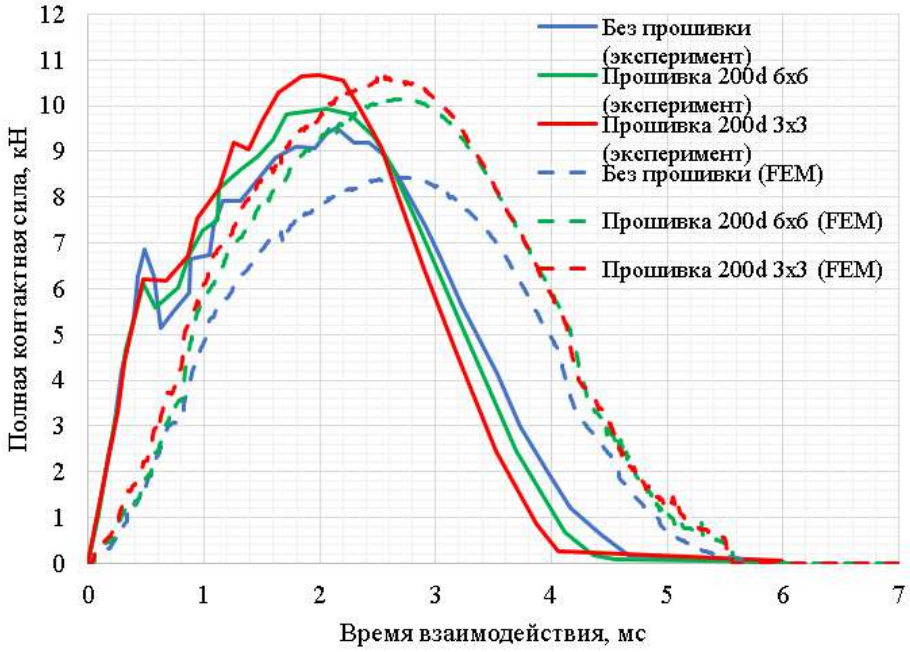


Рис.10. Зависимость полной контактной силы от времени (энергия удара 25 Дж).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам проведенных в работе теоретико-экспериментальных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Анализ публикаций показал, что вопрос экспериментального и численного исследования влияния ортогональной прошивки на поведение изделий из ПКМ в настоящее время у нас в стране и зарубежом мало проработан.
2. В отечественной АТ ортогональная прошивка, как инструмент повышения ударостойкости элементов конструкций из ПКМ, практически не применяется.
3. Имеет место удовлетворительное совпадение между численным и натурным экспериментом: качественная и количественная картины расслоений при ударе практически совпадают.
4. Наблюдается тенденция к снижению зоны расслоений при увеличении плотности ортогональной прошивки.
5. Дальнейшие исследования предполагается, в том числе, посвятить различным вариантам моделирования ортогональной прошивки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tan K.T., Watanabe N., Iwahori Y. *Failure Impact Damage Resistance, Response, and Mechanisms of Laminated Composites Reinforced by Through-Thickness Stitching* // International Journal of Damage Mechanics. – 2012. – Vol.21. – Pp.51-80.
2. Yudhanto A., Iwahori Y. *Effect of stitch density on tensile properties and damage mechanisms of stitched carbon/epoxy composites* // Composites Part B Engineering. – 2013. – Vol.46. – Pp.151-165.
3. Aymerich F., Pani C., Priolo P. *Damage Response of Stitched Cross-ply Laminates Under Impact Loadings* // Engineering Fracture Mechanics. – 2007. – Vol.74. – Pp.500-514.
4. Платонов А.А. *Полимерные композиционные материалы на основе прошитого наполнителя с повышенной ударостойкостью* // Авиационные материалы и технологии. – 2014. – №4. – С.43-47.

5. Староверов О.А., Бабушкин А.В., Горбунов С.М. *Оценка степени поврежденности углепластиковых композиционных материалов при ударном воздействии* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – №1. – С.161-172.
6. Гриневич Д.В., Донецкий К.И., Шершак П.В., Яковлев Н.О. *Механические свойства тканых композиционных материалов с объемно-армированной структурой (обзор)* // Труды ВИАМ. – 2023. – №6. – С.87-104.
7. Aymerich F., Priolo P. *Characterization of Fracture Modes in Stitched and Unstitched Cross-ply Laminates Subjected to Low-Velocity Impact and Compression After Impact Loading* // International Journal of Impact Engineering. – 2008. – Vol.35. – Pp.591-608.
8. Cartie D.D.R., Irving P.E. *Effect of resin and fibre properties on impact and compression after impact performance of CFRP* // Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2002. – Vol.33. – Pp.483-493.
9. Leong K.H., Lee B., Herszberg I., Bannister M.K. *The effect of binder path on the tensile properties and failure of multilayer woven CFRP composites* // Composites Science and Technology. – 2000. – Vol.60. – Pp.149-156.
10. Gerlach R., Siviour C.R., Wiegand J., Petrinic N. *In-plane and through-thickness properties, failure modes, damage and delamination in 3D woven carbon fibre composites subjected to impact loading* // Composites Science and Technology. – 2012. – Vol.72. – Pp.397-411.

УДК 629.7.025:539.3
EDN SCEMCU
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.18

КОМПЛЕКСНАЯ ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ РАЗМЕРОВ ОТВЕРСТИЙ НА ПРОЧНОСТЬ МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ПЛАСТИН

Митряйкин В.И., Булашов Д.А., Беззаметнов О.Н., Кузнецов М.Е.

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Современная стратегия развития авиационной техники предполагает значительное применение для их изготовления конструкций и деталей из полимерных композиционных материалов (ПКМ) [1]. При изготовлении летательных аппаратов (ЛА) большое количество соединений крупногабаритных деталей и узлов из ПКМ осуществляется при помощи большого количества болтовых и заклепочных соединений, требующих сверления отверстий в многослойном композиционном материале. Деформирование таких конструкций под действием эксплуатационных нагрузок имеет некоторые особенности, которые необходимо учитывать при оценке их прочности. Концентраторы напряжений (в основном отверстия), это неизбежный конструктивный фактор, влияющий на снижение прочности как при статическом, так и при циклическом нагружении. Эффективные коэффициенты напряжений $K\sigma$ вычисляются как отношение критического напряжения $\sigma_{кр}$ для гладких образцов и образцов с отверстиями. В работе [2] приведены значения эффективных коэффициентов концентрации напряжений для различных видов нагружения, современных ПКМ, имеющих различные отверстий. При расчете на прочность таких конструкций необходимо учитывать краевые эффекты, возникающие на свободной поверхности круговых соединений [3]. Современные вычислительные комплексы делают возможным выполнять исследования краевых эффектов на основе численных методов. Некоторые результаты таких исследований приведены в работах [4-5]. Появление новых ПКМ, изменение технологий изготовления и схем укладки слоёв требует создания комплексных методов оценки снижения прочностных характеристик конструкций в зависимости от концентраторов напряжений.

РЕЗУЛЬТАТ ИССЛЕДОВАНИЙ

Проведена комплексная оценка влияния концентраторов напряжений и прочности пластин при сжатии. В качестве объектов исследования были выбраны образцы из углепластика на основе безавтоклавного препрега В180 саржевого переплетения. Данный материал обладает высокими эксплуатационными характеристиками и предназначен для деталей, эксплуатирующихся при температурах до 150°С. В качестве связующего материала использовалась эпоксидная композиция того же производителя. Материал имеет следующие механические характеристики: $\left[\sigma_{11-}\right]=944,8$ Мпа, $E_{11-}=68,9$ Гпа, $\left[\sigma_{11+}\right]=744,9$ Мпа, $E_{11+}=62,7$ Гпа, $\tau_{12}=10,6$ Мпа, $G_{12}=10,69$ Гпа, $\upsilon_{12}=1,2$.

Изготовление заготовки пластин из 20 слоев проводилось методом вакуумно-печного формования с использованием вакуумного мешка. Удаление технологического припуска, нарезка образцов и сверление отверстий производились на станке с ЧПУ. Отверстия были вырезаны диаметром $d = 10$, 15 и 20 мм. Геометрические характеристики образцов 150x100x4 мм. Испытание проводилось на электромеханической универсальной испытательной машине Instron 5882 с регистрирующим программно-аппаратным комплексом Instron 5800. Наибольшая нагрузка, которую может воспроизводить испытательная машина, составляет 100 кН. Для измерения значений нагрузки применяется силоизмерительный датчик тензометрический Instron, точность измерения силы сжатия составляет ±0,15% от диапазона измерения. Деформация образца при сжатии определялась с помощью датчика перемещения траверсы, которая давила на образец. Скорость штока машины при нагружении образца составляла 2 мм/мин. При этом проводилась регистрация графической зависимости между нагрузкой и перемещением траверсы (диаграмма деформирования). Обработка результатов замеров в реальном времени проводилась с помощью программы Bluehill, которая после ввода геометрических размеров пластины позволяла построить зависимость между напряжением и деформацией, которая рассчитывается автоматически по данным перемещения траверсы.

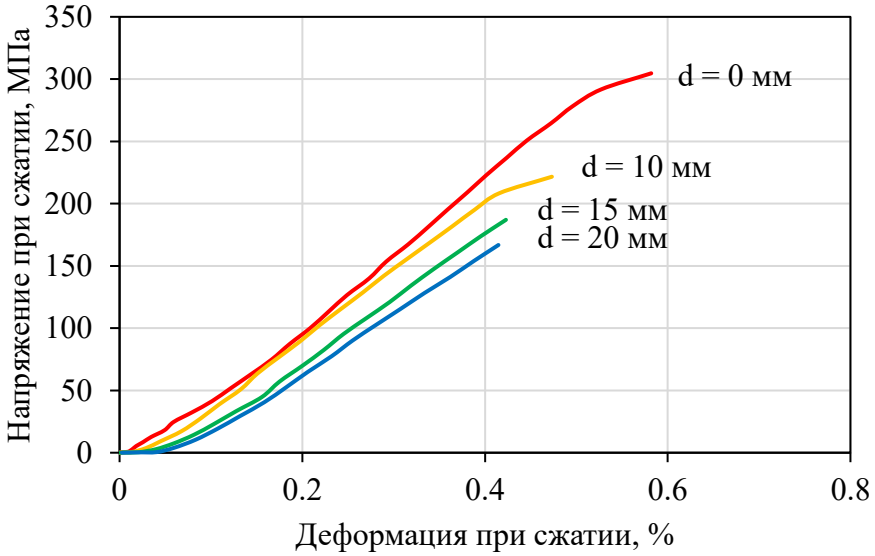


Рис.1. Зависимость напряжения от деформации для различных концентраторов напряжений.

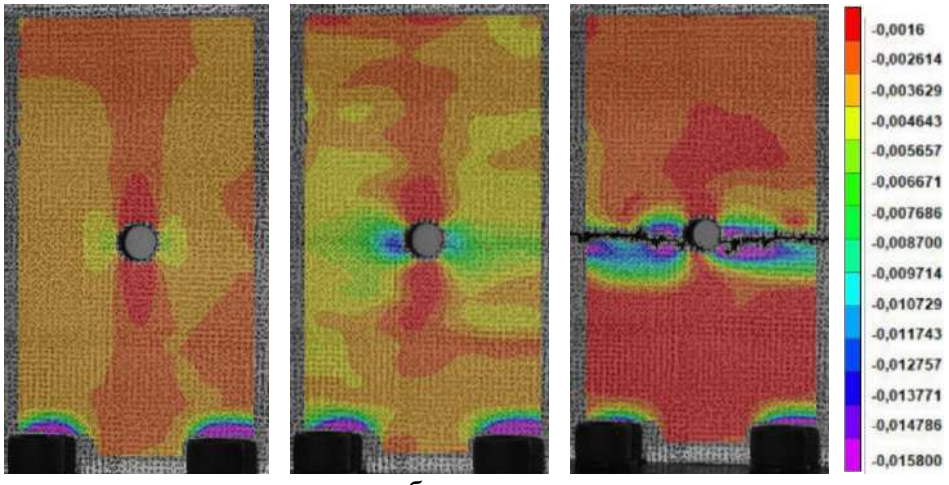
Таблица 1.

$N_{обр}$	d(мм)	$P_{кр}$(кН)	$\sigma_{кр}$ (МПа)	Kσ	E (ГПа)
0-1	0	131,47	331,15	1,004	62,72
0-2	0	140,15	332,54	1,000	63,71
0-3	0	124,21	312,57	1,064	60,04
10-1	10	99,11	263,60	1,262	57,51
10-2	10	98,55	255,32	1,302	51,01
10-3	10	96,91	233,66	1,423	56,53

15-1	15	78,40	208,52	1,595	47 ,7
15-2	15	87,16	216,17	1,538	55,14
15-3	15	92,74	226,75	1,467	54,13
20-1	20	82,78	220,76	1,506	37,57
20-2	20	84,46	211,16	1,575	42,60
20-3	20	84,19	205,69	1,617	49,81

Результаты экспериментального определения механических характеристик при сжатии образцов пластин с отверстиями различного диаметра приведены на рис.1 и в Таблице 1. Установлен характер снижения предела прочности и модуля упругости образцов при увеличении размеров отверстия. Определенные механические параметры позволят провести калибровку расчетной методики и более точно описать изменение коэффициента концентратора напряжений $K\sigma$.

Для расчета упругих характеристик поверхности пластин с отверстиями был проведен анализ полей деформации при помощи бесконтактной видеосистемы, основанной на методике корреляции цифровых изображений (DIC Digital Image Correlation) VIC 3D. На рис.2а-в представлены поля распределения деформаций образцов с диаметром отверстия 10 мм вдоль оси Y при различной нагрузке: а) 0,5 *Ркр*, б) 0,9 *Ркр* (непосредственно перед разрушением), в) после разрушения. Заметны локализации и концентрации деформаций в окрестностях отверстия при увеличении Ркр. Тип разрушения – «поперечный», область разрушения в зоне повреждения, в середине образца. С целью верификации с результатами эксперимента проведен тестовый численный расчет.



а б в

Рис.2. Поле распределения деформаций вдоль оси приложения нагрузки.

В расчетной практике широко используются универсальные конечно-элементные пакеты, такие как Nastran, Abakus, ANSYS, поэтому актуальной задачей можно считать интегрирование в них таких критериев разрушения, которые позволят более адекватно моделировать потерю структурной прочности композитных материалов. Одним из наиболее распространенных пакетов является ANSYS. Это современный программный продукт имеет удобный графический интерфейс WorkBench, который больше рассчитан на инженеров, и классический вариант Mechanical ANSYS, который имеет свой внутренний язык APDL. Поэтому

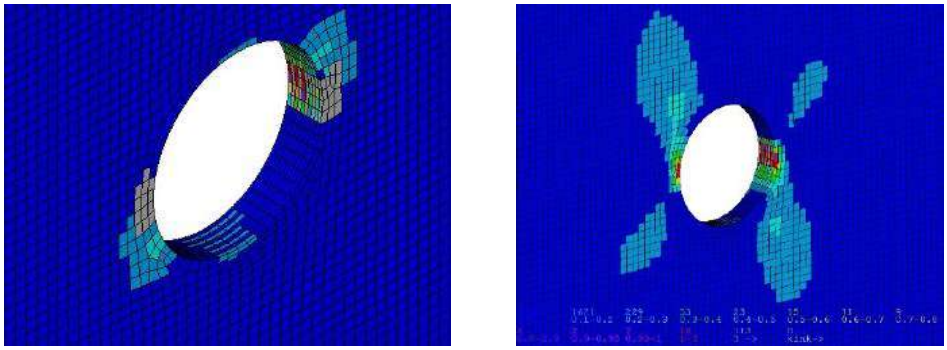
на предварительном этапе используется второй вариант, т.к. он позволяет использовать свои варианты критериев разрушения. В качестве конечных элементов используются восьмиузловые оболочечные элементы типа Solsh190 и Shell281.

Первый строится на основе объема, т.е. узловые перемещения определяются на лицевых поверхностях, поэтому они очень широко используются в расчетной практике, т.к. позволяют напрямую использовать модели, импортированные из САПР. Второй тип традиционный, узловые перемещения определяются на срединной поверхности. Оба типа позволяют использовать несколько ортотропных слоев, технологию «рождения и смерти», большие перемещения, поэтому широко применяются при моделировании композитных конструкций. На предварительном этапе проверялось использование встроенных критериев разрушения. Их можно разделить на два типа. Первый тесно связан с разрушением анизотропных тел, к ним относится, например, критерий Цая-Ву. Вторая группа – критерии, которые включают в себя два коэффициента, связанные с разрушением матрицы и разрушением наполнителя. К ним относятся критерии Пака, Хашина и критерий НАСА (Ленгли) LaRC03(2D) и LaRC04(3D).

Тестовые расчеты проводились по трем разным схемам. Первая схема – строится модель, задаются граничные условия, прикладывается внешняя нагрузка, решается задача статики и используются критерии разрушения. Расчетная сетка имела значительное сгущение вблизи кромки отверстия для воспроизведения высоких градиентов напряженного состояния, связанных с наличием не только отверстия, но и краевых эффектов. Вторая схема – поэтапное нагружение с решением статической задачи. На каждом шаге прикладывается нелинейно возрастающая нагрузка с уменьшением приращения. После решения линейной задачи на каждом шаге производится модификация конечных элементов с учетом критерия прочности, т.е. при достижении коэффициентом значения 1 его жесткость уменьшается на шесть порядков. Третья схема похожа на вторую, только на каждом этапе решается нелинейная задача, что не позволяет модифицировать конечные элементы и приходится использовать технологию «рождения и смерти», которая уменьшает параметры жесткости в предварительно заданное число раз.

Практические расчеты пластин с отверстием диаметром 20 мм показывают, что ни один из этих методов не позволяет получить разрушающее усилие как в проведенных экспериментах. Решение задачи статики со всей приложенной нагрузкой (вариант №1) дает самую грубую оценку разрушающей силы. Решение ряда линейных задач с возрастающей нагрузкой и деградирующими конечными элементами в указанной выше постановке №2, дает завышенное значение разрушающей нагрузки. Такой подход требует дальнейшей проработки. Можно отметить, что этот метод позволяет выявить зоны разрушившегося материала до определенного этапа повышения нагрузки. Третий вариант с решением ряда нелинейных задач дает самое близкое к эксперименту значение разрушающей нагрузки с отклонением в безопасную сторону. Лучше всего показал себя критерий разрушения LaRC04. При разрушении матрицы жесткость материала конечного элемента уменьшалась на два порядка, при разрушении наполнителя – на шесть порядков. Расчет остановился при достижении нагрузки 79,51 КН. На рис.2 представлена картина напряженно-деформированного состояния области вокруг отверстия перед остановкой расчета. На рис.3 то же самое с обратной стороны – при другой ориентации слоя углеткани. Цифры указывают количество конечных элементов с интервалом коэффициента из критерия прочности LaRC04 для наполнителя.

Картина разрушения при расчете отличается от того, что было получено в эксперименте, в том числе и из-за того, что расчет прерывается, когда один из конечных элементов теряет форму выше заданных программой пределов.



а б

Рис.3. Распределение напряжений на границе отверстия с разных сторон.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведены расчетно-экспериментальные исследования деформирования многослойных пластин из углепластика В180 с концентраторами напряжений, при сжатии на электромеханической универсальной машине Instron 5882. Оценено влияние диаметра отверстий в центре пластины на снижение критической нагрузки. С помощью бесконтактной системы Vic-3D исследовано изменение напряженно-деформированного состояния поверхности таких пластин при различных значениях сжимающей нагрузки. Разработана численная методика расчета зон разрушения слоев материала на границе отверстий. Использованный подход с моделированием каждого слоя элементом типа Solsh не рационален при расчете реальных конструкций, но в модельных задачах он позволяет визуализировать состояние каждого слоя. Отдельного рассмотрения требует использование многослойного варианта Solsh, что может отодвинуть остановку вычислений в область более высоких значений нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каблов Е.Н. *Авиационное материаловедение в XX веке. Перспективы и задачи* // Авиационные материалы. Избранные труды ВИАМ 1932-2002: Юбилейный научно-технический сборник. – М.: Изд-во ВИАМ, 2002. – С.23-47.
2. Степнов М.Н., Зинин А.В. *Прогнозирование характеристик сопротивления усталости материалов и элементов конструкций*. – М.: Инновационное машиностроение, 2016. – 192 с.
3. Дударьков Ю.И., Левченко Е.А., Лимонин М.В. *Расчетная оценка влияния краевых эффектов на свободной кромке отверстия на прочность слоистых композитов* // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2017. – Т.83. – №3. – С.44-59.
4. Baker A., Dutton S., Kelly D. *Composite Materials for Aircraft Structures. Second Edition*. – Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 2004. – Pp.192-194.
5. Гришин В.И., Дзюба А.С., Дударьков Ю.И. *Прочность и устойчивость элементов и соединений авиационных конструкций из композитов*. – М.: Физмалит, 2013. – 145 с.

УДК 53.091, 53.092
EDN SJWOEF
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.19

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ИЗГОТОВЛЕНИЯ ПОЛИМЕРНОГО КОМПОЗИТНОГО ТОПЛИВНОГО БАКА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С НЕСУЩЕЙ СТЕНКОЙ

Склезнев А.А.

АО «ЦПР», г. Хотьково, Россия

В процессе изготовления различных изделий машиностроения возникает ряд задач механики деформируемого твёрдого тела, отсутствие решения которых может привести к повреждению и разрушению изготавливаемого изделия ещё до приложения к нему эксплуатационных нагрузок. Другим не менее значимым влиянием отсутствия решений таких задач может являться увеличение времени и трудоёмкости технологической отработки создания новых изделий и невозможность поиска путей оптимизации решения таких задач с технологической точки зрения.

Несмотря на всю важность и значимость такого раздела механики, как технологическая механика, эта дисциплина ещё не имеет устойчивого наименования и своего места в большом наборе важных и сложных дисциплин, изучаемых и применяемых инженерами. Известен ряд работ, опубликованных в конце 70-х – середине 80-х годов прошлого века некоторыми представителями ленинградской (В.Т. Томашевский, В.С. Яковлев) и томской (Г.Д. Дель) научных школ, озаглавленных как работы по технологической механике, но не являющихся работами, охватывающими полный спектр вопросов решения задач технологической механики. В Ленинграде в первую очередь рассматривали технологию изготовления изделий из полимерных композиционных материалов с точки зрения физико-химических процессов, проходящих в процессе создания микроструктуры композитов, а также при их полимеризации и при дальнейшей эксплуатации с тепловым воздействием. В Томске же были рассмотрены вопросы пластического деформирования металлических сплавов при формировании из них деталей конструкционных элементов. При этом, все упомянутые авторы в своих трудах делали замечания о том, что решения рассматриваемых технологических задач тормозится недостатком имеющихся вычислительных мощностей современных им электронно-вычислительных систем.

Настоящая работа, никоим образом, не являясь обобщением предыдущих работ или попыткой объять все вопросы технологической механики, посвящена в первую очередь решению задач устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций, возникающих в процессе изготовления композитных баков и баллонов высокого давления. Вместе с тем, по мнению автора, современное развитие автоматизированных методов производства, вычислительных возможностей персональных компьютеров и, растущее как грибы после дождя, количество новых задач по созданию конструкций из современных, в частности композитных, материалов, делает очень актуальным разработку такого самостоятельного раздела механики, как технологическая механика.

В работе рассматривается конструкция топливного бака [1] из полимерных композиционных материалов (ПКМ) с несущей силовой стенкой и герметизирующим

полимерным или металлическим лейнером [2,3], или даже конструктивно представлять собой безлейнерную конструкцию [4] – композитные баллоны V типа. Такой бак может применяться в летательных аппаратах, например ракетах для геофизических исследований атмосферы Земли. Восприятие внешних нагрузок, возникающих в полёте от соседних отсеков, обеспечивает сетчатая композитная структура [5], функционально являющаяся одним из слоёв стенки отсека бака (рис.1). Описываемое конструктивно-техническое решение [1] позволяет повысить весовую эффективность конструкции и снизить трудоёмкость её изготовления. Коэффициент использования материалов при изготовлении сетчатых структур и металлокомпозитных баков составляет величину порядка 0.75-0.85, что в совокупности с использованием технологии автоматизированной «мокрой» намотки приведёт также и к росту экономической целесообразности применения предлагаемой конструктивно силовой схемы.

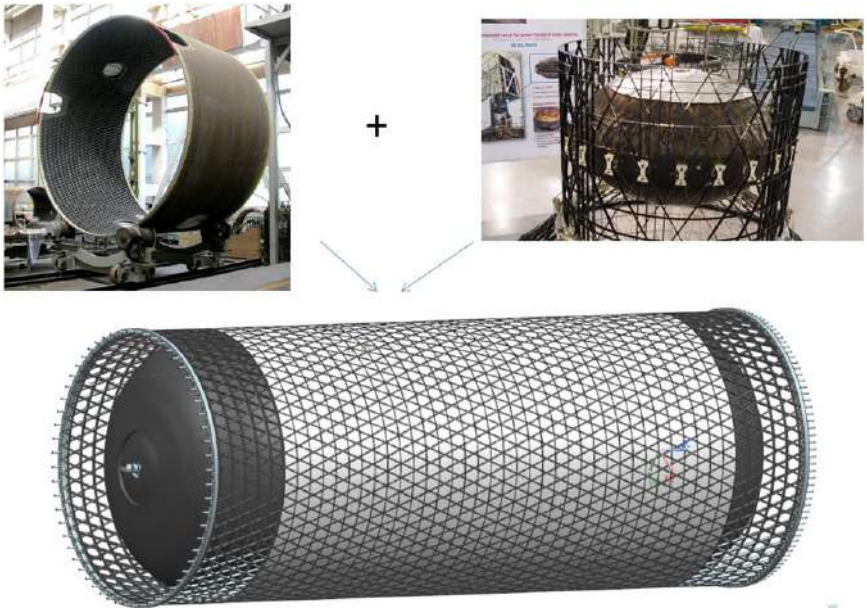


Рис.1. Интегральная конструкция топливного бака из композитных материалов с несущей стенкой.

С технологической точки зрения одной из важнейших задач при создании конструкций подобного рода является обеспечение устойчивости и неповреждаемости тонкостенного герметизирующего лейнера, который также одновременно выступает в роли неудаляемой формообразующей оснастки в процессе намотки гибкой системы нитей [6,7], транспортирования заготовки, её установки в обрабатывающее оборудование [8], термообработки заготовки изделий [9]. Дополнительно к технологическим задачам устойчивости при действии осевой сжимающей силы, такие же требования по устойчивости накладывают эксплуатационные осевые эквивалентные сжимающие силы, возникающие во время полёта и влияющие на жёсткость [10], прочность и устойчивость рассматриваемой системы. Возникающие сложности решения задач устойчивости связаны как со значительно (более, чем на порядок) различающимися модулями упругости полимерного композитного материала и традиционно применяемых алюминиевых или титановых сплавов, так и с отличающимися более, чем в два раза значениями коэффициентов линейного температурного расширения таких материалов – которые играют определяющую роль во время термообработки заготовки изделия.

Решение задачи устойчивости тонкостенного лейнера бака предложено в работах [6,7] и заключается с точки зрения технологической механики в использовании полученного полуэмпирического выражения для определения критической силы

$$T_{кр} = \frac{\lambda_{кр}^2 D}{R^2} \qquad (1)$$

натяжения нитей, создающих наружное давление на лейнер, которое может привести к потери им устойчивости и разрушению всей конструкции. В выражении (1) D – это изгибная жёсткость оболочки, определяемая соотношением $D = \bar{E}h^3/12$, R – радиус, $\lambda_{кр}^2$ – некий коэффициент, определённый автором вместе с соавторами работ [6,7] численно и подтверждённый экспериментально, равный 732. Интересным является факт, что давление, приводящее к потере лейнера от натяжения системы наматываемых гибких нитей, примерно в 244 раза больше давления равномерного обжатия такой же оболочки. Для использования в технологическом проектировании можно использовать следующую зависимость

$$T_{мин} < T_{техн} \le [\sigma]_{10-15\%} \cdot h \cdot b < T_{кр}, \qquad (2)$$

где $T_{мин}$ – минимально возможная сила натяжения исходя из технологических особенностей оборудования или техпроцесса, $T_{техн}$ – искомая сила, $[\sigma]_{10-15\%}$ – 10-15% величины предельного значения прочности наматываемого волокна, обеспечивающее рациональный уровень технологического преднатяжённого состояния конструкции, h – толщина наматываемого композитного слоя, b – его ширина.

В случае температурной обработки заготовки изделия из ПКМ разница коэффициентов линейного температурного расширения материалов тонкостенного полимерного или металлического лейнера и силовой композитной оболочки приводит к стеснению лейнера и возможности потери им устойчивости. Решение данной технологической задачи механики представлено в ряде работ, обобщённых в работе [9]. В результате получено следующее выражение для определение критической деформации, которая возникает при температурном перепаде в полимеризационной печи,

$$\varepsilon_{cr} = C\left(\frac{h}{R}\right)^{1.2}, \qquad (3)$$

где $C = 0.73$ – коэффициент, определённый в результате экспериментальных исследований на образцах оболочек, R и h – соответственно радиус и толщина внутреннего герметизирующего лейнера.

Таким образом, потеря устойчивости лейнера может произойти во время термообработки композитного баллона в случае, когда упругие деформации от температурного расширения при изменении температур в печи превысят критические деформации, определяемые при помощи уравнения (3).

Технологическая задача обеспечения устойчивости лейнера при действии осевой сжимающей силы решена в работе [8] при помощи метода Бубнова-Галёркина и анализа допустимых в полученном решении деформаций с физической стороны задачи. В результате минимизации допустимой деформации можно определить выражение

$$\varepsilon_{кр.ос.} = \frac{7h}{\sqrt{42}\left(1-\nu^2\right)R}, \qquad (4)$$

где R и h – соответственно радиус и толщина внутреннего герметизирующего лейнера, а ν – коэффициент Пуассона применяемого для изготовления лейнера материала.

Полученные решения успешно апробированы при разработке технологических процессов изготовления новых типоразмеров композитных баллонов давления (рис.2,3) в Акционерном обществе «Центр перспективных разработок», а также при создании модельного криогенного топливного металлокомпозитного бака [1] с несущей силовой стенкой.



Рис.2. Намотка пропитанного связующим углеродного жгута с натяжением на тонкостенный полимерный лейнер.



Рис.3. Подготовка к испытанию композитного баллона давления IV типа с полимерным герметизирующим лейнером.

В заключение можно отметить, что решённые задачи технологической механики, рассмотренные в данной работе, позволяют значительно снизить

временные и экономические затраты на создание новых образцов техники, определяя оптимальные параметры технологических режимов изготовления и термообработки композитных баков и баллонов давления путём решения задачи оптимизации технологического процесса. Полученные инженерные формулы легко использовать в работе инженерам-технологам, что подтверждается практическим опытом их применения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Титов В.А., Юранев О.А., Склезнев А.А., Разин А.Ф., Бабичев А.А., Пшеничников И.В., Бородулин Д.А. *Проектирование и изготовление криогенных металлокомпозитных топливных баков* // Конструкции из композиционных материалов. – 2023. – №2(170). – С.12-20.
2. Склезнев А.А. *Баллон высокого давления для одновременного восприятия внутреннего давления и внешних нагрузок*. Патент на изобретение RU 2819476 C1, 21.05.2024. Заявка № 2023111918 от 09.05.2023.
3. Склезнев А.А., Васильев В.В., Разин А.Ф. *Металлокомпозитная емкость*. Патент на полезную модель RU 233434 U1, 21.04.2025. Заявка № 2024139835 от 26.12.2024.
4. Азаров А.В., Бабичев А.А., Васильев В.В., Салов В.А., Склезнев А.А. *К проблеме герметичности композитных баллонов давления* // Композиты и наноструктуры. – 2023. – Т.15. – №1. – С.1-12.
5. Склезнев А.А. *Сетчатые композитные конструкции - текущее состояние исследований и разработок в России и мире* // Космические аппараты и технологии. – 2024. – Т.8. – №4(50). – С.222-232.
6. Васильев В.В., Склезнев А.А. *Устойчивость лейнера цилиндрического композитного баллона давления* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т.28. – №2. – С.235-246.
7. Vasiliev V.V., Salov V.A., Skleznev A.A. *Stability of an Infinitely Long Cylindrical Shell Under the Action of External Pressure Created by Winding Flexible Filaments* // Mechanics of Solids. – 2022. – Vol.57. – No.6. – Pp.1330-1337.
8. Склезнев А.А. *Устойчивость лейнера цилиндрического металлокомпозитного бака при осевом сжатии* // Конструкции из композиционных материалов. – 2023. – №2(170). – С.3-7.
9. Склезнев А.А. *Устойчивость полимерного лейнера при действии внешнего давления и осевой сжимающей силы, действующих при намотке композитного баллона высокого давления* / Международная конференция «Физика и технология перспективных материалов». Сборник трудов. – Уфа: РИЦ УУНиТ, 2025. – С.308-310.
10. Васильев В.В., Склезнев А.А. *Влияние осевой силы на частоту продольных колебаний сетчатого композитного переходного отсека космического аппарата* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №1. – С.57-62.

УДК 539.3
EDN SRRULR
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.20

ОСОБЕННОСТИ ГЕНЕРАЦИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ГЕТЕРОСТРУКТУРЕ НА ОСНОВЕ ТАНТАЛАТА ЛИТИЯ*

Широков В.Б.[1,2], Пименов М.С.[1,2], Турчин А.С.[1,2], Калинчук В.В.[1]

[1]Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону, Россия
[2]Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Танталат лития ($LiTaO_3$) получил широкое распространение в качестве активного элемента в интегральных микроэлектронных устройствах благодаря уникальным сегнетоэлектрическим свойствам и температурной стабильности [1]. В то же время его пьезоэлектрические свойства, от которых зависит генерация поверхностных акустически волн (ПАВ), существенно зависят от ориентации среза кристалла, по поверхности которого распространяется волна, а также от направления распространения этой волны. С целью эффективной генерации ПАВ традиционно выбираются определенные срезы кристалла и определяются направления распространения, при которых коэффициент электромеханической связи (КЭМС) – коэффициент, характеризующий эффективность возбуждения акустической волны под воздействием электрического поля, максимален. Для танталата лития – это известные срезы 112Y или 36Y. Современные технологии обуславливают переход в сторону микро- и наноразмерных устройств, составляющими элементами которых являются интегральные микросхемы, выполненные в рамках тонкопленочных технологий. Миниатюризация акустоэлектронных устройств и расширение спектра рабочих частот в сторону их увеличения обусловливают целесообразность в качестве активных элементов использовать тонкие пленки кристаллов. Однако традиционная технология осаждения тонких пленок происходит при высоких до 1000 градусов Цельсия температурах. Это определяет возникновение большой проблемы из-за различия решеток пленки и подложки, а также из-за различия их коэффициентов теплового расширения. Нанесенная на подложку при высокой температуре пленка в процессе остывания до рабочих (обычно комнатных) температур приобретает отличные от объемных образцов механические, диэлектрические и пьезоэлектрические свойства [2,3]. Это существенно усложняет процесс проектирования акустоэлектронных приборов и устройств, выполненных с использованием тонкопленочных технологий, поскольку требует проведения предварительных исследований для определения свойств пленки. Кроме того, физика осаждения тонких пленок не позволяет изменять их ориентацию с целью достижения наиболее эффективного возбуждения ПАВ.

Значительный прогресс в совершенствовании методов обработки кристаллов позволил изготавливать тонкие, толщиной до 200 нм пластины сегнетоэлектрических кристаллов, что в корне изменило технологические методы

* *Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 25-29-00863.*

изготовления наноразмерных сегнетоэлектрических гетероструктур за счет перевода процесса осаждения пластин в область низких, зачастую комнатных температур. Наряду с использованием низкотемпературных методов создания сегнетоэлектрических гетероструктур [4], значительным преимуществом такой технологии является возможность выбора кристаллофизической ориентации монокристаллических пластин [5]. Так как поверхностная волна локализуется в области интерфейса гетероструктуры, то эффективность ее возбуждения существенно зависит от степени ее локализации в сегнетоэлектрическом слое, что определяется соотношением его акустических свойств с акустическими свойствами подложки. Для успешного использования гетероструктуры с тонкой пластиной становится необходимым проведение анализа эффективности ее работы в зависимости от ориентации и толщины активного слоя, а также материала подложки. Детальный анализ для гетероструктуры ниобат лития/кремний был выполнен в [6]. В настоящей работе предложена математическая модель сегнетоэлектрической гетероструктуры, представляющей собой тонкую пластину танталата лития, прикрепленную через тонкий буферный слой плавленого кварца к сапфировой подложке (Al_2O_3). Она позволяет моделировать процесс возбуждения рэлеевских и сдвиговых ПАВ и анализировать его эффективность в зависимости от кристаллографической ориентации среза кристалла, толщины пластины, направления распространения волны и ориентации подложки. Оценка эффективности процесса возбуждения ПАВ производилась на основе расчета коэффициента электромеханической связи (КЭМС). С этой целью рассматриваются два типа гетероструктуры с различными электрическими условиями на поверхности: «электрически открытые» условия, когда нормальная компонента вектора электрической индукции равна нулю (электрически свободная поверхность), и «электрически закрытые» условия, когда поверхность гетероструктуры металлизирована и заземлена (поверхность закорочена). Разные скорости распространения ПАВ для этих двух случаев позволяют вычислить КЭМС.

1. МОДЕЛЬ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ГЕТЕРОСТРУКТУРЫ $LITAO_3/SIO_2/AL_2O_3$

Рассматривается задача возбуждения ПАВ на поверхности анизотропной сегнетоэлектрической гетероструктуры $LiTaO_3/SiO_2/Al_2O_3$. В качестве пьезоактивного элемента используется пластина танталата лития толщиной 1 мкм. Уравнения движения пьезоактивной среды имеют вид [7]

$$\rho \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{lm}}{\partial x_m}. \qquad (1)$$

Они верны для всех элементов гетероструктуры. Здесь $l, m = 1,\ 2,\ 3$; u_l – смещения вдоль трех координатных осей, σ_{lm} – напряжения на соответствующих плоскостях. Для сегнетоэлектрического слоя уравнения (1) следует дополнить уравнением квазистатики для электрической индукции

$$\frac{\partial D_m}{\partial x_m} = 0. \qquad (2)$$

Выражения для напряжений и компонент индукции следуют из уравнений пьезоэффекта

$$T_i = c_{ik}^E S_k + e_{mi}\frac{\partial \varphi}{\partial x_m},$$
$$D_m = e_{mi} S_i - \varepsilon_{ml}^S \frac{\partial \varphi}{\partial x_l}. \qquad (3)$$

Здесь по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, $i,k = 1,2,\ldots 6$; $l,m = 1,2,3$. Для i, k в представлениях (3) приняты обозначения Фойгта: $i \to ii$, $i = 1,2,3$, $4 \to 23$, $5 \to 13$, $6 \to 12$. Для напряжений приняты обозначения: $T_i^{(n)} = \sigma_{ii}^{(n)}$, $i = 1,2,3$, $T_4^{(n)} = \sigma_{23}^{(n)}$, $T_5^{(n)} = \sigma_{13}^{(n)}$, $T_6^{(n)} = \sigma_{12}^{(n)}$; для деформаций: $S_j^{(n)} = \frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial x_j}$, $j = 1,2,3$ (нет суммирования), $S_4^{(n)} = \frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^{(n)}}{\partial x_2}$, $S_5^{(n)} = \frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^{(n)}}{\partial x_1}$, $S_6^{(n)} = \frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial x_1}$. $\varphi^{(n)}$ – электрический потенциал, $c_{ik}^{E(n)}$ – компоненты тензора упругости, e_{mi} – электроупругие коэффициенты, ε_{ml}^S – диэлектрическая проницаемость при постоянной деформации. Для среды, не обладающей сегнетоэлектрическими свойствами (подложка или прослойка) электроупругие коэффициенты e_{mi} равны нулю. Геометрия задачи представлена на рис.1. В рассмотрение вводятся системы координат x_1, x_2, x_3 и совпадающая с ней кристаллографическая система x, y, z. Подложка (0001) среза монокристаллического сапфира ориентирована вдоль оси z – тригональной оси кристалла. Ось y лежит в плоскости симметрии и ортогональна оси z. Ось x ортогональна указанным осям и составляет с ними правую систему координат. Оси X, Y, Z – кристаллографические оси, определяющие поворот кристалла, связаны с направлениями [10$\bar{1}$0], [$\bar{1}$2$\bar{1}$0], [0001] соответственно. Угол β – один из углов Эйлера, характеризует поворот пластинки вокруг оси X. В обозначении среза φYcat угол $\varphi = 90 - \beta$. Направление распространения поверхностной волны в 3D-расчетах – вдоль оси x, по которой заданы периодические граничные условия. В конечно-элементной задаче вдоль оси y задаются периодические условии с нулевым периодом или условия непрерывности, что не играет роли для ПАВ. На границах пластинка-прослойка и прослойка-подложка задаются условия равенства упругих сил и смещений, а также электрических тангенциальных полей и нормальной составляющей электрического смещения (индукции). На свободной поверхности сегнетоэлектрической пластинки задаются условия отсутствия внешних сил (тангенциальных и нормальных). Если поверхность контактирует с вакуумом (воздухом), то дополнительно задаются электрические условия, связанные с электрическим потенциалом вакуума. Если вакуум не рассматривается, то задается условие отсутствия зарядов на поверхности. Эти две задачи в нашем рассмотрении дают практически одинаковые результаты. Размер подложки в численных расчетах задан 150 мкм. Нижняя поверхность подложки заземлена.

2. ОРИЕНТАЦИЯ СРЕЗА И НАПРАВЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ ПАВ

На верхней поверхности пластинки рассмотрены два типа различных электрических условия, когда поверхность закорочена и когда она свободна.

Разные скорости распространения ПАВ для этих двух случаев позволяют вычислить коэффициент электромеханической связи ПАВ [8]

$$K = \sqrt{\frac{c_f^2 - c_g^2}{c_f^2}} \approx \sqrt{2\frac{c_f - c_g}{c_f}}, \qquad (4)$$

где c_f – скорость распространения ПАВ на электрически свободной поверхности (free), c_g – скорость распространения ПАВ на закороченной поверхности (ground).

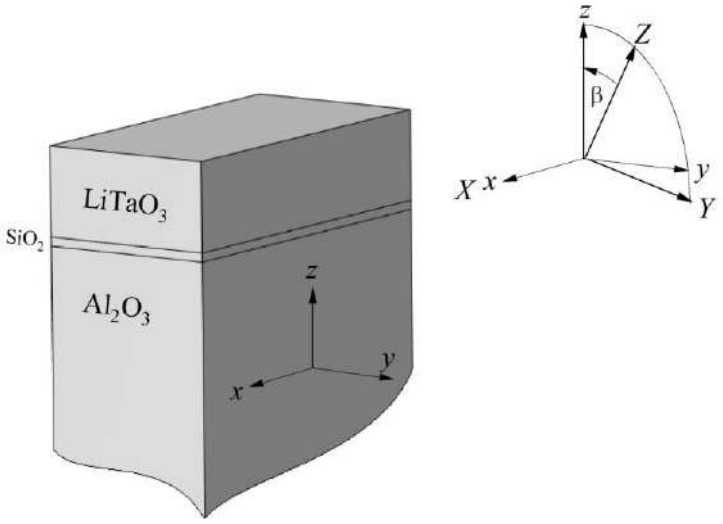


Рис.1. Гетероструктура с танталатом лития. Кристаллографические оси танталата лития X=[10$\bar{1}$0], Y=[$\bar{1}$2$\bar{1}$0], Z=[0001].

Далее рассматриваются ориентационные особенности ПАВ на гетероструктурах с различными срезами танталата лития. Как показали предварительные расчеты, КЭМС для рэлеевской волны значительно меньше КЭМС для сдвиговой волны. В связи с этим в данной работе рассматриваются только сдвиговые поверхностные волны. Значения величин материальных постоянных в уравнении (3) для танталата лития ($\rho = 7450$ kg/m^3) определяются матрицами [9]

$$c^E\left(GPa\right) = \begin{pmatrix} 232.97 & 46.89 & 80.23 & -11.03 & & \\ 46.89 & 232.97 & 80.23 & 11.03 & & \\ 80.23 & 52.91 & 275.36 & & & \\ -11.03 & 11.03 & & 93.90 & & \\ & & & & 93.90 & -11.03 \\ & & & & -11.03 & 93.04 \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

$$e\left(C/m^2\right) = \begin{pmatrix} & & & & 2.596 & -1.589 \\ -1.589 & 1.589 & & 2.596 & & \\ 0.082 & 0.082 & 1.882 & & & \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

$$\varepsilon/\varepsilon_0 = \begin{pmatrix} 40.9 & & \\ & 40.9 & \\ & & 43.3 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Упругие константы для сапфира ($\rho = 3970$ kg/m^3, $\varepsilon_{11}/\varepsilon_0 = \varepsilon_{22}/\varepsilon_0 = 9.4$, $\varepsilon_{33}/\varepsilon_0 = 11.5$) задаются таблицей [10]

$$c(GPa) = \begin{pmatrix} 497.5 & 162.6 & 115.5 & 22.5 & & \\ 162.6 & 497.5 & 115.5 & -22.5 & & \\ 115.5 & 115.5 & 503.3 & & & \\ 22.5 & -22.5 & & 147.4 & & \\ & & & & 147.4 & 22.5 \\ & & & & 22.5 & 167.4 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Константы для прослойки из плавленого кварца имеют значения: $\rho = 2220$ kg/m^3, $\varepsilon/\varepsilon_0 = 3.8$, $c_{11} = 78.22$ GPa, $c_{12} = 15.69$ GPa.

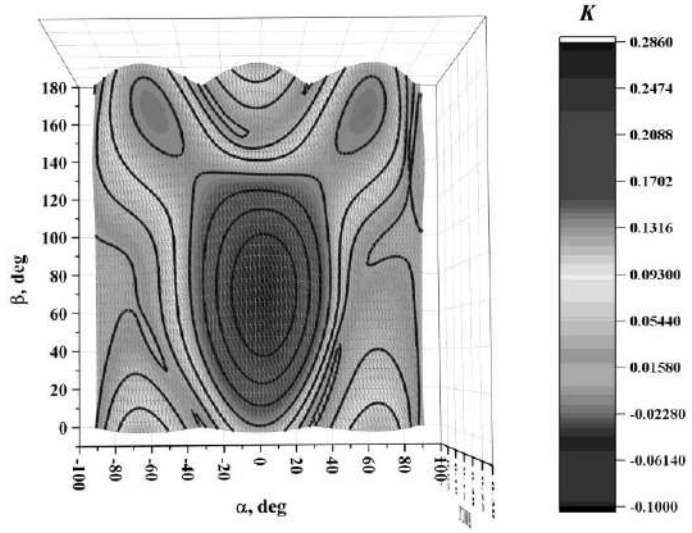


Рис.2. Зависимость КЭМС гетероструктуры $LiTaO_3/SiO_2/Al_2O_3$ в зависимости от двух углов Эйлера α и β: ориентации среза (угол β) и направления распространения ПАВ (угол α).

На рис.2 приведена картина, иллюстрирующая распределение значений КЭМС для возбуждения ПАВ на гетероструктуре рис.1 при толщине пластинки танталата лития 1 мкм и толщине прослойки плавленого кварца 200 нм в зависимости от двух углов Эйлера α и β. Угол α определяет направление распространения волны в плоскости пластинки, угол β определяет ориентацию среза кристалла. Как следует из рисунка максимум КЭМС находится при $\alpha = 90^o$ и $\beta = 63^o$. При $\alpha = 90^o$ направление распространения волны ПАВ идет вдоль оси x. Поэтому в дальнейшем КЭМС исследуется для различных углов β при направлении распространения волны вдоль оси x.

3. ВЛИЯНИЕ ТОЛЩИНЫ АКТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПАВ В ГЕТЕРОСТРУКТУРЕ $LITAO_3/AL_2O_3$

Величина КЭМС, очевидно, должна зависеть от степени локализации волны ПАВ в сегнетоэлектрическом слое. В связи с этим рассматривается зависимость КЭМС от толщины пластинки танталата лития. При вычислении КЭМС рассматриваются плоские волны. В этом случае в граничных условиях,

на границах слоев, появляются параметры, связанные со скалярными произведениями $(\mathbf{kr})$, пропорциональные x_3/λ, с соответствующими значениями x_3 на границах слоев рис.1. Если прослойка отсутствует, то есть сегнетоэлектрическая пластинка лежит непосредственно на подложке, то результаты будут одинаковыми для пластин различной толщины h_1, но одинаковыми значениями h_1/λ. В связи с этим сначала целесообразно исследовать зависимость КЭМС от величины этого параметра в задаче при отсутствии прослойки SiO_2. Затем исследовать влияние самой прослойки.

На рис.3. показана зависимость скоростей ПАВ на свободной и заземленной поверхностях и КЭМС в зависимости от угла β для гетероструктуры танталат лития – подложка сапфира без прослойки. Пунктирная линия представляет скорость для открытой поверхности, сплошная линия – для закороченной поверхности. Штрих-пунктирная линия представляет КЭМС. Здесь толщина пластинки $h = 1$ мкм, длина волны $\lambda = 4$ мкм, то есть для $h/\lambda = 0.25$. В этом случае максимальное значение КЭМС достигается при $\beta = 69^{\circ}$, $K = 0.31$. Результаты расчетов при других значения толщины пластинки ($h = 2$, 1.75, 1.5, 1.25, 0.75, 0.5, 0.25 и 0.15 мкм), но при фиксированном $h/\lambda = 0.25$ совпадают с результатами, приведенными на рис.3.

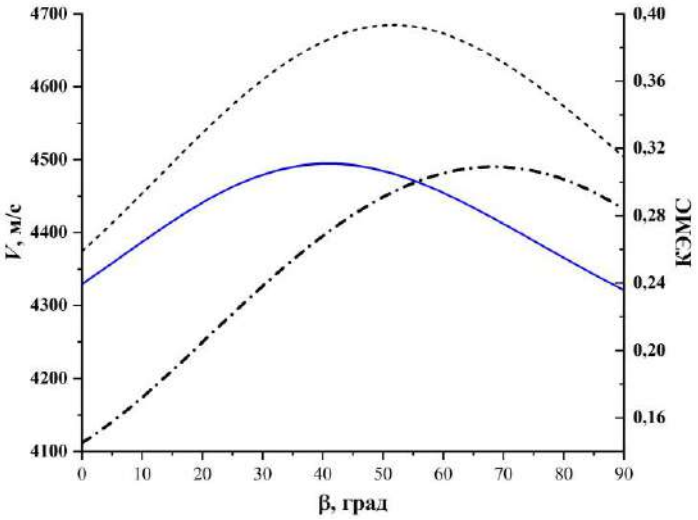


Рис.3. Зависимость скорости звука и коэффициента электромеханической связи сдвиговой ПАВ на поверхности гетероструктуры $LiTaO_3/Al_2O_3$ от эйлерова угла β при $h_1/\lambda = 0.25$. Пунктирная линия представляет скорость c_f, сплошная линия – c_g. Штрих-пунктирная линия представляет КЭМС.

На рис.4 представлена зависимость скоростей ПАВ на свободной и заземленной поверхностях и КЭМС в зависимости от параметра h_1/λ, представляющего связь между толщиной активного элемента и длиной волны. Последняя непосредственно связана с частотой ПАВ. Здесь также толщина пластинки $h_1 = 1$ мкм, то есть для $h_1/\lambda = 0.25$. В этом случае максимальное значение КЭМС достигается при $\beta = 69^{\circ}$, $K = 0.31$. Результаты расчетов при других значения толщины пластинки ($h_1 = 2$, 1.75, 1.5, 1.25, 0.75, 0.5, 0.25

и 0.15 мкм), но при фиксированном $h/\lambda = 0.25$ совпадают с результатами, приведенными на рис.3.

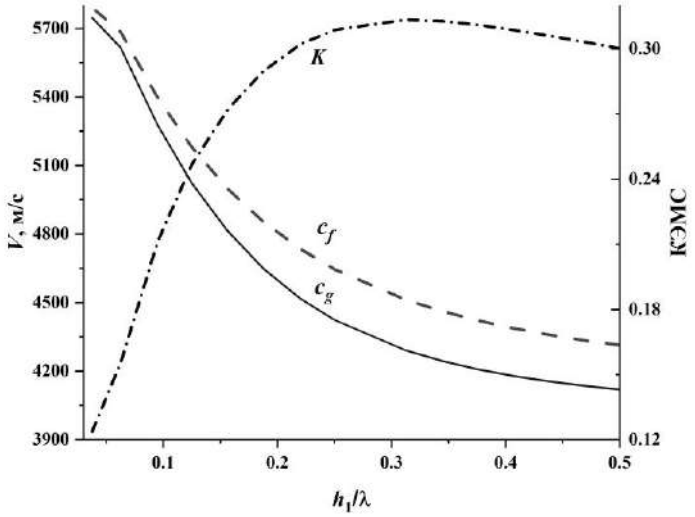


Рис.4. Зависимость скорости звука и коэффициента электромеханической связи сдвиговой ПАВ на поверхности гетероструктуры $LiTaO_3/SiO_2/Al_2O_3$ без прослойки от величины h_1/λ при угле $\beta = 67^o$.

Как следует из рисунка, максимальное значение КЭМС в рассматриваемом случае достигается при $\beta = 69^o$ и равно 0.309. Изменение КЭМС в пределах одного процента вблизи максимума наблюдаются в интервале углов от 60° до 75°. Для угла $\beta = 67^o$ из этого интервала произведен расчет КЭМС для различных значений h_1/λ. Эти результаты приведены на рис.4. Здесь изменение КЭМС вблизи максимума $K = 0.315$ в пределах одного процента наблюдаются в интервале h_1/λ от 0.27 до 0.37.

4. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПАВ В ГЕТЕРОСТРУКТУРЕ $LITAO_3/SIO_2/AL_2O_3$

Введение буферного слоя существенно влияет на степени локализации ПАВ в сегнетоэлектрическом слое гетероструктуры и на КЭМС. В работе [6] исследовано влияние параметров гетероструктуры с участием ниобата лития на эффективность возбуждения ПАВ. В настоящей работе исследуется степень локализации ПАВ при различной толщине пластины $LiTaO_3$ и фиксированной толщине SiO_2 в гетероструктуре $LiTaO_3/SiO_2/Al_2O_3$. Влияние буферного слоя на степень локализации волны иллюстрирует рис.5, на котором представлены графики зависимости КЭМС от угла β для различных толщин сегнетоэлектрического слоя танталата лития при фиксированных значениях $h_1/\lambda = 0.25$ и $h_2 = 0.2$ мкм. Кривые соответствуют $h_1 = 0.5$, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5, 1.75 и 2.0 мкм. Сплошная кривая соответствует $h_2 = 0$ мкм.

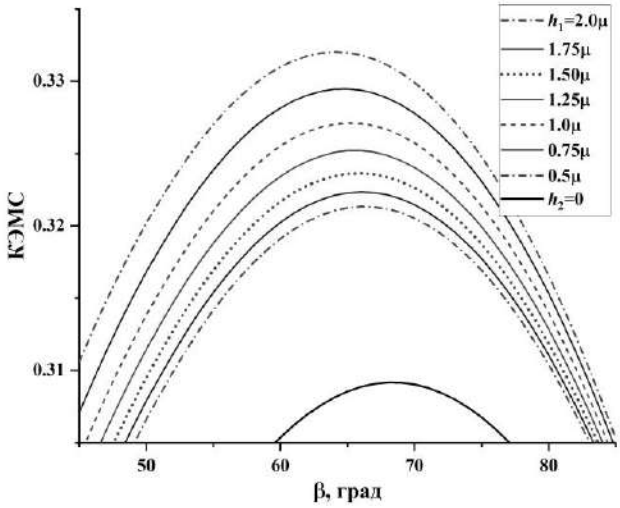


Рис.5. Зависимость КЭМС сдвиговой ПАВ на поверхности гетероструктуры $LiTaO_3/SiO_2/Al_2O_3$ от угла β при наличии буферного слоя и различных толщинах сегнетоэлектрической пластины танталата лития, но фиксированном значении $h_1/\lambda = 0.25$. Нижняя кривая соответствует КЭМС в отсутствие прослойки.

Как следует из графиков, наличие прослойки SiO_2 приводит к существенному увеличению КЭМС, значение которого зависит от толщины $LiTaO_3$. В частности, при толщине пластины 0.5 мкм нанесение прослойки SiO_2 сразу повышает КЭМС на 20%. Дальнейшее увеличение толщины пластины ниобата лития приводит к уменьшению КЭМС. От наличия прослойки зависит также ориентация среза танталата лития, на котором достигается максимум КЭМС. В отсутствие прослойки он достигается при $\beta = 70^{\circ}$. Нанесение буферного слоя при $h_1 = 0.5$ мкм уменьшает этот угол на 6°. Дальнейшее увеличение толщины пластины $LiTaO_3$ увеличивает значение угла, на котором достигается максимум КЭМС, в пределах 65°-68°.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложена математическая модель сегнетоэлектрической гетероструктуры, представляющей собой тонкую пластину танталата лития, прикрепленную через тонкий буферный слой плавленого кварца к сапфировой подложке. Она позволяет моделировать процесс возбуждения рэлеевских и сдвиговых ПАВ и анализировать его эффективность в зависимости от кристаллографической ориентации среза кристалла, толщины пластины, направления распространения волны и ориентации подложки. Оценка эффективности процесса возбуждения ПАВ производилась на основе расчета коэффициента электромеханической связи (КЭМС). С этой целью рассматривались два типа гетероструктуры с различными электрическими условиями на поверхности: «электрически открытые» и «электрически закрытые» условия. Разные скорости распространения ПАВ для этих двух случаев позволяют вычислить КЭМС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Xiao X., SiJ., Liang S., Xu O., Zhang H., Ma L., Yang C., Zhang X. *Preparation, Properties, and Applications of Near Stoichiometric Lithium Tantalate Crystals* // Crystals. – 2023. – Vol.13. – 1031.
2. Широков В.Б., Калинчук В.В., Шаховой Р.А., Юзюк Ю.И. *Материальные константы тонких пленок титаната бария* // ФТТ. – 2015. – Т.57. – Вып.8. – С.1509-1514.
3. Shirokov V., Kalinchuk V., Shakhovoy R., Yuzyuk Yu. *Anomalies of piezoelectric coefficients in barium titanate thin films* // EPL. – 2014. – Vol.108. – 47008.
4. Wang J.L., Chen F. *Ion-cut lithium niobate on insulator technology: Recent advances and perspectives* // Appl. Phys. Rev. – 2021. – Vol.8. – 011307.
5. Pastureaud Th., Solal M., Biasse B., Aspar B., Briot J.-b., Daniau W., Steichen W., Lardat R., Laude V., Laens A., Friedt J.-m., Ballandras S. *High-Frequency Surface Acoustic Waves Excited on Thin-Oriented LiNbO3 Single-Crystal Layers Transferred Onto Silicon* // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. – 2007. – Vol.54. – Iss.4. – Pp.870-876.
6. Широков В.Б., Пименов М.С., Михайлова И.Б., Турчин А.С., Калинчук В.В. *Особенности возбуждения акустических волн на поверхности гетероструктуры $LiNbO_3/Si$* // Наука Юга России. – 2024. – Т.20. – №3. – С.7-15.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Т.VII. Теория упругости*. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
8. Royer D., Dieulesaint E. *Elastic waves in solids*. – Springer. Berlin-Heidelberg-New York-Barselona-Hong Kong-London-Milan-Paris-Singapore-Tokyo, 1996. – 374 p.
9. Warner A.W., Onoe M., Coquin G.A. *Determination of Elastic and Piezoelectric Constants for Crystals in Class (3m)* // J. Acoust. Soc. Am. – 1967. – Vol.42. – Pp.1223-1231.
10. Gladden J.R., So J.H., Maynard J.D., Saxe P.W., Page Y.Le *Reconciliation of ab initio theory and experimental elastic properties of Al_2O_3* // Applied Physics Letters. – 2004. – Vol.85. – 392.

УДК 539.621
EDN TUTLHF
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.21

ИНЖЕНЕРНЫЕ ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ИЗНАШИВАНИЯ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ*

Шпенев А.Г.

Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Первые модели изнашивания композитных материалов были созданы Хрущёвым и Бабичевым. На основании предположения о том, что линейные скорости изнашивания для разных компонентов композита равны [1], они получили форму распределения контактных давлений по поверхности материала и общую износостойкость на основе износостойкости компонентов. Хотя эта модель не учитывала деформации материала при нагружении и разрушении отдельных компонент при изнашивании, она могла корректно описывать трение ряда материалов. Позднее И.Г. Горячева с соавторами [2] усовершенствовала этот подход, учтя нелинейный характер скорости изнашивания и наличие упругих деформаций поверхности. Феноменологический подход, учитывающий процессы разрушения на границе компонентов композитного материала, был предложен Зум-Гарром [3]. В дальнейшем шаги в моделировании механизмов разрушения композитных материалов при трении, как для волокнистых композитов [4], так и для наполненных частицами материалов [5] сталкивались с высокой сложностью моделирования напряжённо-деформированного состояния неоднородной среды в условиях контактной задачи. Главным вызовом при создании пригодных для практического применения моделей изнашивания композитов становится нахождение баланса между математической точностью постановки контактной задачи и требованиями феноменологических подходов к моделированию со стороны практических задач. Математически строгие постановки часто не имеют приемлемых аналитических решений (а зачастую и численные решения затруднены), в то время как чисто феноменологические подходы могут упускать какие-то особенности поведения материала, важные в тех или иных приложениях.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМПОЗИТА С ВОЛОКНАМИ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТИ ТРЕНИЯ

Одной из важных сфер применения трибологических композитов являются авиационные тормозные системы, в которых применяются углерод-углеродные волокнистые композиты, преимущественно на основе тканей, матов или прессованных пучков волокон. В этих материалах волокна преимущественно залегают параллельно поверхности трения. В этом случае заметное влияние на износостойкость материала оказывает процесс выкрашивания частично износившихся волокон из поверхности трения.

Важным параметром, определяющим этот процесс является угол между

* *Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 25-11-00350).*

направлением трения и направлением оси волокон. Существующие модели изнашивания часто не учитывают этот параметр, либо не учитывают механизм разрушения поверхности трения за счёт выкрашивания остатков волокна (рис.1).

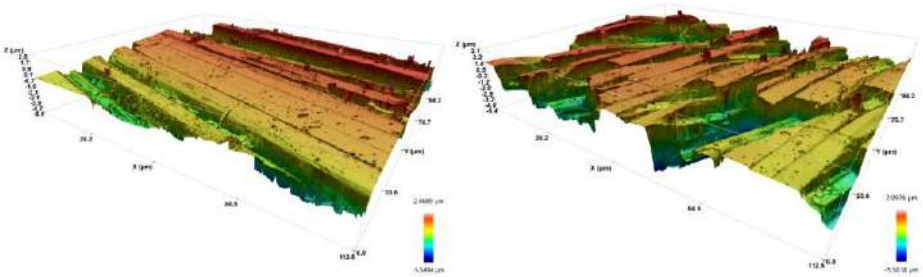


Рис.1. 3D-профилограммы типичных участков с волокнами, залегающими под малым углом к направлению скольжения (слева) и с волокнами, залегающими под углом, близким к прямому к направлению скольжения (справа).

Для описания этого процесса была построена модель изнашивания материала [6], рассматривающая процесс выкрашивания остатков волокна через призму усилия F_*, действующего на край границы волокно/матрица (рис.2).

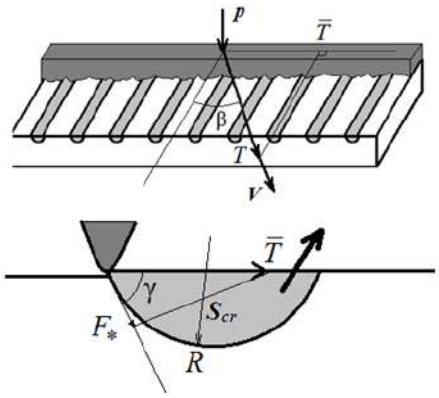
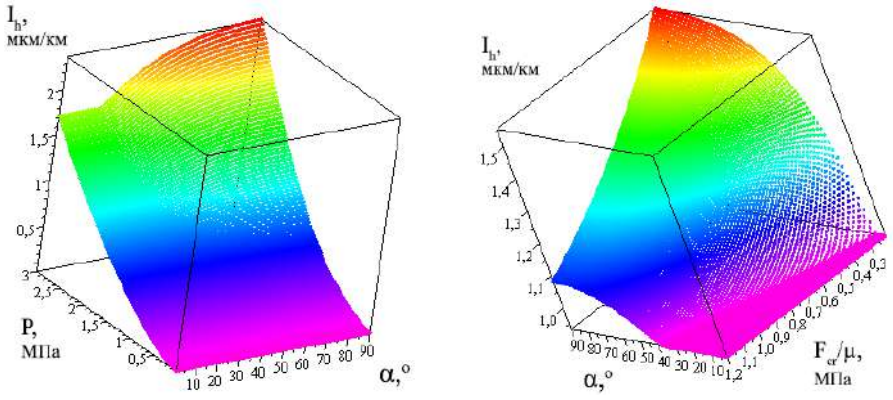


Рис.2. Расположение волокон в композите по отношению к направлению скольжения контртела (слева) и схема сил, действующих на единичное волокно (справа).



а б

Рис.3. Зависимость скорости изнашивания I_h. а) от контактного давления P и угла α между направлением трения и направлением залегания волокон; б) от отношения критического усилия разрушения интерфейса/волокно матрица к коэффициенту трения F_{cr}/μ и угла α.

На рис.3 показана полученная зависимость скорости изнашивания композитного материала от среднего контактного давления и угла между направлением трения и направлением залегания волокон.

Модель носит феноменологический характер, однако её параметры могут быть получены из трибологического эксперимента по схеме «кольцо-диск», при котором на одном и том же образце реализуются разные углы залегания волокон относительно направления трения (рис.4).

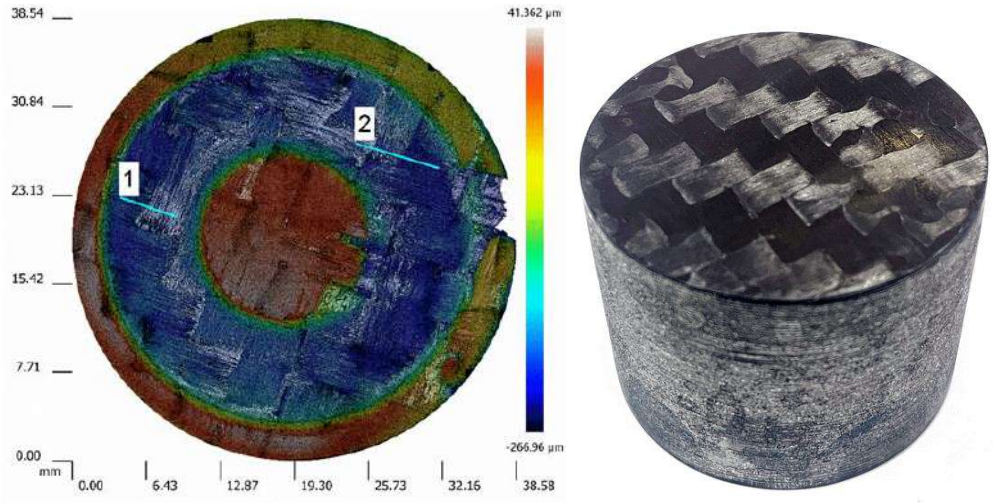


Рис.4. Типичная профилограмма поверхности трения (слева) цилиндрического композитного образца (справа) после испытаний по схеме «кольцо-диск».

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМПОЗИТА С ВОЛОКНАМИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ ПОВЕРХНОСТИ ТРЕНИЯ

С целью создания пригодной для практического применения модели изнашивания волокнистого материла, была поставлена задача об изнашивании представительного объёма волокнистого композита, содержащего одно волокно (рис.5). Было получено решение в одномерной постановке (модель Винклера), данное решение аналогично балочному подходу описания механики волокнистого композита («shear-lag» теория) и позволяет описать расслоение волокна и матрицы вблизи поверхности трения, а также неравномерный износ композита с образованием поверхностного рельефа [7].

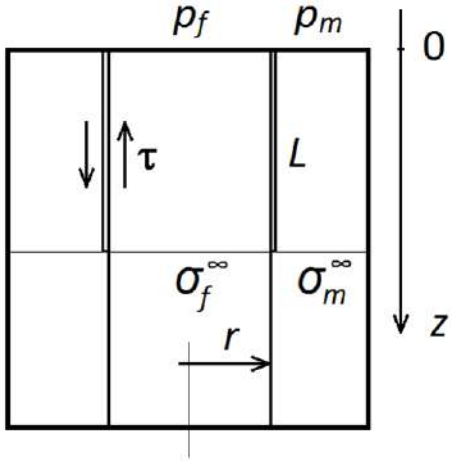


Рис.5. Постановка краевой задачи для представительного объёма волокнистого композита.

Был смоделирован циклический процесс, состоящий из отламывания выступающего над поверхностью матрицы кончика волокна с последующим его ростом, который присутствует при трении углерод-углеродных композитов [8] (рис.6).

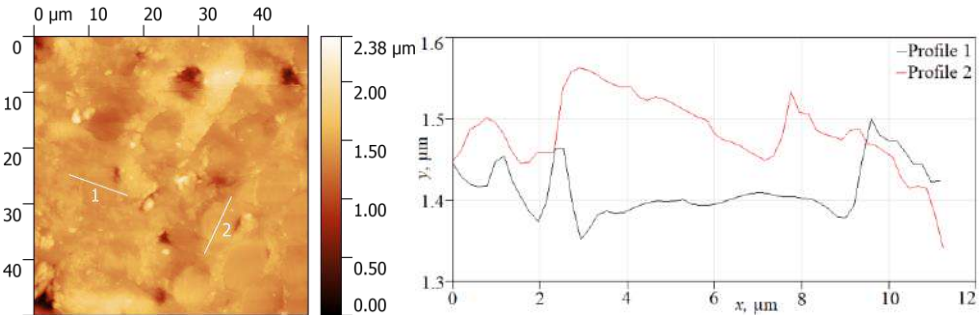


Рис.6. Поверхность трения углеродного композита на основе карбонизированных волокон и газофазной матрицы в области волокон, перпендикулярной поверхности трения: СЗМ-изображение (сверху) и профиль (снизу).

Для моделирования влияния неоднородного температурного расширения волокна и матрицы была построена модель изнашивания представительного объёма в трёхмерной постановке, учитывающая наличие радиальных напряжений и деформаций [9]. Была получена зависимость размера области расслоения волокна и матрицы от температуры для разных сочетаний коэффициентов температурного расширения (для углеродных волокон эти коэффициенты лежат в широком диапазоне значений и могут быть отрицательными для некоторых направлений кристаллической симметрии) (рис.7).

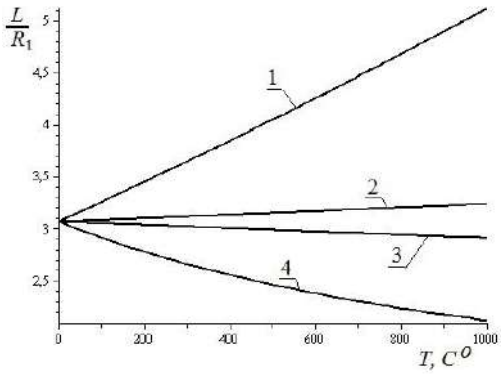


Рис.7. Зависимость размера зоны проскальзывания между волокна волокном и матрицей от температуры для различных значений радиальных коэффициентов температурного расширения. 1 – $\alpha_{rf}-\alpha_{rm}=-10^{-6}$, $\alpha_{zf}-\alpha_{zm}=10^{-5}$; 2 – $\alpha_{rf}-\alpha_{rm}=-10^{-6}$, $\alpha_{zf}-\alpha_{zm}=-10^{-7}$; 3 – $\alpha_{rf}-\alpha_{rm}=10^{-6}$, $\alpha_{zf}-\alpha_{zm}=-10^{-8}$; 4 – $\alpha_{rf}-\alpha_{rm}=10^{-5}$, $\alpha_{zf}-\alpha_{zm}=10^{-7}$.

Необходимые для этих моделей константы материалов могут быть получены с помощью стандартных механических испытаний (упругие константы компонентов композита) и индентирования (соотношение износостойкости компонент и условия на границе раздела волокно/матрица).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитые автором и обозначенные в данной работе подходы к моделированию трения и изнашивания волокнистых композитов сочетают возможность аналитических решений с достоверным описанием процессов, происходящих при трении и изнашивании волокнистых композитных материалов. Это позволяет им находить применение при разработке и создании композитов трибологического назначения, используемых в машиностроении и авиастроении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хрущев М.М., Бабичев М.А. *Абразивное изнашивание*. – М.: Наука, 1970. – 252 с.
2. Горячева И.Г., Торская И.В. *Контактные задачи при наличии износа для тел с переменным по поверхности коэффициентом износостойкости* // Трение и износ. – 1992. – Т.13. – №1. – С.185-194.
3. Zum-Gahr K.H. *Abrasive wear of two-phase metallic materials with a coarse microstructure* / In book: International Conference on Wear of Materials, American Society of Material Engineering. – Vancouver, 1985. – 793 p.
4. Yen B., Dharan C.K.H. *A model for the abrasive wear of fiber-reinforced polymer composites* // Wear. – 1996. – Vol.195. – Pp.123-127.
5. Lee Gun Y., Dharan C.K.H., Ritchie R.O. *A physically-based abrasive wear model for composite materials* // Wear. – 2002. – Vol.252. – Pp.322-331.
6. Shpenev A.G., Bukovskiy P.O. *Influence of the Fiber Bedding Direction on the Fiber Composite Wear* // J. Frict. Wear. – 2023. – Vol.44. – Pp.23-29.
7. Shpenev A. *Model of Composite Wear with Abrasive Particles* / Advanced Materials. PHENMA 2017. Springer Proceedings in Physics. – 2018. – Vol.207.
8. Shpenev A.G. *Friction and Wear of Fiber Composites with Abrasive Particles on Contact Surface* // J. Frict. Wear. – 2018. – Vol.39. – Pp.188-194.
9. Shpenev A.G. *Temperature effect on the process of wear of a fibrous composite under high load conditions* // Materials Physics and Mechanics. – 2020. – Vol.44(2). – Pp.229-237.

Аэро-, гидромеханика, реология структурно-сложных сред

УДК 532.5
EDN URNLDO
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.22

О МЕХАНИЗМЕ ТЕЧЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЙ

Воротилин В.П.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Наличие в турбулентных струях резко очерченной границы раздела между внешней ламинарной средой и областью внутри турбулентной струи позволяет наглядно описать механизмы воздействия внешних условий на течение турбулентных струй и, как пример, рассматриваемых далее эффектов турбулентности и сносящих потоков внешней среды. Граница струи как реальный физический объект исследования помимо общих проблем описания динамики смешения веществ и завихрения внешнего потока представляет интерес с точки зрения физики, происходящих на ней физико-химических процессов, в частности горения и излучения смешиваемых реагентов [1]. В существующих теоретических методах описания турбулентных струй отмеченные задачи не ставятся и не решаются, поскольку в своих построениях не оперируют понятием физической границы турбулентной струи. Точнее, в рамках классической теории [2], основанной на модели турбулентной вязкости, существование такой границы как наблюдаемой характеристики течения не отрицается, но в расчетах она задается условно, как расстояние от оси струи, на котором локальное значение скорости струи отличается от скорости внешнего потока на произвольно задаваемую малую величину, и таким образом, трактуясь как формальное математическое понятие, теряет физический смысл реально наблюдаемой границы струи.

Важность понимания и формулировки условий на границе турбулентного потока с внешним ламинарным течением в монографии [3] подчеркнуты фразой: «Точный вид условий на границе с внутренней областью турбулентного течения, которым должно удовлетворять решение, до сих пор неизвестен». При этом для объяснения механизма вовлечения внешней среды в объем турбулентной струи использовалась гипотеза вязкого надслоя [4], в котором происходит завихрение и захват внешней среды, но скорость захвата по аналогии с вязким подслоем у стенок канала определяется воздействием крупномасштабных структур внутри потока. Искусственный характер этой гипотезы, не учитывающей пульсаций границы струи (в каналах они гасятся твердой стенкой и поэтому там наличие вязкого подслоя есть важный фактор течения), невозможность на ее основе получить количественные оценки скорости захвата оставляют указанную проблему не решенной.

Отметим, что представления о крупномасштабных вихревых структурах и данные эксперимента, косвенно подтверждающие факт их существования, появились наряду с описанием общей картины турбулентного потока. В попытках вникнуть в понимание сути законов механизма турбулентности структура турбулентной струи, опираясь на результаты экспериментов, в [2] представлена как цепочка крупномасштабных вихрей. Вариант подобной структуры для простейшего случая движения струи со скоростью u и плотностью ρ вдоль

оси x в параллельном потоке внешней среды представлен на рис.1. Механизм развития и взаимодействия совокупности турбулентных вихрей в [5] описан на основе решений уравнений гидродинамики. Но в данном исследовании подобные вихри вводятся только для подтверждения наличия крупномасштабных возмущений границы струи и обоснования идеи их отрывного обтекания внешним потоком. Их конкретные геометрические свойства, динамика их возникновения, взаимодействия и разрушения остаются вне рамок необходимых условий для разработки предлагаемой теории.

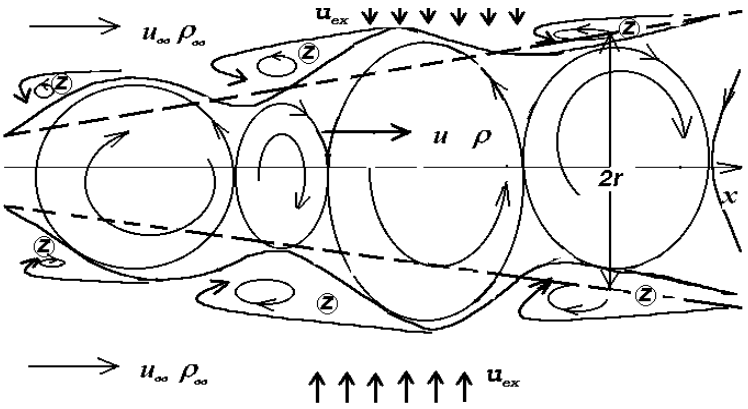


Рис.1. Иллюстративная схема структуры турбулентной струи, движущейся в параллельном потоке внешней среды со скоростью u_∞ и плотностью ρ_∞. Здесь u_{ex} – скорость вовлечения (эжекции) жидкости из внешней среды, **z** - зоны отрывного течения, в которых происходит захват внешнего потока.

1. ГИДРОДИНАМИКА ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЙ

Как альтернатива гипотезе вязкого надслоя, в работах [6-8] при описании движения турбулентных струй использованы представления о динамическом взаимодействии внешнего ламинарного потока с возмущенной границей области турбулентного течения. Отметим некоторые из полученных в них результатов, необходимые для обобщений теории с учетом турбулентности внешнего потока. Реальная (физически наблюдаемая) граница струи, усредненное положение которой на рис.1 отмечено пунктирными линиями, формируется под воздействием хаотических пульсаций турбулентных вихрей в ее внутренней области. Исходя из того факта, что внешняя среда и турбулентная струя с учетом представленной на рисунке ее наглядной структуры, это два пространственно различимых потока, их динамическое взаимодействие можно представить как силу трения F_{fr}, действующую на разделяющей их границе. Поскольку при турбулентном движении молекулярная вязкость роли не играет, из соображений размерности следует, что эта сила может быть пропорциональна только квадрату разности скоростей движения внешней среды u_∞ и средней скорости струи u

$$F_{fr} = \gamma\rho_\infty \left(u_\infty - u\right)^2 . \qquad (1)$$

Вывод о том, что закон трения квадратичен по скорости, означает, что обтекание возмущенной границы струи внешним потоком должно происходить с образованием отрывных вихрей. По смыслу деления всей области течения на внешнюю безвихревую среду и собственно струю указанные отрывные вихри должны остаться в составе струи, играя для нее роль источника турбулентных пульсаций. Поэтому и импульс, при трении отдаваемый им струей

(иначе силу трения F_{fr}), также должен возвратиться струе вместе с захваченными вихрями. Поскольку от струи вихри получают импульс пропорциональный разности скоростей $u_\infty - u$, поток возвращаемого импульса запишется в виде

$$j = \rho_\infty \mathbf{v}_c \left| u_\infty - u \right|,$$

где $\mathbf{v}_c$ – скорость захвата в объем струи образующихся вихрей. Из условия равенства потоков j и F_{fr} для $\mathbf{v}_c$ следует выражение $\mathbf{v}_c = \gamma \left| u_\infty - u \right|$.

Как было отмечено выше, в литературе общепринятым объяснением механизма захвата является гипотеза вязкого надслоя. Обширный обзор работ вместе с результатами новых данных эксперимента и на их основе попытки обоснования этой гипотезы представлены в [1]. Не вдаваясь в детали рассуждений этой и множества упомянутых в ней других исследований, отметим их главное смысловое отличие от понимания механизма турбулентности данной статьи. Суть его в том, что в этих работах процесс захвата внешней среды рассматривался как следствие хаотических турбулентных пульсаций в окрестности границы турбулентной струи с внешним течением. Иначе говоря, процесс захвата внешней среды вторичен по отношению к наблюдаемому хаосу турбулентных пульсаций в то время, как в предлагаемой теории захват внешней среды описан как первопричина этих пульсаций.

В уравнении баланса масс произведение $\mathbf{v}_c \rho_\infty$ задает источник массы турбулентной струи и таким образом струя формируется как реальный физический объект исследования с разнообразием воздействия внешних условий его описывающих. Одним из встречающихся на практике механизмов подобного воздействия является турбулентность внешней среды.

2. ТУРБУЛЕНТНАЯ СТРУЯ ПРИ НАЛИЧИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ВНЕШНЕГО ТЕЧЕНИЯ

Особенностью движения струй, характерной для реальных условий эксперимента, является наличие турбулентности в обтекающем струю спутном потоке. Так в ссылках на эксперимент [2] отношение интенсивности турбулентных пульсаций внешнего потока u_{*t} к его скорости оценивался величиной $\xi_t = u_{*t}/u_\infty \sim 3-6\%$. Влияние внешней турбулентности будет заключаться в стимуляции процесса вихреобразования на ее границах. Сила трения на образование дополнительных вихрей запишется по аналогии с выражением для F_{fr}

$$F_{add} \approx \rho_\infty u_{*t} \left| u_\infty - u \right|. \qquad (2)$$

Каждый из источников силы F_{fr} и F_{add} является результатом действия независимых случайных процессов образования отрывных вихрей на границах струи и поэтому их совместный результат суммируется: $F_\Sigma = F_{fr} + F_{add}$. Для струи указанные вихри играют роль источника турбулентных пульсаций. Отсюда с учетом приведенных рассуждений о механизме поведения отрывных вихрей обобщенное выражение для скорости захвата вихрей $\mathbf{v}_c$ примет вид

$$\mathbf{v}_c = \gamma \left| u_\infty - u \right| + u_{*t}. \qquad (3)$$

Введенное понятие скорости захвата не следует смешивать со скоростью натекания внешней среды на струю u_{ex} которая задается уравнением

материального баланса. Ее знак может быть больше нуля (при торможении) и меньше (при ускорении). Это кинематическая характеристика струйных течений свойственна любым режимам течения и поэтому не несет в себе информации о механизме формирования турбулентности, но ошибочно трактуется как источник массы турбулентной жидкости [2,3].

3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУЕ

Рассматривается истечение круглой струи с начальной плотностью ρ_0 и скоростью u_0 в направлении оси X из отверстия радиуса r_0 в сечении $x=0$ в параллельный поток внешней среды со скоростью u_∞ и плотностью ρ_∞ (для полноты описания с добавлением действия силы тяжести вдоль оси X).

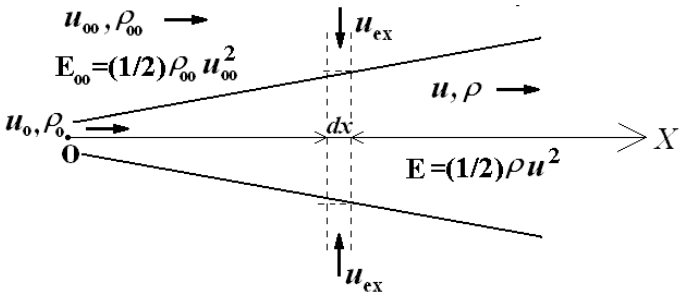


Рис.2. Движение турбулентной струи в параллельном потоке внешней среды.

Текущие скорость u и плотность ρ струи вследствие перемешивания поперек потока принимаются постоянными по сечению струи радиуса r. Интегральные уравнения баланса массы, импульса и состава с искомыми ρ, u, r и u_{ex} для рассматриваемого варианта несжимаемой жидкости выводятся, как показано на рис.2, путем суммирования соответствующих потоков, между двумя нормальными к оси струи плоскостями, разделенными расстоянием $dx \to 0$

$$
\begin{aligned}
&d\left[\left(\rho_\infty u_\infty - \rho u\right) r^2\right] \Big/ dx - 2r\rho_\infty u_{ex} = 0, \\
&d\left[\rho u\left(u - u_\infty\right) r^2\right] \Big/ dx = \left(\rho_\infty - \rho\right) r^2 \Big/ Fr^2, \\
&\rho = \rho_\infty - \left(\rho_\infty - 1\right) \Big/ ur^2,
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

где $Fr = u_0 \Big/ \left(gr_0\right)^{1/2}$ – число Фруда и все переменные представлены в безразмерном виде с параметрами u_0, r_0 и ρ_0 в качестве характерных масштабов скорости, длины и плотности. Первым уравнением системы (4), уравнением баланса масс, задается скорость натекания u_{ex} внешней среды на струю. Как отмечено выше, это кинематическая характеристика течения, обусловленная торможением или ускорением течения струи. Второе уравнение, уравнение для продольной компоненты импульса, записано с учетом подстановки в него u_{ex} из первого и для полноты описания с учетом силы тяжести вдоль оси X. Третье, уравнение состава, получено из условия, что вещество струи в ее начальном сечении по ходу движения ее не покидает. Недостающее уравнение для искомых ρ, u, u_{ex} и r задается уравнением баланса массы «турбулентной» жидкости

$$d\left(\rho u r^2\right)/dx = 2\rho_\infty \mathbf{v}_c r, \qquad (5)$$

в котором ее источником является описанный выше процесс завихрения и захвата массы внешней среды. С учетом полученного уравнения скорость натекания u_{ex} преобразуется к виду

$$u_{ex} = u_\infty dr/dx - \mathbf{v}_c$$

Знак u_{ex} в зависимости от значения u_∞ может быть больше или меньше нуля, в то время как $\mathbf{v}_c$, выводимое из условия динамического взаимодействия струи с внешней средой, имеет смысл скорости порождения турбулентной жидкости, величина которой по определению всегда строго большая нуля.

Для полноты физических представлений излагаемой теории полученные уравнения дополним уравнением баланса энергии. Алгебраическую сумму баланса потоков кинетической энергии через сечение dx струи плюс работу силы тяжести на этом сечении запишем как ε

$$\varepsilon \equiv \left(1/2r^2\right) d\left[\rho u\left(u_\infty^2 - u^2\right) r^2\right]/dx + \left(\rho_\infty - \rho\right) u/Fr^2 .$$

Ее физический смысл либо порождения энергии (выходит меньше, чем входит, т.е. при $\varepsilon < 0$), либо ее диссипации (при $\varepsilon > 0$) в объеме струи. Чтобы уточнить истинный знак, используем подстановки в него из второго уравнения системы (4) и уравнения (5). Результат запишем в виде

$$\left(\pi r^2\right)\varepsilon \equiv \left(2\pi r\right)\left[\left(1/2\right)\gamma\rho_\infty \left|u - u_\infty\right|\left(u - u_\infty\right)^2\right].$$

Как и следовало ожидать, величина ε оказалась больше нуля, т.е. имеет место процесс диссипации энергии в объеме турбулентной струи. Вид ее правой части объясняет также действие механизмов, приводящих к диссипации кинетической энергии потока: это работа силы трения на возмущенной поверхности струи, определяемой соотношением (1), благодаря которой осуществлялся процесс турбулизации внешней среды. Механизм ее воздействия на турбулентный поток по аналогии с терминологией полуэмпирической теории можно обозначить как механизм турбулентного трения. Однако в отличие от соотношений полуэмпирической теории в явном виде ее нет нигде в уравнениях, на основе которых рассчитываются параметры струйного потока. В частности, она отсутствует и в интегральном уравнении баланса импульсов, поскольку выступает как внутренняя сила, действующая между структурными элементами струи, но неожиданно проявляет себя в уравнении энергии.

4. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ ПОЛУЧЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Качественные особенности течения турбулентной струи можно описать для характерных режимов течения. Так для предела $Fr \to \infty$, т.е. без учета сил плавучести, интегрируя второе уравнение системы (3) с условиями $u\big|_{x=0} = r\big|_{x=0} = 1$, находим

$$\rho u r^2 = \left(1 - u_\infty\right)/\left(u - u_\infty\right) \qquad (6)$$

а уравнение (5), введя обозначение $z_0 = \left(1 - u_\infty\right)/\rho_\infty$, преобразуется к виду

$$du/dx = -\left(2/z_0\right)\left(u - u_\infty\right)^2\left(\mathbf{v}_c r\right), \qquad (7)$$

радиус струи r с учетом формул для ρ из (3) и (5) задается выражением

$$ur^2 = 1 - 1/\rho_\infty + z_0/\left(u - u_\infty\right).$$

Решение уравнения (7) позволяет проследить развитие картины течения струи на всем пути ее движения. Оценку переменных u и r с учетом многообразия внешних условий течения можно получить для предела $x \to \infty$. Уравнение (7) после подстановки в него выражений для u и r

$$u = u_\infty \left(1 + cx^{-\alpha}\right) \quad \text{и} \quad r^2 = \mathrm{z}_0 \left(x^\alpha / u_\infty c\right),$$

где $\alpha > 0$ и c искомые константы, примет вид

$$\left(\alpha z_0 / (u_\infty c)\right) x^{\alpha-1} = 2\left(\gamma c x^{-\alpha} + u_{*t}\right)\left(z_0 / u_\infty c\right)^{1/2} x^{\alpha/2}.$$

Отсюда для величины искомых α и c и переменных u и r в зависимости от параметра внешней турбулентности u_{*t} следуют оценки:

1. В отсутствии внешней турбулентности, т.е. при $u_{*t} = 0$

$$\alpha = 2/3; \;\; c = \left(z_0 / \left(9 u_\infty \gamma^2\right)\right)^{1/3}; \;\; r = \left(3\gamma z_0 / u_\infty\right)^{1/3} x^{1/3}, \;\; u = u_\infty \left(1 + cx^{-2/3}\right).$$

2. При наличии внешней турбулентности, иначе при $u_{*t} > 0$

$$\alpha = 2; \;\; c = \left(z_0 / u_\infty\right) / u_{*t}^2; \;\; r = u_{*t} x, \quad u = u_\infty \left(1 + cx^{-2}\right).$$

3. Для случая $u_{*t} = 0$ и $u_\infty = 0$ классический вариант

$$r = \gamma x, \;\; u = 1 / \left(\gamma \rho_\infty^{1/2} x\right).$$

Характер асимптотической зависимости искомых r и u от x в найденных соотношениях согласуется с результатами теории на основе общих соображений размерности. Это дает основание учитывать полученные результаты в качестве теоретической основы при дальнейшем исследовании турбулентных струй с усложняющими факторами течений, в частности для рассматриваемой далее турбулентной струи в сносящем потоке внешнего газа.

5. ТУРБУЛЕНТНАЯ СТРУЯ В СНОСЯЩЕМ ПОТОКЕ

Рассматривается вариант истечения турбулентной струи, когда ее направление на выходе в поток внешней среды, как показано на рис.3, образует с ним угол $\alpha_0 > 0$. Внешний поток оказывает двоякое воздействие на структуру и характер течения струи. Под динамическим напором его нормальной к оси струи составляющей скорости происходит отклонение траектории струи в направлении его течения, а создаваемая им разность давлений между передней и кормовой частью обтекаемой струи приводит к деформации профиля поперечного сечения струи, принимающего форму, близкую к сегменту круга.

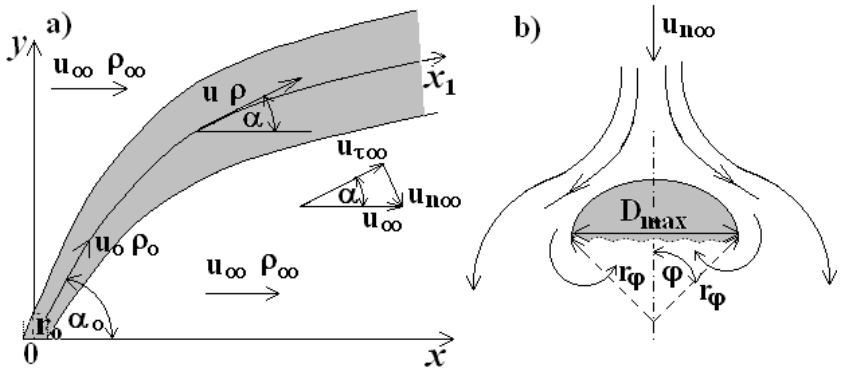


Рис.3. Схема движения турбулентной струи в сносящем потоке газа: a) сечение струи в плоскости симметрии ее движения (x, y); b) профиль поперечного

сечения струи. Струя вытекает под углом α_0 к направлению внешнего потока, движущегося вдоль оси x; начальные данные струи и внешнего потока те же, что и для схемы на рис.2; $u_{\tau\infty}$ и $u_{n\infty}$ – проекции u_∞ вдоль струи и перпендикулярно к ней; x_1 – криволинейная координата траектории струи; b) профиль поперечного сечения струи в форме сегмента с углом раствора φ и радиусом r_φ. Поскольку струя – это реальный объект исследования, воздействие на него внешних условий можно описывать с заранее заданной той или иной упрощенной структурой его геометрических параметров. В данном варианте теории использовано понятие круглой струи радиуса r, и параметров $S=\pi r^2$, $\Pi=2\pi r$ и $D_{\max}=2r$.

5.1. Уравнения движения турбулентной струи.

В системе координат (x,y) касательная к траектории образует угол α с осью x. С учетом записи равенства $dy/dx=\mathrm{tg}(\alpha)\equiv 1/t$ уравнения траектории с использованием криволинейной координаты x_1 предстанут в виде

$$dx/dx_1=t\Big/\left(1+t^2\right)^{1/2},\quad dy/dx_1=1\Big/\left(1+t^2\right)^{1/2}.$$

Как и в предыдущем варианте струйного потока текущие плотность и скорость струи из-за турбулентного перемешивания принимаются постоянными по поперечному сечению струи. Уравнения баланса масс, компоненты импульса вдоль оси x_1 и уравнение баланса массы «турбулентной» жидкости, подобное уравнению (5), в котором вместо u_∞ нужно взять ее проекцию $u_{\tau\infty}=u_\infty\cos(\alpha)$ на направление оси x_1, выводятся, как и ранее, для прямой струи, суммируя потоки этих величин через сечения x_1 и x_1+dx_1, нормальные к траектории струи

$$d\left(\rho u r^2\right)\Big/dx_1-\rho_\infty u_{\tau\infty}(dr^2/dx_1)-2\rho_\infty u_{ex}r=0,$$

$$d\left(\rho u^2 r^2\right)\Big/dx_1-u_{\tau\infty}\,d\left(\rho u r^2\right)\Big/dx_1=0,$$

$$d\left(\rho u r^2\right)\Big/dx_1=2\gamma\rho_\infty\left(|u-u_{\tau\infty}|+\xi_t u_{\tau\infty}\right)r.$$

Уравнение для нормальной к оси x_1 компоненты импульса, фактически задающее дополнительное уравнение для траектории струи

$$\rho u^2 r^2\left(dt/dx_1\right)=\gamma_{fr}\rho_\infty u_\infty^2 r$$

выводится из условия равенства силы трения F_{fr} при отрывном обтекании струи по нормали к ней

$$F_{fr}=(1/2)\gamma_{fr}\rho_\infty u_{n\infty}^2\left(D_{\max}dx_1\right),$$

центростремительной силе F_c, возникающей при искривлении траектории

$$F_c=\rho u^2\left(S dx_1\right)\Big/R,$$

где R – радиус кривизны траектории струи

$$R=\left[1+(dy/dx)^2\right]^{3/2}\Big/\left|d^2y/dx^2\right|\equiv\left(1+t^2\right)\Big/\left(dt/dx_1\right),$$

$u_{n\infty} = u_\infty \sin(\alpha)$, γ_{fr} – коэффициент трения, с начальными условиями в точке $x_1 = 0$. В соответствии с принятой схемой истечения струи эти условия запишем в виде: $u = 1;\ \rho = 1;\ S = \pi;\ x = y = 0;\ t = \mathrm{ctg}(\alpha_0)$.

5.2. Расчеты и сравнение с экспериментом.

Полученные соотношения и уравнения содержат множество параметров, определяющих общие условия движения струи в сносящем потоке. Из условий последующего сравнения с имеющимися экспериментальными данными приняты условия $\rho_\infty = 1$ и $u_{*t} = 0$, т.е. без влияния внешней турбулентности, а варьируются параметры: угол α_0 между начальным направлением струи и скорость внешнего потока u_∞ газа, начальная скорость u_0, скорость u_∞, плотность ρ_∞ внешней среды, интенсивность мелкомасштабных пульсаций внешней среды u_{*t}. Теория содержит константы γ, γ_{fr}, по своему физическому смыслу не зависящие от перечисленных выше параметров движения, и поэтому рассматриваются как универсальные константы. Значение константы γ принято равным 0.11 (оно получается при усреднении классического профиля скорости однородной затопленной струи [2] по ее поперечному сечению и имеет смысл полуугла ее расширения). Значение коэффициента трения поперечного обтекания струи принято равным 0.75. Напомним, что при турбулентном обтекании круглого цилиндра величина $\gamma_{fr} \approx 0.6 - 0.8$ [3]. В данном разделе приводятся результаты расчета траекторий турбулентной струи в сносящем потоке для различных комбинаций значений независимых параметров течения, дающие наглядное представление о влиянии этих параметров на геометрические характеристики струйного потока. Для сравнения с экспериментом на рисунках приведены расчеты по эмпирическим зависимостям Шандорова, взятыми из [2].

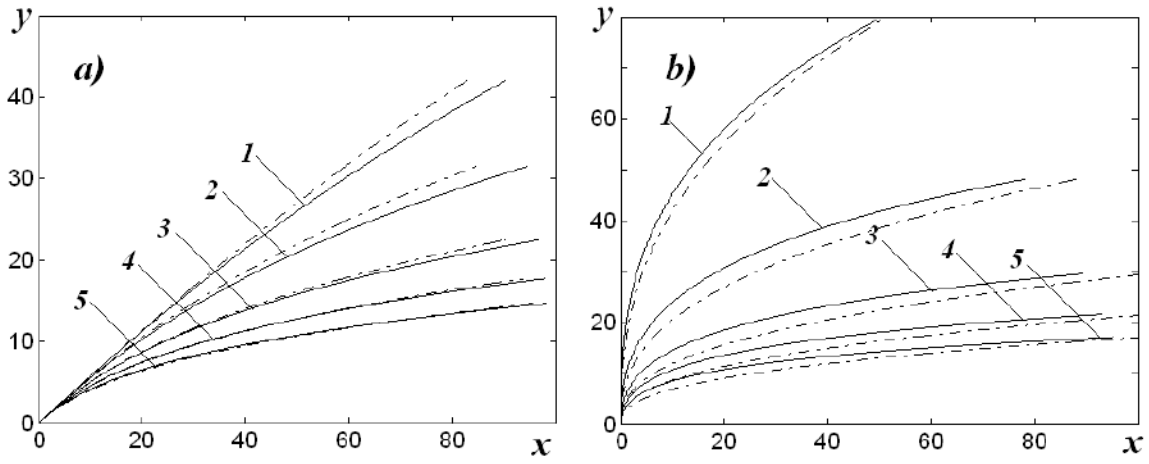


Рис.4. Кривые траекторий струи метана, выходящей во внешний поток под углом $\alpha_0 = 30^\circ$ (a) и под прямым углом $\alpha_0 = 90^\circ$ (b) и последовательно возрастающих значениях относительной скорости сносящего потока: 1 – $u_\infty / u_0 = 0.02$; 2 – 0.05; 3 – 0.1; 4 – 0.15; 5 – 0.2; штрих пунктиры – эмпирические корреляции из [2].

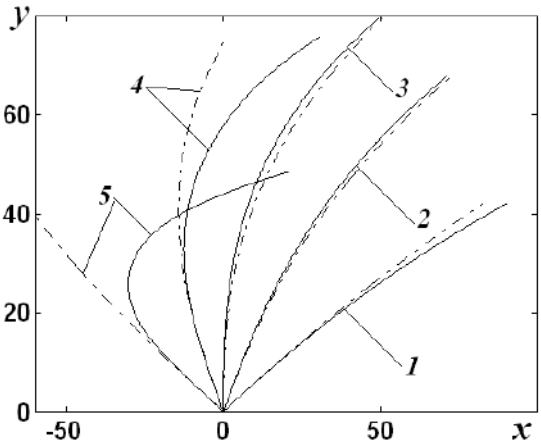


Рис.5. Траектории струи метана при различных углах выхода к направлению сносящего потока: 1 – $\alpha_0 = 30^\circ$; 2 – $\alpha_0 = 60^\circ$; 3 – $\alpha_0 = 90^\circ$; 4 – $\alpha_0 = 120^\circ$; 5 – $\alpha_0 = 150^\circ$ скорости сносящего потока $u_\infty / u_0 = 0.02$; штрих пунктиры – эмпирические корреляции из [2].

ВЫВОДЫ

1. В отличие от ранее разрабатывавшихся полуэмпирических моделей движения турбулентных струй учтена их главная особенность – наличие четкой границы раздела между струей и внешней ламинарной средой.

2. Предложен альтернативный существующим представлениям механизм вовлечения внешней среды в объем турбулентного потока. В его основе лежала идея образования турбулентных вихрей на границах струи как единственного источника массы и энергии турбулентных пульсаций потока.

3. Получено выражение для скорости захвата внешней среды с учетом эффектов внешней турбулентности и соответствующее уравнение баланса массы турбулентной жидкости, замкнувшее систему уравнений описывающих параметры турбулентных струй в зависимости от множества внешних условий ее распространения – скорости и плотности внешней среды, силы тяжести (для плавучих струй), внешней турбулентности.

4. Фактор границы как источника турбулентности дал основание описывать искомые параметры струи (скорость u и плотность ρ) в форме однородных распределений по сечению струи.

5. Проведено исследование особых режимов движения струй в различных сочетаниях независимых параметров, подтвердившее физическую непротиворечивость результатов расчета и логическую обоснованность исходных допущений предложенной теории.

6. Результаты расчета качественно и количественно описывают классические эксперименты, подтверждая справедливость принятых допущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воротилин В.П. *О механизме движения и диффузионного горения турбулентных струй* // ЖЭТФ. – 2018. – Т.153. – Вып.2. – С.313-328.
2. Абрамович Г.Н., Гиршович С.Ю. и др. *Теория турбулентных струй*. – М.: Наука, 1984. – 715 с.

3. Фрост У., Моулден Т. *Турбулентность: принципы и применение*. – М.: Мир, 1980.
4. Corrsin S., Kistler A.L. *Free-stream boundaries of turbulent flows*. – NACA Rept., 1955. – No.1244.
5. Колоколов И.В., Лебедев В.В. *Двумерная турбулентность в ограниченной ячейке* // ЖЭТФ. – 2024. – Т.166. – Вып.1(7). – С.110-120.
6. Воротилин В.П. *О механизме турбулентных течений со сдвигом* // ЖЭТФ. – 2019. – Т.156. – Вып.1(7). – С.176-188.
7. Воротилин В.П. *О механизме турбулентных течений со сдвигом. Часть 2. Турбулентный пограничный слой* // ЖЭТФ. – 2021. – Т.160. – Вып.4(10). – С.587-594.
8. Воротилин В.П. *Гидродинамика турбулентного слоя смешения* // ЖЭТФ. – 2022. – Т.162. – Вып. 6(12). – С.985-990.

УДК 532.656.56
EDN UYFLRB
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.23

ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ПЕРФОРИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ОБТЕКАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПОД ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ АТАКИ α И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УГЛА УСТАНОВКИ РЕШЕТКИ В КАНАЛЕ

Захаров Н.Н., Макаров А.Ю.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

Перфорированные поверхности (сетки, решетки) используются в различных областях техники для решения широкого круга задач. Вот основные сферы их применения и функции:

- для выравнивания потока в каналах силовых установок и аэродинамических трубах,
- для моделирования полей скоростей перед двигателем, соответствующих натурным условиям его эксплуатации, при испытании двигателя на стенде,
- для защиты различных аппаратов от посторонних предметов,
- для управления течением в каналах различных устройств

Вопросами выравнивания потока по сечению различных каналов, аппаратов и приборов занимаются давно. Сначала эти задачи решались чисто эмпирически. Не было рациональных методов подбора выравнивающих устройств. Известно, что для выравнивания потока при не очень большой степени неравномерности его по сечению применялись сетки (сита) или решетки (перфорированные листы и т.п.). Путем простого подбора густоты сеток (решеток), местных накладок на них добивались необходимой степени равномерности распределения скоростей по сечению. Особенно часто к этому методу прибегали при распределении потока в аэродинамических трубах [1]. К степени равномерности потока по сечению рабочей части аэродинамических труб предъявляются особые требования. Сетки и решетки в них часто устанавливают также с целью гашения (или регулирования) турбулентности потока.

Сетки и решетки для выравнивания потока применяют также в каналах силовых установок современных летательных аппаратов.

Помимо задач выравнивания неоднородных потоков в аппаратах и других различных устройствах, часто возникает необходимость преобразовать одну форму профиля скорости в другую. Например, в аэродинамических трубах с равномерным (прямолинейным) потоком иногда требуется создать для испытуемой в рабочей части силовой установки поле полных давлений, газодинамически подобное полю, реализуемое в натурных условиях эксплуатации СУ. Этого можно достичь, используя сеточные композиции для создания стационарного неоднородного поля полных давлений на входе в авиационный двигатель. На рис.1, как пример, показан имитатор неоднородного поля на входе в вентилятор авиационного двигателя, выполненный в виде сеточной композиции [2]. Таким образом, можно смоделировать поле течения, идентичное тому, что получается на выходе из воздухозаборника силовой установки летательного аппарата.



Рис.1. Вентилятор с имитатором неоднородного поля на входе.

Наиболее широкое применение сеточные конструкции получили как элемент защитных устройств, предотвращающих попадание посторонних предметов в авиационный двигатель. Один из примеров такого использования сетки для защиты двигателя от посторонних предметов показан на рис.2.

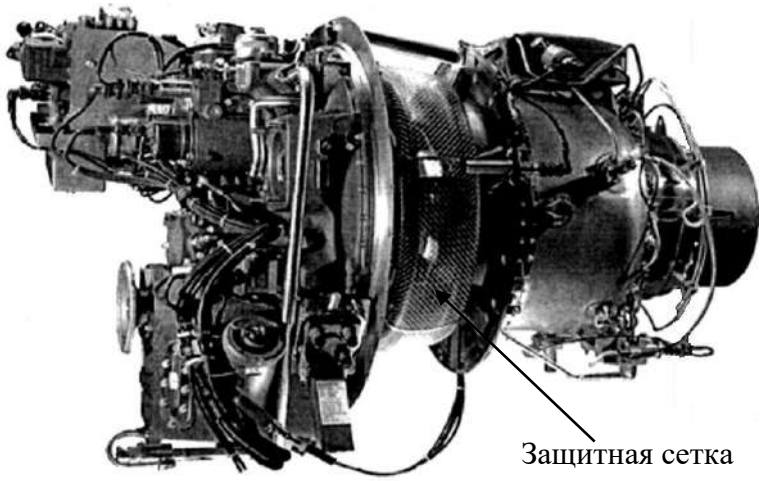


Рис.2. Защитная сетка на входе в двигатель ARRIUS 2G1.

Для расчета потребной густоты сетки, обеспечивающей защиту двигателя от посторонних предметов, необходимо, чтобы данная сетка не вносила заметные потери полного давления входного потока. По этой причине требуется знать зависимость коэффициента восстановления полного давления σ_c, который характеризует интегральный уровень потерь, для сетки от приведенной скорости λ_o перед сеткой либо от приведенной скорости λ_2 за сеткой на выходе из канала и от относительной площади живого сечения или проницаемости сетки $\bar{f}_c = (S_o - S_c)/S_o$, где S_c – площадь затенения канала сеткой, а S_o – полная площадь сечения канала. В работе [3] была получена зависимость $\sigma_c = f(\lambda, \bar{f}_c)$ для сетки, установленной в канале нормально к потоку.

Для оценки газодинамических характеристик сеток, установленных под произвольным углом α к вектору скорости, используем тот же подход, что и в уже цитированной работе [3].

Рассмотрим более подробно влияние определяющих параметров на потери полного давления при обтекании сетки в канале (рис.3) и получим аналитическую зависимость $\sigma_c = f\left(\lambda, \alpha\ \overline{S}_c\right)$. Здесь σ_c – коэффициент восстановления полного давления потока за сеткой, λ – коэффициент приведённой скорости набегающего потока, $\overline{S}_c$ – относительная площадь затенения канала сеткой.

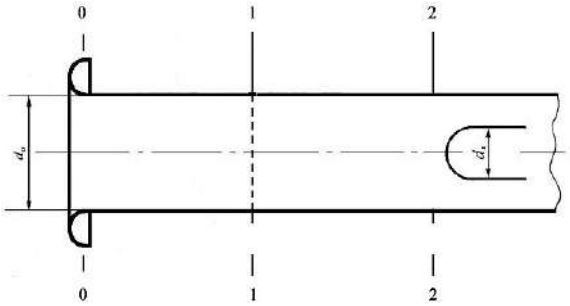


Рис.3. Схема канала с установленной сеткой в сечении 1-1.

Запишем уравнение количества движения для участка потока между сечениями 0 и 2 канала (рис.3), пренебрегая трением о стенки и учитывая, что при дозвуковых скоростях воздуха в канале статическое давление постоянно во всем сечении 2

$$\left(\rho_{\text{o}} u_{\text{o}}^2 + p_{\text{o}}\right) S_{\text{o}} - c_x S_c \frac{\rho_1 u_1^2}{2} = \left(\rho_2 u_2^2 + p_2\right) S_{\text{o}}.$$

Здесь ρ – плотность, p – давление, S – площадь, c_x – коэффициент сопротивления сетки, индекс «о» относится к параметрам потока и геометрическим размерам канала перед сеткой, индексы «1 и 2» – к параметрам потока в сечении сетки и за сеткой в сечении входа в двигатель соответственно.

Рассмотрим случай малых значений дозвуковых скоростей в канале имитатора, когда $\lambda_2 \approx \lambda_{\text{o}} / \sigma$, а $\rho_{\text{o}} \approx \rho_1 \approx \rho_2$. Тогда используя уравнение неразрывности и уравнение Бернулли для определения полного давления в несжимаемой жидкости, найдем

$$\sigma_{\text{c}} = \frac{p_2^*}{p_{\text{o}}^*} = 1 - \frac{\kappa}{\kappa + 1} c_x \frac{\overline{S}_{\text{c}}}{\left(1 - \overline{S}_{\text{c}}\right)^2} \lambda_2^2, \qquad (1)$$

Здесь $\overline{S}_c = \frac{S_c}{S_0} = 1 - \overline{f}_c$ – относительная площадь затенения канала сеткой, $\overline{f}_c = \frac{f_c}{f_{\text{o}}}$ – проницаемость сетки, f_c – суммарная площадь отверстий сетки, f_{o} S_0 – общая площадь сетки.

В формуле (1) значение коэффициента сопротивления сетки c_x в неявном виде можно определить, используя экспериментальные данные, полученные в работе [4] для сетки, установленной нормально к вектору скорости. Анализ этих данных с использованием (1) позволяет получить конечное соотношение для определения коэффициента полного давления σ_c для сетки, установленной в канале нормально к вектору скорости. Это соотношение имеет следующий вид

$$\sigma_{\text{c}} = \frac{p_2^*}{p_{\text{o}}^*} = 1 - \frac{\kappa}{\kappa + 1}\left(0.748 + 0.22\,\overline{f}_c\right) \frac{\left(1 - \overline{f}_c\right)}{\overline{f}_c^{\,2}} \lambda_2^2. \qquad (2)$$

На рис.4 приведены графические зависимости коэффициента полного давления σ_c от числа λ_2 для сеток с различной степенью проницаемости f_c, полученные с использованием формулы (2). На этом рисунке штриховыми линиями обозначена граница запирания сетки, а штрихпунктирными линиями – граница, ниже которой коэффициент гидравлического сопротивления $\zeta > 2$. Указанные линии ограничивают область геометрических и газодинамических параметров сеток, из которой можно выбирать сетки.

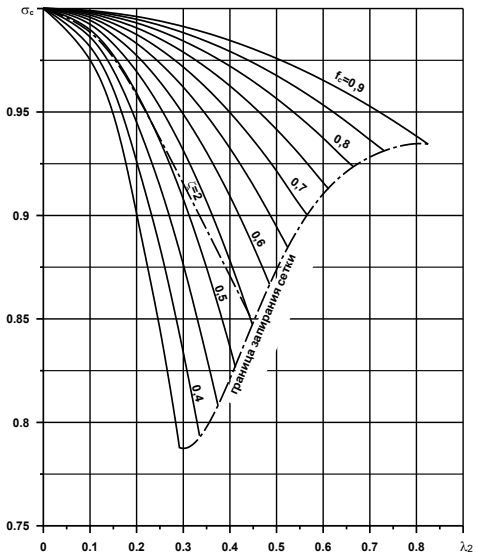


Рис.4. Графические зависимости коэффициента полного давления σ_c от числа λ_2 для сеток с различной степенью проницаемости f_c.

Зависимость σ_c от λ_o можно получить, используя формулу (2) и очевидное соотношение $q(\lambda_2) = q(\lambda_o)/\sigma_c$, из которого вытекает связь λ_2 с λ_o.

Из анализа формулы (1) следует, коэффициент полного давления σ, который определяет потери полного давления $\Delta\sigma = 1 - \sigma$ за сеткой, зависит от коэффициента сопротивления сетки Cx и степени затенения сетки $\overline{S}_c = S_c / S_o$. Коэффициент сопротивления сетки Cx при изменении угла атаки α от 90° до 0° по данным работ [5,6] уменьшается от Cx_{max} до Cx_{min} (рис.5).

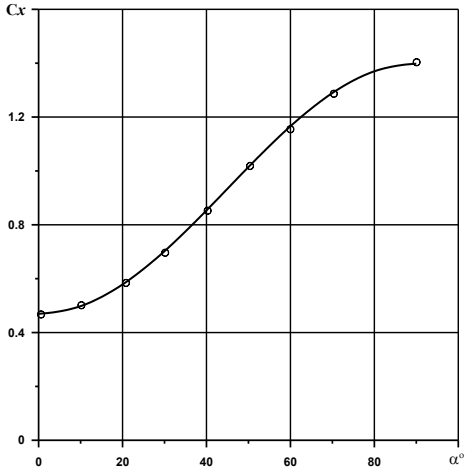


Рис.5 Зависимость $Cx = f(\alpha)$.

Представленная на рис.5 зависимость $Cx = f(\alpha)$ хорошо описывается следующей эмпирической формулой

$$Cx = Cx_0 + (Cx_{90} - Cx_0)\sin^2\alpha, \quad (3)$$

где $Cx_0 = 0.47$, а $Cx_{90} = 1.4$.

Степень затенения канала сеткой $\overline{S}_c$ зависит от угла атаки α и определяется формулой (4)

$$\overline{S}_c = \frac{S_c}{S_o} = \frac{d}{a+d}\left(\frac{a}{a+d}\frac{1}{\sin\alpha}+1\right), \quad (4)$$

где a – размер ячейки сетки, а d – диаметр прутка сетки, по ГОСТ 3826-82, α – угол наклона сетки в канале относительно вектора скорости.

С уменьшением угла атаки сетки степень затенения $\overline{S}_c$ увеличивается (рис.6) в соответствии с формулой (4). Таким образом, уменьшения угла обтекания решетки ведёт с одной стороны к уменьшению её сопротивления и, следовательно, к уменьшению потерь полного давления, а с другой стороны к росту степени затенения канала и увеличению потерь полного давления. Поэтому при изменении угла установки решетки в канале можно ожидать оптимального значения α, при котором потери полного давления $\Delta\sigma$ будут минимальными.

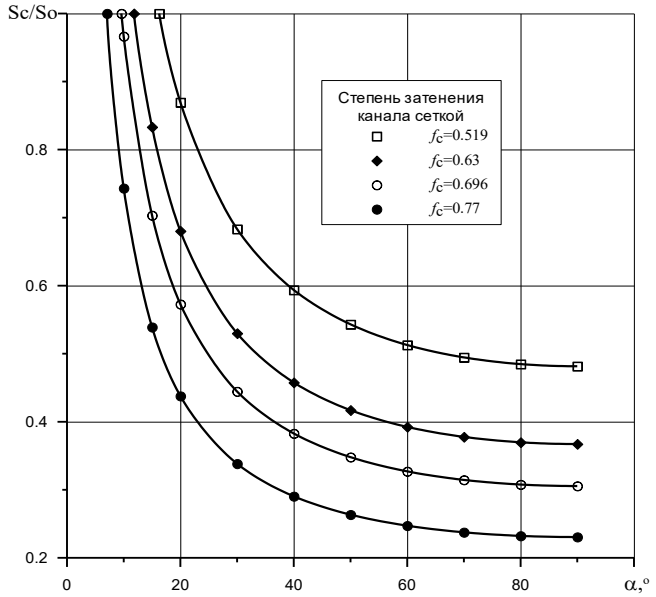


Рис.6. Зависимость степени затенения канала сетками от угла атаки α и значения относительной проницаемости сетки f_c.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УГЛА УСТАНОВКИ РЕШЕТКИ В КАНАЛЕ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕГО МИНИМАЛЬНЫЕ ПОТЕРИ ПОЛНОГО ДАВЛЕНИЯ ПРИ ЕЁ ОБТЕКАНИИ

Используя соотношения (1), запишем коэффициент потерь полного давления при обтекании потоком воздуха решетки в канале, установленной под произвольным углом к вектору скорости

$$\Delta\sigma_{\text{c}} = \frac{\kappa}{\kappa+1} c_x \frac{\overline{S}_{\text{c}}}{\left(1-\overline{S}_{\text{c}}\right)^2} \lambda_2^2. \qquad (5)$$

С учётом (3) введём следующие обозначения

$$a_1 = 0.47\frac{k}{k+1}, \quad a_2 = 0.929\frac{k}{k+1}.$$

Тогда

$$\frac{k}{k+1} c_x = a_1 + a_2 \sin^2\alpha.$$

Для упрощения выражения (4) введём следующие обозначения

$$b = \frac{ad}{\left(a+d\right)^2}, \; c = \frac{d}{a+d}, \; \text{тогда} \; \overline{S}_{\text{c}} = \frac{b}{\sin\alpha} + c.$$

Упростим выражение

$$\frac{\overline{S}_{\text{c}}}{\left(1-\overline{S}_{\text{c}}\right)^2} \lambda_2^2 = \frac{\dfrac{b}{\sin\alpha}+c}{\left[1-\left(\dfrac{b}{\sin\alpha}+c\right)\right]^2} m = \frac{bm\cdot\sin\alpha + cm\cdot\sin^2\alpha}{\left[b-\left(1-c\right)\sin\alpha\right]^2}.$$

Здесь $m = \lambda_2^2$.

Введём следующие обозначения функций

$$f_1(\alpha) = a_1 + a_2\sin^2\alpha,$$

$$f_2(\alpha) = a_3\sin\alpha + a_4\sin^2\alpha,$$

где $a_3 = bm, \; a_4 = cm$;

$$f_3(\alpha) = \left(b - n\sin\alpha\right)^{-2},$$

где $n = 1-c.$

Используя введённые обозначения функций, запишем выражение для коэффициента потерь полного давления $\Delta\sigma_c$ в потоке за решеткой

$$\Delta\sigma_{\text{c}} = \frac{\kappa}{\kappa+1} c_x \frac{\overline{S}_{\text{c}}}{\left(1-\overline{S}_{\text{c}}\right)^2} \lambda_2^2 = f_1(\alpha)\cdot f_2(\alpha)\cdot f_3(\alpha).$$

Найдём производную от $\Delta\sigma_c$ по углу α

$$\frac{d\Delta\sigma_c}{d\alpha} = f_1'(\alpha)\cdot f_2(\alpha)\cdot f_3(\alpha) + f_2'(\alpha)\cdot f_1(\alpha)\cdot f_3(\alpha) + \\ + f_3'(\alpha)\cdot f_1(\alpha)\cdot f_2(\alpha), \qquad (6)$$

где

$$f_1'(\alpha) = 2a_1\sin\alpha\cdot\cos\alpha,$$

$$f_2'(\alpha) = a_3\cos\alpha + 2a_4\sin\alpha\cdot\cos\alpha,$$

$$f_3'(\alpha) = 2n\cos\alpha\left(b - n\sin\alpha\right)^{-3}.$$

Уравнение (6) позволяет определить оптимальный угол установки сетки в плоском канале при заданных значениях скорости обтекания и проницаемости сетки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование параметров течения воздуха в плоском канале, загроможденном сеткой, устанавливаемой под произвольным углом обтекания при различных значениях приведенной скорости на входе и проницаемости поверхности обтекания. Получена формула для оценки значений коэффициента полного давления σ за обтекаемой перфорированной поверхностью в зависимости от угла её установки в канале α, приведённой скорости λ и проницаемости поверхности.

Предложено уравнение для поиска оптимального значения угла установки перфорированной поверхности в канале в зависимости от приведённой скорости и степени проницаемости поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баулин К.К., Астабатьян С.И., Крашенинников Ф.И. *Исследование аэродинамических труб с открытой рабочей частью* // Труды ЦАГИ. – 1932. – Вып.40. – С.30.
2. Захаров Н.Н. и др. *Моделирование входной неоднородности турбулентного потока перед ГТД* // Труды ЦИАМ. – 2020. – №1361. – С.233-244.
3. Захаров Н.Н., Кутузова А.Н. *Методика расчета сеточных композиций для моделирования радиальной неравномерности перед двигателем* // Сборник Трудов ЦИАМ им П.И. Баранова. – 2014. – С.34-38.
4. Идельчик И.Е. *Справочник по гидравлическим сопротивлениям*. – М.: Госэнергоиздат, 1960.
5. Фридман А.Л. *Теория и проектирование орудий промышленного рыболовства*. – М.: Легкая промышленность, 1981.
6. Недоступ А.А. *Методы расчёта сетных пассивных орудий внутреннего и прибрежного рыболовства*. – КГТУ, 2010.

УДК 544.33; 544.34
EDN UYVOYE
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.24

СВОЙСТВА ОБЪЕМНЫХ НАНОПУЗЫРЕЙ В ВОДЕ

Левин Ю.К.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

1. ЭНЕРГИЯ НАНОПУЗЫРЕЙ С ГИДРАТНОЙ ОБОЛОЧКОЙ

Интерес к объемным нанопузырям (ОНП) в воде связан с перспективами их применения в различных областях. Нанопузырьковые технологии широко востребованы для снижения затрат и энергопотребления в ряде промышленных процессов, в экологии, сельском хозяйстве, медицине/биомедицине, при оптимизации терапевтических и диагностических методов и других областей благодаря их малому размеру, большой удельной площади поверхности, длительному времени пребывания в воде, высокой мощности массопереноса, высокому дзета-потенциалу. Поэтому исследование свойств ОНП актуально [1].

У ОНП обнаружен межфазный Δ-слой толщиной $\Delta = 1$ нм с относительной диэлектрической проницаемостью (ОДП) $\varepsilon_1 \approx 3$ [2]. Вне Δ-слоя ОДП воды приходит к обычному значению $\varepsilon_2 = 80$ (рис.1).

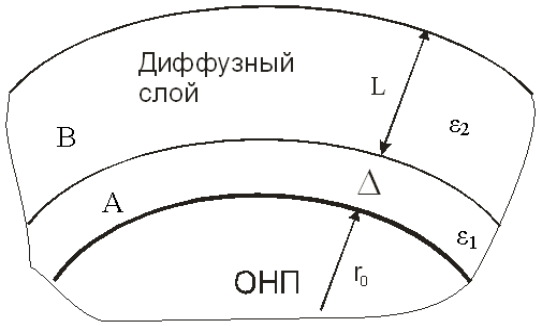


Рис.1. Структура оболочки объемного нанопузыря.

Отсюда в работе [3] был сделан вывод, что такой слой минимизирует энергию ОНП, т.к водородные связи высвобождают больше энергии, чем поляризация диполей в электрическом поле. Поэтому ОНП окружен гидратным Δ-слоем (далее – слой А, $r_0 < r < r_0 + \Delta$, $\varepsilon = \varepsilon_A = 3$), вне которого расположен диффузный слой (слой В, $r > r_0 + \Delta$, $\varepsilon = \varepsilon_B = 80$). В поле заряда q_0 формируются две двухслойных оболочки: первая образована свободным зарядом q_0 и примыкающим к нему связанным зарядом q_1, наведенным у прилегающей границы области А. Вторая образована связанными зарядами q_2 у внешней границы области А и q_3 на границе области В, смежной с областью А. Каждая из этих структур вносит соответствующий вклад в электростатическую энергию ОНП. Важно найти слагаемые энергии ОНП и их соотношение внутри и вне Δ-слоя.

Упростив задачу, примем концентрацию растворенных солей $c = 0$. Соответственно, длина Дебая $L \to \infty$. В такой модели величины связанных зарядов определяются выражениями

$$q_1 = \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} q_0, \quad q_2 = \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1} q_0, \quad q_3 = \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} q_0. \tag{1}$$

Энергия произвольной системы заряженных тел, как известно, равна энергии создаваемого ими электрического поля $E(r)$. Объемную плотность энергии $E(r)$ представим суммой [1]

$$\begin{aligned} w(r) &= \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E(r)^2 = \frac{1}{2}P(r)E(r) + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 = \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E(r)^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2, \end{aligned} \tag{2}$$

где ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, $E(r) = \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$ – напряженность поля, $P(r) = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E(r)$ – поляризация диэлектрика, а ε – ОДП диэлектрической среды. Первое слагаемое (2) описывает энергию поляризованного диэлектрика, а второе – энергию поля в вакууме, причем, как видно из (2), энергия поляризации диэлектрика в $(\varepsilon - 1)$ раз больше энергии поля зарядов в вакууме. Отметим, что оценка (2) применима по отдельности к каждой из областей A и B. Энергия ОНП с Δ-слоем находится путем интегрирования (2) по всему объему поля, как это обычно делается для системы заряженных проводников [1]

$$\begin{aligned} U(r_0) &= \int_{r0}^{r0+\Delta} \frac{1}{2}\varepsilon_A\varepsilon_0 E_A^2(r)dV + \int_{r0+\Delta}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_B\varepsilon_0 E_B^2(r)dV = \\ &= \frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon_A r_0 + \varepsilon_B \Delta}{\varepsilon_A\varepsilon_B r_0 (r_0 + \Delta)}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $E_A(r) = q_0 / 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_A r^2$, а $E_B(r) = q_0 / 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_B r^2$, $dV = 4\pi r^2 dr$.

Полную энергию электростатического поля ОНП без гидратной оболочки получим из (3) при $\Delta = 0$, что соответствует известной формуле

$$U_0(r_0) = \frac{{q_0}^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_B r_0}. \tag{4}$$

Представим полную энергию ОНП (3) суммой ее элементарных составляющих. Очевидно, в области A одна часть этих составляющих представлена энергией W_q поля в вакууме, образованного зарядами $q_0 + q_1$. Другая часть представлена энергией поляризованного диэлектрика W_d, согласно (2). Аналогично, в области B одна часть энергии ОНП обеспечена полем в вакууме зарядов $q_0 + q_1 + q_2 + q_3 = q_0 + q_3$, т.к. из (1) следует $q_1 = -q_2$, а другая часть – энергией поляризованного диэлектрика. Отсюда найдем составляющие полной энергии ОНП – U_q в вакууме и U_d в диэлектрике в областях A и B. Как известно, энергия W_q заряда q определяется выражением

$$W_q = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}. \tag{5}$$

В результате полную энергию ОНП $U(r_0)$ (3), с учетом (2) и (5), представим формулой

$$U(r_0)=\frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}+\frac{q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}+\frac{q_0 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_0}+\frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}+\frac{q_3^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}+\frac{q_0 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_0}+$$
$$+\frac{q_0^2(\varepsilon_A-1)\Delta}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_A^2 r_0(r_0+\Delta)}+\frac{q_0^2(\varepsilon_B-1)}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_B^2(r_0+\Delta)}. \qquad (6)$$

Введем обозначение $U_q=\sum_{i=1}^{8}W_i$. Понятно, что $W_A=\sum_{i=1}^{3}W_i$ соответствует энергии поля в области А заряда $q=q_0+q_1=q/\varepsilon_A$, с учетом (1). Отсюда с учетом (6) получим известную формулу: $W_A(r_0)=\frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon_A^2\varepsilon_0 r_0}$. Из (6) видно, что все слагаемые W_A одного порядка по модулю. Первые два слагаемых ответственны за собственные энергии зарядов q_0 и q_1, а третье – за потенциальную энергию их взаимодействия в вакууме. Но заряды q_0 и q_1 разноименные, согласно (1). Их взаимная энергия $W_3<0$ почти нейтрализует W_1, $W_2>0$, так что W_A приобретает множитель $1/\varepsilon_A^2$, с учетом (5) и (6). Аналогично в области В подставим в (5) $q=q_0+q_3=q_0/\varepsilon_B$, сравним сумму $W_B=\sum_{i=4}^{6}W_i$ с (6), и опять получим, что энергия $W_3<0$ почти нейтрализует энергии $W_4+W_5>0$.

Далее сравним доли энергий $U_A(r_0)$ и $U_A(r_0)$ областей А и В в общей энергии $U(r_0)$ (3). В соответствии с (2) слагаемые (3) в каждой из областей А и В представим через энергию зарядов в вакууме $U_q(r)$ и энергию поляризации диэлектрика $U_d(r)$

$$U_{qA}(r_0)=\frac{q_0^2\Delta}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_A^2 r_0(r_0+\Delta)},\quad U_{dA}(r_0)=\frac{q_0^2(\varepsilon_A-1)\Delta}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_A^2 r_0(r_0+\Delta)},$$
$$U_{qB}(r_0)=\frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_B^2(r_0+\Delta)},\quad U_{dB}(r_0)=\frac{q_0^2(\varepsilon_B-1)}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_B^2(r_0+\Delta)}.$$

Запишем энергии ОНП в зонах А и В: $U_A(r_0)=U_{qA}(r_0)+U_{dA}(r_0)$, $U_B(r_0)=U_{qB}(r_0)+U_{dB}(r_0)$, откуда

$$U_A(r_0)=\frac{q_0^2\Delta}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_A r_0(r_0+\Delta)}, \qquad (7)$$

$$U_B(r_0)=\frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_B(r_0+\Delta)}. \qquad (8)$$

Из (3), (7) и (8) найдем доли указанных энергий в общей энергии $U(r_0)$ ОНП

$$K_A(r_0)=\frac{U_A(r_0)}{U(r_0)}=\frac{\varepsilon_B\Delta}{\varepsilon_B\Delta+\varepsilon_A r_0}, \qquad (9)$$

$$K_B(r_0)=\frac{U_B(r_0)}{U(r_0)}=\frac{\varepsilon_A r_0}{\varepsilon_B\Delta+\varepsilon_A r_0}. \quad (10)$$

Из (3), (4) определим отношение полных энергий нанопузыря с Δ-слоем и без него

$$K_0(r_0)=\frac{U_0(r_0)}{U(r_0)}=\frac{\varepsilon_A(r_0+\Delta)}{\varepsilon_B\Delta+\varepsilon_A r_0}. \quad (11)$$

Графики зависимости $K_A(r_0)$, $K_B(r_0)$ и $K_0(r_0)$ приведены на рис.2, где видно, что полная энергия ОНП без Δ-слоя близка к энергии, сосредоточенной в области В у ОНП с Δ-слоем. Это, с учетом (4) и (8), приводит к формуле: $\frac{U_0(r_0)}{U_B(r_0)}=1+\frac{\Delta}{r_0}$. Из равенства энергий (7) и (8) найдено, что полные энергии внутри Δ-слоя и вне его выравниваются у ОНП с радиусом $r_0=26$ нм. У ОНП меньшего размера больше энергии сосредоточено в Δ-слое, у более крупных за его пределами – в диффузионном слое.

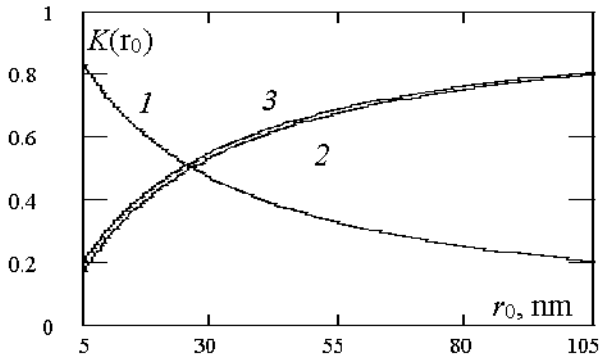


Рис.2. Графики зависимости от радиуса ОНП коэффициентов $K_A(r_0)$, $K_B(r_0)$ и $K_0(r_0)$ по формулам (9), (10), (11) – кривые 1, 2 и 3, соответственно.

Из (3) и (4) в реальных на практике условиях $r_0 \gg \Delta$ и $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$ найдем коэффициент $B(r_0)$ увеличения энергии ОНП за счет Δ-слоя (рис.3)

$$B(r_0)=K(r_0)^{-1}=(r_0)=\frac{\varepsilon_2/\varepsilon_1}{r_0/\Delta}. \quad (12)$$

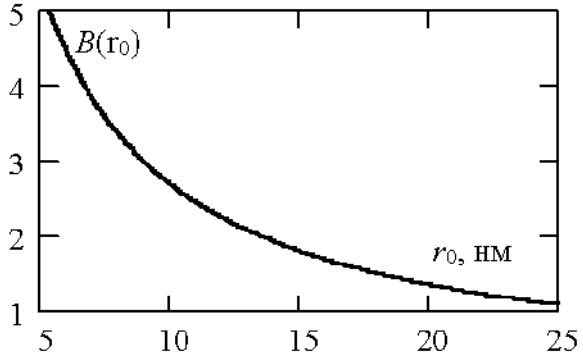


Рис.3. Зависимость (12) коэффициента $B(r_0)$ увеличения энергии ОНП за счет Δ-слоя.

Отсюда следует: а) электростатическая энергия заряженного нанопузыря за счет Δ-слоя возрастает более чем на 30% для ОНП радиусом менее 20 нм; б) энергия внутри Δ-слоя больше, чем энергия за его пределами для ОНП радиусом меньше 26 нм. У более крупных нанопузырей больше энергии сосредоточено вне Δ-слоя; в) энергия нанопузыря, в основном, определяется энергией поляризации диэлектрической среды, которая в $(\varepsilon - 1)$ раз превосходит энергию электрического поля зарядов в вакууме.

2. СТАБИЛЬНОСТЬ ОБЪЕМНЫХ НАНОПУЗЫРЕЙ С ГИДРАТНЫМ СЛОЕМ

Обычно для однородной диэлектрической среды полагают, что стабильность ОНП обеспечивает баланс на границе ОНП давлений Кулона $P_C(r_0) = \dfrac{q_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon r_0^4}$ [4] и Лапласа, $P_L(r_0) = 2\alpha/r_0$, где $\alpha = 0.072$ N/m –коэффициент поверхностного натяжения воды, r_0 и q_0 – радиус и заряд ОНП, соответственно, $\varepsilon_0 = 8.85\cdot10^{-12}\,\dfrac{F}{m}$ – электрическая постоянная, ε – относительная диэлектрическая проницаемость воды (ОДП). Однако, как ясно из раздела 1, ОНП окружен гидратным Δ-слоем ($\Delta \approx 1$ nm, $\varepsilon_1 \approx 3$) полярных молекул воды с касательной ориентацией вектора поляризации [5]. Поэтому уточним формулу для $P_C(r_0)$ с учетом влияния гидратного Δ-слоя и концентрации растворенных солей [6].

Двухслойный сферический конденсатор с диэлектриком подобен двум вложенным друг в друга конденсаторам емкостью C_1 и C_2 [7]. Для ОНП с радиусом r_0 у внутреннего конденсатора радиусы обкладок r_0 и $r_0+\Delta$, ОДП $\varepsilon_1 \approx 3$, а у внешнего $(r_0+\Delta)$ и $(r_0+\Delta+L)$ и ОДП $\varepsilon_2 \approx 80$, где: $L = \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_2 k_B T / 2e^2 N_A c}$ – длина Дебая (m), $k_B = 1.38\cdot10^{-23}$ J/K – постоянная Больцмана, $N_A = 6\cdot10^{23}$ mol^{-1} – число Авогадро, c - концентрация раствора солей (mol/m^3), $T = 293$ К – температура, $e = 1.6\cdot10^{-19}$ C – заряд электрона.

Емкости конденсаторов $C_1 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\left(\dfrac{1}{r_0} - \dfrac{1}{r_0+\Delta}\right)^{-1}$, $C_2 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2\left(\dfrac{1}{r_0+\Delta} - \dfrac{1}{r_0+\Delta+L}\right)^{-1}$, соответственно. Общая емкость определяется известной формулой

$$C(r_0) = 4\pi\varepsilon_0\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0+\Delta}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{r_0+\Delta} - \frac{1}{r_0+\Delta+L}\right)\right]^{-1}. \qquad (13)$$

Определим давления ОНП $P_C(r_0)$ и $P(r_0)$ для ОНП в жидком диэлектрике без Δ-слоя и с Δ-слоем. Энергия каждого из вариантов ОНП $U_i = q_0^2/2C$, C – емкость. Отсюда

$$P_C(r_0) = -\frac{\partial U_i}{\partial r_0}\frac{1}{4\pi r_0^2} = -\frac{q_0^2}{8\pi r_0^2}\frac{\partial}{\partial r_0}\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{q_0^2(L+2r_0)L}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_2 r_0^4(L+r_0)^2},\ [4]: \qquad (14)$$

где емкость $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r_0\left(1 + r_0/\mathrm{L}\right)$, с учетом (13). Для ОНП с Δ-слоем находим

$$P\left(r_0\right) = \frac{q_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r_0^2}\left[\frac{\Delta\left(2r_0+\Delta\right)}{\varepsilon_1\left(r_0+\Delta\right)^2 r_0^2} + \frac{L\left(2r_0+2\Delta+L\right)}{\varepsilon_2\left(r_0+\Delta\right)^2\left(r_0+\Delta+L\right)^2}\right]. \qquad (15)$$

На рис.3 приведены зависимости давления $P_i\left(r_0\right)$ от радиуса ОНП по формулам (14) и (15) в чистой ($c = 1$ mol/m^3) и соленой воде ($c = 100$ mol/m^3), а также давление Лапласа $P_L\left(r_0\right)$, где индекс давления $P_i\left(r_0\right)$ соответствует номеру кривой на графике рис.4. Из этих графиков видно увеличение кулоновского давления за счет Δ-слоя ОНП, что повышает его стабильность, особенно в соленой воде. Емкость последовательно соединенных конденсаторов C_1 и C_2 определяется меньшей емкостью C_1, с учетом $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$, что повышает $P\left(r_0\right)$. Кроме того, размеры стабильного ОНП за счет Δ-слоя уменьшаются с повышением солености c раствора. Это можно объяснить с учетом (15) уменьшением длины Дебая L и емкости ОНП. Причем Δ-слой ослабляет влияние солености на $P\left(r_0\right)$.

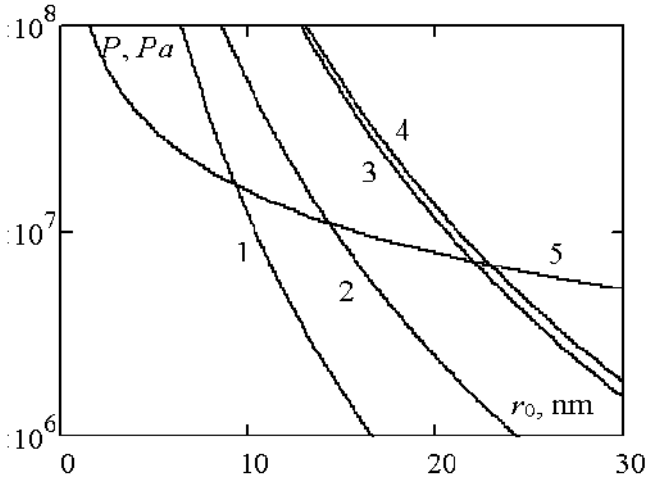


Рис.4. График давлений $P_i\left(r_0\right)$ на границе ОНП от его радиуса ($q_0 = 4\cdot10^{-16}$ C): 1, 2 – давления $P_1\left(r_0\right)$ и $P_2\left(r_0\right)$ в соленой и чистой воде ($c = 100$ mol/m^3 и 1 mol/m^3) соответственно, для ОНП без Δ-слоя. 3, 4 – давления $P_3\left(r_0\right)$ и $P_4\left(r_0\right)$, аналогичные $P_1\left(r_0\right)$ и $P_2\left(r_0\right)$ для ОНП с Δ-слоем. 5 – давление Лапласа $P_5\left(r_0\right) = P_L\left(r_0\right)$.

Сравним давления $P\left(r_0\right)$ в соленой и чистой воде для ОНП с Δ-слоем и без него. Отношение давлений $k_0\left(r_0\right) = P_4\left(r_0\right)/P_2\left(r_0\right)$ в чистой и $k_c\left(r_0\right) = P_3\left(r_0\right)/P_1\left(r_0\right)$ в соленой воде показано на рис.5.

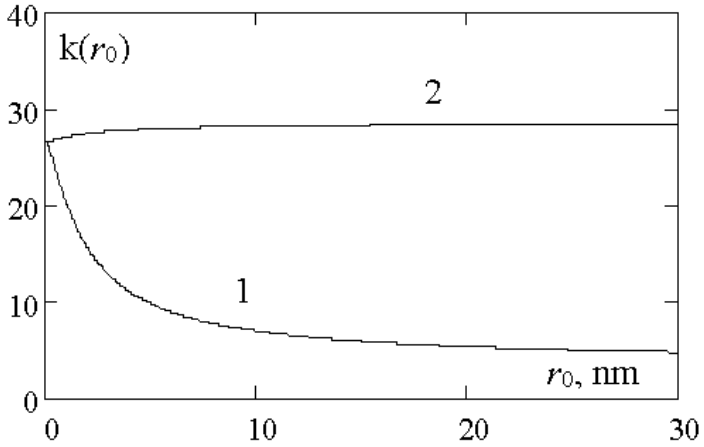


Рис.5. График зависимости отношения $P(r_0)/P_C(r_0)$ от радиуса ОНП с Δ-слоем и без него: 1 – отношение давлений $k_0(r_0)=P_4(r_0)/P_2(r_0)$ в чистой воде (1 mol/m^3), 2 – отношение давлений $k_c(r_0)=P_3(r_0)/P_1(r_0)$ в соленой воде ($c=100$ mol/m^3).

Определено, что в соленой воде Δ-слой повышает давление ОНП почти в 30 раз, а в пресной – от 10 до 4-х раз в диапазоне размеров ОНП 5 нм ... 100 нм. Это обусловлено тем, что влияние емкости C_2 подавлено первым слагаемым в квадратных скобках (15), которое сравнительно велико по указанной выше причине $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$. Важно, что графики рис.4 не зависят от величины заряда ОНП q_0 – сомножителя в выражениях (14) и (15). Отсюда следует, что стабильность ОНП обеспечивается Δ-слоем с малой диэлектрической проницаемостью ε_1. Это обеспечено большим значением электрического поля в этом при малости ε_1.

3. РОЛЬ ГИДРАТНОГО СЛОЯ В ОБЕСПЕЧЕНИИ СТАБИЛЬНОСТИ НАНОПУЗЫРЯ

Рассмотрим факторы, определяющие стабильность нанопузыря с гидратным Δ-слоем толщиной 1 nm и диэлектрической проницаемостью порядка 3. В разделе 2 использован баланс давлений Лапласа и Кулона на границе ОНП. Здесь рассмотрим условия стабильности ОНП за счет эффекта электрозамерзания его Δ-слоя в высоком электрическом поле [8]. Давление газа внутри ОНП на порядки меньше давлений P_C, P_L и не учитывается.

При молекулярно-динамическом моделировании воды найдено, что в условиях окружающей среды жидкая вода замерзает в диапазоне пороговой напряженности E_F электрического поля: 10^9 V/m...$1.5\cdot10^9$ V/m [9]. В морской воде диапазон поля E_F определен значениями: $1.5\cdot10^9$ V/m...$4\cdot10^9$ V/m, что объяснили противодействием ионов соли обледенению воды в статическом электрическом поле [10]. Индекс «0» в обозначении $P_{C0}(r_0)$ соответствует концентрации растворенных солей $c=0$. Индекс «s», используем далее для морской воды ($c=600$ моль/м^3). Как упоминалось выше, заряженный ОНП имеет гидратную оболочку толщиной $\Delta \approx 1$ nm с относительной диэлектрической проницаемостью

(ОДП) $\varepsilon_1 \approx 3$ [3]. За пределами Δ-слоя ОДП возвращается к обычному для воды значению $\varepsilon_2 \approx 80$.

Определим заряд ОНП, при котором электрическое поле в гидратной оболочке ОНП достигнет порога образования льда, механическое напряжение которой обеспечит стабильность ОНП, компенсируя давление Лапласа. Эффекту electrofreezing способствуют малая толщина гидратного слоя ОНП и аномально низкое в нем значение ОДП $\varepsilon_1 \approx 3$ воды.

Из условия баланса давлений $P_C(r_0) = P_L(r_0)$ в разделе 2 определим заряд стабильного ОНП: $q_0(r_0)$ в воде без солей (концентрация соли $c = 0$) и $q_s(r_0)$ в морской воде, которую обычно моделируют раствором NaCl с концентрацией $c = 600$ mol/m^3. Из формул $P_{C0}(r_0)$ и $P_L(r_0)$ раздела 2 получим

$$q_0(r_0) = 8\pi(\Delta + r_0)\sqrt{\frac{\varepsilon_0 r_0 \alpha}{\frac{\Delta(\Delta + 2r_0)}{r_0^2 \varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}}}, \tag{16}$$

$$q_s(r_0) = \frac{8\pi\sqrt{\varepsilon_0 r_0 \alpha}\,(r_0 + \Delta)}{\sqrt{\frac{\Delta(2r_0 + \Delta)}{\varepsilon_1 r_0^2} + \frac{L(2r_0 + 2\Delta + L)}{\varepsilon_2 (r_0 + \Delta + L)^2}}}. \tag{17}$$

При найденных зарядах (16) и (17) электростатическое давление уравновешивает давление Лапласа на границе ОНП и обеспечивает его стабильность.

Численным моделированием определен диапазон E_F для воды без солей [8]

$$10^9 \text{ V/m} < E_F < 1.5 \cdot 10^9 \text{ V/m}. \tag{18}$$

Аналогично найден диапазон E_F для морской воды [10]

$$1.5 \cdot 10^9 \text{ V/m} < E_F < 4 \cdot 10^9 \text{ V/m}. \tag{19}$$

В этом случае для обеспечения стабильности ОНП давлению Лапласа противостоит не кулоновское давление P_C, а механическая прочность ледяной скорлупы. Определим заряд ОНП в воде без солей, при котором Δ-слой переходит в лед: $q_{E01}(r_0)$ и $q_{E02}(r_0)$ – при минимальном $E_{01} = 10^9$ V/m и максимальном поле $E_{02} = 1.5 \cdot 10^9$ V/m диапазона (18). Аналогично для морской воды найдем заряды $q_{Es1}(r_0)$ и $q_{Es2}(r_0)$, полученные при полях E_F на краях диапазона (19): $E_{s1} = 1.5 \cdot 10^9$ V/m и $E_{s2} = 4 \cdot 10^9$ V/m. Напряженность электрического поля равна

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_1 r^2}. \tag{20}$$

Из (20) следует, что поле $E(r)$ максимально у поверхности ОНП, а ОДП воды $\varepsilon_1 \approx 3$ делает это поле аномально высоким, стимулируя лед-эффект Δ-слоя. Из (20) определим заряд при electrofreezing Δ-слоя ОНП для воды без солей $q_{E01}(r_0)$ и $q_{E02}(r_0)$ и для морской воды $q_{Es1}(r_0)$ и $q_{Es2}(r_0)$ на нижних и верхних границах диапазонов (18) и (19), соответственно

$$q_{E01}(r_0) = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r_0^2 10^9, \quad q_{E02}(r_0) = 6\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r_0^2 10^9;$$
$$q_{Es1}(r_0) = 6\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r_0^2 10^9, \quad q_{Es1}(r_0) = 6\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r_0^2 10^9.$$

Графики зависимости заряда $q_0(r_0)$, $q_s(r_0)$, $q_{E01}(r_0)$, $q_{E02}(r_0)$, $q_{Es1}(r_0)$, $q_{Es2}(r_0)$ стабильного ОНП от его радиуса приведены на рис.6, где видно, что в воде без солей стабильность ОНП обеспечивается его ледяным Δ-слоем, т.е. когда выполняется условие $q_{E01}(r_0)$, $q_{E02}(r_0) < q_0(r_0)$, только при $r_0 < 90$ nm. В морской воде нет однозначного ответа о механизме стабильности ОНП в диапазоне полей E_F (19), поскольку на разных концах диапазона реализуются различные механизмы. Но если гипотетически понизить верхнюю границу (19) до значения $E_s < 2.37$ V/nm, то Δ-слой во всем диапазоне размеров $r_0 < 150$ nm замерзает при заряде $q_{Es}(r_0) = 9.5\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r_0^2 10^9$.

Таким образом, при комнатных условиях вода без солей более склонна к electrofreezing Δ-слоя ОНП, чем морская вода. Можно предположить, что диапазоны полей электрозамораживания E_F будут сужены термодинамическим анализом.

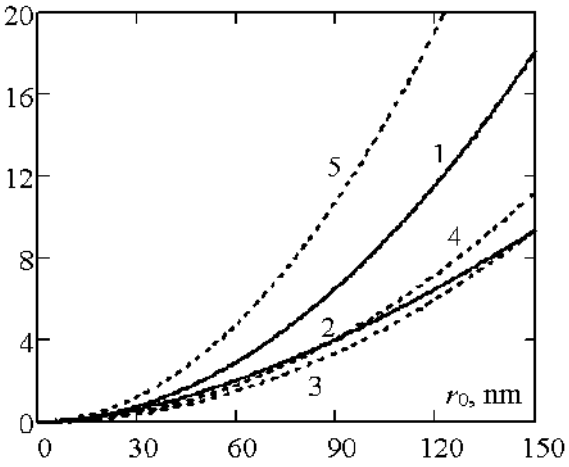


Рис.6. Графики зависимости заряда $q_0(r_0)$, $q_s(r_0)$, $q_{E01}(r_0)$, $q_{E02}(r_0)$, $q_{Es1}(r_0)$, $q_{Es2}(r_0)$, стабильного нанопузыря от его радиуса: кривые 1, 2 (сплошные) – заряд ОНП в воде без солей $q_0(r_0)$ и в морской воде $q_s(r_0)$ соответственно, при кулоновской стабильности ОНП; кривые 3,4,5 (штриховые) – для ОНП с ледяным Δ-слоем – заряд нанопузыря $q_{E01}(r_0)$, $q_{E02}(r_0)$ для воды без солей и для морской воды $q_{Es1}(r_0)$, $q_{Es2}(r_0)$, при минимальном (индекс 1) и максимальном (индекс 2) значении поля E_F.

Отметим также, что модуль Юнга $E = 5$ ГПа-8 ГПа способен обеспечить механическую прочность ледяной оболочки ОНП и их стабильность, поскольку давление Лапласа для ОНП с радиусом более 5 нм не превышает 0.03 ГПа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнение двух гипотез стабильности объемного нанопузыря в воде, электростатической и механической, показало, что в воде без солей при формировании ледяной оболочки требуется меньший заряд нанопузыря, чем при кулоновском механизме стабилизации. В морской воде, напротив – большую эффективность проявляет кулоновский механизм, поскольку обледенению противодействуют ионы растворенной соли. Отметим также, что равенство кулоновского и лапласовского давлений на границе ОНП необходимое, но не достаточное условие их стабильности. Достаточные условия сможет дать термодинамический анализ ОНП, который определит границы энергетически обоснованного превращения ОНП при их разделении, слиянии либо постоянстве. Можно лишь предположить, что стабильное состояние ОНП обеспечит локальный минимум энергии, возможный с учетом разных законов, зависимости от радиуса кулоновского давления $\sim r_0^{-4}$, а лапласовского $\sim r_0^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Ю.К. *Механизм стабильности нанопузырей в воде* // Изв. вузов. Физика. – 2024. – Т.67. – №10. – С.58-61.
2. Fumagalli L., Esfandiar A., Fabregas R., Hu S., Ares P., Janardanan A., Yang Q., Radha B., Taniguchi T., Watanabe K., Gomila G., Novoselov K.S., Geim A.K. // Science. – 2018. – Vol.360. – С.1339-1342.
3. Левин Ю.К. *Условия стабильности слоя Штерна объемных нанопузырей в воде* // Изв. вузов. Физика. – 2022. – Т.65. – №12. – С.55-59.
4. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. *Фейнмановские лекции по физике. Вып.5*. – М.: Мир, 1966.
5. Левин Ю.К. *Условия стабильности слоя Штерна объемных нанопузырей в воде* // Изв. вузов. Физика. – 2022. – Т.65. – №12. – С.55-59.
6. Левин Ю.К., *Стабильность объемных нанопузырей с гидратным слоем* // Коллоидный журнал. – 2025. – Т.87. – №1. – С.35-40.
7. Левин Ю.К. *Характеристики двойного электрического слоя объемных нанопузырей в воде* // Коллоидный журнал. – 2023. – Т.85. – №3. – С.350-354. [Levin Yu.K. *Characteristics of an Electrical Double Layer of Bulk Nanobubles in Water* // Colloid Journal. – 2023. – Vol.85. – No.3. – Pp.418-422].
8. Левин Ю.К. *Роль гидратного слоя в обеспечении стабильности нанопузыря* // Коллоидный журнал. – 2025. – Т.87. – №4. – С.362-369.
9. Cassone G., Martelli F. *Electrofreezing of liquid water at ambient conditions* // Nature Communications. – 2024. – Vol.15. – 1856.
10. Zhao C., Lin Y., Wu X., Ma L., Chu F. *Molecular insights into the role of static electric fields in seawater icing* // Journal of Molecular Liquids. – 2025. – Vol.418. – 126744.

УДК 621.9
EDN ZJZEMO
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.25

ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В КАНАЛЕ С ПРОНИЦАЕМОЙ ГРАНИЦЕЙ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ЛИНЕЙНОГО ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ

Шалаев В.И., Калугин С.Т., Толоко Г.В.

Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Россия

На основе аналитических и численных исследований уравнений Навье-Стокса проведен анализ движения газа в канале с одной проницаемой стенкой под воздействием линейного по продольной координате внешнего градиента давления. Показана возможность естественного обмена газом (отсоса или вдува) с внешним пограничным слоем через проницаемую границу.

Ключевые слова: движение несжимаемой среды в канале; линейный градиент давления; аналитический анализ; численные решения

ВВЕДЕНИЕ

Управление ламинарно-турбулентным переходом (ЛТП) пограничного слоя связано с возможностью улучшения характеристик обтекания летательных аппаратов, в частности, уменьшения вязкого сопротивления. Это направление исследований начало интенсивно развиваться в конце прошлого столетия, что привело созданию системы управления течением на основе отсоса газа через проницаемую поверхность, которая была разработана и отлажена для применения на реальных современных летательных аппаратах [1-3]. Отказ от ее использования был связан с существенным усложнением технологий производства и системы обслуживания.

Однако, сама задача управления обтеканием не потеряла своей актуальности и продолжает исследоваться для разных диапазонов скоростей, включая до-, сверх- и гиперзвуковые режимы [4-8]. Одно из направлений этих работ связано с анализом возможностей естественного отсоса газа в канал через проницаемую обтекаемую поверхность, что было исследовано численно [9]. Однако анализ внешнего обтекания не позволяет определить условия вдува или отсоса.

В настоящей работе возможность обмена газом (отсоса или вдува) между пограничным слоем на обтекаемой проницаемой поверхности и течением в расположенным под ней каналом изучена на основе анализа течения в канале при внешнем линейном по продольной координате градиенте давления в рамках уравнений Навье-Стокса. Задача сведена к решению одномерных уравнений, которые исследованы в приближении Стокса и численно. Показана возможность наличия естественного потока газа через проницаемую поверхность, интенсивность и направление которого зависят от величины и знака производной внешнего градиента давления.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для анализа возможности естественного отсоса-вдува газа через проницаемую стенку рассматривается задача течения вязкого газа около плоской перфорированной поверхности. Схема течения представлена на рис.1: x – продольная координата, y – вертикальная координата.



Рис.1. Схема течения.

Предполагается, что во внешнем пограничном слое давление изменяется квадратично в продольном направлении

$$p_o(x) = p_{00} + xp_1 + \frac{1}{2}x^2 p_2. \tag{1}$$

Здесь $p_1 = const$ – продольный градиент давления, $p_{20} = const$ – его производная. Эта поверхность является проницаемой, под ней расположен плоский канал шириной l. Через проницаемую поверхность может происходить обмен газом (отсос или вдув) между внешним пограничным слоем и каналом, который характеризуется постоянной поперечной скоростью $v_0 = const$. Температуры стенок канала предполагаются одинаковыми и постоянными, а плотность $\rho = \rho_w = const$ (ρ_w – плотность газа в пограничном слое на стенке), поскольку продольная скорость течения в канале $u(x,y)$ предполагается небольшой.

Стационарное течение газа канале описывается уравнениями Навье-Стокса

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,\\
&u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),\\
&u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right),\\
&u(x,0) = u(x,l) = v(x,0) = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\nu = const$ – кинематическая вязкость, $p(x,y)$ – давление, отнесенное к плотности ρ, $v(x,y)$ – поперечная скорость.

Из формы распределения внешнего давления следует, что точное решение уравнений Навье-Стокса в канале можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned}
&v = v(y), \quad u = u_0(y) + xu_1(y),\\
&p(x,y) = p_0(y) + xp_1 + \frac{1}{2}x^2 p_2, \quad p_1 < 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Подставив эти соотношения в уравнения (2), получим следующую систему уравнений для трех составляющих скорости

$$u_1 + \frac{dv}{dy} = 0,$$

$$u_1^2 + v\frac{du_1}{dy} + p_2 = \nu\frac{d^2u_1}{dy^2},$$

$$u_1u_0 + v\frac{du_0}{dy} + p_1 = \nu\frac{d^2u_0}{dy^2}, \qquad (4)$$

$$v\frac{dv}{dy} + \frac{dp_0}{dy} = \nu\frac{d^2v}{dy^2},$$

$$u_0(0) = u_0(l) = u_1(0) = u_1(l) = v(0) = 0.$$

Проанализируем эти уравнения и их решения.

1. АНАЛИЗ И РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ

Не трудно видеть, что основными являются первые два нелинейных уравнения для возмущений продольной скорости $u_1(y)$ и поперечной скорости $v(y)$. Следует отметить, что эти две функции полностью определяются этими двумя уравнениями и тремя краевыми условиями. Условия для поперечной скорости на внешней границе нет, поэтому ее значение здесь определяется интегралом

$$v(y) = -\int_0^y u_1(t)\,dt, \quad v_0 = v(l) = -\int_0^l u_1(t)\,dt.$$

Следовательно, обмен газом между пограничным слоем и каналом может реально существовать, а его знак зависит от направления возмущения продольной скорости $u_1(y)$.

Главная компонента продольной скорости $u_0(y)$ удовлетворяет линейному уравнению и определяется так

$$u_0(y) = \frac{p_1}{p_2}u_1(y). \qquad (5)$$

Уравнение для поперечной скорости (4) интегрируется и это позволяет найти зависимость распределения давления поперек канала $p_0(y)$ от поперечной скорости и ее производной

$$p_0(y) = \frac{v_0^2}{2} + p_{00} - \frac{v^2}{2} + \nu\frac{dv}{dy} = \frac{v_0^2}{2} + p_{00} - \frac{v^2}{2} - \nu u_1.$$

Отсюда следует, что при малых значениях вязкости поперечное распределение давления в главном приближении определяется уравнением Бернулли и пропорционально квадрату поперечной скорости.

Рассмотрим решение уравнений (4) в приближении Стокса

$$p_1 = \nu\frac{d^2u_0}{dy^2}, \quad p_2 = \nu\frac{d^2u_1}{dy^2},$$

$$u_1(y) = \frac{p_2}{2\nu}y(y-l), \quad u_0(y) = \frac{p_1}{2\nu}y(y-l), \quad v(y) = \frac{p_2}{6\nu}y^2\left(y - \frac{3}{2}l\right).$$

Отсюда следует, что величина и направление скорости обмена газом между внешним пограничным слоем и каналом (отсоса или вдува) определяется знаком параметра p_2

$$v_0 = v(l) = -\frac{p_2}{12\nu} l^3 .$$

При $p_2 < 0$ возмущение продольной скорости $u_1(y) > 0$, а $v_0 < 0$ и через проницаемую стенку происходит отсос газа из пограничного слоя. Следует отметить, что скорость отсоса может быть большой вследствие обратной пропорциональности кинематической вязкости и существенно меняется с изменением ширины канала. Это указывает на возможность естественного управления внешним течением с указанными параметрами с помощью канала. Этот результат также указывает, что при постоянном градиенте давления взаимодействия пограничного слоя с течением в канале не происходит.

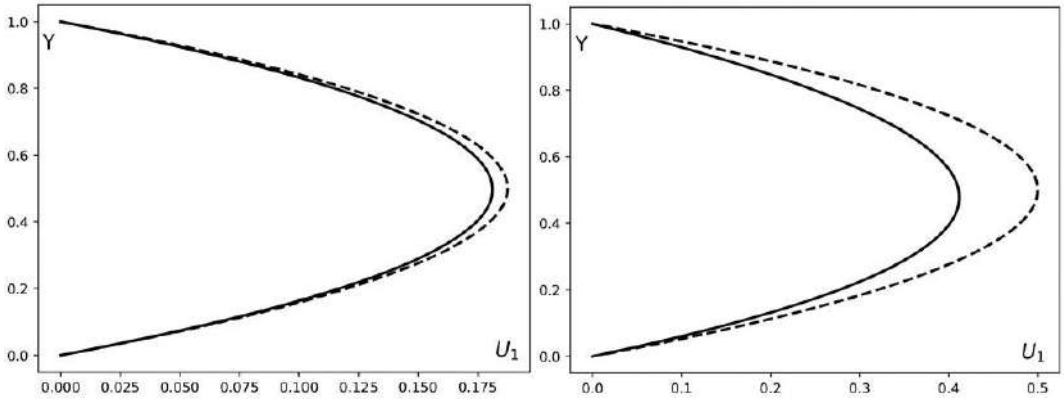
Для численного решения задачи введем безразмерные переменные

$$Y = \frac{y}{l}, \quad W = \frac{lu_1}{V_0}, \quad V = \frac{v}{V_0}, \quad P_2 = \frac{p_2 l^2}{V_0^2} = \pm 1, \quad V_0 = l\sqrt{|p_2|}, \quad \mathrm{Re} = \frac{lV_0}{\nu} .$$

В этих переменных первые два уравнения (4) преобразуются к следующему виду первые два уравнения к безразмерной форме

$$\mathrm{Re}\left(W^2 + V\frac{dW}{dY} + P_2 \right) = \frac{d^2W}{dY^2}, \quad V = -\int_0^Y W(t)\,dt, \qquad (6)$$
$$W(0) = W(1) = V(0) = 0.$$

Решения этих уравнений были получены методами прогонки и пристрелки. На рис.2 представлены сравнения численных решений (сплошные кривые) с приближением Стокса для чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} = 1,5$ и 4. Видно, что при $\mathrm{Re} = 1,5$ оба решения хорошо согласуются, а при $\mathrm{Re} = 4$ различие двух решений значительно.



а) $\mathrm{Re} = 1,5$ б) $\mathrm{Re} = 4$

Рис.2. Сравнение численного решения безразмерных уравнений с приближением Стокса при $P_2 = -1$: сплошные кривые – численные решения; пунктирные – приближение Стокса: 1, 2 – $\mathrm{Re} = 4$; 3, 4 – $\mathrm{Re} = 1,5$.

ВЫВОДЫ

В настоящей работе на основе анализа уравнений Навье-Стокса представлены исследования возможности естественного отсоса газа из пограничного слоя в канал через проницаемую границу при наличии квадратичного распределения давления.

Задача сведена к решению уравнений для продольной скорости, ее возмущения и поперечной скорости.

Получен интеграл зависимости распределения давления поперек канала от поперечной скорости.

На основе приближения Стокса получены явные выражения для распределений компонент скорости по каналу.

Показана возможность естественного обмена газа между внешним пограничным слоем и каналом, который определяется знаком и величиной производной градиента давления. При постоянном градиенте давления обмена между внешним пограничным слоем и течением в канале не происходит.

Получены численные решения уравнений, которые показывают хорошую точность приближения Стокса при числах Рейнольдса порядка единицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Harris R.V., Heffner H. *NASA Laminar Flow Program – Past, Present and Future*. NASA, 1987, CP–2487.
2. Braslow A.L. *A History of Suction–Type Flow Control with Emphasis to Flight Research* // NASA Monographs in Aerospace History. 1999.No.13.
3. Bushnell D.M. *Aircraft drag reduction – a review* // J. Aerospace Engineering. – 2003. – Vol.217.
4. Pfenninger W., Vemuru C.S. *Suction laminarization of highly swept supersonic laminar flow wings* // AISS paper. – 1988. – No.4471.
5. Бойко А.В., Грек Г.Р., Довгаль А.В., Козлов В.В. *Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях*. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Институт компьютерных исследований, 2005. – 304 с.
6. Chernyshev S.L., Kiselev A.Ph., Kuryachii A.P. *Laminar flow control research at TsAGI: Past and present* // Progress in Aerospace Sciences. – 2011. – Vol.47. – No.3. – Pp.169-185.
7. Shalaev V.I. *Control of laminar-turbulent transition and its influence on flow structure* / International Conference on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR). AIP Conf. Proc. – 2018. – No.2027. – Pp.020002-1–020002-9.
8. Wu H., Song W., Nie H., Han Zh. *Boundary-layer Suction and Aerodynamic Shape Optimization for Hybrid Laminar Flow Control on a Fin* / 34 Congress of the International Council of Aeronautical Sciences (ICAS). – 2024. – 0681.
9. Bernachuk A.V., Chuvakhov P.V., Fedorov A.V. *Flow in a pipe with gas inflow* / International Conference on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR2024). Abstracts. Ed. E.I. Kraus. Novosibirsk. SB RAS. – 2024. – Pt. II. – 29 p.

Вычислительные методы механики гетерогенных сред

УДК 531.01, 624.131.43
EDN VCWLJG
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.26

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПОДХОД ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕНЗОРА БИО*

Артамонова Н.Б., Шешенин С.В., Клементьев П.Д., Кузьмин М.А.

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия

Параметр Био входит в формулу расчета эффективных напряжений, поэтому при оценке напряженно-деформированного состояния водонасыщенного массива горных пород необходимо использовать адекватные значения коэффициентов Био. В литературе широко представлены экспериментальные методы определения коэффициента Био, которые используются при допущении об изотропии горных пород или о структурной анизотропии, вызванной геометрией пустот, при этом материал скелета грунта – однородный и изотропный. Практически полезной может быть разработанная вычислительная методика определения тензорного параметра Био, основанная на асимптотическом осреднении уравнения равновесия флюидонасыщенной пористой среды в рамках линейной теории упругости. Вычислительный метод может применяться к неоднородным и анизотропным грунтам, у которых материал скелета неоднородный. Вычислительная методика применена к расчетам параметра Био различных типов скальных грунтов. Приведено сравнение результатов 3D расчетов коэффициента Био на основе моделей, полученных методом компьютерной томографии, с результатами экспериментальных определений ультразвуковым методом. Получены зависимости коэффициента Био от пористости, формы пор и коэффициента Пуассона материала скелета для скальных грунтов и модельных образцов. Исследовано влияние структурной анизотропии на компоненты тензора Био.

ВВЕДЕНИЕ

Коэффициент Био α был впервые введен М. Био в 1941 году в [1] как параметр, входящий в формулу расчета эффективных напряжений $\langle \boldsymbol{\sigma}^{eff} \rangle$ для водонасыщенного изотропного пористого материала, деформируемого в рамках линейной пороупругости

$$\langle \sigma_{ij}^{eff} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle + \alpha \langle p \rangle \delta_{ij}. \quad (1)$$

Здесь давление жидкости $\langle p \rangle$ – положительная величина при сжатии, $\langle \sigma_{ij} \rangle$ – компоненты полных напряжений (при сжатии отрицательные). Угловые скобки означают осреднение по объему представительной области.

Как видно из формулы (1), коэффициент Био показывает, какую часть порового давления нужно вычесть из полных напряжений при расчете эффективных напряжений. Эффективные напряжения $\langle \boldsymbol{\sigma}^{eff} \rangle$ – это часть осредненных напряжений в твердой фазе грунта, вызванных не зависимым от жидкости механизмом передачи внутренних сил (например, по контактам между зернами скелета грунта). Так как изменение объема породы, деформирование грунта определяются именно величиной эффективных

* *Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант №25-21-00111).*

напряжений, то можно сказать, что коэффициент α показывает, какая часть давления жидкости является «активной» при формировании макроскопических деформаций в породе. Для анизотропного пористого водонасыщенного материала параметр Био – это тензор

$$\left\langle \sigma_{ij}^{eff} \right\rangle = \left\langle \sigma_{ij} \right\rangle + \alpha_{ij} \left\langle p \right\rangle. \quad (2)$$

Понимание влияния порового давления на деформацию пористых флюидонасыщенных грунтов, определяемое в дренированных условиях параметром Био, имеет большое значение для многих приложений, таких как оценка устойчивости подземных сооружений, закачка сточных вод и секвестрация углерода, глубокое захоронение ядерных отходов, добыча нефти или газа, проектирование гидроразрыва пласта для повышения нефтеотдачи слабопроницаемых коллекторов, расчет напряжений в пяте плотины [2].

Коэффициент α изменяется от 0 до 1 и зависит от свойств грунта. Практически значимыми являются исследования зависимости коэффициента Био от структурных параметров (пористости, формы пор, коэффициента проницаемости), от свойств материала скелета (коэффициента Пуассона). Эти зависимости важны для математического моделирования деформирования флюидонасыщенного пористого грунта или другого пористого материала.

В нашем исследовании на основе разработанного вычислительного метода [3] проведены расчеты параметра Био в конечно-элементной программе на моделях реальной структуры осадочных и магматических скальных грунтов, полученных по изображениям компьютерной томографии.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА БИО

Изначально в работе [1] коэффициент Био предполагалось определять в опытах с водонасыщенным грунтом. Например, в опыте, в котором на образец грунта, заключенный в тонкую резиновую оболочку, не действует всестороннее давление, но изменяется поровое давление (путем дренирования воды из грунта через тонкую трубку, проходящую через стенки оболочки). Тогда коэффициент α рассчитывается из выражения

$$\alpha = \frac{1/R - 1/Q}{1/H}, \quad (3)$$

где $1/H$ – мера сжимаемости грунта при изменении давления воды, $1/R$ – изменение содержания воды при данном изменении давления воды, параметр $1/Q$ измеряет количество воды, которое можно втиснуть в породу под давлением при сохранении постоянного объема породы.

В другом опыте для определения коэффициента Био [1] на образец грунта в оболочке, наоборот, действует всестороннее давление, а поровое давление не изменяется. Тогда коэффициент Био рассчитывается как отношение относительного приращения объема жидкости ξ к относительному изменению объема θ упругого пористого тела [2]

$$\alpha = \xi/\theta. \quad (4)$$

Позже в [4,5] эмпирически была предложена формула для вычисления коэффициента Био изотропного пористого материала

$$\alpha = 1 - K^{eff}/K_s = 1 - \beta_s/\beta^{eff}, \quad (5)$$

где K^{eff} и K_s – модули объемного сжатия-расширения сухого грунта (скелета грунта) и твердой фазы соответственно, β^{eff} и β_s – коэффициенты сжимаемости скелета и твердой фазы.

В [6] выведена формула для расчета тензорного параметра Био для структурно анизотропных пористых материалов с однородной матрицей (т.е. для материалов, в которых анизотропия возникает за счет геометрии порового пространства)

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij} - C^{eff}_{ijkl} S^{s}_{klmm}, \qquad (6)$$

где C^{eff}_{ijkl} – эффективные модули упругости, S^{s}_{klmm} – компоненты тензора податливостей твердой фазы. Однако практическое применение формулы (6) затруднено, так как сложно определять упругие модули, входящие в формулу (6).

Многие экспериментальные и вычислительные методы определения α для макроизотропных грунтов используют формулу (5). Часть экспериментальных методов использует формулы (3) или (4). Отметим, что в методах, основанных на формуле (5), коэффициент Био определяется из упругих объемных модулей сухого грунта и твердой фазы, в отличие от первоначального определения α из экспериментов с водонасыщенным грунтом в оболочке по формулам (3) или (4). В литературе активно обсуждается вопрос, насколько отличаются коэффициенты Био, определяемые на сухих и на водонасыщенных грунтах [2,7]. В [7] сделан вывод, что формула (5) для расчета α верна, если минеральные зерна изотропны и однородны, но эту формулу некорректно применять к породам, у которых материал скелета имеет смешанную литологию, таким, например, как глинистые песчаники.

В динамическом ультразвуковом методе измеряются скорости продольных v_p и поперечных v_s волн керна в водонасыщенном (*sat*) и сухом (*dry*) состояниях ультразвуковым синтезатором волн. Значение коэффициента Био α рассчитывается по формуле (5), где K^{eff} и K_s вычисляются согласно соотношениям Био-Гиртсма [5]

$$K_{sat} = K^{eff} + \frac{\left(1 - K^{eff}/K_s\right)^2}{\left(n/K_f\right) + \left(1-n\right)/K_s - \left(K^{eff}/K_s^2\right)}, \quad K_f = \rho_f v_f^2,$$
$$K_{sat} = \rho\left(v_{p,sat}^2 - \frac{4}{3}v_{s,sat}^2\right), \quad K^{eff} = \rho_d\left(v_{p,dry}^2 - \frac{4}{3}v_{s,dry}^2\right). \qquad (7)$$

Здесь K_{sat} и K_f – объемные модули расширения-сжатия водонасыщенной породы и жидкости соответственно, $\rho = \left(1-n\right)\rho_s + n\rho_f$ – средняя плотность водонасыщенной породы, ρ_s, ρ_f, ρ_d – плотности твердой фазы, жидкости и скелета грунта (сухого грунта) соответственно, v_f – скорость продольных волн в жидкости (известна из таблиц), n – пористость. Если значение K_s априорно неизвестно, то получаем его из формулы (7).

В данной работе проведены лабораторные эксперименты по ультразвуковому просвечиванию образцов пород для определения динамического коэффициента Био на приборе Ультразвук на кафедре инженерной и экологической геологии МГУ для сравнения с результатами численного моделирования. Мы полагаем, что такое сравнение правомерно, так как при

численном моделировании задавались динамические упругие свойства материала матрицы.

2. ФОРМУЛИРОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕНЗОРНОГО ПАРАМЕТРА БИО

С помощью метода осреднения [8] запишем уравнение равновесия каркаса при ненулевом поровом давлении, входящее в линейную модель Био, и краевые задачи в представительной области для вычисления тензора Био и упругих модулей. Исходим из краевой задачи [3,9]

$$\begin{aligned}
&\left[C_{ijkl}(\boldsymbol{\zeta})u_{k,l}(\mathbf{x},\boldsymbol{\zeta})\right]_{,j} + f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x}\in V,\\
&u_i = u_i^0, \ \ \mathbf{x}\in\Sigma_1; \ \ C_{ijkl}(\boldsymbol{\zeta})u_{k,l}(\mathbf{x},\boldsymbol{\zeta})n_j(\boldsymbol{\zeta}) = s_i^0(\mathbf{x}), \ \ \mathbf{x}\in\Sigma_2, \qquad (8)\\
&C_{ijkl}(\boldsymbol{\zeta})u_{k,l}(\mathbf{x},\boldsymbol{\zeta})n_j(\boldsymbol{\zeta}) = -p(\mathbf{x})n_i(\boldsymbol{\zeta}), \ \ \mathbf{x}\in\Sigma_{por}, \ \ \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{x}/\varepsilon,
\end{aligned}$$

где $\Sigma_1\cup\Sigma_2 = \Sigma$ – граница макрообласти, Σ_{por} – граница жидкой и твердой фаз, $\mathbf{s}^0$ – поверхностная сила. Предполагается, что p – известное поровое давление.

В уравнениях (8) тензор модулей упругости $\mathbf{C}$ и нормаль $\mathbf{n}$ зависят от быстрых координат $\boldsymbol{\zeta}$, которые вводятся стандартным образом: $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{x}/\varepsilon$, $\varepsilon = l/L \ll 1$, где ε – малый геометрический параметр, l и L – характерные линейные размеры представительной области (RVE) и изучаемого объема грунта, соответственно.

В первом приближении давление p зависит от медленных координат $\mathbf{x}$, так как p имеет следующее асимптотическое представление

$$p = p^{(0)}(\mathbf{x}) + \varepsilon p^{(1)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\zeta}) + \ldots \qquad (9)$$

Для нахождения первых членов асимптотического решения задачи (8) достаточно первого члена в (9), который далее будем обозначать $p(\mathbf{x})$.

Решение задачи (8) (компоненты вектора перемещений, зависящие и от быстрых $\boldsymbol{\zeta}$, и от медленных $\mathbf{x}$ координат) ищем в виде асимптотического ряда

$$u_k(\mathbf{x},\boldsymbol{\zeta}) = v_k(\mathbf{x}) + \varepsilon N_{kpq}(\boldsymbol{\zeta})v_{p,q}(\mathbf{x}) + \varepsilon L_k(\boldsymbol{\zeta})p(\mathbf{x}) + \ldots \qquad (10)$$

где $N_{kpq_1\ldots q_m}(\boldsymbol{\zeta})$, $L_{kq_1\ldots q_m}(\boldsymbol{\zeta})$ – локальные функции быстрых координат, v_i – компонента гладкой составляющей перемещения.

Решение задачи (8) представим как сумму решений двух функций

$$u_k = u_k^{(1)} + u_k^{(2)}.$$

Тогда задача (8) разделяется на две задачи. Первая задача

$$\begin{aligned}
&\left[C_{ijkl}(\boldsymbol{\zeta})u_{k,l}^{(1)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\zeta})\right]_{,j} + f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x}\in V,\\
&u_i^{(1)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\zeta}) = 0, \ \ \mathbf{x}\in\Sigma_1; \ \ C_{ijkl}(\boldsymbol{\zeta})u_{k,l}^{(1)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\zeta})n_j(\boldsymbol{\zeta}) = s_i^0(\mathbf{x}), \ \ \mathbf{x}\in\Sigma_2,\\
&C_{ijkl}(\boldsymbol{\zeta})u_{k,l}^{(1)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\zeta})n_j(\boldsymbol{\zeta}) = 0, \ \ \mathbf{x}\in\Sigma_{por}, \ \ \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{x}/\varepsilon.
\end{aligned} \qquad (11)$$

Вторая задача

$$\left[C_{ijkl}(\zeta)u^{(2)}_{k,l}(\mathbf{x},\zeta)\right]_{,j}=0,\quad \mathbf{x}\in V,$$
$$u^{(2)}_i(\mathbf{x},\zeta)=0,\ \ \mathbf{x}\in\Sigma_1;\ C_{ijkl}(\zeta)u^{(2)}_{k,l}(\mathbf{x},\zeta)n_j(\zeta)=0,\ \ \mathbf{x}\in\Sigma_2, \tag{12}$$
$$C_{ijkl}(\zeta)u^{(2)}_{k,l}(\mathbf{x},\zeta)n_j(\zeta)=-p(\mathbf{x})n_i(\zeta),\ \ \mathbf{x}\in\Sigma_{por},\quad \zeta=\mathbf{x}/\varepsilon.$$

Асимптотическое представление (10) разбивается на два, соответственно

$$u^{(1)}_k(\mathbf{x},\zeta)=v_k(\mathbf{x})+\varepsilon N_{kpq}(\zeta)v_{p,q}(\mathbf{x})+... \tag{13}$$
$$u^{(2)}_k(\mathbf{x},\zeta)=\varepsilon L_k(\zeta)p(\mathbf{x})+... \tag{14}$$

Тогда (13) при подстановке в (11) используется для определения эффективных модулей упругости $\mathbf{C}$, а (14) при подстановке в (12) – для определения тензорного параметра Био $\boldsymbol{\alpha}$, входящего в формулу (2).

Для определения эффективных модулей упругости C^{eff}_{ijkl} формулируется стандартная краевая задача в представительной области с линейными граничными условиями в перемещениях на границе RVE [3,9]

$$\left[C_{ijkl}(\zeta)u^{(1)}_{k,l}(\zeta)\right]_{,j}=0,\quad \zeta\in V_{RVE},$$
$$u^{(1)}_k=\varepsilon^0_{kq}\zeta_q,\quad \zeta\in\Sigma_{RVE};\ C_{ijkl}(\zeta)u^{(1)}_{k,l}(\zeta)n_j(\zeta)=0,\quad \zeta\in\Sigma_{por}. \tag{15}$$

Получаем выражение для эффективных упругих модулей $C^{eff}_{ij\alpha\beta}$

$$C^{eff}_{ij\alpha\beta}=\left\langle C_{ijkl}u^{(1)}_{k,l}\right\rangle\Big/\varepsilon^0_{\alpha\beta}. \tag{16}$$

Угловые скобки означают осреднение по объему представительной области V_{RVE}, определяемое как $\langle f\rangle=\dfrac{1}{V_{RVE}}\int\limits_{V_{RVE}} fdV.$

Задача для определения компонент тензора Био α_{ij} относительно функций $u^{(2)}_i(\zeta)$ имеет вид

$$\left[C_{ijkl}(\zeta)u^{(2)}_{k,l}(\zeta)\right]_{,j}=0,\quad \zeta\in V_{RVE},$$
$$u^{(2)}_k=0,\quad \zeta\in\Sigma_{RVE};\ C_{ijkl}(\zeta)u^{(2)}_{k,l}(\zeta)n_j(\zeta)=-p_0n_i(\zeta),\ \ \zeta\in\Sigma_{por}. \tag{17}$$

В задаче (17) $u^{(2)}_i(\zeta)=L_i(\zeta)p_0.$ На границе пор Σ_{por} задается произвольное постоянное давление жидкости p_0, а граница представительной области Σ_{RVE} закреплена. Компоненты тензорного параметра Био рассчитываются по формуле

$$\alpha_{ij}=-\frac{\langle\sigma_{ij}\rangle}{p_0},\ \ \langle\sigma_{ij}\rangle=\frac{1}{V_{RVE}}\int\limits_{V^s_{RVE}}\sigma^s_{ij}dV-np_0\delta_{ij},\ \ \sigma^s_{ij}=C_{ijkl}(\zeta)u^{(2)}_{k,l}(\zeta). \tag{18}$$

В (18) V^s_{RVE} – область RVE, занимаемая твердой фазой.

Предлагаемый вычислительный способ позволяет определять компоненты тензора Био для случая общей анизотропии и неоднородности материала скелета. Предполагается, что эти задачи следует решать методом конечных элементов.

Численные решения задач (15) и (17) посредством метода конечных элементов возможны, если известна трехмерная геометрическая структура пористого материала и упругие свойства материала матрицы. В последнее время для получения моделей реальной структуры пористых материалов широко используется метод компьютерной томографии.

3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Вычисление эффективных компонент тензора Био выполнялись на моделях различных типов скальных грунтов: известняка доломитистого, доломита, гиалокластита и базальта.

Образцы известняка и доломита были отобраны на территории Юго-Восточной части Москвы из скважин в интервале глубин от 15 до 38 м. Известняк доломитистый состоит из кальцита (92%) с примесями доломита (6.5%), кварца и глинистых минералов (1.5%). Пористость варьирует от 2 до 28%. Доломит чистый состоит из минерала доломита (98%), кальцита (1.5%), кварца и глинистых минералов (1.5%). Пористость от 2 до 40%.

Гиалокластиты – вулканогенно-осадочные породы из южных и юго-западных районов Исландии, образовались в процессе застывания и кристаллизации магматического расплава при вулканических извержениях в подводных условиях. Слабоизмененные гиалокластиты состоят из свежих обломков вулканического стекла базальтового состава, их пористость от 26 до 55%.

Образцы базальта были отобраны на Камчатке (вулкан Толбачик). Основная масса базальта состоит из вулканического стекла и микролитов плагиоклазов и пироксенов, вкрапленники – плагиоклаз, моноклинный пироксен, оливин, рудные минералы. Базальт сильно пористый (пористость 45-55%), с многочисленными открытыми неориентированными порами округлой формы.

Для изучения напряженно-деформированного состояния (НДС) скальных грунтов на микроуровне и расчета эффективных свойств использовались 3D-модели реальной микроструктуры пород, полученные с помощью рентгеновского компьютерного микротомографа Yamato TDM-1000H-II (МГУ имени М.В. Ломоносова) и оцифровки в программе VG MAX 3.3 в ООО «Совтест-Сервис» (г. Курск).

Вычислительные эксперименты проводились на представительных областях (RVE). Представительными областями мы считали области, для которых зависимость эффективных свойств (например, коэффициента Био) от какого-либо структурного признака (например, пористости) ложится на одну и ту же кривую с допустимой точностью [10]. Значения компонентов тензорного параметра Био рассчитывались при решении локальной краевой задачи (17), (18). Упругие свойства материала скелета, принятые в расчетах, представлены в Таблице 1.

Таблица 1.

Упругие свойства материала скелета, заданные в расчетах.

	Модуль Юнга, МПа	Коэффициент Пуассона
Известняк	50 000	0.33
Доломит	70 000	0.33
Гиалокластит	12 300	0.35
Базальт	45 000	0.35

Вычисленные компоненты тензора Био представляют собой диагональную матрицу. Как показали расчеты, значения диагональных компонент α_1, α_2, α_3 для любой исследуемой породы при одинаковой пористости отличаются не более чем на 3%. Следовательно, все исследуемые скальные грунты можно предполагать изотропными по параметру Био.

Исследовалось влияние пористости на коэффициент Био известняка, доломита, гиалокластита и базальта. Было проведено сравнение рассчитанных

значений модуля Юнга гиалокластита по методу осреднения с экспериментальными результатами ультразвукового просвечивания образцов.

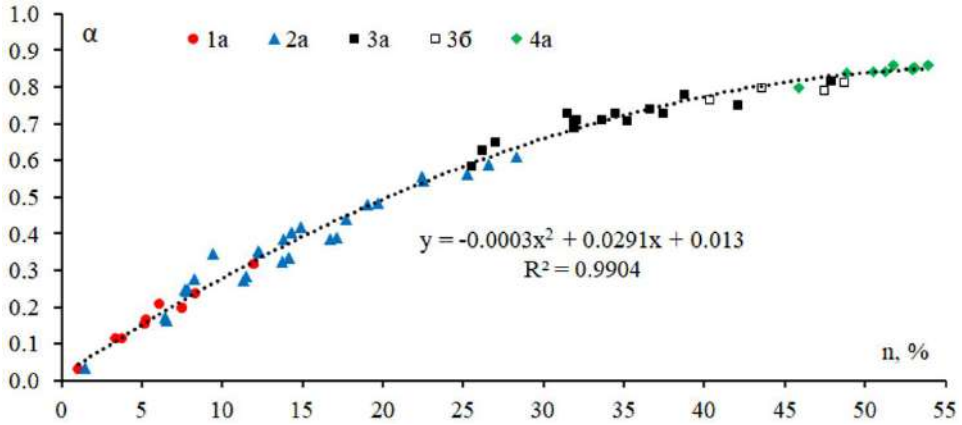


Рис.1. Зависимости коэффициента Био от пористости для 1 – доломита, 2 – известняка, 3 – гиалокластита, 4 – базальта (а – 3D-расчеты, б – эксперименты).

На рис.1 помещены на один график зависимости коэффициента Био от пористости по результатам 3D-расчетов для доломита, известняка, гиалокластита и базальта и экспериментов ультразвуковым методом для гиалокластита. Как видно, все точки легли на одну кривую. Можно сделать вывод, что коэффициент Био не зависит от модуля Юнга материала скелета породы. (Заданные в расчетах значения коэффициента Пуассона твердой фазы всех исследуемых грунтов имеют близкие значения.) Также видно, что результаты вычислений и экспериментов для гиалокластита совпадают с хорошей точностью.

Проанализируем зависимость коэффициента Био от формы пор и коэффициента Пуассона твердой фазы на примере 2D расчетов для гиалокластита (рис.2) и известняка (рис.3). Аппроксимация зависимостей произведена с помощью нейросети. Следует уточнить, что $\alpha = 0$ при $n = 0$, поэтому каждая кривая на рис.2 и рис.3 выходит из начала координат, хотя на графиках начала кривых не показаны.

При больших значениях коэффициента Пуассона зависимость $\alpha = \alpha(n)$ имеет сильный рост при пористости от 0 до примерно 8–12%, затем происходит перегиб кривой, и при более высоких значениях пористости график $\alpha = \alpha(n)$ идет более полого. Особенно сильный рост зависимости α от n наблюдается для моделей с продолговатой формой пор (рис.3). В таких образцах анизотропия не выявляется, так как поры расположены хаотично, а не ориентированно (рис.3).

При небольших значениях коэффициентах Пуассона $(\nu = 0.14 \div 0.35)$ зависимость $\alpha = \alpha(n)$ растет более равномерно, особенно для образцов с круглыми порами (рис.2). Для образцов с продолговатыми порами при $\nu = 0.14 \div 0.35$ наблюдается небольшой перегиб графиков при $n \approx 12\%$, после которого кривые $\alpha = \alpha(n)$ становятся более пологими (рис.3). Все кривые при таком диапазоне значений коэффициента Пуассона от 0.14 до 0.35 идут почти параллельно друг другу, и разброс значений коэффициента Био при одной и той же пористости для разных ν не превышает 0.2 (рис.2,3).

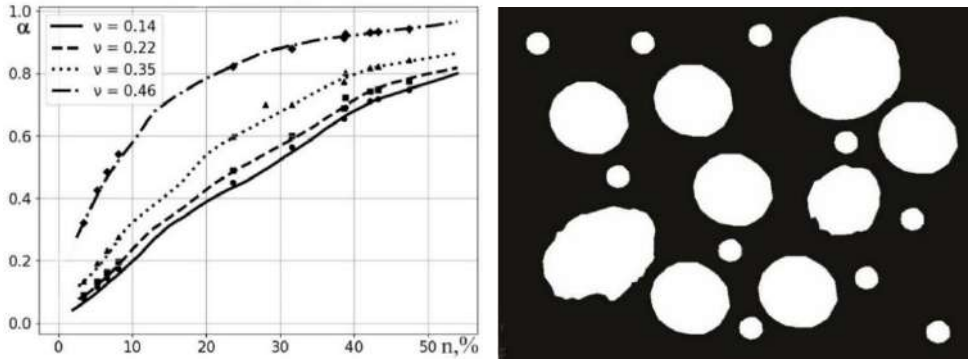


Рис.2. Зависимости коэффициента Био от пористости и коэффициента Пуассона (слева) и пример 2D-модели для гиалокластита с круглыми порами (справа).

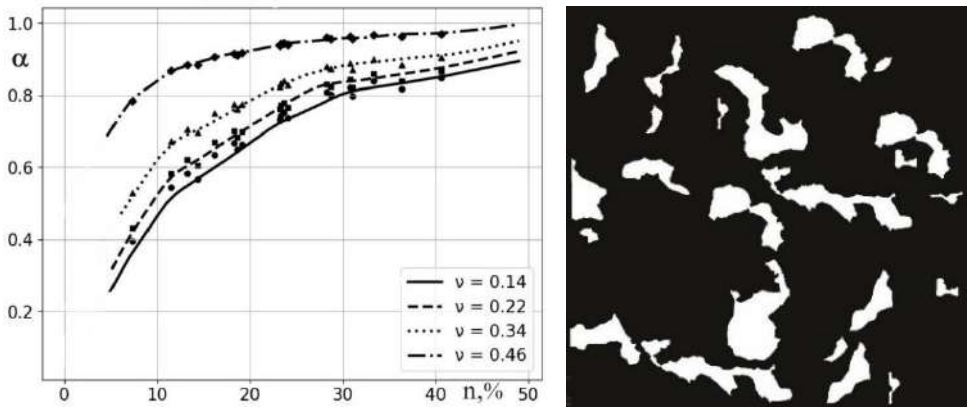


Рис.3. Зависимости коэффициента Био от пористости и коэффициента Пуассона (слева) и пример 2D-модели для известняка с продолговатыми порами (справа).

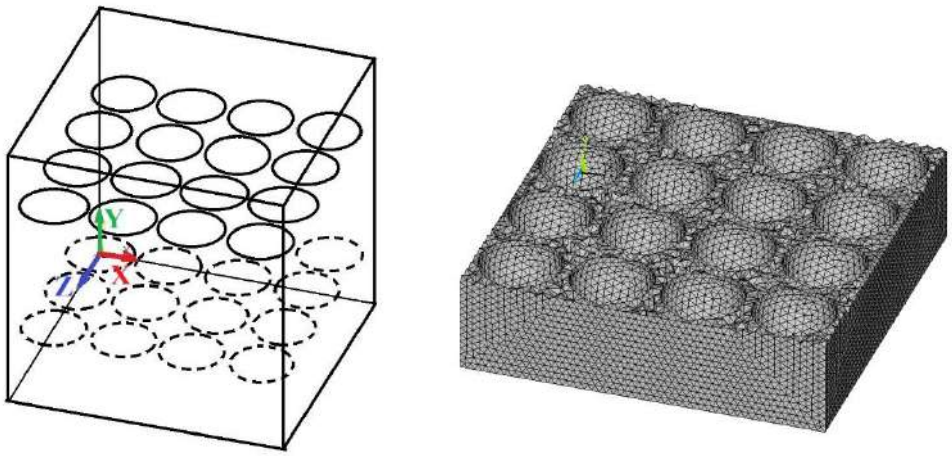


Рис.4. Схема расположения пор модельного образца 1 (слева) и сетка КЭ (справа).

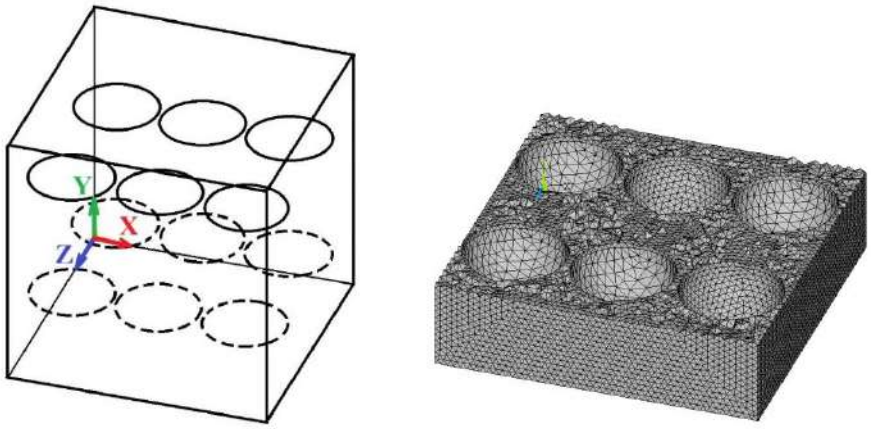


Рис.5. Схема расположения пор модельного образца 2 (слева) и сетка КЭ (справа).

Таблица 2.

Результаты расчета компонентов тензора Био для анизотропных образцов.

	α_{xx}	α_{yy}	α_{zz}	α_{xy}	α_{yz}	α_{xz}
Модель 1 (рис.4)	0.29	0.36	0.29	0	0	0
Модель 2 (рис.5)	0.28	0.33	0.33	0	0	0

Для исследования влияния структурной анизотропии (анизотропии за счет геометрии порового пространства) на тензорный параметр Био использовались модельные образцы с шарообразными порами, расположенными слоями параллельно плоскости Y (рис.4, слева) и сгруппированными в вытянутые ряды вдоль направления оси X (рис.5, справа). На рис.4 и рис.5 (слева) показаны только сечения пор диаметральной горизонтальной плоскостью, чтобы не загромождать схему. На рис.4 и рис.5 (справа) приведены конечно-элементные сетки. Результаты расчетов представлены в табл.2. Как видно, компоненты тензора Био представляют собой диагональную матрицу. Выявлена анизотропия по параметру Био (табл.2). Для модели 1 с порами, расположенными слоями параллельно плоскости Y, закономерно $\alpha_{yy} > \alpha_{xx} = \alpha_{zz}$. Для модели 2 с порами, сгруппированными в вытянутые ряды вдоль направления оси X, $\alpha_{xx} < \alpha_{yy} = \alpha_{zz}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен вычислительный метод для расчета компонент тензорного параметра Био, основанный на асимптотическом осреднении уравнения равновесия пористой флюидонасыщенной среды. Вычислительная методика применена к расчетам компонент тензорного параметра Био для различных типов скальных грунтов и модельных образцов. Расчеты выполнены на основе 3D-моделей, полученных методом рентгеновской компьютерной микротомографии. Сравнение результатов расчетов значений коэффициента Био для гиалокластита с результатами измерений ультразвуковым методом обнаружило совпадение с хорошей точностью.

По результатам расчетов получены зависимости коэффициента Био от пористости, формы пор и коэффициента Пуассона материала скелета разных типов скальных грунтов и модельных образцов. Эти зависимости могут быть использованы при математическом моделировании деформирования флюидонасыщенных пористых сред. Результаты исследования подтвердили,

что коэффициент Био не зависит от модуля Юнга материала скелета грунта, но сильно зависит от коэффициента Пуассона твердой фазы. Исследовано влияние структурной анизотропии на тензор Био на модельных образцах с шарообразными порами, расположенными слоями и вытянутыми рядами. Была выявлена анизотропия модельных образцов по параметру Био.

Для выполнения работы использовался рентгеновский компьютерный микротомограф Yamato TDM-1000H-II (Япония), полученный в рамках реализации Программы развития МГУ имени М.В. Ломоносова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M.A. *General theory of three-dimensional consolidation* // Journal of Applied Physics. – 1941. – Vol.12. – No.2. – Pp.155-164.
2. Kasani H.A., Selvadurai A.P.S. *A review of techniques for measuring the Biot coefficient and other effective stress parameters for fluid-saturated rocks* // Applied Mechanics Reviews. – 2023. – Vol.75. – No.2. – Pp.020801-1-020801-24.
3. Артамонова Н.Б., Мукатова А.Ж., Шешенин С.В. *Асимптотический анализ уравнения равновесия флюидонасыщенной пористой среды методом осреднения* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2017. – №2. – С.115-129.
4. Biot M.A., Willis D.G. *The elastic coefficients of the theory of consolidation* // Journal of Applied Physics. – 1957. – Vol.24. – No.4. – Pp.594-601.
5. Geertsma J. *The effect of fluid pressure decline on volumetric changes of porous rocks* // Trans. AIME. – 1957. – Vol.210. – Pp.331-339.
6. Carroll M.M. *An effective stress law for anisotropic elastic deformation* // Journal of Geophysical Research. – 1979. – Vol.84. – Pp.7510-7512.
7. Lee M.W. *Explicit use of the Biot coefficient in predicting shear-wave velocity of water-saturated sediments* // Geophysical Prospecting. – 2006. – Vol.54. – Iss.2. – Pp.177-185.
8. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
9. Шешенин С.В., Артамонова Н.Б. *Численный анализ задач механики композитов*. – М.: Издательство Московского университета, 2025. – 541 с.
10. Шешенин С.В., Артамонова Н.Б., Клементьев П.Д., Киселев Ф.Б., Мурадханов Р.Р., Орлов Е.А., Чжан Ц. *Исследование упругих и упругопластических свойств дисперсного композита на основе численных экспериментов* // Механика композитных материалов. – 2021. – Т.57. – №1. – С.27-44.

УДК 531.01
EDN VDVEYY
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.27

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ПРОГРЕССИРУЮЩЕГО РАЗРУШЕНИЯ

Клементьев П.Д., Шешенин С.В., Артамонова Н.Б.

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия

В статье рассмотрены варианты трех методов учета прогрессирующего разрушения материалов при численном решении задач методом конечных элементов: разрушение в точке интегрирования, конечного элемента целиком, разрушение области фиксированного размера. Сравнение методов прогрессирующего разрушения проводится на основе анализа диаграмм осредненных напряжений-деформаций в модельных задачах. Показано, что решение методом разрушения в точке интегрирования не обладает свойством сеточной сходимости, в то время как разрушение конечного элемента целиком и области фиксированного размера этим свойством обладает. Увеличение значений параметра деградации и радиуса области разрушения приводит к росту диаграммы напряжение-деформация в модельных задачах.

ВВЕДЕНИЕ

Основы механики разрушения сплошных сред, учитывающей распределенные повреждения, были заложены в работах Л.М. Качанова [1] и Ю.Н. Работнова [2] при помощи введения скалярных параметров поврежденности и сплошности, характеризующих степень повреждений в материале. В работах А.А. Ильюшина исследуется случай анизотропного повреждения с введением тензора поврежденности второго ранга [3].

Существенную роль в развитии моделирования разрушения в рамках метода конечных элементов (МКЭ) сыграли работы В. Твергаарда и А. Ниделмана [4]. Было предложено расширение классической модели Гурсона для описания пластичности пористых материалов, учитывающее зарождение, рост и слияние микропор.

В нашей работе рассматривается моделирование разрушения материала, называемое в литературе прогрессирующим разрушением [5-9]. Идея моделирования разрушения заключается в учете деградации свойств материала, вызванной локальными повреждениями, в ходе деформирования. В статье на основе модельных задач растяжения областей, представленных двумерными квадратными областями с заданными на верхней и нижней границах дефектами, проводится сравнительный анализ рассматриваемых методов разрушения: разрушение в точке интегрирования, разрушение конечного элемента, разрушение области фиксированного размера. Рассматриваются области с симметричными и смещенными вырезами относительно центра. Задачи решаются численно методом конечных элементов. На основании сравнительного анализа диаграмм зависимостей эффективных напряжений-деформаций проводится исследование рассматриваемых методов и зависимости результатов от различных параметров: размера конечного элемента, параметров деградации и размера области разрушения.

1. АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОГРЕССИРУЮЩЕГО РАЗРУШЕНИЯ

Прогрессирующее разрушение является численным алгоритмом, реализующим разрушение в рамках метода конечных элементов. Алгоритм состоит в деградации (уменьшении) упругих модулей, если выполнен тот или иной критерий разрушения в данный момент нагружения. Критерии разрушения могут быть различными для изотропных материалов и тем более для анизотропных. Более важно, что выполнение критерия в каждом КЭ можно проверять различным образом. В литературе известны следующие алгоритмы моделирования прогрессирующего разрушения. Первый метод состоит в том, что критерий разрушения проверяется отдельно в каждой точке интегрирования (гауссовой точке) конечного элемента. Соответственно, деградация происходит или не происходит в каждой гауссовой точке независимо от других гауссовых точек КЭ. Второй вариант отличается от первого тем, что критерий разрушения проверяется в среднем для всех гауссовых точек КЭ. Материальные параметры деградируют (уменьшаются) во всем элементе, т.е. во всех гауссовых точках. Оба эти варианта обладают тем недостатком, что процесс развития зоны разрушения материала оказывается зависящим от размеров конечных элементов. Поэтому рассмотрен третий вариант, в котором разрушение происходит в области фиксированного размера с центром в гауссовой точке. Это модель нелокального разрушения. Размер области разрушения является параметром вычислительного метода, так же, как и характерный размер конечных элементов. Область разрушения может захватывать некоторое количество конечных элементов. В этом подходе область разрушения почти не зависит от размеров конечных элементов.

В работе предполагается, что разрушение материала в тестовых задачах происходит, если эквивалентные напряжения достигают критического значения

$$\sigma_{eqv} = \sigma_{eqv}^{crit}, \tag{1}$$

где

$$\sigma_{eqv}^{crit} = \begin{cases} \sigma_{eqv}^{+}, \ \theta > 0, \\ \sigma_{eqv}^{0}, \ \theta = 0, \\ \sigma_{eqv}^{-}, \theta < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь θ – относительное изменение объема, как оно определено в теории малых деформаций. Параметры σ_{eqv}^{+}, σ_{eqv}^{0}, σ_{eqv}^{-} соответствуют прочности материала при объемном растяжении, нулевой объемной деформации, объемном сжатии соответственно.

Альтернативным вариантом определения критериального значения эквивалентного напряжения является непрерывная зависимость

$$\sigma_{eqv}^{crit} = \sigma_{eqv}^{-} + \frac{\sigma_{eqv}^{+} - \sigma_{eqv}^{-}}{1 + e^{-\alpha\frac{\theta}{\theta_0}}},$$

где величина θ_0 определяет ширину переходного интервала между критериальной величиной разрушения при объемном сжатии и растяжении.

Связь между объемной деформацией и средним гидростатическим напряжением принимается упругой: $\sigma = K\theta, \ \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{kk}, \ \theta = \varepsilon_{kk}$. Величина σ_{eqv} –

эквивалентное по Мизесу напряжение. Эквивалентные напряжения и деформации отличаются от интенсивностей напряжений $\sigma_и$ и деформаций $\varepsilon_и$ коэффициентом и определяются через компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций

$$\sigma_{eqv} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma_и = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}},\ \varepsilon_{eqv} = \sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon_и = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}},$$

s_{ij} – девиатор тензора напряжений: $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$. Зависимость величины критериального напряжения от знака объемной деформации позволяет учесть различную прочность материала на сжатие и растяжение.

Процедура решения задачи реализована в цикле, который можно описать следующей последовательностью действий на каждом шаге по параметру нагружения: приращение нагрузки, решение краевой задачи, определение разрушенных элементов, деградация свойств в разрушенных точках интегрирования, переход к следующему шагу. Деградация означает, что

$$G^{\deg} = c_{\deg}G,\quad K^{\deg} = c_{\deg}K,\quad c_{\deg} = \begin{cases} c^{+}_{\deg},\ \theta > 0, \\ c^{0}_{\deg},\ \theta = 0, \\ c^{-}_{\deg},\ \theta < 0, \end{cases} \qquad (3)$$

где G, K – начальные модули материала, $G^{\deg}$, $K^{\deg}$ – деградированные модули, $c_{\deg}$ – параметры деградации близкие к нулю. Эти параметры, вообще говоря, различны для состояния всестороннего сжатия и растяжения. В наших расчетах они были выбраны одинаковыми для сдвиговых и объемных модулей. Вместе с уменьшением упругих модулей происходит обнуление напряжений в точках интегрирования.

Таким образом, материал остается упругим, пока не выполнится критерий разрушения (1), (2). Затем происходит мгновенное уменьшение накопленного напряжения и уменьшение модулей упругости.

Рассматриваемые методы отличаются алгоритмом выбора точек интегрирования для области разрушения. В первом методе материал разрушается в каждой точке интегрирования отдельно, во втором – точки объединены по конечному элементу: вычисляется среднее эквивалентное напряжение для всех точек в элементе, для этой величины проверяется критерий разрушения. В случае выполнения критерия деградируют все точки интегрирования в конечном элементе. Третий метод моделирования прогрессирующего разрушения предполагает задание области разрушения (сферы или окружности фиксированного радиуса в случае изотропного материала) вокруг каждой точки интегрирования. На шаге нагружения разрушение происходит в области разрушения вокруг точки интегрирования, если критерий разрушения выполняется в среднем в этой области. В случае выполнения критерия разрушения для среднего напряжения по всем точкам интегрирования, попадающим в область разрушения, напряжения обнуляются и материалу присваивается деградированные модули упругости согласно соотношениям (3). Размер (радиус) области разрушения может быть определен в ходе сравнения характера разрушения материала, наблюдаемого в реальных и вычислительных экспериментах.

2. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ НА МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

С целью сравнения описанных алгоритмов прогрессирующего разрушения проведены серии численных экспериментов на примере двумерной модельной задачи. Решена задача растяжения образца, показанного на рис.1.

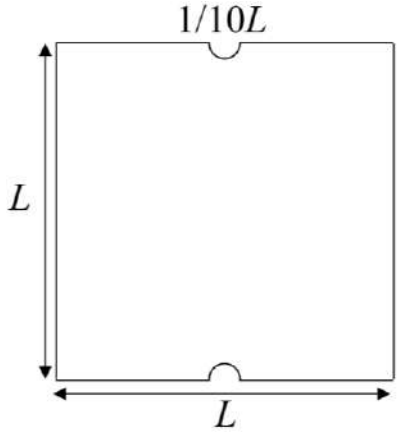


Рис.1. Геометрические характеристики образца для численного эксперимента для сравнения алгоритмов моделирования разрушения.

Для примера использована двумерная квадратная область с вырезами в форме полукругов радиуса $l = 0.1L$ на верхней и нижней границах (рис.1). Длина стороны квадрата равна L. В ходе каждого эксперимента образец подвергался одноосному растяжению вдоль горизонтальной оси. Задача решалась в квазистатической постановке в предположении геометрической линейности. Материал предполагается изотропно упругим вплоть до разрушения.

Граничные условия имеют вид

$$u_1 = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad x = 0,$$

$$u_1 = u^0(t), \quad \sigma_{12} = 0, \quad x_1 = L,$$

$$\sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad x_2 = L.$$

Дискретизация выполнялась линейными конечными элементами в предположении плоской деформации. Деформирование продолжалось до полного разрушения образца, т.е. до возникновения сплошной поперечной трещины. В численных экспериментах менялись размер зоны разрушения d, равный εL, и характерный размер конечных элементов l_e.

В результате расчетов обнаружено возникновение и развитие вертикальной зоны разрушения в средней части образца. Численные эксперименты показали, что форма разрушенной области слабо зависит от параметров расчета и метода учета прогрессирующего разрушения: изменяется только ширина области разрушения. На рис.2 приведена типичная картина развития разрушения в образце.

Проведены серии расчетов при различных параметрах размера КЭ l_e, являющегося параметром численного метода. Для каждого из рассматриваемых методов прогрессирующего разрушения на каждом шаге нагрузки после решения краевой задачи вычислялись величины, необходимые для проверки критерия разрушения (1), (2). Следует отметить, что третий вариант, как и ожидалось, требует больше компьютерного времени.

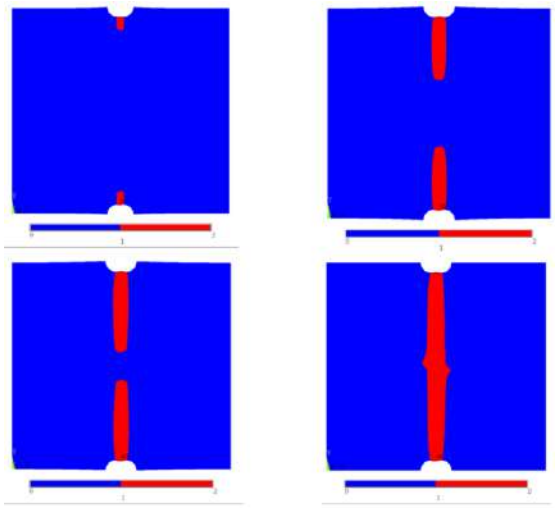
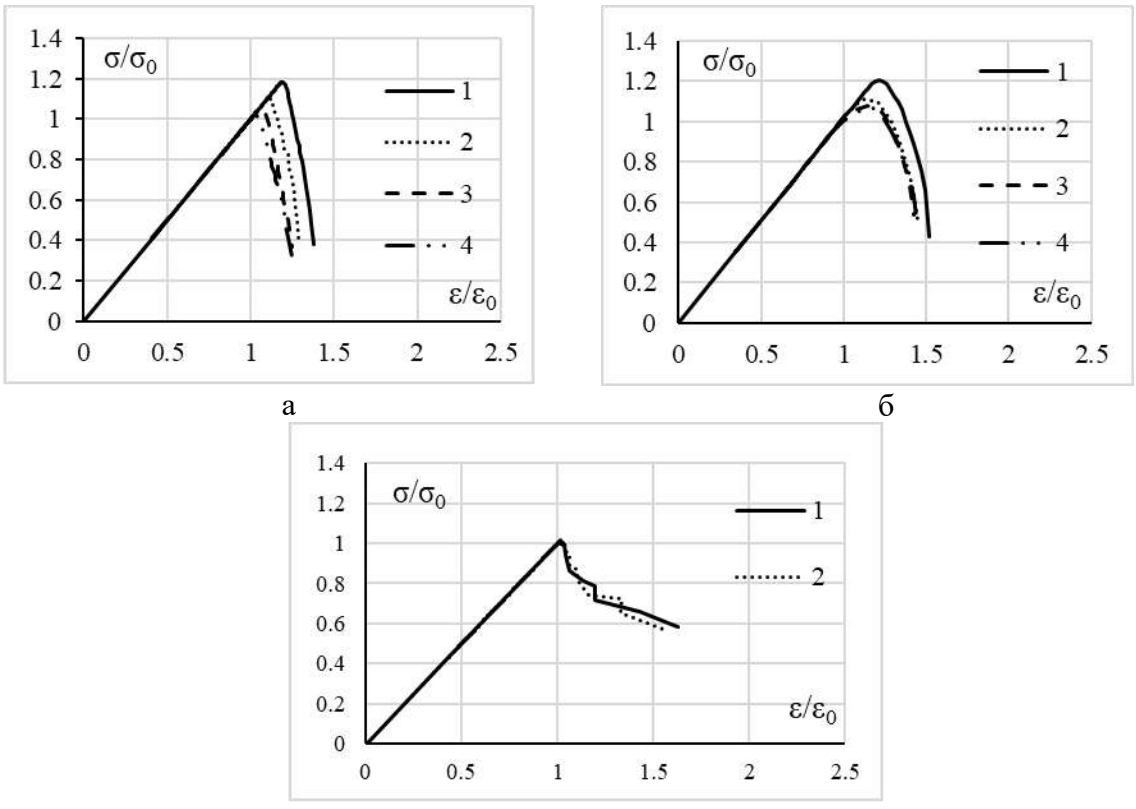


Рис.2. Развитие области повреждения в образце в процессе деформирования. Синим цветом обозначены неразрушенные области, красным – разрушенные.

На рис.3 приведены графики зависимости безразмерных осредненных эквивалентных напряжений от осредненных эквивалентных деформаций в процессе нагружения и развития зоны разрушения для различных вариантов прогрессирующего разрушения.



а б

в

Рис.3. Графики зависимости осредненных эквивалентных напряжений от деформаций: а) первый вариант – разрушение в точках интегрирования, б) второй вариант – разрушение конечного элемента целиком, в) третий вариант – разрушение области фиксированного размера. 1) $l_e = 0.030L$; 2) $l_e = 0.026L$; 3) $l_e = 0.016L$; 4) $l_e = 0.010L$.

Из рис.3а следует, что при использовании первого алгоритма прогрессирующего разрушения (разрушение в точках интегрирования) при меньших размерах КЭ осредненные диаграммы напряжение-деформация проходят ниже, чем при больших КЭ. Сходимость численного алгоритма не наблюдается. При уменьшении размера конечного элемента наблюдается сохраняющееся отличие в полученных напряжениях при равных деформациях до 10%. На рис.3б графики построены для случая разрушения конечного элемента целиком. Видно, что диаграммы напряжение-деформация различаются при различных размерах сетки. При больших КЭ разрушение образца происходит при больших средних напряжениях. Однако при уменьшении среднего размера КЭ эта зависимость пропадает. Падающие кривые различаются не более чем на 1%. Результаты применения алгоритма 3 (разрушение области фиксированного размера), показанные на рис.3в, отличаются от описанных выше первых диаграмм менее выраженной зависимостью вида полученных диаграмм от размера КЭ. Момент начала разрушения почти не зависит от размера сетки, после начала разрушения диаграммы, соответствующие расчетам с наименьшим размером КЭ проходят достаточно близко друг к другу, различие появляется в конце диаграмм в моменты, соответствующие полному разрушению образца. На ниспадающих участках диаграмм, соответствующих процессу разупрочнения образца до момента полного разрушения, относительная разница в полученных средних напряжениях в расчетах с наименьшими размерами конечных элементов не превысила 5%.

Проведено исследование зависимости результатов расчета алгоритмом разрушения области фиксированного размера от параметра метода – размера области разрушения. На рис.4 показаны диаграммы напряжение-деформация, полученные при применении алгоритма к рассматриваемой задаче при различных размерах области разрушения. Средний размер КЭ для обоих расчетов одинаковый.

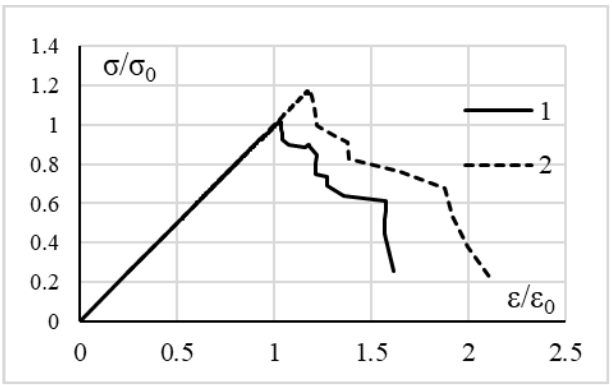


Рис.4. Графики зависимости осредненного эквивалентного напряжения от эквивалентной деформации (метод разрушения области фиксированного размера). Размер области разрушения: 1) $d = 0.03L$; 2) $d = 0.05L$.

Из сравнения диаграмм, приведенных на рис.4, следует, что с увеличением радиуса области разрушения увеличивается величина осредненного напряжения, соответствующая началу разрушения в образце. Области диаграмм, соответствующие процессу прогрессирующего разрушения в образце, остаются похожими.

Проведено исследование влияния параметра c_{deg} на решение модельной задачи на примере метода разрушения конечного элемента целиком. Параметр

принимал значения, равные 10^{-6} и 10^{-5}, т.е. был увеличен на один порядок для анализа. Результаты приведены на рис.5.

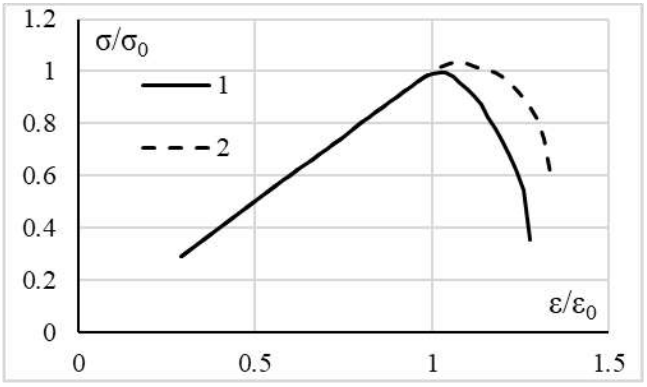


Рис.5. Сравнение результатов расчетов с различными величинами параметра деградации: 1) $c_{\text{deg}} = 10^{-6}$, 2) $c_{\text{deg}} = 10^{-5}$.

Видно, что увеличение параметра c_{deg} приводит к небольшому увеличению максимального достигнутого напряжения и более пологому участку разупрочнения на диаграмме.

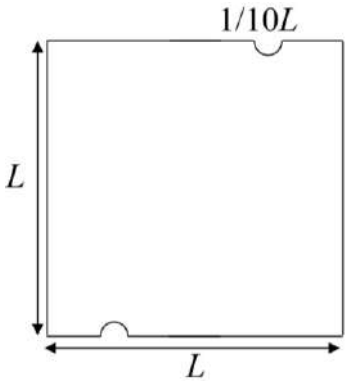


Рис.6. Геометрические характеристики несимметричного образца.

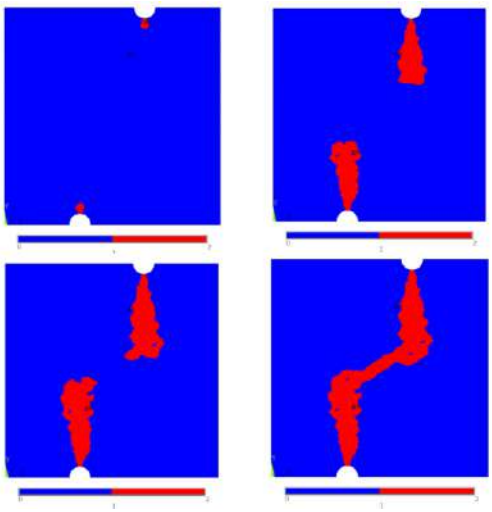


Рис.7. Развитие области повреждения в несимметричном образце в процессе деформирования. Синим цветом обозначены неразрушенные области, красным – разрушенные.

Вторая модельная задача отличается от первой несимметричным расположением вырезов: вырезы смещены вправо и влево относительно середины квадрата на одинаковое расстояние. Несимметричный образец приведен на рис.6.

Развитие областей повреждений, аналогично первому случаю, слабо зависит от метода моделирования разрушения (рис.7).

Видны вертикально распространяющиеся области разрушения вблизи каждого выреза. В момент начала полного разрушения образца области меняют направление распространения и двигаются под углом навстречу друг другу.

На рис.8 приведены графики зависимости осредненных напряжений-деформаций для несимметричного образца при расчетах с учетом различных методов разрушения и с различными размерами конечных элементов.

Аналогично первой задаче, результат применения метода разрушения в точке интегрирования существенно зависит от размера конечного элемента. При уменьшении конечного элемента разница в диаграммах не превышает 10%. Результат применения метода разрушения конечного элемента также зависит от размера КЭ, но наблюдается сеточная сходимость: при уменьшении КЭ разница в диаграммах практически пропадает и составляет около 2%. Результаты применения метода разрушения области фиксированного размера слабо зависят от размера КЭ. Разница не превышает 3%.

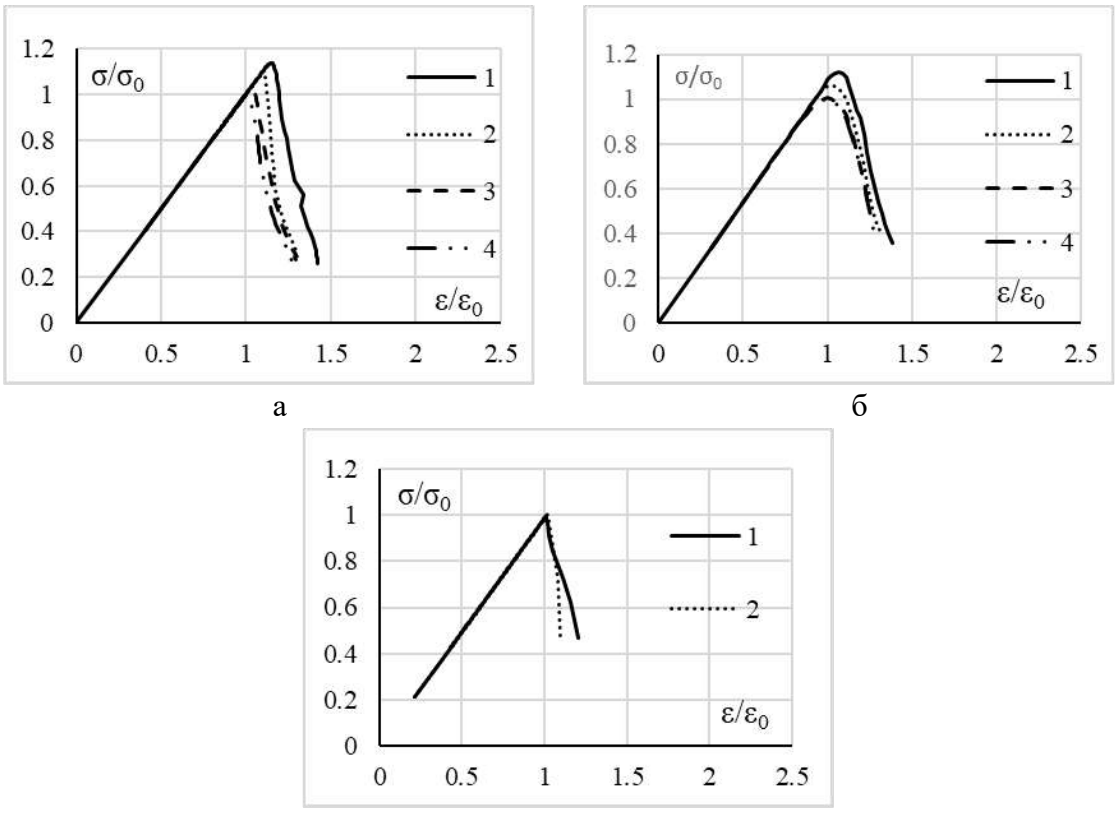


Рис.8. Графики зависимости осредненных эквивалентных напряжений от деформаций; а) первый вариант – разрушение в точках интегрирования, б) второй вариант – разрушение конечного элемента целиком, в) третий вариант – разрушение области фиксированного размера. 1) $l_e = 0.030L$; 2) $l_e = 0.026L$; 3) $l_e = 0.016L$; 4) $l_e = 0.010L$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведен сравнительный анализ трех методов учета прогрессирующего разрушения. Численно решены двумерные модельные задачи одноосного растяжения квадратных областей с дефектами в виде полукруглых вырезов на верхней и нижней границах. Отличие задач заключается в расположении вырезов: в первой задаче вырезы находились по середине границ, во второй смещены относительно середины на одинаковые расстояния в разные стороны. Задачи решались с помощью рассмотренных методов учета прогрессирующего разрушения. Формы областей разрушения слабо зависят от выбранного метода разрушения: для первой задачи разрушенная область являлась вертикальной линией, для второй – ломаная, состоящая из вертикальных и наклонного участков.

В ходе исследования установлено, что результаты метода разрушения в точке интегрирования существенно зависят от размера конечного элемента: при уменьшении размера сетки диаграммы напряжение-деформация продолжают отличаться. Анализ результатов расчетов на модельных задачах, полученных с помощью алгоритма разрушения конечного элемента целиком, показал, что при достаточном уменьшении среднего размера КЭ решения перестают существенно отличаться: при выборе достаточно малого размера конечных элементов данный метод может быть применен для моделирования прогрессирующего разрушения. Результаты вычислений на рассмотренных модельных задачах показали, что алгоритм разрушения области фиксированного размера позволяет получать результаты, не зависящие от размера сетки и, следовательно, данный метод может быть применен для моделирования прогрессирующего разрушения в материале.

Исследовано влияние параметров методов на решение задачи. Показано, что увеличение параметра деградации приводит к более пологому ниспадающему участку кривой напряжение-деформация. Увеличение радиуса области разрушения в методе фиксированной области разрушения приводит к увеличению прочности всего образца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. *О механизме длительного разрушения* / В книге: Вопросы прочности материалов и конструкций. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – С.5-7.
2. Качанов Л.М. *О времени разрушения в условиях ползучести* // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1958. – №8. – С.26-31.
3. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
4. Tvergaard V., Needleman A. *Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar* // Acta Metallurgica. – 1984. – Vol.32. – No.1. – Pp.157-169.
5. Sheshenin S.V., Artamonova N.B., Klement'ev P.D., Orlov E.A., Frolova J.V. *Image-based simulation of dispersed composites and porous rocks* // MATEC Web of Conferences. – 2022. – No.362. – Pp.1-10.
6. Шешенин С.В., Клементьев П.Д., Артамонова Н.Б. *Численное моделирование упругопластических свойств композита B4C/2024Al* / 11-я Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред». Сборник трудов. – М.: ООО Сам Полиграфист, 2021. – С.196-176.

7. Шешенин С.В., Артамонова Н.Б. *Численный анализ задач механики композитов*. – М.: Изд-во Московского университета, 2025. – 541 с.
8. Balokhonov R.R., Romanova V.A., Schmauder S., Emelianova E.S. *A numerical study of plastic strain localization and fracture across multiple spatial scales in materials with metal-matrix composite coatings* // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2019. – No.101. – Pp.342-355.
9. Шалимов А.С., Ташкинов М.А. *Моделирование деформирования и разрушения пористых неоднородных сред с учетом особенностей их морфологического строения* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – №4. – С.175-187.

УДК 531.01
EDN VXHFPO
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.28

ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС РЕШЕНИЯ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ*

Шешенин С.В., Артамонова Н.Б.

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия

В эпоху первоначального этапа развития компьютеров для решения сеточных уравнений (конечно-элементных или вариационно-разностных) активно создавались итерационные методы. Затем по мере развития оперативной памяти и быстродействия компьютеров появилась возможность решать большие системы линейных уравнений прямыми методами исключения неизвестных (Гаусса или Холецкого). Оказалось, что эти методы достаточно устойчивы по отношению к ошибкам округления в случае систем сеточных уравнений. Появились эффективные программы, выполняющие последовательные и параллельные реализации прямых методов (Pardiso и др.). В Pardiso также реализовано вычисление матрицы Шура, возникающей в седловых системах. Однако это не отменяет целесообразность использования итерационного процесса решения седловых задач, например, на основе метода Удзавы. Известны и другие итерационные методы [1].

Седловые задачи дают повод возобновить интерес к итерационным методам. В данной работе метод Удзавы применяется к связанной задаче фильтрации. В итерационных методах основными являются два вопроса: выбор итерационных параметров и выбор предобуславливателя. Например, для седловой задачи Стокса эффектность метода Удзавы связана с применением быстрых алгоритмов обращения конечно-элементного (разностного) оператора Лапласа в модельных областях. Использование отображения на модельные области активно развивалось Е.Г. Дьяконовым [2], а также в работе [3]. Проблеме построения итерационных алгоритмов, основанных на идее спектральной [2] (энергетической [4]) эквивалентности сеточных операторов [2-4], была посвящена обширная литература. В рамках этого подхода для задач упругости предлагались так называемые полупрямые итерационные процессы, основанные на выборе конечномерного оператора Лапласа в модельных областях в качестве предобуславливателя [2,3]. Название связано с тем, что решение системы с матрицей, аппроксимирующей оператор Лапласа, осуществлялось прямыми методами [4].

В данной работе, являющейся продолжением работ [5,6], рассматривается геометрически и физически линейная теория консолидации. Для дискретизации используется метод конечных элементов (МКЭ). В качестве исследуемого итерационного процесса выступает двухслойный процесс, основанный на методе Удзавы. В этом методе имеется энергетическая эквивалентность матрицы Шура и конечно-элементной матрицы упругости. В случае линейной седловой задачи для решения системы линейных уравнений с этой матрицей применяется метод Холецкого с запоминанием факторизации на диске (SSD). Это позволяет

* *Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 25-21-00111).*

проводить факторизацию один раз для всех итераций Удзавы и всех шагов по времени. Работу следует рассматривать как продолжение работ [5,6] и материала по данной теме, изложенного в [7].

Таким образом, различие итерационных методов заключается в выборе итерационных параметров в двухслойной итерационной схеме. Будем именовать методы в соответствии с различными способами выбора итерационных параметров при одном и том же предобуславливателе. Именно, сравниваются градиентный метод минимальных невязок, метод сопряженных градиентов на основе метода минимальных невязок и чебышевский метод. Для последнего применяется адаптация границ спектральной эквивалентности, полученных на итерациях градиентного метода. Поэтому такой метод является комбинацией чебышевского и градиентного методов.

1. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА КОНСОЛДАЦИИ

Линейная задача консолидации описывается системой двух связанных уравнений равновесия и фильтрации

$$\begin{cases} \nabla\cdot\left(\mathbf{C}:\nabla\mathbf{u}\right)+\rho\mathbf{f}=\alpha\nabla p, \\ \nabla\cdot\left(\dfrac{\mathbf{k}}{\mu}\cdot\nabla p\right)=\nabla\cdot\dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+n\beta_f\dfrac{\partial p}{\partial t}-Q(\mathbf{x},t). \end{cases} \tag{1}$$

В системе (1) неизвестными являются $\mathbf{u}$ – вектор перемещения и p – давление жидкости. Коэффициент фильтрации k, удельный вес жидкости γ_f, осредненная плотность ρ, коэффициент Био α, пористость n, сжимаемость жидкости β_f – суть известные величины. Материал изотропный, поэтому тензор $\mathbf{k}$ содержит только одну независимую компоненту k. В данной работе рассматривается случай несжимаемой жидкости и система (1) переходит в систему (2)

$$\begin{cases} \nabla\cdot\left(\mathbf{C}:\nabla\mathbf{u}\right)+\rho\mathbf{f}=\alpha\nabla p, \\ \nabla\cdot\left(\dfrac{\mathbf{k}}{\mu}\cdot\nabla p\right)=\nabla\cdot\dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}-Q(\mathbf{x},t). \end{cases} \tag{2}$$

Граничные условия могут быть разных типов. Например, типичные граничные условия имеют вид: часть границы Σ_1 неподвижна и непроницаема, остальная часть границы Σ_2 проницаема, и на ней действует поверхностная нагрузка

$$\begin{cases} \mathrm{u}=0;\quad \dfrac{\partial p}{\partial \mathrm{n}}=0;\quad \mathbf{x}\in\Sigma_1, \\ \left(\mathbf{C}:\nabla\mathbf{u}-\alpha p\mathbf{I}\right)\cdot\mathbf{n}=\mathrm{S};\quad p=0;\quad \mathbf{x}\in\Sigma_2. \end{cases} \tag{3}$$

Система вариационных уравнений, соответствующих (2), (3) в момент времени t принимает вид (4), где $\mathbf{w}$, q – пробные функции

$$\begin{cases} \int\limits_V \nabla\mathbf{w}:\mathbf{C}:\nabla\mathbf{u}\,dV-\int\limits_V\alpha\, p\nabla\cdot\mathbf{w}dV-\int\limits_V\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{w}dV-\int\limits_{\Sigma_2}\mathbf{S}\cdot\mathbf{w}d\Sigma=0, \\ \int\limits_V\nabla q\cdot\dfrac{\mathbf{k}}{\mu}\cdot\nabla p\,dV+\int\limits_V q\nabla\cdot\dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}dV-\int\limits_V qQ\,dV=0. \end{cases} \tag{4}$$

Для дискретизации $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ в (4) применяется разность назад $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \to \frac{\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}}{\tau}$.

Из системы (4) посредством применения МКЭ на каждом временном шаге m следует линейная система алгебраических уравнений, которая может быть записана в блочной форме, используя глобальные векторы неизвестных U и P

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & -\tau C \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ G \end{Bmatrix}. \tag{5}$$

Номер временного шага m в (5) опущен для упрощения записи. Важно подчеркнуть, что симметричность блочной матрицы в (5) важна для применения используемых в работе итерационных алгоритмов решения системы (5). Метод Удзавы состоит в том, чтобы выразить U из первого уравнения в (5)

$$U = A^{-1}\left(F - B^T P\right) \tag{6}$$

и подставить выражение (6) во второе уравнение в (5). Тогда получаем

$$\left(\frac{1}{\tau} BA^{-1}B^T + C\right) P = \frac{1}{\tau} BA^{-1}F - \frac{1}{\tau} G = F. \tag{7}$$

Обозначим матрицу Шура как

$$\mathbb{S} = \frac{1}{\tau} BA^{-1}B^T + C. \tag{8}$$

Уравнение (7) может быть решено различными методами. В настоящее время в библиотеке Pardiso имеется возможность прямого вычисления матрицы Шура. Однако ниже будем исследовать итерационные решения (7).

2. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

В этом разделе кратко опишем используемые для сравнения методы. Это градиентный метод (минимальных невязок), метод сопряженных градиентов и комбинированный метод (комбинация градиентного и чебышевского методов).

Симметрия оператора Шура (8) позволяет использовать эти итерационные методы. Общий схема двухслойных методов имеет вид

$$\mathbb{B}\frac{P^{s+1} - P^s}{\beta^{s+1}} + \mathbb{S}P^s = F. \tag{9}$$

Скорость сходимости процесса (9) зависит от выбора предобуславливателя $\mathbb{B}$. Для того чтобы скорость итерационного процесса не зависела от размера конечно-элементной сетки, предобуславливатель $\mathbb{B}$ следует выбрать в таком виде, чтобы он был энергетически эквивалентен оператору $\mathbb{S}$ [2]. Эквивалентность означает выполнение следующих неравенств

$$0 < \gamma_1 \mathbb{B} \le \mathbb{S} \le \gamma_2 \mathbb{B} \tag{10}$$

с независимыми от размера линейной системы границами γ_1, γ_2. В [5,6] эквивалентность (10) исследована теоретически для предобуславливателя $\mathbb{B}$ в виде

$$\mathbb{B} = \frac{\kappa}{\tau} E + C. \tag{11}$$

В (9), (11) β^s, κ – итерационные параметры. В полученные оценки границ γ_1, γ_2 входят неизвестные константы, поэтому, как показывают расчеты, итерационные методы, основанные на этих оценках, уступают в эффективности

рассматриваемым ниже методам, в которых границы γ_1, γ_2 либо использовать не требуется, либо они вычисляются в процессе итераций.

Среди реализованных итерационных процессов первым опишем метод минимальных невязок. Для дальнейшего описания следует ввести следующие обозначения $V^s = P^s - P$, $R^s = \mathbb{S}V^s$, $W^s = \mathbb{B}^{-1}V^s$. Для всех методов скорости сходимости итераций оцениваем в норме $\|R^s\|$, где $R^s = \mathbb{S}P^s - F$ есть невязка итерационного приближения s в схеме (9). В общем случае градиентного метода параметры β^s выбираются согласно формуле [4]

$$\beta^s = \frac{(\mathbb{B}^{-1}\mathbb{S}V^s, V^s)_{\mathbb{D}}}{(\mathbb{B}^{-1}\mathbb{S}V^s, \mathbb{B}^{-1}\mathbb{S}V^s)_{\mathbb{D}}}. \qquad (12)$$

Скобками и двумя вертикальными чертами обозначены евклидово скалярное произведение в конечномерном пространстве и соответствующая норма.

В методе минимальных невязок $\mathbb{D} = \mathbb{S}^2$ при условии симметричности $\mathbb{S}$. Это приводит к формуле

$$\beta^s = \frac{(\mathbb{S}W^s, R^s)}{(\mathbb{S}W^s, \mathbb{S}W^s)}.$$

Градиентный метод (12) при $\mathbb{D} = \mathbb{S}\mathbb{B}^{-1}\mathbb{S}$ обладает тем свойством, что скорость его сходимости ρ^s по мере проведения итераций падает и приближается к скорости метода простой итерации ρ_0, для которого $\beta^s = 2/(\gamma_1 + \gamma_2)$, $\rho_0 = (1-\xi)/(1+\xi)$, $\xi = \gamma_1/\gamma_2$ [4]. Величина ρ^s определяется как $\|W^s\| = \rho^s \|W^{s-1}\|$. Как показывают теория и вычислительная практика, для недостаточно переобусловленой матрицы $\mathbb{S}$ скорость сходимости быстро падает и ρ^s/ρ_0 приближается к единице. Это тем более выражено, чем меньше ξ.

Однако после выхода величины ρ^s на асимптоту, как показано в [4], значения констант γ_1, γ_2 приближенно находятся как корни квадратного уравнения

$$(1-\beta^s\gamma)(1-\beta^{s-1}\gamma) = \rho^s\rho^{s-1}. \qquad (13)$$

Время вычисления одной итерации в градиентном методе или методе сопряженных градиентов больше, чем в чебышевском. Поэтому после определения γ_1, γ_2 целесообразно начать процесс чебышевских итераций. Такая комбинация градиентного и чебышевского методов может быть записана как GR–CH и была предложена в [3]. Итерационные параметры чебышевского двухслойного циклического метода (длина цикла M) задаются следующим образом [4] (γ_1, γ_2 – корни уравнения (13))

$$\beta^s = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2 + (\gamma_2 - \gamma_1)\cos\pi\dfrac{2s-1}{2M}}, \quad s = 1, 2, \ldots M.$$

Его теоретическая скорость сходимости оценивается формулами

$$\|R^M\| \le q_M \|R^0\|, \quad q_M = \frac{2\rho^M}{1+\rho^{2M}}, \quad \rho = (1-\sqrt{\xi})/(1+\sqrt{\xi}). \qquad (14)$$

Формулы (14) справедливы также для трехслойного чебышевского метода и методов сопряженных градиентов (более точно, сопряженных направлений [4]).

Скорость сходимости, определяемая величиной q_M, является наибольшей для двух- и трехслойных методов при фиксированном предобуславливателе.

Для чебышевских методов неточность значений γ_1, γ_2, необходимых для вычисления итерационных параметров, может приводить к тому, что реальная скорость сходимость оказывается ниже, чем теоретически предсказанная формулами (14). Поэтому необходима адаптация (уточнение) констант γ_1, γ_2. Процедура адаптации состоит в следующем [8,3]. Обозначим константы, использованные на n-м цикле из M чебышевских итераций, как γ_1^n, γ_2^n. Пусть после n-го цикла вычисленная величина $q_M^n = \left\| W^{M,n} \right\| / \left\| W^{0,n} \right\|$ оказалась больше величины q_M (14), характеризующей теоретическую скорость сходимости в n-м цикле чебышевских итераций

$$q_M = \frac{2\left(\rho_{n-1}\right)^M}{1+\left(\rho_{n-1}\right)^{2M}}, \quad \rho_{n-1} = \left(1-\sqrt{\xi_{n-1}}\right)\Big/\left(1+\sqrt{\xi_{n-1}}\right), \quad \xi_{n-1} = \gamma_1^{n-1}/\gamma_2^{n-1}.$$

Тогда можно показать, что выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\le \frac{1}{2}\left[\gamma_1^{n-1}+\gamma_2^{n-1}-\frac{\gamma_2^{n-1}-\gamma_1^{n-1}}{2}\left(\frac{Y^2+1}{Y}\right)\right], \\ \gamma_2 &\ge \frac{1}{2}\left[\gamma_1^{n-1}+\gamma_2^{n-1}+\frac{\gamma_2^{n-1}-\gamma_1^{n-1}}{2}\left(\frac{Y^2+1}{Y}\right)\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

где $Y = \left(a+\sqrt{a^2-1}\right)$, $a = q_M^n / q_M$.

Оценки (15) позволяют адаптировать γ_1, γ_2, приравнивая γ_1^n, γ_2^n к соответствующим правым частям в неравенствах (15).

Третьим способом выбора итерационных параметров был двухслойный предобусловленный метод сопряженных градиентов, в котором

$$P^{s+1} = P^s - \beta^{s+1} Q^s, \quad Q^{s+1} = W^s + \alpha^{s+1} Q^s, \quad \alpha^{s+1} = \frac{\left(\mathbb{S}W^s, R^s\right)}{\left(\mathbb{S}W^{s-1}, R^{s-1}\right)}.$$

Сравнение сходимости этих методов обсуждается в следующем разделе.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР

Сравнение методов проведено на примере задачи о вдавливании жесткого штампа в пористую водонасыщенную упругую среду [5,6]. Задача показана на рис.1.

В [5,6] обсуждается теоретическая и экспериментально измеренная сходимость предобусловленного метода простой итерации. Для типичных параметров задачи число требуемых итераций невелико, поэтому казалось, что такой метод достаточен. Однако преимущество описанных выше методов, состоящее в возможности проводить итерации в отсутствии априорной информации о константах γ_1, γ_2, перевешивает недостаток, состоящий в большей трудоемкости каждой итерации. Промежуточное положение здесь занимает комбинированный метод. В свете сказанного выше интересно сравнивать не только число необходимых итераций, но и компьютерное время, которое состоит из процессорного времени и времени обмена с диском. Дело в том, что

наличие SSD и возможность сохранять факторизацию матрицы на диск, позволяют вычислять разложение конечно-элементной матрицы только один раз в случае линейной системы (5).

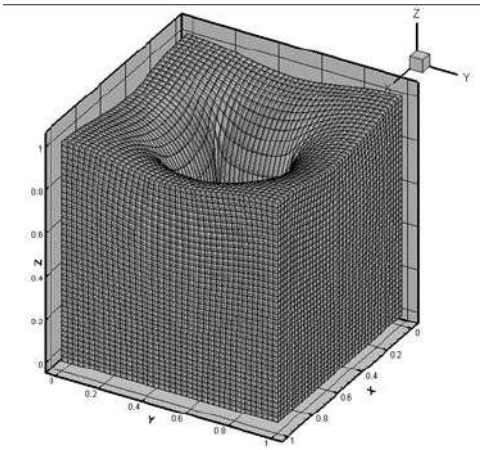


Рис.1. Конечно-элементная сетка, деформированная вследствие внедрения штампа (размер сетки примерно 69 тыс. узлов).

В Таблице 1 приведены компьютерное время/число итераций, затраченных для уменьшения начальной невязки в 10^5 раз, в зависимости от коэффициента фильтрации k. Время приведено в минутах. Расчеты приведены для итерационного параметра $\kappa = 0.5$, упругих параметров материала $\nu = 0.25$ и $K = 1$ на конечно-элементной сетке 69 тыс. узлов. Эта сетка была самой мелкой в проведенных вычислениях.

Таблица 1.

k	10	1	0.1	0.05	0.01
GR	39/40	12/11	12/12	11/11	11/9
CG	6.8/4	8.3/6	10/10	11/11	16/14
CH	–	8.2/17	12/26	–	–

Данные в третьем, четвертом и пятом столбцах (Таблица 1) приведены для случая параллельного решения системы линейных уравнений прямым решателем Pardiso. Как видно из этих трех столбцов, практическая скорость сходимости градиентного метода (GR) и метода сопряженных градиентов (CG) не зависит от коэффициента k. Это соответствует теоретическому результату, полученному в [5,6]. Также можно сделать вывод, что чебышевский метод (CH) потребовал большего числа итераций, но обеспечил одинаковое с методом сопряженных градиентов (CG) время на компьютере. Данные во втором и шестом столбцах соответствуют последовательному способу решения. В обоих случаях использовался метод Холецкого. Как следует из таблицы, для крайних рассмотренных случаев скорость сходимости может испытывать вариации.

В Таблице 2 приведены константы γ_1, γ_2 для сеток разных размеров, вычисленные в процессе градиентных итераций. Сетка A имела 1331 узел, сетка B – 9261, сетка C – 29791, сетка D – 68921. Данные в Таблице 2 приведены для $k = 1$. В последнем столбце приведена относительная разница ξ.

Таблица 2.

сетка	γ_1	γ_2	$\xi = \gamma_1/\gamma_2$	Err, %
A	1.4	2.3	0.61	–
B	1.4	2.1	0.67	9
C	1.8	2.5	0.72	18
D	1.9	3.1	0.61	0

Таким образом, определение констант не представляется достаточно точным и, следовательно, их использование в итерационном процессе с априорно заданными границами спектра требует их адаптации, например, как описано выше.

Наконец, в столбцах 1, 2, 3 Таблицы 3 приведены времена в секундах, затраченные компьютером на различные этапы итерационного процесса на различных сетках. В столбце 1 приведено время факторизации, во 2-м столбце – время обратной подстановки. Столбец 3 содержит время вычисления конечно-элементной матрицы упругости. Верхние подстрочки дают времена для конечно-элементной матрицы A, нижние – матрицы C. Столбец 4 содержит отношения времен решения задачи упругости с матрицей A на первой итерации при факторизации матрицы A к соответствующим временам на остальных итерациях, на которых происходит считывание факторов матрицы с SSD. Результаты приведены для $k = 1$.

Таблица 3.

сетка	1	2	3	4
A	0.33	0.05	0.0049	5
	0.11	0.004		
B	4.7	0.65	3.0	9.6
	0.5	0.016		
C	37	3.2	9.8	13
	0.31	0.051		
D	200	21	23	11
	0.78	0.27		

Эти результаты показывают эффективность хранения факторов исходной матрицы и возможность их быстрого считывания.

Заметим, что для задач геомеханики области, топологически сходные с параллелепипедом, являются довольно типичными. Для таких областей может оказаться целесообразным заменить прямой метод Холецкого решения систем с матрицами A и C на полупрямой метод, в котором используются быстрые алгоритмы решения систем с разностным оператором Лапласа [4].

В Таблице 4 приведены времена в секундах факторизации конечно-элементной матрицы упругости (верхняя подстрока) и обратной подстановки (нижняя подстрока) в методе Холецкого из библиотеки Pardiso. Цифра 1 соответствует параллельной реализации, 2 – последовательной. Из таблицы следует, что для сеток C и D параллельная реализация процесса факторизации имеет более чем двукратное преимущество на использованном компьютере с 4 ядрами процессора. Для обратной подстановки разницы почти нет.

Уже отмечалось, что для линейной системы факторизация осуществляется один раз за все итерации и шаги по времени. Поэтому в данном случае распараллеливание вносит незначительное ускорение.

Таблица 4.

сетка	A	C	D
1	0.34	37	200
	0.06	3.4	11
2	0.35	88	470
	0.06	3.6	13

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлено сравнение эффективности конечно-элементного решения линейной связанной задачи фильтрации в деформируемом упругом каркасе тремя итерационными методами: градиентным методом минимальных невязок, методом сопряженных градиентов на базе метода минимальных невязок и чебышевским методом. Оказалось, что для умеренных значений коэффициента фильтрации k методы дают близкие затраты по времени решения. Однако для крайних значений k возможны флуктуации от средних затрат компьютерного времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быченков Ю.В., Чижонков Е.В. *Итерационные методы решения седловых задач*. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 349 с.
2. Дьяконов Е.Г. *Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач*. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1989. – 272 с.
3. Шешенин С.В., Кузь И.С. *О прикладных итерационных методах* // Вычислительная механика деформированного твердого тела. – 1990. – №1 – С.63-74.
4. Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений*. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
5. Артамонова Н.Б., Шешенин С.В. *Математическое исследование линеаризованной связанной задачи консолидации* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т.29. – №2. – С.214-230.
6. Артамонова Н.Б., Шешенин С.В. *Сходимость итерационного процесса решения связанной задачи консолидации* / 13-я Всероссийская научная конференция с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред». Сборник трудов. – М.: ООО «Сам Полиграфист», 2023. – С.238-244.
7. Шешенин С.В., Артамонова Н.Б. *Численный анализ задач механики композитов*. – М.: Издательство Московского университета, 2025. – 541 с.
8. Хейгеман Л., Янг Д. *Прикладные итерационные методы*. – М.: Мир, 1986. – 438 с.

Волновая динамика газообразных, жидких и твёрдых сред. Высокоскоростной удар

УДК 539.3+519.6
EDN VZDEUO
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.29

СТРУКТУРЫ РАЗРЫВОВ В МИКРОПОЛЯРНОЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ*

Бахолдин И.Б.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

Ранее была разработана теория бездиссипативных и слабодиссипативных структур разрывов [1] в моделях с дисперсией, согласно этой теории решения задачи о распаде произвольного разрыва в недиссипативном случае содержат расширяющиеся области, однородные участки, волновые зоны и центрированные простые волны. В слабодиссипативном случае с течением времени волновые зоны перестают расширяться. Упорядоченные волновые зоны описываются усредненными уравнениями. Эти области могут ограничиваться или разделяться обратимыми структурами разрывов, представляющими собой переходы между однородными или периодическими состояниями. Бездиссипативной дисперсионной является и модель микрополярной среды [2-3].

Для решения уравнений в частных производных был разработан универсальный численный метод, основанный на центральных разностях для пространственных производных и методе Рунге-Кутты третьего или четвертого порядка для временных производных. На основе исследования аппроксимации для линейного уравнения переноса с пространственной производной произвольного порядка доказана сходимость метода, а также в то, что в недистипативном случае данная схема дает корректную схемную вязкость третьего и пятого порядка малости при применении для методов Рунге-Кутты третьего и четвертого порядка соответственно [4]. Поэтому для недиссипативных моделей метод четвертого порядка предпочтительнее из-за чрезвычайно малой схемной вязкости.

В соответствии с [2] одномерные уравнения электропроводящей магнитоупругой среды с использованием модели Коссера имеют вид

$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\left(\mu+\alpha\right)\left(1+2\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2\alpha\frac{\partial \phi_3}{\partial x}-H_1^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

$$I\frac{\partial \phi_3}{\partial t^3}=\left(\gamma+\varepsilon\right)\left(1+2\frac{\partial \phi_3}{\partial x}\right)\frac{\partial \phi_3}{\partial x^2}+2\alpha\frac{\partial v}{\partial x}+2\alpha\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-4\alpha\phi_3. \qquad (2)$$

Здесь t – время, x – пространственная координата, v – поперечная компонента вектора перемещения, ρ - плотность, I – показатель инерции при вращении, μ – постоянная Ламе, α, γ, ε – физические константы модели Коссера, H_1 – напряженность магнитного поля. Ниже часто будет использоваться величина $u=v_x$. Продифференцировав (2) по x и исключив из него ϕ_{3x} с помощью (1), можно получить уравнение в перемещениях с одним неизвестным

* *Работа выполнена в соответствии с Государственной программой для ИПМ им. М.В.Келдыша РАН.*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-c_\theta^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{Ic_\phi^2c_T^2}{4\alpha}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+\frac{I}{4\alpha}\frac{\partial^4 v}{\partial t^4}-\frac{I\left(c_\phi^2+c_T^2\right)}{4\alpha}\frac{\partial^4 v}{\partial t^2\partial x^2}+$$
$$+\sum_{i=1}^{3}N_i+\frac{c_\phi^2\rho}{8I\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{i=4}^{9}N_i=0 \qquad (3)$$

$$N_1=-c_\tau^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,\quad N_2=\frac{c_t^2c_\phi^2I}{4\alpha}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,\quad N_3=-\frac{c_t^2I}{4\alpha}\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,$$

$$N_4=c_T^4\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,\quad N_5=c_t^4\left[\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]^2,\quad N_5=2c_t^2c_T^2-\frac{c_t^2I}{4\alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,$$

$$N_7=-2c_T^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\quad N_8=-2c_t^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,\quad N_9=\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2.$$

Здесь $c_\tau=\left(\mu/\rho\right)^{1/2}$, $c_\phi=\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)/I\right]^{1/2}$, $c_\phi=\left[\left(\mu+\alpha\right)/\rho\right]^{1/2}$, $c_\theta^2=c_\tau^2-c_A^2$, $c_T^2=c_t^2-c_A^2$, $c_A=\left[H_1^2/\left(4\pi\rho\right)\right]^{1/2}$. Для дальнейшего анализа потребуются еще уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_\theta^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{Ic_\phi^2c_T^2}{4\alpha}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{I}{4\alpha}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}-\frac{I\left(c_\phi^2+c_T^2\right)}{4\alpha}\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}-c_\tau^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u^2=0, \qquad (4)$$

$$u=\frac{\partial}{\partial x}v,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_\theta^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-c_\tau^2\frac{\partial}{\partial x}u^2=0. \qquad (5)$$

Уравнение (4) выводится из уравнения (3) дифференцированием по x, переходом к слабонелинейно-длинноволновому приближению [2], т.е. отбрасыванием нелинейно-дисперсионных членов более высокого порядка малости, чем те, которые есть в этом уравнении. Оно представляет собой один из вариантов уравнения Буссинеска. Оно имеет решения в виде уединенных волн, доказано путем исследования собственных функций уравнений бегущих волн с применением метода функции Эванса, что при некоторых значениях параметров, в частности при больших амплитудах, они неустойчивы [3]. Уравнение (5) представляет собой так называемый упрощенный [1] вариант уравнений (1), (2), а также (3) или (4), получаемый отбрасыванием дисперсионных членов и применяемый при исследовании структур разрывов.

Данная модель относится к дисперсионным моделям с конечной скоростью распространения волн [4-6]. Поэтому дисперсия для коротких волн таких моделях исчезает. Возможно как возникновение бездиссипативных структур разрывов, так и опрокидывание волн, требующее регуляризации модели, добавления в уравнения дополнительных диссипативных или дисперсионных членов. Следует разделять понятия разрывов в смысле уравнения (5) и разрывов в смысле уравнений (1), (2). В первом случае структуры таких разрывов описываются уравнениями (1), (2), а во втором для получения структур требуется регуляризация уравнений, добавление дополнительных вязких или дисперсионных членов. Добавлялись члены $\varepsilon_v v_{txx}$ и $\varepsilon_\phi \phi_{txx}$ в правые части уравнений, соответствующие вязко-упругой модели Кельвина-Фойтха.

Ранее были исследованы структуры разрывов для данной модели [6-7]. Среди них есть структуры солитонного типа, т.е. расширяющиеся со временем волновые зоны, в которых волны на одной из границ со временем стремятся

к последовательности уединенных волн. Среди них можно выделить сверхзвуковые солитонные структуры, у которых график уединенной волны для величины u представляет собой горб и дозвуковые, у которых этот график – впадина. Кроме того, имеются структуры с излучением, содержащие переход между однородным и однородно-периодическим состоянием. Наблюдаются структуры с излучением вправо и с излучением влево. Внутри них имеется разрыв производных u_x и ϕ_x. Стационарная структура такого разрыва существует при добавлении вязкого члена $\varepsilon_\phi \phi_{txx}$ при $\varepsilon_\phi \to 0$ [6]. Периодическое состояние для таких разрывов содержит последовательность разрывов ϕ_{3xx}. Кроме того, были найдены разрывы величины u, аналоги ударных волн, для существования структур этих разрывов нужно добавить член $\varepsilon_v v_{txx}$, стационарная структура существует в пределе при $\varepsilon_v \to 0$.

Численные эксперименты с применением описанного выше численного метода для уравнений с конечной скоростью распространения волн при применении условия $\tau = Ch$, τ и h – шаги по времени и пространству, показали, что в некоторых случаях, включая и гиперболические уравнения, схемной вязкости оказывается достаточно для расчета разрывов, для построения структуры которых требуется включение диссипации. Возникают схемные дисперсионно-диссипативные структуры конечной длины, длина которых уменьшается пропорционально уменьшению шага, т.е. имеется сходимость первого порядка по норме L_2. Если рассматривается разрыв некоторой величины, то такую методику нельзя признать эффективной, лучше добавить физическую или искусственную вязкость. Но если рассматривать разрыв производной исследуемой величины, то дисперсионно-диссипативная схемная структура возникнет именно для производной, а амплитуда колебаний самой величины будет уменьшаться при уменьшении шага сетки, поскольку она пропорциональна интегралу от ее производной по периоду колебаний, который также уменьшается. Для производной рассматриваемой величины можно говорить о сходимости в обычном понимании. Однако результат расчета ожидаемо очень чувствителен к выбору величины C. Численные эксперименты для уравнений магнитной гидродинамики плазмы для быстрых магнитозвуковых волн показывали чисто бездиссипативную схемную структуру, расширяющуюся пропорционально времени [5]. Дисперсионно-диссипативная схемная структура возникает только при значениях C близких к максимально допустимым. То же самое наблюдается и для рассматриваемой здесь модели. Эти закономерности были проверены как с применением метода Рунге-Кутты четвертого, так и третьего порядка. Следует иметь также ввиду, что схемная структура может оказаться неустойчивой, в частности из-за неустойчивости схемной уединенной волны. Численные эксперименты показывают, что расчет без добавления вязкости можно осуществить только для разрывов умеренной амплитуды, а при увеличении амплитуды возникает аварийная остановка.

Необходимым условием устойчивости разрыва для гиперболических уравнений является условие эволюционности: число условий на разрыве равно числу уходящих характеристик плюс одно условие [1]. Характеристика является уходящей для стороны справа от разрыва, т.е. при $x \to +\infty$, если характеристическая скорость больше скорости разрыва и является приходящей, если меньше. Для стороны слева от разрыва приходящие и уходящие характеристики определяются обратным образом. Исследования на основе общего

определения эволюционности [1] показали, что для разрывов в смысле дисперсионных моделей с конечной скоростью распространения волн условие эволюционности следует формулировать аналогичным образом, но вместо характеристических скоростей использовать скорости коротких волн, их можно называть псевдохарактеристическими скоростями [6]. Можно выделить эволюционные разрывы, являющиеся аналогами ударных волн в газовой динамике. У них характеристики одного из типов – приходящие по обе стороны разрыва, а характеристики других типов – приходящие для одной из сторон и уходящие для другой. Обычно для этих разрывов достаточно условий, получаемых из исходных уравнений, записанных в виде законов сохранения. Но есть и разрывы, у которых все типы характеристик, приходящие с одной из сторон и уходящие с другой. У них обычно требуется дополнительное условие, получаемое из анализа уравнений, описывающих структуру разрыва. Их называют особыми разрывами, будем называть их разрывами класса -1, исходя из числа свободных параметров разрыва. В качестве класса 0 будем принимать аналоги ударных волн. Для недиссипативных моделей структуры таких разрывов в случае переходов между однородными состояниями можно интерпретировать как классические кинки, поскольку возможен как прямой, так и обратный переход.

Сделаем расширение исходной модели. Допустим, что величина μ меняется в зависимости от величины нелинейной деформации $u+u^2$ и есть предельное значение поперечной силы $F=(\mu+\alpha)(u+u^2)$, при котором значение μ меняется. Если при последовательном нагружении эта сила меньше значения $F_{\max}$, то $\mu=\mu_1$, а если больше, то дальнейший ее прирост осуществляется при $\mu=\mu_2<\mu_1$. Вначале была рассмотрена модель, в которой разгрузка идет в обратном порядке и $F_{\max}=F_*=const$, фактически это нелинейно-упругая модель, а не пластическая, а затем вариант, в котором последнее максимальное достигнутое значение силы фиксируется как новое значение $F_{\max}$ в рассматриваемой материальной точке, а разгрузка происходит со значением $\mu=\mu_1$, т.е. имеется гистерезис, $F=(\mu+\alpha)\left[u-u_p+(u-u_p)^2\right]$, u_p – пластическая деформация $u_p=u-\left\{-1+\left[1+4F/(\alpha+\mu)\right]^{1/2}\right\}/2$. При этом в уравнении (2) вместо u используется $u-u_p$. Другой вариант – предполагается, что пластическая деформация никак не связана с моделью Коссера. Рассматривается сила $F_\mu=\mu\left[u-u_p+(u-u_p)^2\right]$ и для нее находится значение $F_{\max}$, а полная сила вычисляется так $F=F_\mu+\alpha\left[u+u^2\right]$, $u_p=u-\left\{-1+\left[1+4F_\mu/\mu\right]^{1/2}\right\}/2$. В уравнении (2) при этом варианте пластическая деформация не учитывается. В обоих вариантах в уравнении (1) для последнего члена, связанного с магнитным воздействием используется u, а не $u-u_p$, поскольку анализ вывода исходных равнений показал, что он связан только с кинематикой. Расчеты показали, что типы наблюдаемых структур разрывов при этих двух вариантах учета пластичности одинаковы.

Предварительно был осуществлен расчет без учета вращения и без учета остаточной деформации $\alpha=0$, $H_1=0$. Поскольку дисперсии здесь нет,

то естественно рассматривать диссипативные разрывы и добавлять вязкость. Условия на разрыве здесь следующие [6]: $V\rho\left[v_t\right]+\mu\left[u+u^2\right]=0$, $V\left[u\right]+\left[v_t\right]=0$. Квадратные скобки обозначают разность величин по обе стороны разрыва, V – скорость разрыва. Следовательно, $V^2=\left(F_\mu\left(u_2\right)-F_\mu\left(u_1\right)\right)/\left(u_2-u_1\right)/\rho$. Положив $u_1=0$ и рассмотрев график аналога ударной адиабаты $F_\mu\left(u\right)$, можно понять, какие здесь должны быть решения. График состоит из двух кусков парабол и имеет точку излома, рис.1а. Наклон прямой, соединяющая две точки графика, определяет квадрат скорости разрыва, а наклон касательной в точке пересечения соответствует квадрату характеристической скорости. Поэтому при небольших амплитудах разрыва ему соответствует прямая *1*, характеристика, направленная вправо, – приходящая с обоих сторон, характеристика, направленная влево, – приходящая с одной стороны, а с другой – уходящая. Разрыв эволюционный, аналог ударной волны. При увеличении амплитуды решение содержит два разрыва, им соответствуют прямые *2* и *3*. Первый разрыв особый, класса -1, второй – аналог ударной волны. Эволюционным первый разрыв можно считать, если определять характеристическую скорость для состояния за разрывом в предположении, что переход к меньшему значению μ уже осуществлен. Тогда характеристика, направленная вправо, с одной стороны приходит на разрыв, а с другой – уходит. Скорость разрыва фиксирована, это дает дополнительное условие на разрыве. Если бы график ударной адиабаты была гладким, прямая *2* касалась бы ее, характеристическая скорость совпадала бы со скоростью разрыва, в газовой динамике подобный разрыв называется разрывом Жуге. При дальнейшем увеличении амплитуды решение снова содержит один разрыв, аналог ударной волны, ему соответствует прямая *4*. Расчеты показали, что все так, как предсказывает теория. В случае монотонного невозрастания u при расчете с учетом пластической деформации, результат ожидаемо оказался такой же, как и без ее учета, рис.1б.

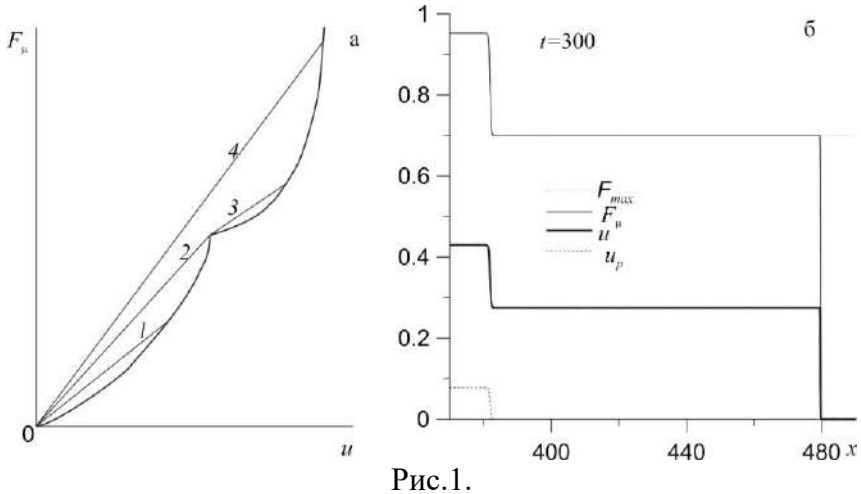


Рис.1.

При добавлении вращения возможны решения с двумя структурами, аналогичные описанным выше, но вязкость не всегда требуется. Но решения с двумя структурами ожидаемо модифицируются: первая структура теперь кинк, и за ним $F>F_*$, а вторая – структура с излучением. Кроме того, возможны решения с тремя структурами разрывов, движущимися вправо: передняя из них – кинк, класс -1, второй, класса 0, может быть структурой разрыва с излучением

и внутренним разрывом u_x и ϕ_{3x} или быть структурой солитонного типа, третья – кинк, класс –1, рис.2а. Есть решения с двумя структурами разрывов, движущимися вправо. Передняя из них – кинк, класс –1, вторая – класса 0, рис.2б. Вторую из структур, можно интерпретировать как структуру разрыва разрежения, что непривычно, например для газовой динамики. Для сравнения приводятся графики решения при той же амплитуде начального разрыва, но без изменения μ, рис.2в. Видно, что в этом решении есть участок небольшой протяженности, где $F > F_* = 1$. При учете изменения μ это привело к возникновению двух разрывов вместо одного, т.е. возникновение кинка связано с невозможностью построить структуру разрыва с излучением, но не с амплитудой начального разрыва. При добавлении некоторой конечной вязкости излом графика u исчезает, области $F > F_*$ нет, нет двух структур и в случае учета изменения μ. Но встречаются и решения с первой структурой с излучением и второй структурой типа кинка, рис.2г.

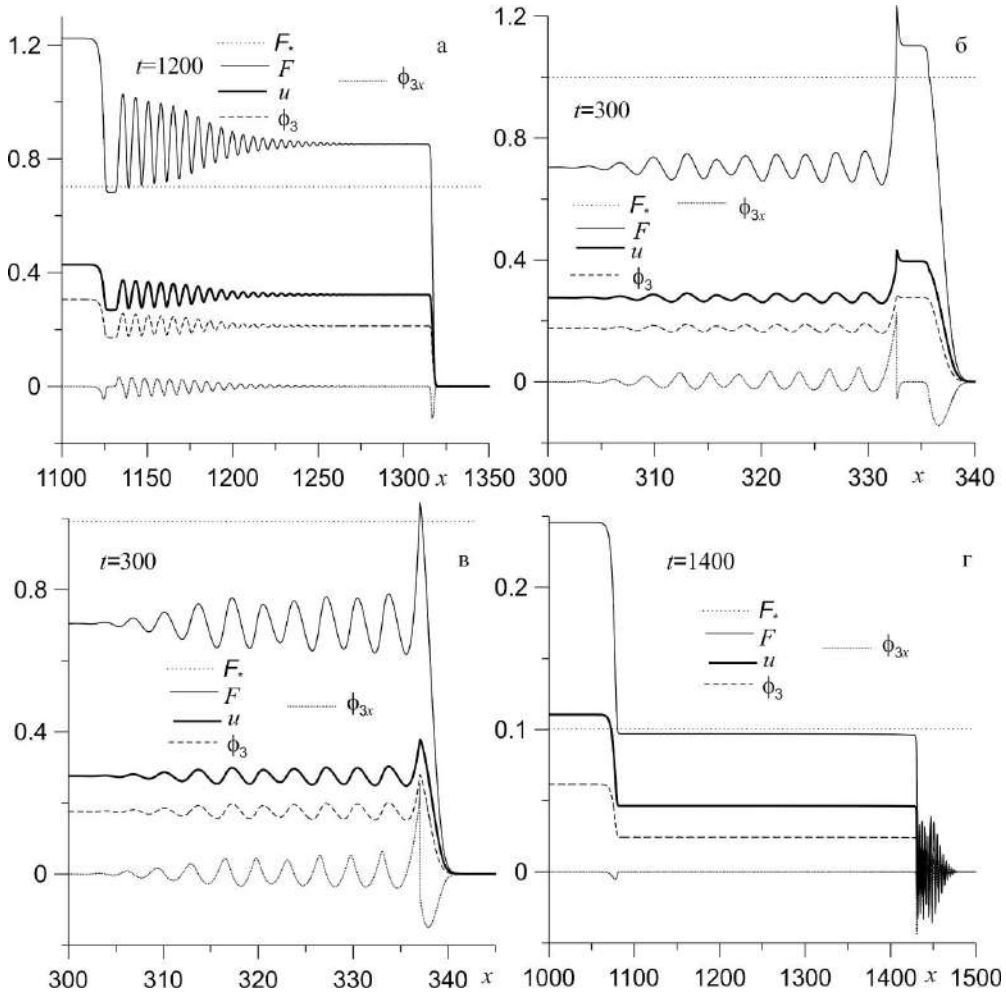


Рис.2.

Здесь и далее в решениях наблюдался разрыв u_x при переходе между разными значениями μ. В отличие от диссипативного разрыва величин u_x и ϕ_{3x}, исследованного в [6], для которого график u был локально выпуклым, в случае этого разрыва график u локально вогнутый.

При расчете с учетом вращения и остаточной деформации качественный вид

встречавшихся типов решений оказался одинаковым в случае первого и второго варианта учета пластической деформации, поэтому в качестве характерных примеров расчета показываются графики для первого или второго варианта, отличить их можно по тому, показывается ли график F или F_μ. Можно выделить решения, в которых впереди структура разрыва класса -1. За этим разрывом слева область $F = F_{\max}$. При этом на начальных этапах эволюции решения эта область содержит колебания, но со временем они затухают. На рис.3а показано решение, в котором сзади расположена центрированная простая волна, а на рис.3б – структура с излучением. Но встречаются аналогичные решения со структурой с излучением влево, у которой внутреннего разрыва производных нет, в которых, а на гребнях волн $F = F_{\max}$ или $F_\mu = F_{\max}$. Заметим, что в случае рис.3а хотя для u и монотонно невозрастающее решение, но пластическая деформация учтена в уравнении для ϕ_3, поэтому решение не может быть получено в рамках нелинейно-упругой модели.

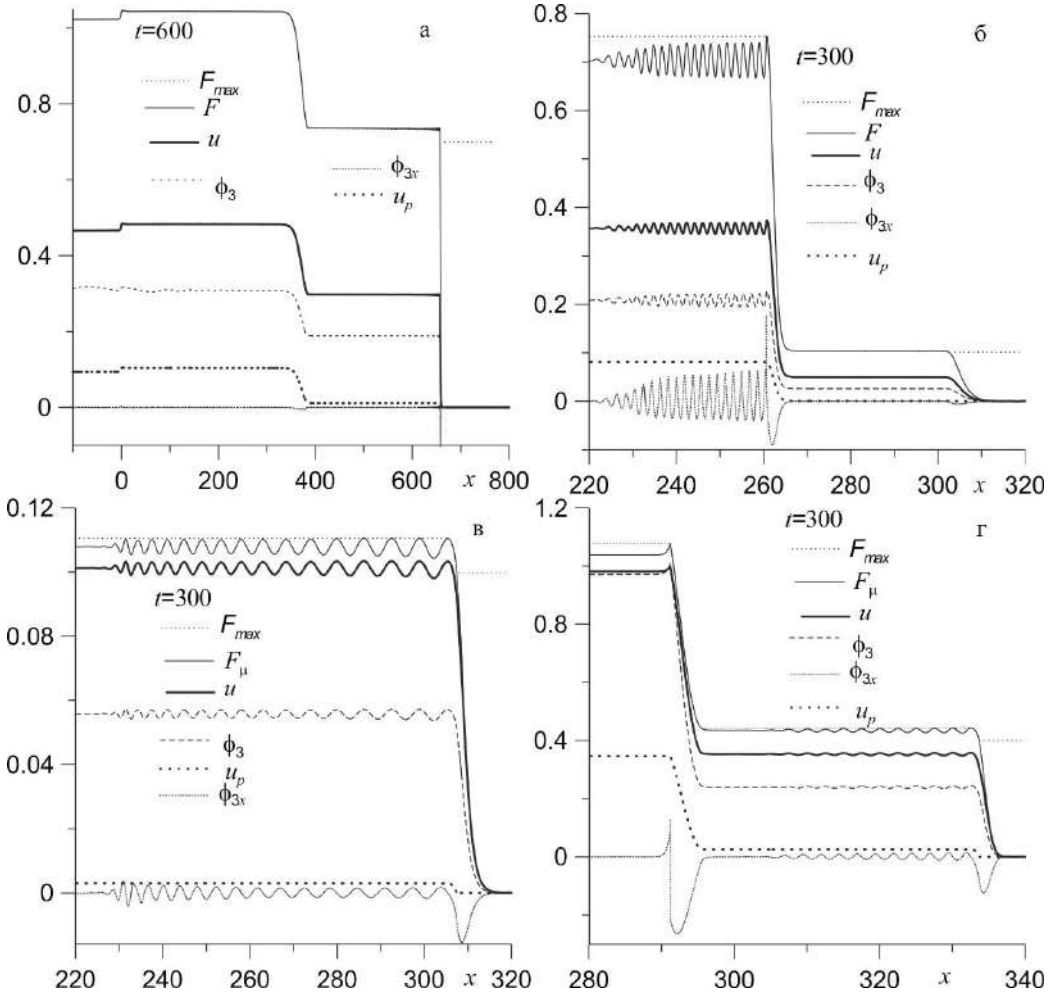


Рис.3.

На рис.3в показано решение с непрерывной структурой с излучением, при использованных начальных данных структуры класса -1 здесь не возникло. При этом структура с излучением здесь не содержит внутренний диссипативный разрыв производных u_x и ϕ_{3x} в точке перехода к периодическому решению, а также разрывы ϕ_{3xx} в области периодического решения. Замечен только разрыв

u_{pxx} в точке перехода к области периодического решения, т.е. разрыв производной более высокого порядка, чем встречаются в исследуемых уравнениях. Такие структуры не наблюдались в случае отсутствия пластической деформации. Это связано с появлением новой неизвестной u_p. Эти решения с двумя структурами, показанные на рис.3а,б, отличаются от аналогичных решений нелинейно-упругой модели тем, что здесь перед разрывом с излучением $F = F_{\max}$ или $F_\mu = F_{\max}$, а там – $F > F_*$. В этом смысле они наиболее близки к наблюдаемым в случае без учета вращения.

В случае другого типа решений структура класса -1 расположена сзади. На рис.3г впереди структура с излучением влево без внутреннего разрыва, а сзади – структура класса -1 с внутренним разрывом производных. Структуры класса -1 с внутренним разрывом производных также не наблюдались при отсутствии учета пластической деформации. Но структуры класса –1 без внутреннего разрыва здесь также встречаются. В частности, встречались решения, качественно неотличимые от представленного на рис.3г.

Заметим, что в этих решениях встречаются два вида областей: $F < F_{\max}$ или $F_\mu < F_{\max}$, $F = F_{\max}$ или $F_\mu = F_{\max}$. В всех случаях u_p известно: $u_p = const$, $u_p = u - \left(-1 + \sqrt{1 + 4F/(\alpha + \mu)}\right)/2$ или $u_p = u - \left(-1 + \sqrt{1 + 4F_\mu/\mu}\right)/2$, F и F_μ вычисляется как при последовательном нагружении. Поэтому во всех трех случаях можно вывести аналоги уравнений (1), (2) без дополнительного неизвестного u_p и их упрощенные варианты, аналоги уравнения (4). Наличие структур с излучением, но без внутреннего разрыва производных связано с тем, что в точке максимума первого горба происходит сращивание решений, описываемых двумя разными системами уравнений.

Анализ методики поиска структуры разрыва как решения системы уравнений бегущих волн [6] показывает, что наличие внутреннего диссипативного разрыва производных в области $F < F_{\max}$ или $F_\mu < F_{\max}$ создает, как и в исходной модели без пластичности, дополнительный параметр вариации, что позволяет построить структуру с излучением класса 0. На рис.3б заметно, что этот разрыв находится левее максимума u, причем в окрестности разрыва график u локально вогнутый. В то же время в случае, когда в точке разрыва производных $F = F_{max}$ или $F_\mu = F_{max}$, это следует рассматривать как дополнительное условие, разрыв становится особым, дополнительного параметра вариации не возникает, поэтому структура типа перехода между двумя однородными состояниями с внутренним диссипативным разрывом производных, показанная на рис.3г, относится к классу -1, как и аналогичная структура без внутреннего диссипативного разрыва, аналогичная показанной на рис.2г. Заметим еще, что общая постановка задачи о распаде разрыва при наличии пластической деформации должна включать и значения u_p по обе стороны от начального разрыва. Здесь же рассматривалась не самая общая постановка $u_{p1} = 0$, u_{p2} вычисляется по значению $F(u_2)$ или $F_\mu(u_2)$. Возникает еще неподвижная структура, связанная с тем, что пластическая деформация связана с материальными точками, которые в рассматриваемой модели не перемещаются вдоль оси x. Протяженность этой структуры и ее внутреннее строение связаны с видом гладкого перехода в начальных данных, но параметры скачка u и ϕ_3

для области $x>0$, рассматриваемого в смысле упрощенных уравнений, от этого не зависят. Частично эту структуру, расположенную в окрестности начала координат, можно видеть на рис.3а, на рис.3б-г окрестность начала координат не показана. Для ϕ_3 это колебательная со временем структура, аналогичная описанной в [7], но отличие в том, что периодические по времени колебания здесь есть в основном только в области $x<0$, в области $x>0$ при удалении от начала координат они затухают. Заметим, что при рассмотрении структур, движущихся вправо, выявлены как структуры, в которых u_{p2} определяется значением u_2, так и структуры в которых u_{p2} определяется максимальным значением u, отличающимся от u_2.

В соответствии с методикой работы [6] можно найти условия на разрыве u_x, встречавшегося при переходе между разными значениями μ в решениях, описанных выше, и проверить его эволюционность путем исследования расположения псевдохарактеристик, скорости которых определяются как предельные скорости коротких волн, поскольку это разрыв в смысле полной системы уравнений. Условия эволюционности при этом формулируются аналогично условиям эволюционности для гиперболических уравнений. Структура разрыва может быть получена путем замены скачкообразного перехода величины μ плавным переходом. Рассматривая уравнения бегущих волн так же, как и в работе [6], можно получить условия на разрыве

$$[u]=0,\ [\phi_3]=0,\ [\phi_{3x}]=0,$$

$$\rho V^2[u_x]=\left[(\mu+\alpha)\left(1+2\left(u-u_p\right)\right)\left(u-u_p\right)_x\right]-H_1^2/(4\pi)[u_x],\ F_\mu=F_{\max}$$

для первого варианта учета остаточной пластической деформации или

$$\rho V^2[u_x]=\left[\mu\left(1+2\left(u-u_p\right)\right)\left(u-u_p\right)_x\right]+\left[\alpha(1+2u)u_x\right]-H_1^2/(4\pi)[u_x],$$

$$F_\mu=F_{\max}$$

для второго варианта учета остаточной деформации. Квадратные скобки здесь обозначают разность величин по разные стороны разрыва, подразумевается, что значения μ по разные стороны разрыва разные. Это общие формулы для всех вариантов расчетов, подразумевается, что с одной или обоих сторон разрыва u_p или u_{px} могут быть равны нулю, если остаточная пластическая деформация не учитывается. Предполагается, что u_p в точке разрыва известно, а u_{px} может быть вычислено на основе знания u_x при учете остаточной пластической деформации. Число уходящих псевдохарактеристик равно числу приходящих, то есть их четыре. Разрыв эволюционен и в случае нелинейно-упругой модели обратим, его можно рассматривать как кинк. Заметим, что при отсутствии различия μ по разные стороны разрыва из приведенных выше формул для скорости разрыва следует, что разрыв u_x, он же разрыв v_{xx} должен двигаться с псевдохарактеристической скоростью. Такой разрыв можно было бы рассматривать как слабый, поскольку максимальный порядок производной от v в исходных уравнениях второй. Однако такого слабого разрыва в решениях замечено не было. Слабый разрыв u_x на границе центрированных простых волн, наблюдаемых в решениях, следует понимать в смысле упрощенных уравнений, а не в смысле исходной системы. Он движется с характеристической скоростью

упрощенной системы и обладает структурой, описываемой в рамках полной системы уравнений, на нем на самом деле есть также и разрыв ϕ_{3x}. В случае использования классической модели без учета вращения условия на разрыве для *и* аналогичные, но псевдохарактеристические скорости становятся характеристическими, т.е. понятие слабого разрыва становится аналогичным принятому в газовой динамике для уравнений Эйлера.

Таким образом, исследования с учетом пластичности подтвердили возможность проведения расчетов с используемым численным методом и в данном случае. Также подтверждена теория, согласно которой в дисперсионных моделях с конечной скоростью распространения волн можно рассматривать два типа структур: структуры разрывов в смысле гиперболических упрощенных уравнений и структуры в смысле исходных уравнений с дисперсией. При этом в первом случае для анализа эволюционности разрывов нужно применять характеристические скорости, а во втором – псевдохарактеристические. Обнаружено, что при учете пластичности возможны структуры с излучением, но без внутреннего разрыва производных, а также разрывы класса –1 с внутренним разрывом производных, не наблюдаемые в нелинейно-упругой модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахолдин И.Б. *Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды*. – М.: Физматлит, 2004. – 318 с.
2. Erofeev V.I., Malkhanov A.O. *Spatially localized nonlinear magnetoelastic waves in an electrically conductive micropolar medium* // Z. Angerw Math. Mech. – 2023. – Vol.103. – Iss.4.
3. Erofeev V.I., Il'ichev A.T. *Instability of supersonic solitary waves in a generalized elastic electrically conductive medium* // Continuum Mech. Thrermodin. – 2023.
4. Бахолдин И.Б. *Уравнения, описывающие волны в трубах с упругими стенками, и численные методы с низкой схемной диссипацией* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2020. – Т.60. – №.7. – С.1224-1238.
5. Бахолдин И.Б. *Анализ уравнений двухжидкостной плазмы в приближении электромагнитной гидродинамики и структур разрывов в их решениях* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2021. – Т.68. – №3. – С.458-474.
6. Бахолдин И.Б. *Структуры разрывов в микрополярной магнитоупругой среде и методы исследования разрывов в моделях с дисперсией и конечной скоростью распространения волн* // Теоретическая и математическая физика. – 2025. – Т.224. – №3. – С.538-555.
7. Бахолдин И.Б. *Недиссипативные и диссипативные структуры разрывов в решениях уравнений микрополярной магнитоупругой среды* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2025. – Т.65. – №5. – С.717-728.

УДК 539.42
EDN WWHRKD
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.30

ИНЖЕНЕРНАЯ МОДЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА СОУДАРЕНИЯ ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО УДАРНИКА С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПРЕГРАДОЙ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Головешкин В.А.[1,2], Мягков Н.Н.[2], Беклемишев С.А.[1]

[1]МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Россия
[2]ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается следующая модель. Жесткий цилиндр радиуса a, массы M со скоростью V_i ударяется торцом в бесконечный в поперечном размере слой толщины H. Начальное направление скорости V_i перпендикулярно поверхности слоя. Относительно свойств материала слоя считаем, что его механические свойства описываются идеально жестко пластической моделью с пределом текучести Y и условием несжимаемости. Плотность материала слоя принимаем постоянной и равной. Задача рассматривается в осесимметричной постановке, в цилиндрической системе координат. Начало оси Z находится на недеформированной поверхности, ее направление совпадает с направлением движения ударника. Текущую глубину проникания переднего края цилиндра в слой по отношению к начальной недеформированной поверхности обозначим h. Радиальную и осевую скорости в деформируемой зоне слоя обозначим U_r, V_z.

В рамках идеально жестко пластической модели [1], при наличии осевой симметрии имеем

$$\left(2\sigma_r-\sigma_\varphi-\sigma_z\right)^2+\left(2\sigma_\varphi-\sigma_r-\sigma_z\right)^2+\left(2\sigma_z-\sigma_\varphi-\sigma_r\right)^2+18\sigma_{rz}^2=6Y^2, \quad (1)$$

где Y – предел текучести материала.

Согласно закону течения

$$\varepsilon_{ij}=\omega\cdot\partial\Phi/\partial\sigma_{ij}, \quad (2)$$

где ε_{ij} – составляющие тензора скоростей деформации; $\Phi\left(\sigma_{ij}\right)=0$ – уравнение поверхности текучести (1).

Согласно (1), (2), w – мощность внутренних сил в единице объема равна $w=Y\sqrt{2/3}\sqrt{\left(\varepsilon_r^2+\varepsilon_\varphi^2+\varepsilon_z^2+2\varepsilon_{rz}^2\right)}$, на поверхности разрыва касательной скорости, w_d – мощность внутренних сил на единицу площади поверхности равна $w_d=Y\sqrt{1/3}\left[V\right]$, где $\left[V\right]$ – абсолютная величина разрыва скорости. Материал слоя предполагаем несжимаемым, то есть $\partial U_r/\partial r+U_r/r+\partial V_z/\partial z=0$.

В самом общем случае примем следующую схему процесса деформации. Она показана на рис.1. (Представлена половина осевого сечения системы.)

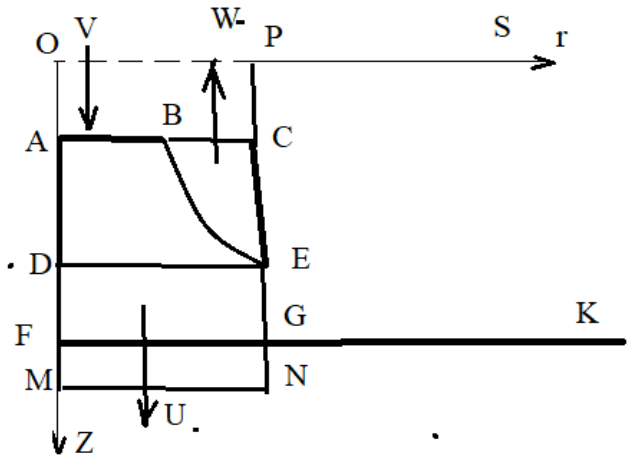


Рис.1. Схема принятого поля скоростей.

Линия *OPS* – граница недеформированного слоя со стороны ударника до момента удара. $OF = H$ – толщина слоя. Линия *FGK* – тыльная граница недеформированного слоя. АВ – линия контакта ударника и преграды. Текущая глубина проникания ударника $OA = h$, текущая скорость равна V, $AB = a$. Зона *ABED* – область постоянных по пространству скоростей деформаций. Принимаем $OD = s$, $DE = b$. Область *BCE* движется как жесткое тело, в направлении противоположном направлению удара со скоростью W. Предполагаем, что движущийся материал слоя, поднявшийся выше контактной поверхности ударника, покидает систему и в дальнейшем движении не рассматривается. Область *DENM* (пробка, выбиваемая из преграды) движется как жесткое тело в направлении удара со скоростью U. Область *FGNM* – часть пробки, выбитая за пределы преграды.

В силу непрерывности нормальной скорости, предположения о постоянстве скоростей деформаций и условия несжимаемости в области *ABED* имеем

$$\begin{aligned} V_z(r;z) &= V + (U-V)(z-h)/(s-h), \\ U_r(r;z) &= -0.5\cdot(U-V)r/(s-h). \end{aligned} \tag{3}$$

Уравнение границы *BE* запишем в виде $z = f(r)$. Из условия непрерывности нормальной скорости на этой границе, с учетом (3), имеем

$$(U-V)rdf/dr + 2V(s-h) + 2(U-V)(f-h) = 2W(s-h). \tag{4}$$

Решая (4) с условием $z = h$ при $r = a$, получаем

$$f = h + (1-a^2/r^2)(W-V)(s-h)/(U-V). \tag{5}$$

Из условия $z = s$ при $r = b$, получаем

$$W = (-Va^2 + b^2U)/(b^2-a^2). \tag{6}$$

С учетом (6) это уравнение может быть представлено в следующем виде

$$z = \left[b^2\cdot s - a^2\cdot h - a^2b^2(s-h)/r^2\right]/(b^2-a^2). \tag{7}$$

Для дальнейшего исследования понадобится значение суммарной мощности внутренних сил. Она состоит из следующих составляющих: W_1 – мощность внутренних сил в области *ABED*, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6 – мощности внутренних сил на поверхностях разрыва *BE*, *AB*, *DE*, *EC*, *CE*. Полная мощность внутренних сил W_p, равная сумме составляющих, согласно (3), (7) может быть представлена в виде

$$W_p = \pi Y a^2 \Psi(\beta, \gamma, U), \tag{8}$$

где

$$\Psi(\beta,\gamma,U)=(V-U)\frac{2\gamma^2}{\gamma^2-1}\ln\gamma+\frac{1}{3\sqrt{3}}(V-U)\frac{2\gamma^3\delta}{(\beta-\alpha)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}(V-U)(\gamma^3-1)\frac{\gamma(\beta-\alpha)}{\delta(\gamma^2-1)^2}+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{\delta}\frac{\gamma(\beta-\alpha)}{(\gamma^2-1)}(V-U)+\frac{2}{\sqrt{3}}\gamma\frac{1}{\delta}(1-2\beta)U,$$

$\alpha=h/H$, $\beta=s/H$, $\gamma=b/a$, $\delta=a/H$. (9)

Из условий постановки следует $0\le\alpha\le\beta\le1$, $\gamma\ge1$. Значения b, s определим из условия минимума полной мощности. Это предположение верно, пока $\beta\le1$. Для достаточно толстой преграды и малых значений проникания естественно предположить на начальных этапах процесса проникания ударника (пока деформируемая зона не достигла тыльной стороны слоя), что $U=0$. Тогда задача сводится к минимизации функции $\Psi(\beta,\gamma)=\Psi(\beta,\gamma,0)$ в области $\alpha\le\beta\le1,\gamma\ge1$.

Из условия $\partial\Psi/\partial\beta=0$, согласно (9), получаем

$$\beta=\alpha+\delta\gamma(\gamma^2-1)\Big/\sqrt{(2\gamma^3+3\gamma^2-5)}. \quad (10)$$

Из условия $d\Psi/d\gamma=0$, согласно (9), (10), после некоторых преобразований, получаем уравнение для определения γ

$$\frac{\gamma\sqrt{(2\gamma^3+3\gamma^2-5)}}{\sqrt{3}}-\frac{\gamma(6\gamma^4+9\gamma^3+11\gamma^2+5\gamma+5)}{3\sqrt{3}(\gamma+1)\sqrt{(2\gamma^3+3\gamma^2-5)}}-\frac{2\gamma}{(\gamma^2-1)}\ln\gamma+\gamma=0. \quad (11)$$

При $\gamma>1$ это уравнение имеет единственное решение $\gamma\approx1,79$.

2. ПРОЦЕСС ПРОНИКАНИЯ В ТОЛСТУЮ ПРЕГРАДУ.

Кинетическая энергия системы состоит из следующих составляющих: E_1 – кинетическая энергия ударника, E_2 – кинетическая энергия деформируемой зоны $ABED$, E_3 – кинетическая энергия жесткой зоны BCE. Полная кинетическая энергия E_f равная $E_f=E_1+E_2+E_3$, согласно (3) равна

$$E_f=0.5MV^2+0.5\pi\rho a^3V^2E_\gamma, \quad (12)$$

где $E_\gamma=\gamma(4\gamma^3+6\gamma^2+5\gamma+5)\Big/\Big(8(\gamma+1)\sqrt{(2\gamma^3+3\gamma^2-5)}\Big)$.

Предполагается, что движущийся материал, поднявшийся выше контактной поверхности ударника, покидают систему и в дальнейшем процессе не участвует. Обозначим $Q=\rho W^2\pi(b^2-a^2)(V-W)/2$ – поток уносимой энергии. С учетом (6)

$$Q=0.5\cdot\rho V^3a^2\pi\gamma^2\Big/(\gamma^2-1)^2=0.5\cdot\rho V^3a^2\pi Q_\gamma, \text{ где } Q_\gamma=\gamma^2\Big/(\gamma^2-1)^2. \quad (13)$$

Уравнение баланса энергии имеет вид

$$dE_f/dt=-W_p-Q. \quad (14)$$

Соотношение (8) для W_p, с учетом (10), представим в виде

$$W_p=\pi Ya^2VW_\gamma, \text{ где } W_\gamma=\frac{2\gamma^2}{\gamma^2-1}\ln\gamma+\frac{4\gamma^2}{3\sqrt{3}}\frac{\sqrt{(2\gamma^2+5\gamma+5)}}{(\gamma+1)\sqrt{\gamma-1}}. \quad (15)$$

Из соотношений (12)-(15) следует

$$\omega \cdot dV/dt = -V^2 - \mu^2, \quad \text{где } \mu^2 = \left(2Ya^2 W_\gamma / \rho^2 Q_\gamma\right),$$
$$\omega = 2M/\left(\rho a^2 \pi Q_\gamma\right) + 2aE_\gamma / Q_\gamma . \tag{16}$$

Дифференциальное уравнение (16) с начальным условием $V = V_0$ при $t = 0$ определяет скорость ударника V как функцию времени. Значение V_0 определяется из закона сохранения энергии в начальный момент времени

$$0.5 \cdot MV_0^2 + 0.5 \cdot \pi\rho a^3 V_0^2 E_\gamma = 0.5 \cdot MV_i^2 \quad \Rightarrow \quad V_0 = \sqrt{M/\left(M + \pi\rho a^3 E_\gamma\right)}V_i .$$

Для дальнейшего анализа более удобно рассматривать скорость как функцию глубины проникания ударника. Имеем

$$d\alpha/dt = V/H . \tag{17}$$

Согласно (16), (17) получаем дифференциальное уравнение

$$\omega_1 V dV = -\left(V^2 + \mu_1^2\right)d\alpha, \tag{18}$$

где $\omega_1 = 2\left(M + \pi\rho a^3 E_\gamma\right)/\left(\rho a^2 H \pi Q_\gamma\right)$, $\mu_1^2 = 2YW_\gamma/\left(\rho Q_\gamma\right)$

с начальным условием $V = V_0$ при $\alpha = 0$. Решая, получаем

$$V^2 = \left(V_0^2 + \mu_1^2\right)\exp\left(-2\alpha/\omega_1\right) - \mu_1^2 . \tag{19}$$

Из условия $V = 0$, определяем конечную безразмерную глубину проникания

$$\alpha_1 = \left(\omega_1/2\right)\ln\left[\left(V_0^2 + \mu_1^2\right)/\mu_1^2\right]. \tag{20}$$

Согласно (10)

$$\beta = \alpha + \delta\alpha_\gamma, \quad \text{где } \alpha_\gamma = \gamma\left(\gamma^2 - 1\right)/\sqrt{\left(2\gamma^3 + 3\gamma^2 - 5\right)}. \tag{21}$$

При условии, что $\beta = \alpha_1 + \delta\alpha_\gamma < 1$ ударник останавливается в преграде и зона пластических деформаций не достигает тыльной стороны слоя. При этих условиях безразмерная глубина внедрения определяется соотношением (20), которое может быть представлено в виде

$$\alpha_1 = \left(a/H\right)\left[E_\gamma/Q_\gamma + M/\left(\rho a^3 \pi Q_\gamma\right)\right]\ln\left(1 + V_0^2/c^2\right), \quad \text{где } c^2 = 2YW_\gamma/\left(\rho Q_\gamma\right). \tag{22}$$

Тогда размерная глубина проникания h^* равна

$$h^* = a\left[E_\gamma/Q_\gamma + M/\left(\rho a^3 \pi Q_\gamma\right)\right]\ln\left(1 + V_0^2/c^2\right). \tag{23}$$

Объем образованного кратера V^*

$$V^* = \pi\gamma^2 a^2 h^* = \pi\gamma^2 a^3\left[E_\gamma/Q_\gamma + M/\left(\rho a^3 \pi Q_\gamma\right)\right]\ln\left(1 + V_0^2/c^2\right). \tag{24}$$

Выброшенная масса слоя m^*

$$m^* = \rho V^* = \rho\pi\gamma^2 a^3\left[E_\gamma/Q_\gamma + M/\left(\rho a^3 \pi Q_\gamma\right)\right]\ln\left(1 + V_0^2/c^2\right). \tag{25}$$

Обратный импульс – суммарный импульс выброшенной массы P^*

$$P^* = -\rho\pi\left(b^2 - a^2\right)H\int_0^{\alpha_1} W(\alpha)\,d\alpha = \rho\pi a^2 H\int_0^{\alpha_1} V(\alpha)\,d\alpha.$$

Окончательно, после вычислений

$$P^* = 2\left(M/Q_\gamma + \pi\rho a^3 E_\gamma/Q_\gamma\right)\left[V_0 - \mu_1 \operatorname{arctg}\left(V_0/\mu_1\right)\right]. \tag{26}$$

Данные соотношения имеют место при $\beta = \alpha_1 + \delta\alpha_\gamma < 1$, то есть

$$a\left[\left(E_\gamma/Q_\gamma + M/\left(\rho a^3 \pi Q_\gamma\right)\right)\ln\left(1 + M/\left(M + \pi\rho a^3 E_\gamma\right)\cdot V_i^2/c^2\right) + \alpha_\gamma\right] < H.$$

Поскольку $\gamma \approx 1.79$, то $E_\gamma \approx 1.12$, $Q_\gamma \approx 0.65$, $\alpha_\gamma \approx 0.99$, $W_\gamma \approx 6.19$.

Рассмотрим ударник массы $M = 10^{-2}$ kg, с начальной скоростью $V_i = 10^3$ m/sec. Радиус ударника $a = 0.5 \cdot 10^{-2}$ m. Преграды рассмотрим двух типов. Первая алюминий плотность $\rho = 2.7 \cdot 10^3$ kg/m^3, предел текучести $Y = 74$ МПа $= 74 \cdot 10^6$ н/м^2. Вторая сталь плотность $\rho = 7.8 \cdot 10^3$ kg/m^3, предел текучести $Y = 800$ МПа $= 800 \cdot 10^6$ н/м^2.

Для алюминиевого слоя $V_0 = 950$ m/sec, $c^2 = 522 \cdot 10^3$ m^2/sec^2, $c = 722$ m/sec.

Глубина внедрения $h^* = 8.13 \cdot 10^{-2}$ m. Объем кратера $V^* = \pi\gamma^2 a^2 h^* = 20.45 \cdot 10^{-6}$ m^3. Выброшенная масса слоя $m^* = \rho V^* \approx 55 \cdot 10^{-3}$ kg. Обратный импульс – суммарный импульс выброшенной массы $P^* \approx 0.96 M V_i$. Модель работает при $H > 8.62 \cdot 10^{-2}$ m.

Для стального слоя $V_0 = 860$ m/sec, $c^2 = 1953 \cdot 10^3$ m^2/sec^2, $c = 1397$ m/sec. Глубина внедрения $h^* = 3.37 \cdot 10^{-2}$ m. Объем кратера $V^* = 8.48 \cdot 10^{-6}$ m^3. Выброшенная масса слоя $m^* \approx 66 \cdot 10^{-3}$ kg. Обратный импульс $P^* \approx 0.78 M W_i$. Модель работает при $H > 2.18 \cdot 10^{-2}$ m.

3. ВЫБИВАНИЕ ПРОБКИ

Рассмотрим случай, когда течение в материале слоя направлено в том же направлении, что и движение ударника. В этом случае мы полагаем, что $W = 0$, и, как следует из (6), $U = V/\gamma^2$. Тогда полная мощность внутренних сил W_p, согласно (8), (9), представляется в виде

$$W_p = \pi Y a^2 \Psi_1(\beta, \gamma), \tag{27}$$

где $\Psi_1(\beta, \gamma) = 2VG(\beta, \gamma)$,

$$G(\beta,\gamma) = \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{\gamma(\gamma^2 - 1)\delta}{(\beta - \alpha)} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{(\gamma^3 - 1)}{\gamma} \frac{(\beta - \alpha)}{\delta(\gamma^2 - 1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\delta} \frac{(1 - \beta)}{\gamma} + \ln\gamma. \tag{28}$$

Из условия $\partial G/\partial\beta = 0$ получаем

$$\beta = \alpha + \delta(\gamma + 1)\gamma / \sqrt{(2\gamma + 1)}. \tag{29}$$

Из условия $\dfrac{\partial G}{\partial \gamma} = 0$, с учетом (29) и некоторых преобразований, имеем уравнение для определения γ вида

$$3\gamma\sqrt{(2\gamma+1)}/(\gamma+1) - 3(1-\alpha)/(\delta\gamma) + 3\sqrt{3} = 0. \tag{30}$$

Соотношение (30) является уравнением для определения γ. Рассмотрим функцию $F(\gamma) = 3\gamma\sqrt{(2\gamma+1)}/(\gamma+1) - 3(1-\alpha)/(\delta\gamma) + 3\sqrt{3}$. Заметим, что $dF/d\gamma > 0$ при $\gamma > 1$. Тогда, если $F(1) = 9\sqrt{3}/2 - 3(1-\alpha)/\delta > 0$, то минимум достигается при $\gamma = 1$.

Условие выхода зоны течения на тыльную сторону слоя при внедрении ударника имеет вид $\beta \geq 1$. Согласно (21), получаем $\beta = \alpha + \delta\alpha_\gamma \geq 1$, где $\alpha_\gamma = 0.99$.

Тогда $F(1)=9\sqrt{3}/2-3(1-\alpha)/\delta \geq 9\sqrt{3}/2-3\alpha_\gamma \geq 0$. Следовательно, минимум достигается при $\gamma=1$.

Отметим, что при $\gamma=1$ данная модель совпадает с моделью Н.А. Слезкина [2].

4. ТОНКАЯ ПРЕГРАДА

Тонкой преградой будем считать такую, когда с самого начала процесса внедрения зона течения выходит на тыльную сторону слоя. Картина течения представлена на рис.2 в сечении, проведенном через ось симметрии.

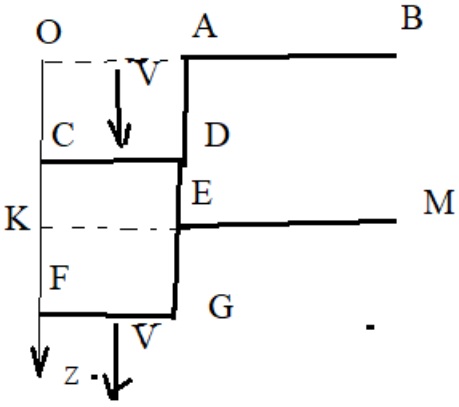


Рис.2. Схема поля скоростей для тонкого слоя.

Условие, что слой тонкий, имеет вид $\beta \geq 1$ при $\alpha=0$. Согласно (21) имеем $\delta\alpha_\gamma \geq 1$. Так как $\alpha_\gamma=0.99$, то с учетом приближенного характера модели, последнее условие можно записать в виде $a \geq H$, где a – радиус ударника, H – толщина слоя.

На рис.2 представлена схема поля скоростей. $CD=a$ – текущая граница ударника, $OC=h$ – текущая глубина внедрения, V – текущая скорость. $AE=H$ – толщина слоя. $CDGF$ – выбиваемая пробка, которая движется как жесткое тело со скоростью V. $DG=H$, $CD=a$ – размеры пробки. $DE=H-h$ – граница контакта пробки со слоем. Полная мощность внутренних сил W_p состоит только из мощности на разрыве скоростей на DE

$$W_p=Y\left(2/\sqrt{3}\right)\pi a^2(1-\alpha)V/\delta, \tag{31}$$

E_1 – кинетическая энергия ударника равна $E_1=0.5MV^2$, кинетическая энергия выбиваемой пробки равна $E_2=0.5\rho\pi a^2HV^2$.

Полную кинетическую энергию E_f, равную $E_f=E_1+E_2$, представим ее виде

$$E_f=0.5\rho\pi a^3\left[M/\left(\rho\pi a^3\right)+1/\delta\right]V^2. \tag{32}$$

Из уравнения баланса энергии $dE_f/dt=-W_p$ и (17) получаем для определения V как функции глубины проникания α следующее дифференциальное уравнение

$$VdV/d\alpha=-(Y/\rho)\left[1/\left(M/\left(\rho\pi a^3\right)+1/\delta\right)\right]\left(2/\sqrt{3}\right)(1-\alpha)/\ \delta^2 \tag{33}$$

с начальным условием $V=V_0$ при $\alpha=0$, где $V_0=V_i\sqrt{M/\left(M+\rho\pi a^2H\right)}$.

Интегрируя (33), получаем

$$V^2 = V_0^2 - (Y/\rho)\left[1/\left(M/\left(\rho\pi a^3\right)+1/\delta\right)\right]\left(2/\sqrt{3}\right)\left(2\alpha-\alpha^2\right)/\delta^2. \qquad (34)$$

Решение (34) имеет место при $\alpha \le 1$. Возможны два варианта.

Первый вариант. Начальная скорость мала, такова, что $V_0^2 - (Y/\rho)\left[1/\left(M/\left(\rho\pi a^3\right)+1/\delta\right)\right]\left(2/\sqrt{3}\right)/\delta^2 < 0$, то есть $E_i < Y\left(1/\sqrt{3}\right)\pi a H^2$, где $E_i = 0.5MV_i^2$ – начальная кинетическая энергия ударника. При этом условии ударник тормозится в преграде при значении α, определяемом из уравнения (34). Соответственно глубина внедрения ударника равна

$$h = \alpha H = H - \sqrt{H^2 - \sqrt{3}E_i/(Y\pi a)}. \qquad (35)$$

Размер образованной выпуклости на тыльной стороне слоя h_d равен $h_d = h$.

В случае $E_i > Y\left(1/\sqrt{3}\right)\pi a H^2$ ударник пробивает преграду. В момент $\alpha = 1$ он имеет скорость V_f, равную $V_f^2 = V_0^2 - (Y/\rho)\left[1/\left(M/\left(\rho\pi a^3\right)+1/\delta\right)\right]\left(2/\sqrt{3}\right)/\delta^2$, кинетическую энергию E_{fin}, равную $E_{fin} = 0.5MV_f^2$, импульс P_{fin}, равный $P_{fin} = MV_f$.

Энергия выбитого из слоя осколка E^* равна $E^* = 0.5\pi\rho a^2 H V_f^2$, импульс P^*, равный $P^* = \pi\rho a^2 H V_f$.

Масса ударника $M = 10^{-2}$ kg. Радиус ударника $a = 0.5\cdot 10^{-2}$ m. Алюминиевая преграда. Толщина преграды $H = 0.5\cdot 10^{-2}$ m. Значение начальной скорости, при которой он не пробивает преграду, определяется неравенством $V_i \le 57$ m/sec. Пусть $V_i = 40$ m/sec. Глубина проникания $h = 0{,}14\cdot 10^{-2}$ m. Размер образованной выпуклости на тыльной стороне слоя $h_d = h = 0.14\cdot 10^{-2}$ m.

Стальная преграда. Толщина преграды $H = 0.5\cdot 10^{-2}$ m. Значение начальной кинетической скорости ударника, при которой он не пробивает преграду, определяется $V_i \le 190$ m/sec. Пусть $V_i = 40$ m/sec. Тогда глубина проникания $h = 0{,}01\cdot 10^{-2}$ m. Размер образованной выпуклости на тыльной стороне слоя $h_d = h = 0.01\cdot 10^{-2}$ m.

Алюминиевая преграда. Ударник массы $M = 10^{-2}$ kg. Радиус ударника $a = 0.5\cdot 10^{-2}$ m. Толщина преграды $H = 0.5\cdot 10^{-2}$ m. Значение начальной кинетической энергии ударника E_i больше той, при котором он пробивает преграду. Пусть начальная скорость ударника $W_i = 10^3$ m/sec. В момент пробития он имеет скорость V_f, равную $V_f = 0.946\cdot 10^3$ m/sec, кинетическую энергию E_{fin}, $E_{fin} = 0.89E_i$, импульс $P_{fin} \approx 0.946P_i$. Энергия выбитого из слоя осколка E^* равна $E^* \approx 0.094E_i$, его импульс $P^* = \pi\rho a^2 H V_f \approx 0.1\mathrm{P}_i$.

Стальная преграда. Толщина преграды $H = 0.5\cdot 10^{-2}$ m. Значение начальной кинетической энергии ударника E_i больше той, при котором он пробивает преграду. Пусть начальная скорость ударника $V_i = 10^3$ m/sec. В момент пробития он имеет скорость V_f, равную $V_f = 0.857\cdot 10^3$ m/sec, кинетическую энергию

$E_{fin} = 0.734E_i$, импульс $P_{fin} \approx 0.857P_i$. Энергия выбитого из слоя осколка $E^* \approx 0.224E_i$, его импульс $P^* = \pi\rho a^2 HV_f \approx 0.262\,\mathrm{P}_i$.

5. ПРЕГРАДА СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ

Преградой средней толщины называем такую, что на начальном этапе процесса внедрения зона течения не достигает тыльной стороны слоя, а на заключительном выходит на тыльную сторону. Это условие, согласно (21), имеем вид $\beta = \delta\alpha_\gamma < 1$, где $\alpha_\gamma \approx 0.99$. С учетом приближенного характера модели, последнее условие можно записать в виде $H \geq a$, где a – радиус ударника, H – толщина слоя. Условие выхода зоны пластического течения на тыльную сторону слоя имеет вид $\beta = 1$. Согласно (21) это условие примет вид $\beta = \alpha + \delta\alpha_\gamma = 1$. С учетом приближенного характера модели, имеем следующее условие $\alpha + \delta = 1$. Связь скорости внедрения с величиной α определяется соотношением (19)

$$V^2 = \left(V_0^2 + \mu_1^2\right)\exp\left(-2\alpha/\omega_1\right) - \mu_1^2. \tag{36}$$

Так как $V_0^2 = 2E_i\Big/\left(M + \pi\rho a^3 E_\gamma\right)$, то соотношение (36) может быть представлено в виде $V^2 = \left[2E_i\Big/\left(M + \pi\rho a^3 E_\gamma\right) + \mu_1^2\right]\exp\left(-2\alpha/\omega_1\right) - \mu_1^2$. Тогда условие достижения зоной пластического течения внешней границы слоя имеет вид

$$E_i > E_{pr} = \frac{YW_\gamma M}{\rho Q_\gamma}\left(1 + \frac{\pi\rho a^3}{M}E_\gamma\right)\left[\exp\left(\frac{1}{\delta\left(1 + \pi\rho a^3 E_\gamma/M\right)}\left(1-\delta\right)\frac{\pi\rho a^3}{M}Q_\gamma\right) - 1\right]. \tag{37}$$

Скорость ударника в момент выхода зоны пластического течения на тыльную сторону слоя V_{pr} определяется соотношением

$$V^2 = \left(V_0^2 + \mu_1^2\right)\exp\left(-2\left(1-\delta\right)/\omega_1\right) - \mu_1^2. \tag{38}$$

После достижения зоной пластического течения внешней границы слоя движение происходит по схеме выдавливания пробки радиуса a и толщиной примерно равной a. То есть, мы фактически имеем задачу внедрения ударника радиуса a, массы M, с начальной скоростью V_{pr} в слой толщины a. Рассмотрим данную задачу как независимую. Полагая $H = a$, $\delta = 1$, получаем, согласно (33), для определения V как функции α дифференциальное уравнение

$$VdV/d\alpha = -\left(Y/\rho\right)\left[1\Big/\left(M\Big/\left(\rho\pi a^3\right) + 1\right)\right]\left(2/\sqrt{3}\right)\left(1-\alpha\right) \tag{39}$$

с начальным условием $V = V_{00}$ при $\alpha = 0$, где начальная скорость V_{00} определяется из условия сохранения энергии в момент образования пробки $0.5\left(M + \rho\pi a^3\right)V_{00}^2 = 0.5V_{pr}^2\left(M + \rho\pi a^3/3\right)$. При этом в баланс энергии включаем лишь кинетическую энергию, обусловленную лишь той составляющей скорости пробки, которая совпадает с направлением удара.

Таким образом,

$$V_{00} = V_{pr}\sqrt{\left(M + \rho\pi a^3/3\right)\Big/\left(M + \rho\pi a^3\right)}. \tag{40}$$

Решая (39), имеем

$$V^2 = V_{00}^2 - (Y/\rho)\left[1\Big/\left(M\Big/\left(\rho\pi a^3\right)+1\right)\right]\left(2/\sqrt{3}\right)\left(2\alpha-\alpha^2\right). \qquad (41)$$

Возможны два варианта развития событий.

Первый вариант. Скорость V_{00} достаточно мала, такая, что $V_{00}^2 - (Y/\rho)\left[1\Big/\left(M\Big/\left(\rho\pi a^3\right)+1\right)\right]\left(2/\sqrt{3}\right) < 0$. Тогда при некотором значении $\alpha = \alpha^+$ скорость ударника становится нулевой. Значение $\alpha = \alpha^+$ определяется из соотношения (41), полагая $V = 0$: $\alpha^+ = 1 - \sqrt{1 - \left(\sqrt{3}/2\right)\cdot\left(\rho V_0^2/Y\right)\left[M\Big/\left(\rho\pi a^3\right)+1\right]}$.

Тогда в слое имеем цилиндрический кратер радиуса $1.79a$, до глубины $H-a$, и с глубины $H-a$ до $H-a+\alpha^+ a$ цилиндрический кратер радиуса a. На противоположной стороне образуется выпуклость высотой $\alpha^+ a$.

Если $V_{00}^2 - (Y/\rho)\left[1\Big/\left(M\Big/\left(\rho\pi a^3\right)+1\right)\right]\left(2/\sqrt{3}\right) > 0$, то ударник пробивает преграду и на выходе имеет скорость $V = V^+$, где $V^+ = \sqrt{V_{00}^2 - (Y/\rho)\left(1\Big/\left(M\Big/\left(\rho\pi a^3\right)+1\right)\right)\left(2/\sqrt{3}\right)}$.

Его конечный импульс P^+ равен $P^+ = MV^+$, конечная энергия E^+ равна $E^+ = 0.5MV^{+2}$.

Выбитый из преграды фрагмент имеет массу m^+, равную $m^+ = \pi\rho a^3$, скорость $V = V^+$, импульс

$$p^+ = \pi\rho a^3 V^+,$$

энергию e^+, равную $e^+ = \frac{1}{2}\pi\rho a^3 V^{+2}$. Обратный импульс

$$P^* = 2\left(M/Q_\gamma + \pi\rho a^3 E_\gamma/Q_\gamma\right)\left[V_0 - V_{pr} - \mu_1 \operatorname{arctg}\left(V_{00}/\mu_1\right) + \mu_1 \operatorname{arctg}\left(V_{pr}/\mu_1\right)\right].$$

Рассмотрим ударник массы $M = 10^{-2}$ kg, с начальной скоростью $V_i = 10^3$ m/sec. Радиус ударника $a = 0.5\cdot 10^{-2}$ m. Начальная энергия ударника $E_i = 5\cdot 10^3$ kg$\cdot$m^2/sec^2.

Для алюминиевого слоя толщиной $H = 8.0\cdot 10^{-2}$ m $\delta = a/H = 0.0625$. Скорость ударника при достижении зоной течения внешней стороны слоя $V_{pr} = 2\cdot 10^2$ m/sec. Начальная скорость V_{00} после образования пробки равна $V_{00} = 194$ m/sec. На выходе ударник имеет скорость $V = V^+$, где $V^+ \approx 1.86\cdot 10^2$ m/sec. Его конечный импульс P^+ равен $P^+ = MV^+ = 1.86$ kg$\cdot$m/sec, его конечная энергия E^+ равна $E^+ = 0.5MV^{+2} = 1.73\cdot 10^2$ kg$\cdot$m^2/sec^2. Выбитый из преграды фрагмент имеет массу, равную $m^+ = \pi\rho a^3 = 1.06\cdot 10^{-3}$ kg, скорость $V = V^+$, импульс $p^+ = 1.97\cdot 10^{-1}$ kg$\cdot$m/sec, энергию e^+, равную $e^+ = 0.18\cdot 10^2$ kg$\cdot$m^2/sec^2. Обратный импульс $P^* = 9.5\cdot$ kg$\cdot$m/sec.

Второй вариант. Рассмотрим ударник массы $M = 10^{-2}$ kg, с начальной скоростью $V_i = 10^3$ m/sec. Радиус ударника $a = 0.5\cdot 10^{-2}$ m. Преграда сталь. Для стального слоя толщиной $H = 3.0\cdot 10^{-2}$ m $\delta = 0.167$. Скорость ударника при достижении зоной течения внешней стороны слоя V_{pr}, где $V_{pr} = 3.95\cdot 10^2$ m/sec. Начальная скорость V_{00}, после образования пробки равна $V_{00} = 362$ m/sec. Ударник

пробивает преграду и на выходе, имеет скорость $V = V^+$, где $V^+ \approx 2.26 \cdot 10^2$ m/sec. Его конечный импульс равен $P^+ = 2.26\,\mathrm{kg \cdot m/sec}$, его конечная энергия E^+ равна $E^+ = 2.55 \cdot 10^2\ \mathrm{kg \cdot m^2/sec^2}$. Выбитый из преграды фрагмент имеет массу m^+, равную $m^+ = 3.06 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}$, скорость $V = V^+$, импульс $p^+ = 6.9 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{kg \cdot m/sec}$, энергию e^+, равную $e^+ = 0.78 \cdot 10^2\ \mathrm{kg \cdot m^2/sec^2}$. Обратный импульс $P^* = 2.1 \cdot \mathrm{kg \cdot m/sec}$.

ВЫВОДЫ

Предложена инженерная модель исследования процесса соударения жесткого цилиндрического ударника массы M, радиуса a, с начальной скоростью V_i, со слоем конечной толщины H в направлении удара. Слой – идеально жестко пластический несжимаемый материал с пределом текучести Y и плотностью ρ.

Модель показывает три возможных случая развития процесса.

Первый случай – слой тонкий – зона пластического течения с самого начала процесса выходит на внешнюю сторону слоя. В зависимости от начальной скорости ударника этому случаю соответствуют два варианта развития процесса.

Вариант 1. При достаточно большой начальной скорости ударник пробивает слой.

Вариант 2. При достаточно малой начальной скорости ударник застревает в слое и на тыльной стороне слоя образуется выпуклость.

Второй случай – толстая преграда (по отношению к начальной кинетической энергии ударника) – в процессе движения ударника до его торможения зона пластического течения не выходит на внешнюю границу слоя.

Третий случай – преграда средней толщины – когда в начале взаимодействия зона пластического течения не проявляется на тыльной стороне слоя, а на заключительном этапе достигает тыльной стороны.

Возможны два варианта развития событий:

1. Скорость достаточно мала, что при некотором значении глубины проникания скорость ударника становится нулевой. Тогда в слое образуется кратер, а на противоположной стороне образуется выпуклость.

2. При достаточно большой скорости ударник пробивает преграду.

Модель позволяет получить сравнительно простые оценки всех необходимых параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л.М. *Основы теории пластичности*. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
2. Сагомонян А.Я. *Проникание*. – М.: Издательство Московского университета, 1974. – 298 с.

УДК 531.8:534.1:534.16:629.7.018:629.78
EDN WXSALI
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.31

ФОРМИРОВАНИЕ РЕЖИМА ВИБРОУДАРНОГО НАГРУЖЕНИЯ ПРИ НАЗЕМНОЙ ОТРАБОТКЕ ИЗДЕЛИЙ РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ

Москвина И.Н.

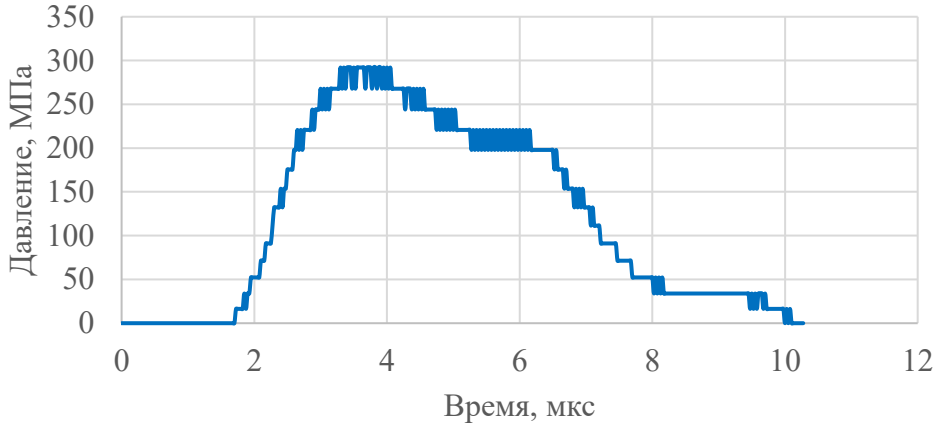
ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

Излагается подход к использованию компьютерного моделирования для отработки режимов испытаний конструкций ракетно-космической техники на воздействие виброударных нагрузок (виброудар), образующих особый класс нестационарных сил, широко распространенных в практике эксплуатации. Характерной особенностью виброудара является его существенная нестационарность и малое время действия с широким частотным спектром в диапазоне от 100 до 10000 Гц и с высокой интенсивностью до 10^3 g [1-3]. В связи с этим лабораторные испытания изделий проводятся на специальных виброударных стендах или установках, использующих в качестве первичного источника воздействия энергию взрыва ВВ. Специфика испытаний на виброудар требует практически для каждого отдельного случая создавать установку, которая включает в себя источник воздействия в виде взрывной камеры и конструкцию, передающую воздействие от нагружающего устройства к объекту испытаний (испытательную оснастку). В совокупности это представляет собой сложную систему с собственным частотным спектром, что формирует сложную задачу: прогнозирование нагрузок, приходящих на объект испытаний. От эффективного решения этой задачи зависит качество воспроизведения испытательных режимов и объем отладочных испытаний, который часто превосходит объем самих испытаний. Вариантом решения такой задачи является разработка и применение методов прогнозирования режимов нагружения с использованием компьютерных (цифровых) моделей систем вида: «источник нагружения – испытательный стенд – объект испытаний» [1].

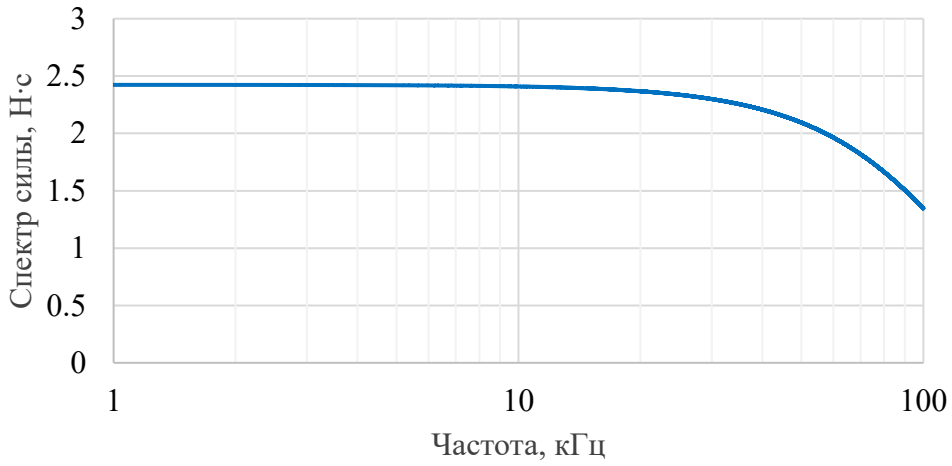
В работе рассматриваются результаты разработки математической модели, в основе которой лежит определение передаточных функций типовых элементов оснастки, позволяющих прогнозировать эволюцию спектрального состава виброударного импульса в ходе от взрывного источника энергии к объекту испытаний, а также контролировать ударный спектр испытательного воздействия, обычно задаваемый в технических заданиях на испытания. Метод иллюстрируется на примере переходного звена в виде прямолинейного упругого стержня, кольцевого элемента и их комбинации [2,3].

Одним из вариантов создания виброудара с контролируемыми параметрами является использование взрывных методов. Путем подрыва ВВ в полуоткрытой камере создается первичная нагрузка, преобразуемая в виброимпульс посредством механических резонаторов, собственный спектр которых контролируется, и формируется кратковременное, но вибрационное воздействие на объект испытаний. Для анализа преобразования первичной нагрузки и подбора резонаторов, формирующих заданный испытательный режим, исходным является

спектральный состав первичного воздействия [2,3]. Чтобы получить спектральные характеристики, экспериментальные временные зависимости результирующей силы, рассчитанной по измеренным давлениям в камере, подвергаются Фурье-преобразованию (рис.1).



а



б

Рис.1. а) изменение давления под взрывной камерой; б) спектр Фурье силы, действующей на оснастку.

В нормируемом диапазоне до 5…10 кГц частотное наполнение практически для всех исследованных экспериментально процессов нагружения. В ходе анализа виброудара этот факт дает возможность пренебречь реальной зависимостью силы (давления) от времени и считать первичное нагружение импульсным с равномерным спектром в диапазоне до 10 кГц (ограниченный белый шум).

Рассматривается прямолинейный элемент оснастки, передающий первичное апериодическое воздействие к объекту испытаний. Он представляет собой набор из N-го количества стержней, соединенных последовательно, обладающими различными геометрическими и механическими характеристиками. К левому торцу стержня прикладывается гармоническая сила $Pe^{i\omega t}$, также на левом торце стержня $(x=0)$ сосредоточена масса взрывной камеры $M_{кам}$, формирователя первичного апериодического воздействия. На правом $(x=l)$ стержень контактирует

с упругим упором с жесткостью K, имитирующим реакцию объекта испытаний (рис.2).



Рис.2. Расчетная схема составного прямолинейного переходного элемента.

При использовании однородных прямолинейных стержней в качестве элемента, передающего нагрузку от камеры, возникает сложность насыщения спектра виброудара. Первая собственная частота продольных колебаний такого стержня составляет более 1 кГц, а следующие частоты кратны этой величине. Как следствие передаточная функция не перекрывает необходимую полосу частот, так как характеризуется набором редких пиков. Чтобы решить данную проблему предлагается использовать составной стержень, состоящий из набора участков, изготовленных из материалов с более низким акустическим импедансом. Это позволит получить пики в области низкой части спектра и «уплотнить» их.

Ниже приводится способ оценки изложенного подхода и метод расчета передаточных характеристик, не зависящий от количества элементов составного стержня. Уравнения колебаний для каждой части составного стержня

$$Bu'' = m\ddot{u}.$$

В данном случае $B = EF(1+2i\beta)$, $m = \rho F$, 2β – коэффициент демпфирования. Используется метод начальных параметров в матричной форме [4]. Рассчитывая переходную матрицу S для каждого из N стержней и используя условия сопряжения на стыках: $\mathbf{q}_n(l) = \mathbf{q}_{n+1}(0)$, $n=1,\ldots,N-1$, получим переходную матрицу всей цепочки равную произведению переходных матриц ее участков найдем: $S = S_N S_{N-1} \ldots S_1$, следовательно, устанавливается связь между векторами состояния на левой и правой границах $\mathbf{q}_N(l_N) = S\mathbf{q}_1(0)$, а передаточная функция по ускорению на правом торце: $\Phi_{\ddot{W}}(\omega) = \dfrac{\omega^2}{|S_{21} + S_{22}K|}$.

Приведем пример расчета стержня, состоящего из пяти участков, которые имеют различные акустические импедансы, показанные на рис.3. Здесь представлены два варианта чередования импедансов внутренних стержней.

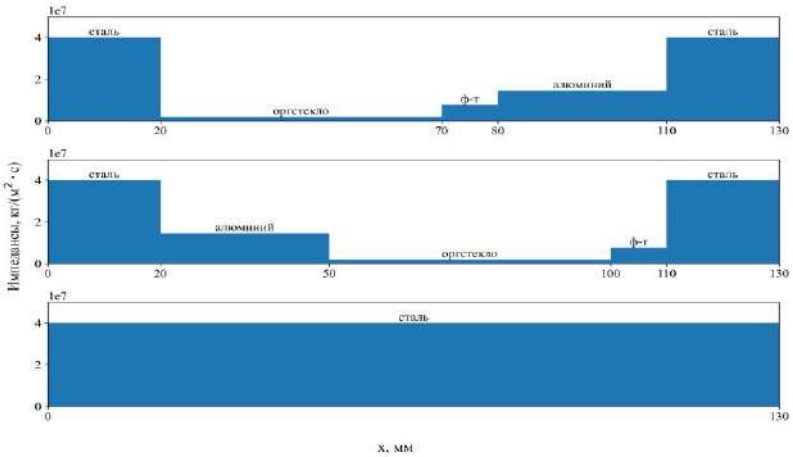


Рис.3. Акустические импедансы стержней, составляющих прямолинейный передаточный элемент.

На рис.4 представлены результаты расчета ускорений на левом торце. Зеленая линия – однородный стержень. Синяя и красная – составные стержни, показанные на рис.3. Основной результат состоит в том, что применение составного стержня с различающимися по характеристикам участками позволяет насытить спектр создаваемого виброимпульса резонансными пиками. Стоит отметить, что даже чередование участков (рис.3) дает эффект.

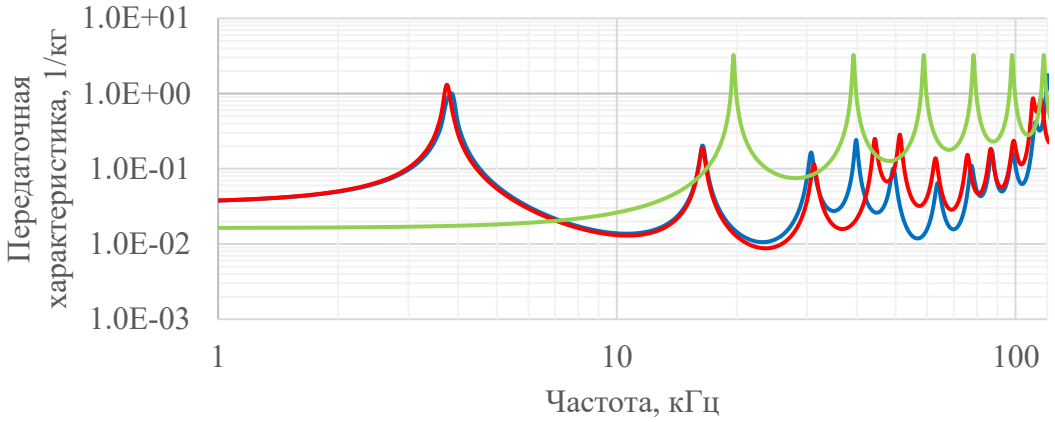


Рис.4. Частотная зависимость ускорения на правом торце прямолинейного элемента —— – однородный стальной стержень $l = 130$ мм; —— – составной стержень с чередованием: сталь ($l_1 = 20$ мм), алюминий ($l_4 = 30$ мм), стекло ($l_2 = 50$ мм), фторопласт ($l_3 = 10$ мм), сталь ($l_5 = 20$ мм); —— – составной стержень с чередованием: сталь ($l_1 = 20$ мм), стекло ($l_2 = 50$ мм), фторопласт ($l_3 = 10$ мм), алюминий ($l_4 = 30$ мм), сталь ($l_5 = 20$ мм).

Далее рассматривается элемент оснастки в форме кольца (рис.5). В сечении $\varphi = \pi$ кольцо контактирует с упором жесткостью k, имитирующим реакцию объекта испытаний, а в сечении $\varphi = 0$ прикладывается сосредоточенная гармоническая сила $Pe^{i\omega t}$. Ввиду симметрии системы относительно координаты φ предлагается рассмотреть половину кольца $0 < \varphi < \pi$, тогда с учетом симметрии прикладывается половина внешней силы [3]. Само кольцо характеризуется погонной массой m, продольной жесткостью B и изгибной жесткостью D. Демпфирование в системе вводится согласно модели внутреннего трения, где коэффициент демпфирования η – величина порядка декремента колебаний конструкции.

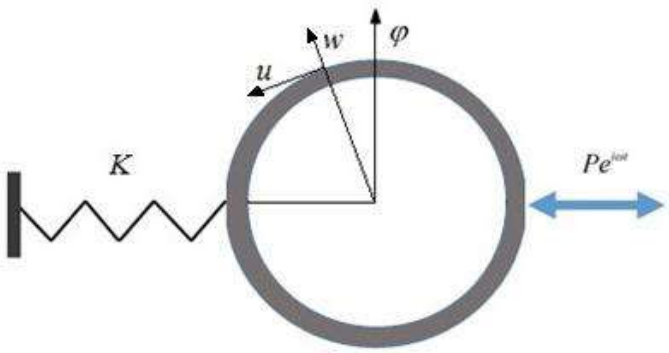


Рис.5. Расчетная схема кольцевого элемента.

Уравнения движения и граничные условия

$$m\ddot{u} = \frac{1}{R}\left(T' + Q\right),\ m\ddot{w} = \frac{1}{R^2}M'' - \frac{1}{R}T,\ R \text{ – радиус нейтральной оси}$$

$$\varphi = 0: \quad u = 0, \quad w' = 0, \quad \frac{Pe^{i\omega t}}{2} = -\frac{B\delta^2}{R^3}w''',$$

$$\varphi = \pi: \quad u = 0, \quad w' = 0, \quad \frac{Kw}{2} = -\frac{B\delta^2}{R^3}w''',$$

$\delta = \sqrt{J/F} = \varepsilon R$ – радиус инерции сечения.

В этом случае общее решение задачи составляется не формальным объединением частных решений, а путем «конструирования» решения с разделением на внутреннее (не возрастающее) и два краевых эффекта. В данном случае внутреннее решение составляется из частных $\psi_{2,3,4,5} = \exp\left(\lambda_{2,3,4,5}\varphi\right)$, отвечающих «почти мнимым» волновым числам $\lambda_{2,3,4,5}$

$$W_0 = C_2\psi_2 + C_3\psi_3 + C_4\psi_4 + C_5\psi_5.$$

Окончательно

$$W = \sum_{k=1}^{6} C_k\psi_k\left(\varphi\right), \quad U = \sum_{k=1}^{6} C_k\gamma_k\psi_k\left(\varphi\right).$$

Постоянные C_k определяются, как обычно, из граничных условий. Здесь $\gamma_k = -\lambda_k\left(1 - \varepsilon^2\lambda_k^2\right)\Big/\left(\mu^2 + \lambda_k^2\right)$ – коэффициенты распределения, определяющие соотношение между U и W.

Рассмотрим реализацию методики на примере расчёта передаточной функции элемента, представляющего собой стальное кольцо радиуса $R = 1$ м с квадратным сечением площадью $S = 0{,}01$ м^2 (демпфирование $\eta = 0{,}01$; жёсткость пружины $K = 1 \cdot 10^{10}$ Н/м). На рис.6 показаны передаточные функции сила – ускорение. Функции приводятся для различных сечений: $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$, $\varphi = \pi$.

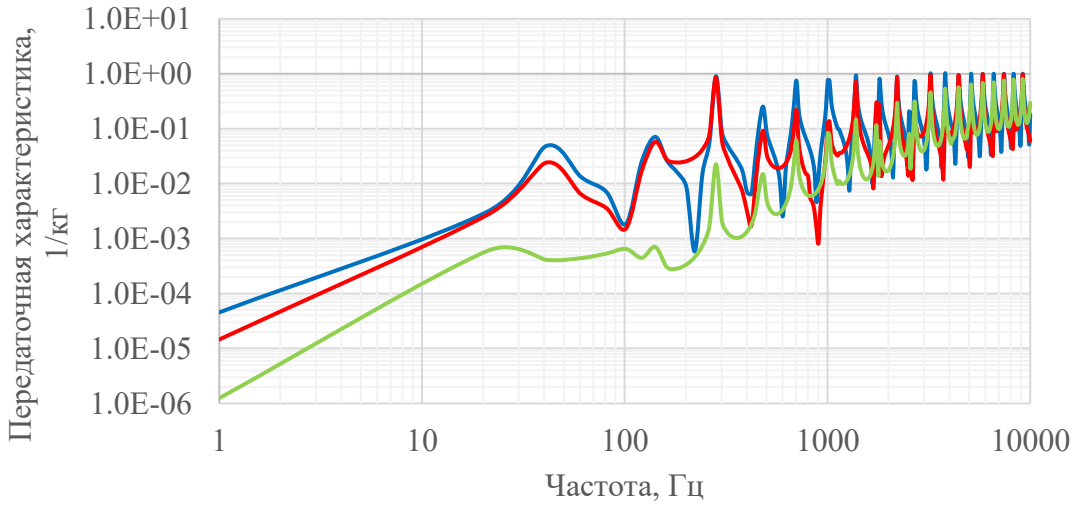


Рис.6. Передаточные функции сила-ускорение в контрольных сечениях кольца. ——, ——, —— – $\varphi = 0;\ \pi/2;\ \pi$ соответственно.

К рассмотрению предлагается система из приведенных выше элементов: кольца и двух диаметрально противоположных стержней, к каждому из которых прикладываются силы (рис.7).

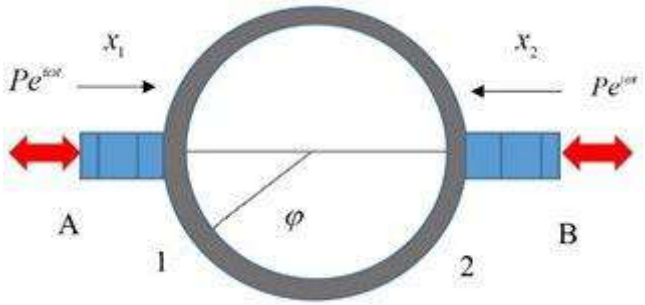


Рис.7. Схема системы кольцевого и прямолинейных элементов.

Для удобства изложения параметрам левого и правого стержня присваиваются индексы 1 и 2, а параметры кольца – без индексов.

Граничные условия

$$T_1(0) = -P/2, \quad T_2(0) = -P/2.$$

Условия сопряжения для стержня с кольцом

$$u_1(l_1) = -W(0), \quad W'(0) = 0, \quad U(0) = 0, \quad T_1(l_1) = -Q(0),$$
$$u_2(l_2) = -W(\pi), \quad W'(\pi) = 0, \quad U(\pi) = 0, \quad T_2(l_2) = -Q(\pi).$$

Переходные матрицы $S^{1,2}$ и соотношения для стержней считаем известными. Исключая в $u_{1,2}(0)$, найдем усилия в сечениях стержней, контактирующих с кольцом; при этом

$$T_{1,2}(l_{1,2}) = \left[\det S^{1,2} T_{1,2}(0) + S_{21}^{1,2} u_{1,2}(l_{1,2})\right] \Big/ S_{11}^{1,2}$$

или, используя полученные для стержней соотношения, можно записать силу на стыке следующим образом

$$T_{1,2}(l_{1,2}) = -\left[\det S^{1,2} \frac{P}{2} + S_{21}^{1,2} W(0,\pi)\right] \Big/ S_{11}^{1,2}.$$

Оставшиеся условия сопряжения дают систему уравнений для определения шести постоянных интегрирования

$$\sum_{k=1}^{6} C_k \psi_k'(0) = 0, \quad \sum_{k=1}^{6} C_k \gamma_k \psi_k(0) = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{6} C_k \left[\psi_k(0) + D\psi_k'''(0)\right] = \frac{\det S^1}{2S_{21}^1} P,$$
$$\sum_{k=1}^{6} C_k \psi_k'(\pi) = 0, \quad \sum_{k=1}^{6} C_k \gamma_k \psi_k(\pi) = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{6} C_k \left[\psi_k(\pi) + D\psi_k'''(\pi)\right] = \frac{\det S^2}{2S_{21}^2} P.$$

На рис.8 показаны передаточные функции сила – ускорение. Функции приводятся для сечений: $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$, $\varphi = \pi$.

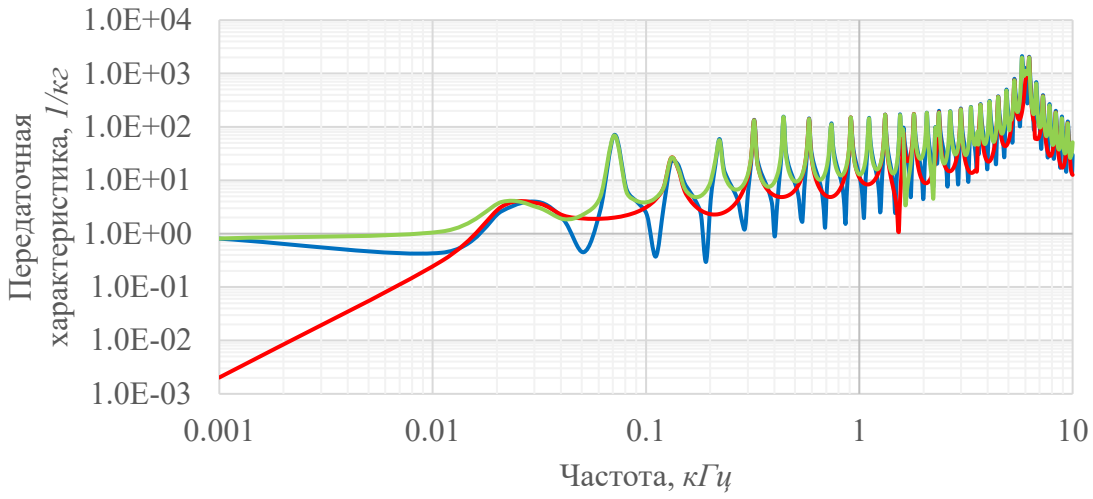


Рис.8. Передаточные функция сила-ускорение в сечениях кольца. ——, ——, —— – $\varphi = 0;\ \pi/2;\ \pi$ соответственно.

Таким образом, в работе изложена методика прогнозирования режима виброударного нагружения объекта испытаний с использованием взрывного источника первичной силы и ее передачи через упругий элемент испытательной оснастки к объекту испытаний, в основу которой положено определение передаточных функций упругих элементов испытательной оснастки, трансформирующих апериодическую первичную силу в «виброимпульс», характеризуемый своим Фурье-спектром, а также применение составного стержня с различающимися по характеристикам участками, посредством которого представляется возможным насыщение спектра создаваемого виброимпульса резонансными пиками. Представлена общая методика применительно к комбинации из переходного звена в виде прямолинейного и кольцевого стержней, на основе методик построены зависимости сила-ускорение в контрольных сечениях элементов и их комбинации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Комаров И.С., Фельдштейн В.А. *Методика прогнозирования динамических характеристик и испытательных режимов, реализуемых виброударными стендами взрывного действия* // Ракетная техника и космонавтика. – 2022. – Вып.1(36).
2. Москвина И.Н., Онучин Е.С., Фельдштейн В.А. *Прогнозирование режимов виброударного нагружения при испытаниях крупногабаритных изделий ракетно-космической техники* // Космонавтика и ракетостроение. – 2024. – Вып.3(136). – С.61-70.
3. Денисов Е.А., Москвина И.Н., Онучин Е.С., Фельдштейн В.А. *К разработке методики прогнозирования испытательных режимов виброударного нагружения при отработке крупногабаритных изделий ракетно-космической техники* // Космонавтика и ракетостроение. – 2025. – Вып.3(140). – С.69-78.
4. Бабаков И.М. *Теория колебаний. 4-е изд., испр*. – М.: Дрофа, 2024. – 591 с.

УДК 539.31
EDN WZSMBC
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.32

ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ПО НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Никифоров А.В.[1], Сердюк Д.О.[1,2], Федотенков Г.В.[1,2]

[1]ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия
[2]МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Объектом исследования является тонкая упругая неограниченная анизотропная цилиндрическая оболочка постоянной толщины h с упруго-инерционным заполнителем. В момент времени $t = 0$ на боковую поверхность оболочки воздействует нестационарное нормальное давление $p(\alpha, z, t)$ с переменной по координате и времени амплитудой. Движение оболочки рассмотрено в цилиндрической системе координат (рис.1).

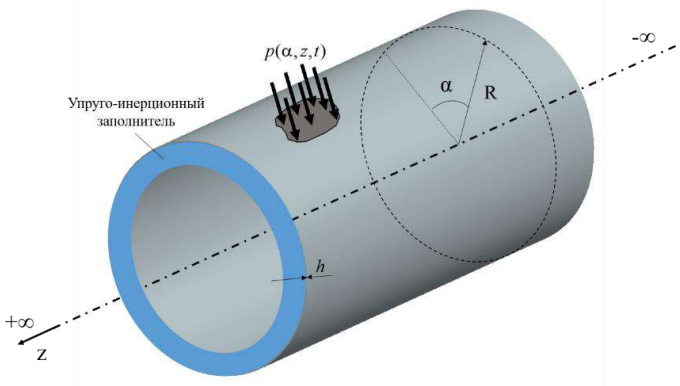


Рис.1. Постановка задачи.

Материал оболочки характеризуется девятью независимыми упругими постоянными c_{11}, c_{12}, c_{16}, c_{22}, c_{26}, c_{44}, c_{45}, c_{55}, c_{66} с симметрией относительно касательной плоскости к срединной поверхности в каждой ее точке. Упруго-инерционный заполнитель характеризуется коэффициентом жесткости c и массовым коэффициентом m_f.

В работе [1] представлены гипотезы для ортотропных пластин. Основная идея этих гипотез заключается в возможности исследовать по отдельности влияние изгиба и сдвига пластины в нормальное перемещение. Обобщение этих идей на цилиндрические оболочки [2] приводит к следующим уравнениям движения в перемещениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} &= K_{11}(u_\alpha) + K_{12}(u_z) + K_{13}(w_b) + K_{14}(w_s), \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= K_{21}(u_\alpha) + K_{22}(u_z) + K_{23}(w_b) + K_{24}(w_s), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^4 w_b}{\partial t^2\partial\alpha^2}+\frac{\partial^4 w_b}{\partial t^2\partial z^2}=K_{31}\left(u_\alpha\right)+K_{32}\left(u_z\right)+K_{33}\left(w_b\right)+K_{34}\left(w_s\right),$$
$$\frac{\partial^2\left(w_b+w_s\right)}{\partial t^2}=K_{41}\left(u_\alpha\right)+K_{42}\left(u_z\right)+K_{43}\left(w_b\right)+K_{44}\left(w_s\right)+\frac{p}{\rho h+m_f}.$$

Здесь K_{ij} – дифференциальные операторы следующего вида

$$K_{11}=\frac{1}{\rho h}\left[\frac{c_{11}}{R^2}\eta\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial\alpha^2}+\frac{2hc_{16}}{R}\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial\alpha\partial z}+hc_{66}\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z^2}-\frac{hk^2c_{55}}{R^2}u_\alpha\right],$$
$$K_{12}=\frac{1}{\rho h}\left[\frac{c_{16}}{R^2}\eta\frac{\partial^2 u_z}{\partial\alpha^2}+\frac{h}{R}\left(c_{12}+c_{66}\right)\frac{\partial^2 u_z}{\partial\alpha\partial z}+hc_{26}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right],$$
$$K_{13}=\frac{1}{\rho h}\left[\frac{c_{11}}{R^2}\eta\frac{\partial w_b}{\partial\alpha}+\frac{Ic_{11}}{R^4}\frac{\partial^3 w_b}{\partial\alpha^3}+\frac{Ic_{12}}{R^2}\frac{\partial^3 w_b}{\partial\alpha\partial z^2}+\frac{2Ic_{16}}{R^3}\frac{\partial^3 w_b}{\partial\alpha^2\partial z}+\frac{hc_{16}}{R}\frac{\partial w_b}{\partial z}\right],$$
$$K_{14}=\frac{1}{\rho h}\left[\frac{1}{R^2}\left[c_{11}\eta+hk^2c_{55}\right]\frac{\partial w_s}{\partial\alpha}+\frac{h}{R}\left(c_{16}+k^2c_{45}\right)\frac{\partial w_s}{\partial z}\right], \tag{2}$$
$$K_{21}\left(u_\alpha\right)=\frac{1}{\rho h}\left[\frac{c_{16}}{R^2}\eta\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial\alpha^2}+\frac{h}{R}\left(c_{66}+c_{12}\right)\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial\alpha\partial z}+hc_{26}\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z^2}\right]=K_{12}\left(u_\alpha\right),$$
$$K_{22}\left(u_z\right)=\frac{1}{\rho h}\left[\frac{c_{66}}{R^2}\eta\frac{\partial^2 u_z}{\partial\alpha^2}+\frac{2hc_{26}}{R}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\alpha\partial z}+hc_{22}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right],$$
$$K_{23}\left(w_b\right)=\frac{1}{\rho h}\left[\frac{c_{16}}{R^2}\eta\frac{\partial w_b}{\partial\alpha}+\frac{Ic_{16}}{R^4}\frac{\partial^3 w_b}{\partial\alpha^3}+\frac{Ic_{26}}{R^2}\frac{\partial^3 w_b}{\partial\alpha\partial z^2}+\frac{2Ic_{66}}{R^3}\frac{\partial^3 w_b}{\partial\alpha^2\partial z}+\frac{hc_{12}}{R}\frac{\partial w_b}{\partial z}\right], \tag{3}$$
$$K_{24}\left(w_s\right)=\frac{1}{\rho h}\left[\frac{c_{16}}{R^2}\eta\frac{\partial w_s}{\partial\alpha}+\frac{hc_{12}}{R}\frac{\partial w_s}{\partial z}\right],$$
$$K_{31}\left(u_\alpha\right)=\frac{1}{\rho I}\left[\frac{Ic_{11}}{R^4}\frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial\alpha^3}+\frac{2Ic_{16}}{R^3}\frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial\alpha^2\partial z}+\frac{Ic_{12}}{R^2}\frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial\alpha\partial z^2}-\frac{hk^2c_{55}}{R^2}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}-\frac{hk^2c_{45}}{R}\frac{\partial u_\alpha}{\partial z}\right],$$
$$K_{32}\left(u_z\right)=\frac{1}{\rho I}\left[\frac{Ic_{16}}{R^4}\frac{\partial^3 u_z}{\partial\alpha^3}+\frac{2Ic_{66}}{R^3}\frac{\partial^3 u_z}{\partial\alpha^2\partial z}+\frac{Ic_{26}}{R^2}\frac{\partial^3 u_z}{\partial\alpha\partial z^2}\right],$$
$$K_{33}\left(w_b\right)=\frac{1}{\rho I}\left[\frac{Ic_{11}}{R^4}\frac{\partial^4 w_b}{\partial\alpha^4}+\frac{2I}{R^2}\left(c_{12}+2c_{66}\right)\frac{\partial^4 w_b}{\partial\alpha^2\partial z^2}+\frac{4Ic_{16}}{R^3}\frac{\partial^4 w_b}{\partial\alpha^3\partial z}+\right.$$
$$\left.+\frac{4Ic_{26}}{R}\frac{\partial^4 w_b}{\partial\alpha\partial z^3}+Ic_{22}\frac{\partial^4 w_b}{\partial z^4}+\frac{Ic_{11}}{R^4}\frac{\partial^2 w_b}{\partial\alpha^2}+\frac{Ic_{12}}{R^2}\frac{\partial^2 w_b}{\partial z^2}+\frac{2Ic_{16}}{R^3}\frac{\partial^2 w_b}{\partial\alpha\partial z}\right], \tag{4}$$
$$K_{34}\left(w_s\right)=\frac{1}{\rho I}\left[\frac{1}{R^2}\left(\frac{Ic_{11}}{R^2}+hk^2c_{55}\right)\frac{\partial^2 w_s}{\partial\alpha^2}+\frac{2Ic_{16}}{R^3}\frac{\partial^2 w_s}{\partial\alpha\partial z}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{Ic_{12}}{R^2}+hk^2c_{44}\right)\frac{\partial^2 w_s}{\partial z^2}+\frac{2hk^2c_{45}}{R}\frac{\partial^2 w_s}{\partial\alpha\partial z}\right],$$
$$K_{41}\left(u_\alpha\right)=-\frac{1}{\rho h+m_f}\left[\frac{1}{R^2}\left[hk^2c_{55}+c_{11}\eta\right]\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{h}{R}\left(k^2c_{45}+c_{16}\right)\frac{\partial u_\alpha}{\partial z}\right]=-\frac{\rho hK_{14}\left(u_\alpha\right)}{\rho h+m_f}, \tag{5}$$
$$K_{42}\left(u_z\right)=-\frac{1}{\rho h+m_f}\left[\frac{c_{16}}{R^2}\eta\frac{\partial u_z}{\partial\alpha}+\frac{hc_{12}}{R}\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]=-\frac{\rho hK_{24}\left(u_z\right)}{\rho h+m_f},$$

$$K_{43}\left(w_b\right)=-\frac{1}{\rho h+m_f}\left[\left[\frac{c_{11}}{R^2}\eta+c\right]w_b+\frac{Ic_{11}}{R^4}\frac{\partial^2 w_b}{\partial\alpha^2}+\frac{Ic_{12}}{R^2}\frac{\partial^2 w_b}{\partial z^2}+\frac{2Ic_{16}}{R^3}\frac{\partial^2 w_b}{\partial\alpha\partial z}\right],$$

$$K_{44}\left(w_s\right)=\frac{1}{\rho h+m_f}\left[\frac{2hk^2c_{45}}{R}\frac{\partial^2 w_s}{\partial\alpha\partial z}+\frac{hk^2c_{55}}{R^2}\frac{\partial^2 w_s}{\partial\alpha^2}+hk^2c_{44}\frac{\partial^2 w_s}{\partial z^2}-\left[\frac{c_{11}}{R^2}\eta+c\right]w\right].$$

Начальные условия

$$\begin{aligned}&w_b\big|_{t=0}=w_s\big|_{t=0}=u_\alpha\big|_{t=0}=u_z\big|_{t=0}=0,\\&\left.\frac{\partial w_b}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial w_s}{\partial t}\right|_{t=0}==\left.\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial u_z}{\partial t}\right|_{t=0}=0.\end{aligned}\qquad(6)$$

Условия ограниченности на бесконечности

$$\begin{aligned}&\lim_{|z|\to\infty}w_b\left(\alpha,z,t\right)=0,\ \lim_{|z|\to\infty}w_s\left(\alpha,z,t\right)=0,\\&\lim_{|z|\to\infty}u_\alpha\left(\alpha,z,t\right)=0,\ \lim_{|z|\to\infty}u_z\left(\alpha,z,t\right)=0.\end{aligned}\qquad(7)$$

В выражениях (1)-(7), w_b – компонента нормального перемещения, вызванного изгибом, w_s – компонента нормального перемещения, вызванного сдвигом, u_α, u_z – тангенциальные перемещения, t – время, p – нестационарное давление, ρ – плотность материала оболочки, h – толщина оболочки, R – радиус оболочки, m_f – массовый коэффициент упруго-инерционного заполнителя, c – коэффициент жесткости упруго-инерционного заполнителя, $I=h^3/12$ – момент инерции поперечного сечения, отнесенный к толщине оболочки, c_{ij} – компоненты тензора упругих постоянных, $k^2=5/6$ – коэффициент сдвига, $\eta=h+I/R^2$.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Для получения искомых функций перемещений в (1) применяется метод фундаментальных решений (функций Грина, функций влияния)

$$\begin{aligned}w_b\left(\alpha,z,t\right)&=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}G_b\left(\alpha-\xi,z-\zeta,t-\tau\right)p\left(\xi,\zeta,\tau\right)d\xi d\zeta d\tau,\\w_s\left(\alpha,z,t\right)&=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}G_s\left(\alpha-\xi,z-\zeta,t-\tau\right)p\left(\xi,\zeta,\tau\right)d\xi d\zeta d\tau,\\u_\alpha\left(\alpha,z,t\right)&=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}U_\alpha\left(\alpha-\xi,z-\zeta,t-\tau\right)p\left(\xi,\zeta,\tau\right)d\xi d\zeta d\tau,\\u_z\left(\alpha,z,t\right)&=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}U_z\left(\alpha-\xi,z-\zeta,t-\tau\right)p\left(\xi,\zeta,\tau\right)d\xi d\zeta d\tau.\end{aligned}\qquad(8)$$

В (8) G_b, G_α – фундаментальные решения компонент нормального перемещения, U_α, U_z – фундаментальные решения тангенциальных перемещений.

Фундаментальные решения являются откликом оболочки в ответ на воздействие единичной сосредоточенной нагрузки нормальной к срединной поверхности, математически описываемой дельта-функцией Дирака.

Построены фундаментальные решения с помощью экспоненциальных рядов и интегральных преобразований Лапласа и Фурье [3]. Оригиналы функций

по Лапласу получены аналитически с помощью вычетов [4]. Обратное интегральное преобразование Фурье строится с использованием интеграла обращения с применением метода интегрирования быстро осциллирующих функций [5]. В результате фундаментальные решения для нормальных и тангенциальных перемещений $G_b(\alpha,z,t)$, $G_s(\alpha,z,t)$, $U_\alpha(\alpha,z,t)$, $U_z(\alpha,z,t)$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
U_\alpha(\alpha,z,t) &= \frac{\Delta_1}{4\pi}\sum_{n=-C_1}^{C_1}\sum_{k=0}^{M_1-1} e^{in\alpha}B(z)\left[\Phi_{11}(z)U_{\alpha n}^F(q_k,t)+\Phi_{21}(z)U_{\alpha n}^F(q_{k+1},t)\right],\\
U_z(\alpha,z,t) &= \frac{\Delta_1}{4\pi}\sum_{n=-C_2}^{C_2}\sum_{k=0}^{M_2-1} e^{in\alpha}B(z)\left[\Phi_{12}(z)U_{zn}^F(q_k,t)+\Phi_{22}(z)U_{zn}^F(q_{k+1},t)\right],\\
G_b(\alpha,z,t) &= \frac{\Delta_1}{4\pi}\sum_{n=-C_3}^{C_3}\sum_{k=0}^{M_3-1} e^{in\alpha}B(z)\left[\Phi_{13}(z)G_{bn}^F(q_k,t)+\Phi_{23}(z)G_{bn}^F(q_{k+1},t)\right],\\
G_s(\alpha,z,t) &= \frac{\Delta_1}{4\pi}\sum_{n=-C_4}^{C_4}\sum_{k=0}^{M_4-1} e^{in\alpha}B(z)\left[\Phi_{14}(z)G_{sn}^F(q_k,t)+\Phi_{24}(z)G_{sn}^F(q_{k+1},t)\right].
\end{aligned}
\tag{9}
$$

В (9) $B(z)$ – осциллирующий множитель, $\Phi_{ij}(z)$ – весовые функции, Δ_1 – шаг дискретизации, C_i, M_i – параметры численного интегрирования. Параметры численного интегрирования и суммирования вычисляются по относительной погрешности с заданной точностью.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Для анализа влияния характеристик упруго-инерционного заполнителя на распространения изгибных возмущений в оболочке проведен параметрический анализ.

Рассмотрена цилиндрическая оболочка с радиусом $R=0{,}4$ м и толщиной стенки $h=0{,}003$ м, материал оболочки – углепластик плотностью $\rho=1750$ кг/м^3 и тензором упругих постоянных [6]

$$
\mathrm{C}=\begin{pmatrix}
95{,}5 & 28{,}9 & 4{,}03 & 0 & 0 & 44{,}7\\
28{,}9 & 25{,}9 & 4{,}65 & 0 & 0 & 15{,}6\\
4{,}03 & 4{,}65 & 16{,}3 & 0 & 0 & 0{,}54\\
0 & 0 & 0 & 4{,}4 & -1{,}78 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1{,}78 & 6{,}45 & 0\\
44{,}7 & 15{,}6 & 0{,}54 & 0 & 0 & 32{,}7
\end{pmatrix}\ \text{ГПа}.
$$

На рис.2 показано распределение функции G_b по координате z при $\alpha=0$ в момент времени $t=0{,}1$ мс. Черным цветом изображена функция G_b для оболочки без заполнителя, зеленым и синим цветом – для оболочки с заполнителем при $m_f=2$ кг/м^2 и $m_f=8$ кг/м^2 соответственно, коэффициент жесткости $c=3\times10^8$ Па/м^3.

Из представленных результатов на рис.2 видно, что с увеличением массового коэффициента упруго-инерционного заполнителя m_f амплитуда колебаний уменьшается, так же уменьшается интенсивность распространения возмущений в материале оболочки.

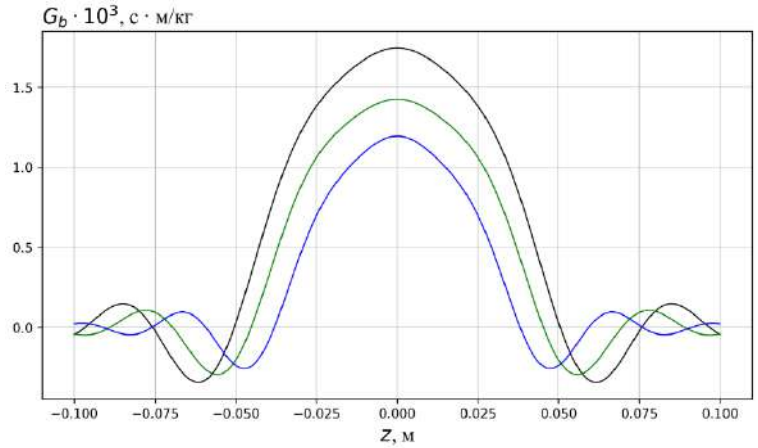


Рис.2. Влияние массового коэффициента m_f упруго-инерционного заполнителя на распространение изгибных возмущений.

На рис.3 показано распределение функции G_b по координате z при $\alpha = 0$ в момент времени $t = 0{,}1$ мс. Черным цветом изображена функция G_b для оболочки без заполнителя, зеленым, красным и синим цветом – для оболочки с заполнителем при $c = 3 \times 10^8$ Па/м^3, $c = 15 \times 10^8$ Па/м^3, $c = 30 \times 10^8$ Па/м^3 соответственно, массовый коэффициент $m_f = 2$ кг/м^2.

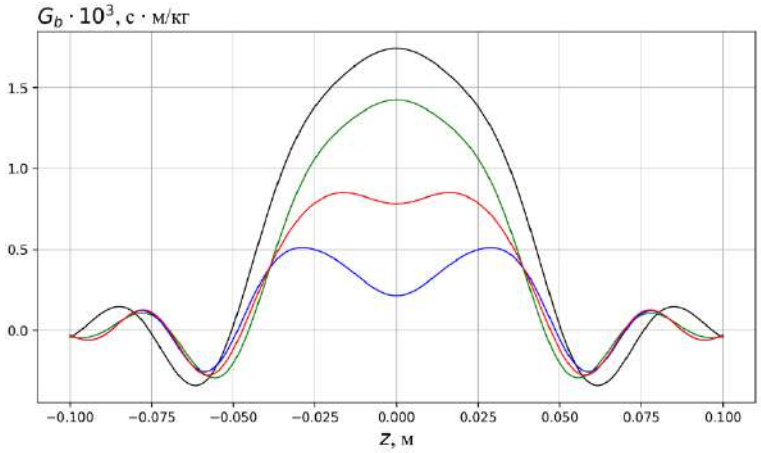


Рис.3. Влияние коэффициента жесткости c упруго-инерционного заполнителя на распространение изгибных возмущений.

Из представленных результатов на рис.3 видно, что увеличение коэффициента жесткости заполнителя c обеспечивает снижение амплитуды фундаментального решения.

ПРИМЕР

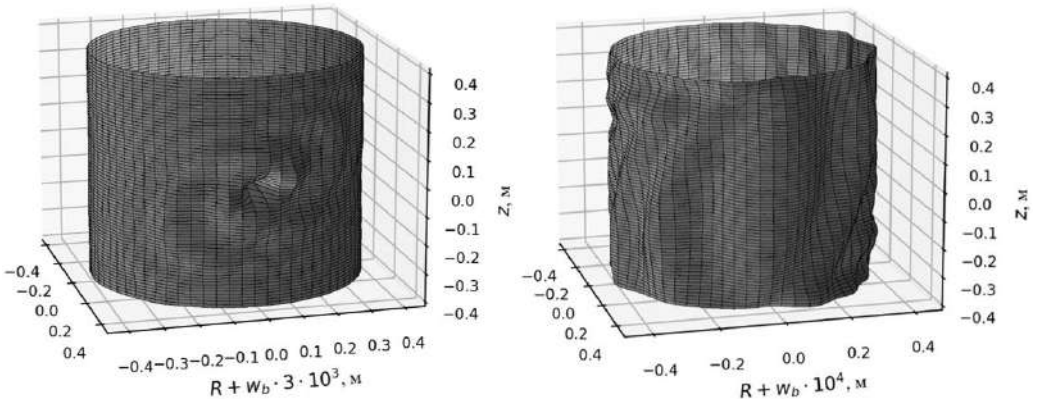
В качестве примера рассмотрим воздействие на оболочку сосредоточенной нагрузки в центре координат по закону

$$p(\alpha, z, t) = A(t)\delta(\alpha)\delta(z),$$

$$A_1(t) = \mu \sin(\omega t) e^{-\sigma t},\ \mu = -3000,\ \omega = 1000,\ \sigma = 1900.$$

Геометрия оболочки и материал представлен выше. Параметры заполнителя – $c = 3 \times 10^8$ Па/м^3, $m_f = 2$ кг/м^2.

На рис.4а,б представлены пространственные зависимости нормального перемещения w_b, вызванного изгибом в моменты времени 1 мс и 3 мс соответственно.



а б

Рис.4. Нормальные перемещения анизотропной цилиндрической оболочки с упругим заполнителем: а) 1 мс; б) 3 мс.

Результаты, представленные на рис.4, демонстрируют асимметричный характер распространения возмущений, что соответствует характеру рассмотренной симметрии упругой среды.

ВЫВОДЫ

Построены новые фундаментальные решения для бесконечной упругой анизотропной цилиндрической оболочки с упруго-инерционным заполнителем. Проанализировано влияние упруго-инерционного заполнителя на распространение изгибных возмущений в материале оболочки. Приведен пример расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chow T.S. *On the Propagation of Flexural Waves in an Orthotropic Laminated Plate and Its Response to an Impulsive Load* // Journal of Composite Materials. – 1971. – Vol.5. – Pp.306-319.
2. Никифоров А.В., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В. *Уравнения динамики анизотропных цилиндрических оболочек по гипотезам Чоу* / XXXI Международный симпозиум им. А.Г. Горшкова «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред»: Сборник материалов. – М.: ООО «ТРП», 2025. – С.73-76.
3. Бэйтмен Г., Эрдейи А. *Таблица интегральных преобразований. Том 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина* – М.: Наука, 1969.
4. Горшков А.Г., Медведский А.Д., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах. Учебное пособие*. – М.: Физматлит, 2005. – 472 с.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы. 7-е изд*. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 636 с.: ил.
6. Игумнов Л.А., Марков И.П., Пазин В.П. *Гранично-элементное решение краевых задач трехмерной анизотропии теории упругости* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2013. – №1(3). – С.115-119.

УДК 539.3
EDN XVAXRM
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.33

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПРОБИТИЯ АЛЮМИНИЕВЫХ ПРЕГРАД ВЫСОКОСКОРОСТНЫМ ЛЕДЯНЫМ УДАРНИКОМ*

Орлов М.Ю., Глазырин В.П., Фазылов Т.В.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к изучению процессов разрушения льда при ударно-волновых и динамических нагрузках вызван различными причинами, в том числе всевозможными приложениями при создании современной ракетно-космической и авиационной техники. Известно, что высокоскоростное взаимодействие ледяных частиц с элементами летательных аппаратов может иметь самые негативные последствия для функционирования последних. Это заставляет разработчиков ударостойких защит и «умных» материалов искать принципиально новые пути повышения их эффективности. В свете этого встает вопрос об углублении знаний в области механики разрушения льда путем развития математических моделей, разработки новых численных методов расчетов и проведения соответствующих экспериментов.

Лед является необычным с точки зрения разрушения природным материалом, свойства которого плохо изучены. Основная сложность была определена еще вначале прошлого столетия и заключается в аномальных пластических свойствах льда, наличии фазовых переходов в процессе деформирования, зависимости его прочности от пористости и температуры [1]. В конце прошлого и начале текущего столетия были достигнуты определенные успехи в связи с интенсивным применением численных методов, основанных на лагражевом или эйлеровом, а также совместном лагранжево-эйлеровом подходах. Впоследствии значительные результаты были получены при использовании бессеточных методов горячей транспортировки (Hot Optimal Transportation Meshfree method) и гидродинамики сглаженных частиц. Несмотря на большое количество публикаций по данной теме еще долго будут актуальны новые физико-математические модели и алгоритмы расчетов деформирования и разрушения льда.

В работе [2] выявлено, что размеры каверны в соленом и пресном льду, образующиеся при нормальном взаимодействии с ударниками при 1000 м/с практически не зависят от температуры, однако в соленом льду каверна была на 20% шире. В [3] экспериментально изучено поведение тонких, средних и толстых ледяных преград и спрогнозирован характер их разрушения при низкоскоростном ударе компактным элементом. При помощи пакета прикладных программ Upsgod-2D проведено численное моделирование процессов соударения ледяного шарика с преградой и составного конуса с ледяной мишенью [4]. Численное моделирование процесса гиперскоростного удара льда при помощи бессеточного метода в лагранжевой постановке успешно проведено

* *Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №24-29-00187, https://rscf.ru/project/24-29-00187/*

в [5]. Нелинейные волны, волновая природа трещинообразования и характерные картины разрушения льда описаны при помощи составной модели с выделением гидростатического ядра и упруго-пластической зоны в [6].

Несмотря на все многообразие численных методов и методик, в настоящее время недостаточное внимание уделяется возможностям лагранжевых методик для моделирования задач деформирования и разрушения льда при ударных нагрузках.

В работе представлены результаты численных исследований высокоскоростного взаимодействия ледяного ударника с алюминиевыми преградами. Изучено влияние двукратного увеличения предела текучести, а также откольной и сдвиговой прочности на процесс пробития преград в диапазоне от 460 до 1300 м/с.

1. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ ЛЬДА И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА

Физико-математическая модель деформирования и разрушения льда при динамических нагрузках соответствует современным физическим представлениям о его поведении под нагрузкой. Лед описывается упруго-пластической, сжимаемой, пористой, прочной средой без фазовых переходов с усредненными физико-механическими характеристиками, взятыми из общедоступной литературы [7]. Концепция разрушения льда основана на детерминированном подходе с учетом одновременной работы нескольких критериев разрушения. С точки зрения авторов, это позволяет избежать нефизических деформаций и передавать картины разрушения, наиболее приближенные к реальным.

В качестве основного инструмента исследований использовался численный лагранжев метод, расчетная часть которого дополнена механизмами расщепления расчетных узлов и разрушения расчетных элементов. Расчеты проведены для двумерного осесимметричного случая при помощи некоммерческого программного комплекса «Удар. Ос.2» с последней модифицированной версией решателя [8].

2. ТЕСТОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Перед проведением численных исследований физико-математическая модель и алгоритмы расчетов прошли тщательную проверку. Согласно терминологии проф. В.В. Селиванова (МГТУ им. Н.Э. Баумана) были проведны внутренние и количественные тесты, при этом качественные тесты не рассматривались. Вначале были решены ставшие уже классическими тестовые задачи о соударении двух одинаковых стальных цилиндров, об ударе цилиндра по жесткой стенке (тест Тейлора). Результаты расчетов первой задачи показали симметрию изолиний давлений и эквивалентной пластической деформации как относительно контактной границы, так и оси взаимодействующих тел. Установлено, что симметрия имела место в течение всего времени процесса взаимодействия. При помощи результатов расчетов второй тестовой задачи проведено сравнение расчетных значений относительного укорочения ударника с экспериментальными данными. В диапазоне начальных скоростей удара от 161 от 367 м/с установлено, что расхождение между расчетными и экспериментальными результатами увеличивались с ростом начальной скорости

удара, но не превышало 5%. Зависимость относительного укорочения от времени было близко к графику гиперболической функции, что можно наблюдать на рис.1.

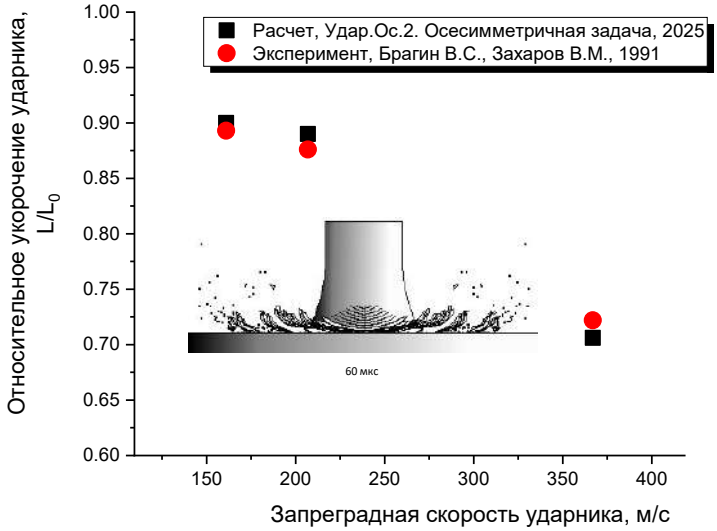


Рис.1. Зависимость относительного укорочения ударника от его запреградной скорости.

Далее, был рассмотрен тест Тейлора или задача о соударении ледяного цилиндра 1.75×4.22 см с жесткой стенкой. Результаты лабораторного эксперимента приведены в [9]. Предметом сравнения была морфология разрушения ледяного цилиндра и скорость волны разрушения. В вычислительном эксперименте скорость волны рассчитывалась как скорость распространения фронта очагов разрушения от лицевой поверхности к тыльной.

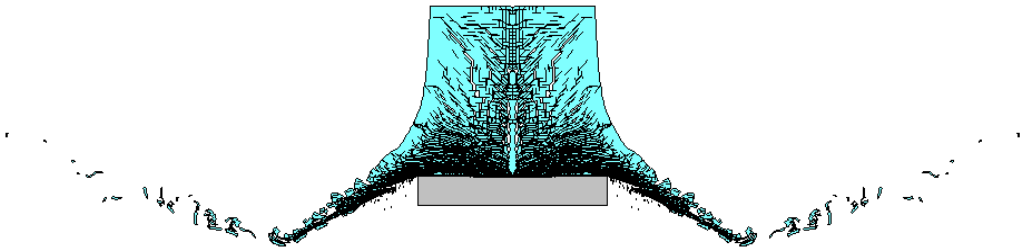


Рис.2. Соударение ледяного цилиндра с жесткой стенкой с начальной скоростью 213 м/с, момент времени 160 мкс. Рисунок позаимствован из [7].

Путем прямого сравнения было установлено, что расчетная скорость волны разрушения составила 2725 м/с против 2438 м/с в лабораторном эксперименте.

Проведенные тестовые расчеты, изложенные выше позволили определить входные параметры для материалов, используемых в расчетах. Перед проведением параметрических расчетов они были интегрированы в качестве библиотек материалов в программу просмоторщик.

2.1. Анализ чувствительности сетки.

Важным этапом является анализ чувствительности расчетной сетки. Целью данного анализа является построение такой конечно-элементной модели взаимодействующих тел, на которой будет получен консервативный научный результат при разумной экономии вычислительных ресурсов. Под консервативными научными результатами понимаются морфология

разрушения тел, доминирующие механизмы пробития и разрушения, а также расчетные значения интегральных характеристик процесса пробития.

Для проведения анализа чувствительности сетки мы смоделировали процесс соударения ледяного сферического ударника с алюминиевой пластиной при скорости 1000 м/с. Серия численных экспериментов состояла из пяти вариантов. Конечно-элементные модели различались по количеству элементов и сгущению сетки в области ударника и преграды. Конечно-элементные модели отличались по количеству элементов и их сгущению в области «ударник - мишень».

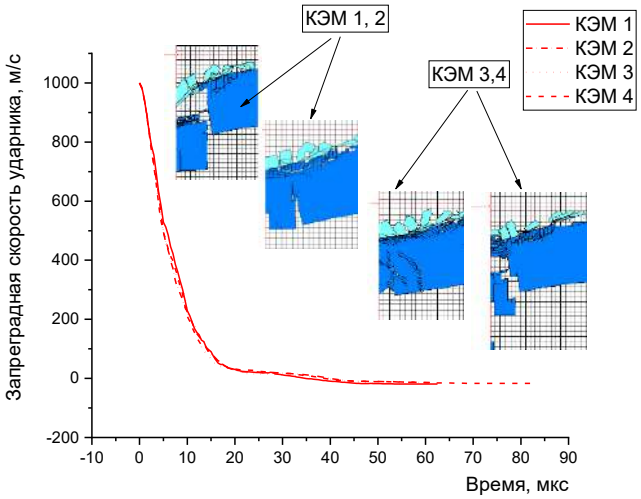


Рис.3. Временные зависимости запреградной скорости ударника и поврежденности, полученные на трех различных конечно-элементных моделях ледяного блока.

На рис.3 видно, что все кривые практически сливаются в одну, незначительные отличия имеются в середине процесса. Морфология разрушения отличалась только по состоянию преграды. Ледяной ударник был сильно разрушен. Путем прямого сравнения затраченных вычислительных ресурсов авторами была выбрана последняя конечно-элементная модель.

3. УДАРНИК И ОБЪЕКТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В настоящей работе ударником выбрана сфера диаметром 1.27 см из непористого льда (0.5%). Начальная скорость варьировалась от 460 м/с до 1300 м/с, а процесс соударения моделировался по нормали. На контактной поверхности задавалось условие скольжения без трения.

В качестве преград рассмотрены однородные алюминиевые преграды (Д16) и образцы из упрочненного алюминия. Первый тип преград будет называть базовым. В дополнении к базовому образцу рассмотрены три вида упрочненных преград. А именно, с вдвое завышенными значениями предела текучести, откольной и сдвиговой прочности. Как отмечено выше, две последние характеристики являлись критериями разрушениями. Для удобства введены обозначения образцов как (пр. тек. × 2), (отк. проч. × 2) и (сдвиг. проч. × 2), соответственно. Физико-механические характеристики исходного образца были следующие: начальная плотность 2,78 г/см3, объемная скорость звука 5380 м/с, модуль сдвига 25,8 ГПа, эквивалентная пластическая деформация 1,2, предел текучести 0,42 ГПа, откольная прочность 0,5 ГПа, удельная работа сдвиговых пластических деформаций 35 кДж/кг. Входные параметры льда приведены в [7].

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЛЕДЯНОГО СФЕРИЧЕСКОГО УДАРНИКА С АЛЮМИНИЕВЫМИ ПРЕГРАДАМИ

4.1. Результаты взаимодействия сферического ударника с однородной (базовой) преградой.

Вначале проанализировано взаимодействие сферического ударника с алюминиевой преградой в диапазоне от 460 до 1100 м/с. На рис.4 представлены результаты расчетов в виде баллистических кривых (временные зависимости скорости ударника), поврежденности льда от времени и скорости свободной поверхности образцов.

Расчетным путем установлено, что в указанном диапазоне скоростей имела место сильнейшая фрагментация льда, сопровождающаяся прогибом пластин или сквозным пробитием. Выявлено, что на первых микросекундах ударник теряет свою сферическую форму, растекаясь по преграде, но не разрушается. В некоторых вариантах расчетов он терял больше половины от начальной скорости. В зависимости от начальной скорости это длилось от 2 до 0.5 мкс. Далее, очаги разрушения появляются на тыльной поверхности и начинают развиваться к лицевой в виде магистральной трещины. Сквозное пробитие происходит по механизму срезания «пробки».

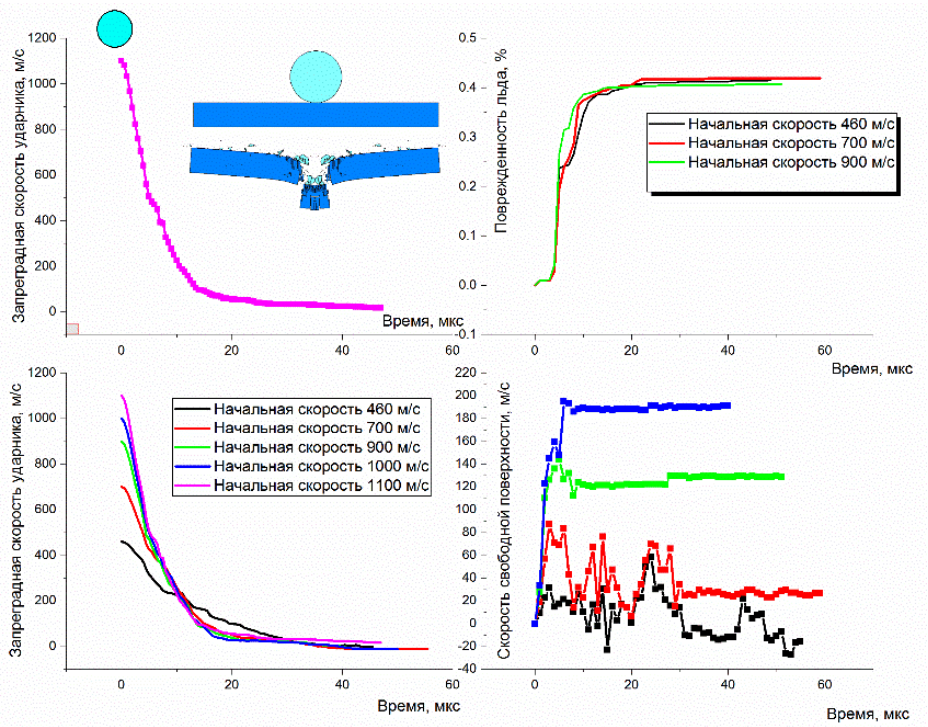


Рис.4. Результаты расчетов процесса пробития базовой преграды: временная зависимость скорости ударника при 1100 м/с; временная зависимость повреждения льда при скоростях 460, 700 и 900 м/с; временные зависимости скорости ударника при 460, 700, 900, 1000 и 1100 м/с; профили скорости свободной поверхности базовой преграды при 460, 700, 900 и 1000 м/с.

На рис.4а показана баллистическая кривая для варианта расчета пробития преграды при 1100 м/с. Видно, что кривая скорости имеет характерный вид и напоминает график гиперболической функции. На кривой можно выделить

основные стадии процесса пробития, включая формирование пробки и окончательный ее выход из преграды. На рис.4б приведены временные зависимости поврежденности льда для трех вариантов расчетов. Нетрудно заметить, что кривые весьма близки к другу. Наличие «ступеньки» на первых микросекундах объясняется отсутствием разрушения во льду вначале процесса. Видно, что длительность процесса разрушения льда существенно меньше, чем длительность процесса взаимодействия ударника с преградами. Расчетами установлено, что поврежденность льда достигает 45%, что в реальном физическом эксперименте соответствует его полной фрагментации. В работах [9,10] приведены фото эксперимента. На рис.4в приведены остальные баллистические кривые. Видно, что они имеют вид гиперболической функции, стремящейся к нулю в конце процесса. На рис.4г приведены профили скорости свободной поверхности для четырех вариантов расчетов. Установлено, что при начальных скоростях 460 и 700 м/с профили скорости содержали крупномасштабные осцилляции, вызванные движением и торможением тыльной поверхности. При скоростях 900 и 1000 м/с фиксируется выход ударной волны на свободную поверхность и участок установившегося движения.

Моделирование процесса взаимодействия ледяного шарика с базовой алюминиевой преградой показало следующее. В рассмотренном диапазоне скоростей лед сильно фрагментировался, вызывая деформацию преграды либо пробивая их, причем при минимальной скорости вмятины с лицевой стороны и остаточной деформации преграды замечено не было. В диапазоне скоростей от 900 до 1100 м/с, вероятно, преграды были пробиты насквозь путем срезания «пробки». Формы профилей скорости свободной поверхности также свидетельствуют об этом. Баллистические кривые имели гиперболический вид, но расчет выхода ударника из преграды был затруднен из-за его сильнейшей фрагментации. Установлено, что большую часть процесса с преградой взаимодействовал практически полностью разрушенный ударник.

4.2. Результаты взаимодействия сферического ударника с усиленной преградой (пр. тек × 2).

Далее приведены результаты процесса взаимодействия сферического ударника с усиленной преградой (пр. тек. × 2). В данном случае был увеличен вдвое предел текучести по сравнению с базовым образцом.

Попытаемся найти существенные отличия в картинах разрушения базового и усиленного образцов. С этой целью воспроизведем сценарий разрушения льда и взаимодействие с преградой при всех начальных скоростях. На рис.5. показаны конечные конфигурации для начальных скоростей 460 и 1100 м/с, соответственно.

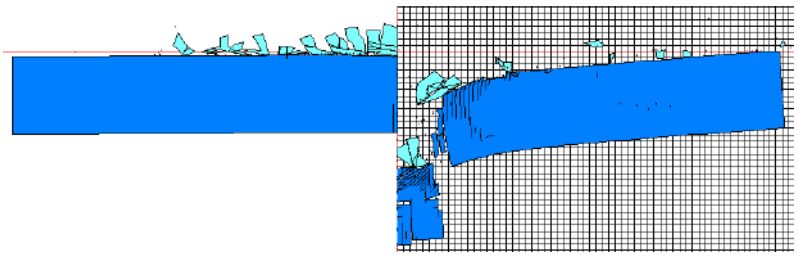


Рис.5. Продольное сечение усиленного образца для скоростей 460 и 700 м/с. Цена деления 0.05 см.

Анализируя результаты расчетов, можно прийти к выводу об отсутствии качественных отличий в процессе взаимодействия/пробития усиленного

и базового образцов в диапазоне от 460 до 1100 м/с. Как показано выше, при минимальной начальной скорости не обнаружено остаточной деформации преград и вмятины с лицевой стороны. При максимальной скорости ударника отмечено сквозное пробитие с сильнейшей фрагментацией ледяного ударника, сопровождающееся прогибом образца в осевом направлении.

Для выявления количественных отличий есть смысл построить временные зависимости, проанализированные выше. На рис.6 приведены баллистические кривые и профили скорости свободной поверхности для некоторых вариантов расчетов. Кривые поврежденности практически полностью совпадали. Сопоставляя форму баллистических кривых и форму профиля скорости свободной поверхности также можно утверждать об отсутствии значимых отличий.

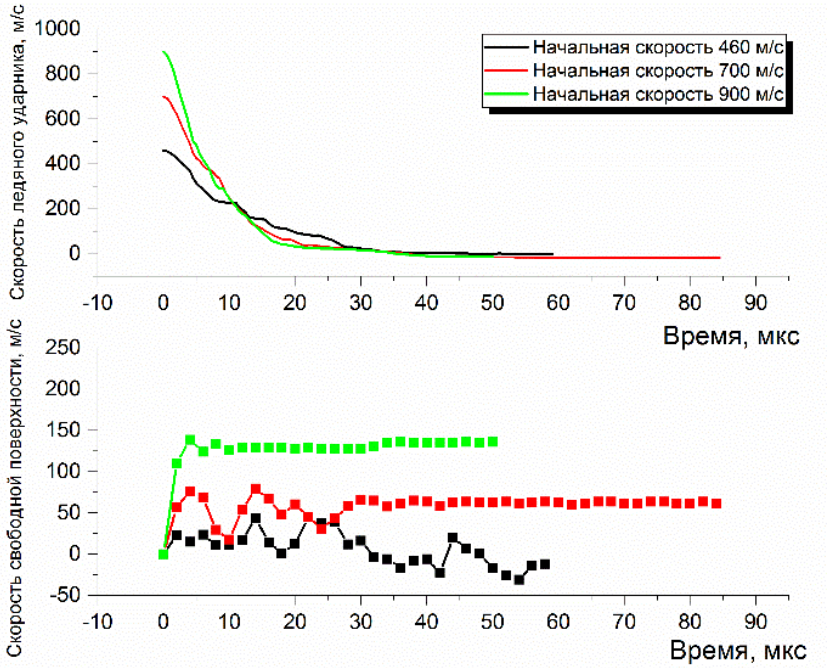


Рис.6. Результаты расчетов усиленного образца: баллистические кривые и профили скорости свободной поверхности.

Качественно и количественно показано, что взаимодействие ледяного ударника с базовым и усиленным образцом (пр. тек × 2) проходило по одному механизму. Возможно, отличия могли бы быть при другой начальной скорости и касались бы, прежде всего, увеличения процесса взаимодействия. Характер баллистических кривых и форма профиля свободной поверхности имели много общего, а в некоторых случаях практически совпадали. С другой стороны, это косвенно говорит о том, что предел текучести практически не влиял на процесс пробития алюминиевой преграды.

4.3. Результаты взаимодействия сферического ударника с усиленной преградой (отк. проч. × 2).

В продолжении исследований, приведены результаты процесса взаимодействия сферического ледяного ударника со следующим усиленным образцом (отк. проч. × 2). В данном образце вдвое увеличена откольная прочность и равнялась 1.0 ГПа. В рамках используемой расчетно-математической модели

критическая величина откольной прочности отвечала за образование отрывных разрушений.

Установлено, что ударная стойкость усиленного образца была значительно выше, чем базового и образца (пр. тек. × 2). Поэтому диапазон начальных скоростей удара был расширен до 1300 м/с. Хотя и расчет предела сквозного пробития не являлся целью данной работы, в данном случае он был увеличен по сравнению с предыдущими.

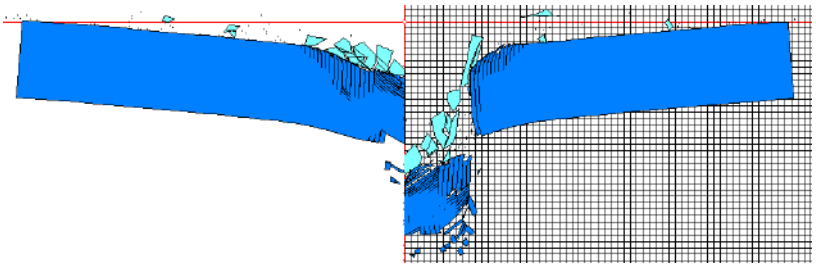


Рис.7. Конечные конфигурации образца (отк. проч. × 2) при скорости 1100 и 1300 м/с. Цена деления 0.05 см.

На рис.7 воспроизведены картины разрушения преград при скоростях 1100 м/с (левая часть рисунка) и 1300 м/с (правая часть рисунка) в моменты времени 50 мкс. Отчетливо видно, что при скорости 1100 м/с образец не пробит ледяным ударником, но имеет место v-образная вмятина с лицевой стороны и небольшие отколовшиеся фрагменты с тыльной. При скорости 1300 м/с на данный момент времени отмечен выход «пробки» из преграды, диаметр которой меньше исходного диаметра ударника. Скорее всего, предел сквозного пробития расположен при 1200 м/с. В целом процесс пробития проходил по описанному выше механизму, но при скоростях до 800 м/с остаточной деформации зафиксировано не было.

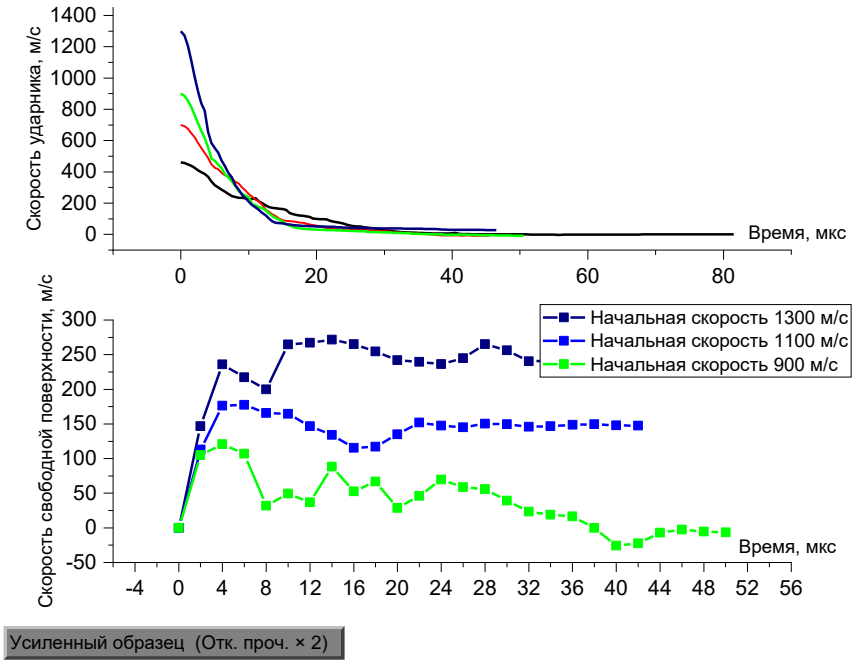


Рис.8. Результаты расчетов усиленного образца: баллистические кривые и профили скорости свободной поверхности.

Вид баллистических кривых и профили скорости свободной поверхности приведены на рис.8. Нетрудно заметить, что характер баллистических кривых не изменился и также имеет гиперболическую зависимость. При этом профиль скорости свободной поверхности для начальной скорости 900 м/с передает все качественные особенности профиля скорости на рис.6, но для начальной скорости 460 м/с. Обнаруженная закономерность еще раз свидетельствует об усиленной ударной стойкости образца.

Результаты моделирования показали, что двукратное увеличение откольной прочности привело к усилению ударной стойкости преграды, повышению предела сквозного пробития, но не изменило механизм разрушения льда и пробития преграды.

4.4. Результаты взаимодействия сферического ударника с усиленной преградой (сдвиг. проч. × 2).

В завершении проведены численные исследования взаимодействия ледяного ударника с усиленными сдвиговой прочностью образцами. В виду ограниченности объема статьи в подраздел не вошли графики временных зависимостей и рассчитанные конфигурации взаимодействующих тел. Диапазон начальных скоростей был такой же как в случае базовой преграды. Результаты расчетов в данном случае мало отличались от случая взаимодействия/пробития базового образца и образца (пр. тек × 2). При минимальной скорости (460 м/с) первые очаги разрушения зарождались во льду на 2 мкс, ударник продолжал терять сферическую форму и к 6-й мкс 2/3 его поверхности уже разрушена. При максимальной скорости равной 1100 м/с, очаги разрушения зарождались уже на первой мкс, а на 6 мкс с лицевой стороны уже формируется существенная вмятина и, как следствие «пробка», отделившаяся от образца к 14 мкс. Диаметр «пробки» был меньше, чем исходный диаметр ударника, а процесс ее формирования сопровождался значительным прогибом образца в осевом направлении. В процессе пробития также образовывались радиальные трещины на расстоянии 1.8 см от оси симметрии. Общей закономерностью было увеличение времени пробития и взаимодействия ледяного ударника с преградой именно на стадиях зарождения и выхода «пробки» из преграды. Предел сквозного пробития был несколько увеличен по сравнению с базовым образцом, но не более чем образца (откол. проч. × 2). Отсутствие иллюстративного материала в данном разделе объясняется совпадением некоторых результатов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, проведенные исследования позволили сформулировать следующие выводы. Анализ научно-технической литературы указывает на необходимость систематического исследования процессов деформирования и разрушения льда. Большое внимание в последнее время уделяется численным методом исследований как достойная альтернатива дорогостоящим экспериментальным и малоинформативным аналитическим методикам. Проведенные численные исследования показали, что модифицированный численный лагранжев метод вполне способен воспроизводить процессы деформирования и разрушения льда в недоступной для физического эксперимента области начальных условий. Сравнение с результатами, полученными в лабораториях НАСА, показали хорошее совпадение расчетных

и экспериментальных данных (в части определения скорости волны разрушения). Анализ чувствительности сетки позволил предложить наиболее эффективную с точки зрения вычислительных ресурсов конечно-элементную модель. Результаты расчетов передают основные особенности процесса взаимодействия льда с алюминиевыми преградами, а именно доминирующее хрупкое разрушение и механизм выбивания пробки из преграды. Баллистические кривые отражали стадии процесса проникания, включая зарождение первых очагов разрушений, развитие магистральных трещин и формирование пробки и выход ее из преграды. Расчетным путем установлено, что больше 2/3 времени процесса с преградами взаимодействовал разрушенный ледяной ударник. Длительность процесса не превышала 50 мкс, причем с увеличением начальной скорости время пробития уменьшалось. Так, в случае сквозного пробития диаметр «пробки» был почти в два раза меньше, чем исходный диаметр ледяного ударника. В случаях, когда сквозного пробития не было с лицевой стороны формировалась чашеобразная или v-образная вмятины, а с тыльной стороны – выпучивание материала преграды. В некоторых случаях на расстоянии около 1.8 см от оси симметрии формировались радиальные трещины отрыва. Были получены характерные профили скорости тыльной поверхности для случаев сквозного и несквозного пробития.

Возвращаясь к вопросу, поставленному вначале статьи можно ответить следующее. Базовый вариант или однородная алюминиевая преграда, как и следовало ожидать, обладает наименьшей ударной стойкостью к действию сферического ледяного ударника. Двукратное увеличение предела текучести приводило к повышению ударной стойкости образца, которое приводило к увеличению времени процесса взаимодействия/пробития. Увеличение сдвиговой прочности вдвое приводило к повышению ударной стойкости преграды. Наибольшая ударная стойкость отмечена при двукратном увеличении откольной прочности. Следует отметить, что представленные выводы справедливы для указанного диапазона изменения прочностных характеристик, а также скорости и формы ударника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богородский В.В., Гаврило В.П. *Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии*. – Л.: Гидрометеоиздат, 1980. – 383 с.
2. Калмыков А.П., Герасимов С.И., Капинос С.А., Ерофеев В.И. *Совершенствование комплексного подхода на базе аналоговых средств визуализации в изучении высокоскоростного проникания в лед* // Проблемы Прочности и пластичности. – 2025. – Т.87. – №2. – С.144-157.
3. Yiheng Z., Renwei L., Lihao Y. et al. *Ice breaking by low-velocity impact with a rigid sphere* // Intern. J. of Impact Engineering. – 2023. – Vol.182. – 104786.
4. Глазова Е.Г., Крылов С.В., Чекмарев Д.Т. Численное моделирование удара ледяной сферы о преграду // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2020. – Т.162. – №2. – С.137-147.
5. Jiang H., Wang H., Scott V., Li B. *Numerical analysis of oblique hypervelocity impact damage to space structural materials by ice particles in cryogenic environment* // Acta Astronautica. – 2022. – Vol.195. – Pp.392-404.
6. Гусева Е.К., Голубев В.И., Епифанов В.П., Петров И.Б. *Составная упругопластическая модель с гидростатическим ядром и трещинообразованием для локализации нелинейных деформаций во льду*

при медленном ударе // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2025. – Т.28. – №3.– С.269-286.
7. Орлов М.Ю., Глазырин В.П., Фазылов Т.В. *Исследование процесса пробития конструкций изо льда и тонких металлических пластин* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2025. – Т.31. – №1. – С.127-141.
8. Орлов Ю.Н., Глазырин В.П., Орлов М.Ю. *Удар-ОС1. Ударно-волновое нагружение конструкций. Осесимметричная задача*. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2010610911 от 28.01.2010.
9. Sherburn Jesse A., Horstemeyer Mark F. *Hydrodynamic modeling of impact craters in ice* // International Journal of Impact Engineering. – 2010. – Vol.37. – Iss.1. – Pp.27-36.
10. Carney Kelly S., Benson David J., Paul DuBois, Ryan Lee. *A phenomenological high strain rate model with failure for ice* // International Journal of Solids and Structures. – 2006. – Vol.43. – Iss.25-26. – Pp.7820-783.

УДК 539.387.2
EDN YBLOEA
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.34

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ПРОЦЕССА ПРОНИКАНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО УДАРНИКА В БЕТОННУЮ МИШЕНЬ С УЧЁТОМ ДИНАМИЧЕСКОГО УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Пляскин А.С., Бабарыкина А.И.

Томский государственный архитектурно-строительный университет, г. Томск, Россия

ВВЕДЕНИЕ

На данный момент существует ряд методов, позволяющих вычислить глубину проникания при высокоскоростном ударе, основываясь на начальных параметрах: геометрических характеристиках снаряда и мишени, физико-механических параметрах материалов, скорости и угла подлёта снаряда. Эмпирические формулы, полученные исследователями в разные периоды времени, были разработаны для решения конкретных задач и часто дают большую погрешность при попытке расчёта удара с иными условиями [1]. Для глубокого изучения процесса, а также разработки более полного и универсального метода расчёта, эффективнее использовать численные методы с возможностью изменения исходных параметров.

В исследованиях уже не раз были приведены сравнения результатов физического и численного эксперимента. Так, в [2] при изучении ударной стойкости мишени из ультравысокопрочного бетона было проведено численное моделирование процесса, на основе которого проведён анализ влияния скорости, угла удара и процента армирования на глубину проникания. В других исследованиях [3,4] акцент сделан на деформировании ударника и влиянии этого деформирования на глубину проникания. С учётом этого, была построена математическая модель, хорошо прогнозирующая удар. Однако, несмотря на ряд проведённых экспериментальных [5,6] и аналитических [7,8] исследований универсальный метод расчёта так и не был разработан.

1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Поскольку бетон – сложный композитный материал, логичнее всего начать изучение высокоскоростного удара с мелкозернистого бетона, обладающего большей однородностью. Приведённые выше исследования показывают, что деформация ударника также оказывает существенное влияние на глубину и диаметр кратера, поэтому на начальном этапе исследований будет рассматриваться недеформируемый стальной ударник.

Расчёт проводился с помощью комплекса РАНЕТ-3. Он позволяет настраивать любые параметры расчёта: от физико-механических характеристик материалов, до порядка разбиения снаряда и мишени.

Моделирование проводилось на основе эксперимента. В нём в качестве мишени использовался блок 300x300x150 мм из мелкозернистого бетона со статической прочностью на сжатие 74,2 МПа, общей пористостью в 9%

и плотностью 2337 кг/м^3. Ударник выполнен из стали ШХ-15 и представляет собой шарик диаметром 17 мм и массой 20 грамм. Учитывая линейность зависимости глубины проникания от скорости в пределах 800 м/с, удар был смоделирован для большего диапазона скоростей.

Известно, что при изменении скорости нагружения изменяются и физико-механические характеристики бетона по сравнению со статическим нагружением. Это обусловлено тем, что при кратковременном динамическом воздействии наблюдается запаздывание деформаций, причем поперечные деформации развиваются менее интенсивно, чем продольные. Запаздывание поперечных деформаций приводит к упрочению бетона [9].

Упрочнение характеризуется коэффициентом динамического упрочнения DIF, который изменяется от класса бетона и рассчитывается как отношение динамической прочности *RD* к статической прочности R_b. [10] Для отражения упрочнения бетона в модели, динамическая прочность бетона была задана с коэффициентом, изменяющимся в зависимости от скорости удара.

2. РАСЧЁТ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Перед запуском расчёта задаётся разбиение мишени и ударника. Однородная плоская мишень разбивается по слоям, при этом чем меньше размер элемента тем больше будет формироваться лицевой откол. Однако, слишком мелкое разбиение значительно увеличит время расчёта.

Сферический ударник разбивается на тетраэдры с помощью программы Netgen. Для корректного проведения расчёта размеры элементов в ударнике и мишени должны быть максимально приближены друг к другу.

Вид ударника и мишени перед началом расчёта приведёт на рис.1.

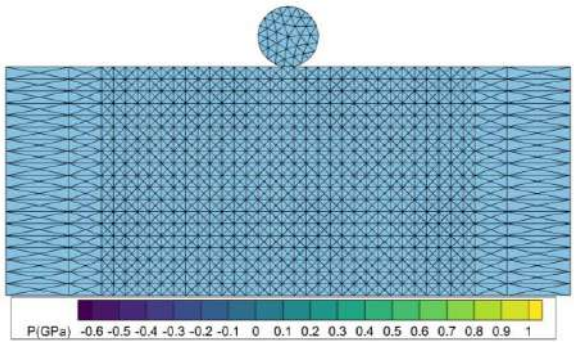


Рис.1. Вид в начальный момент времени.

Расчёт проводился при десяти скоростях от 200 м/с до 800 м/с. С каждой итерацией фиксировались значения глубины проникания снаряда, диаметра кратера и соответствующие значения динамической прочности на сжатие бетона (Таблица 1).

Таблица 1.

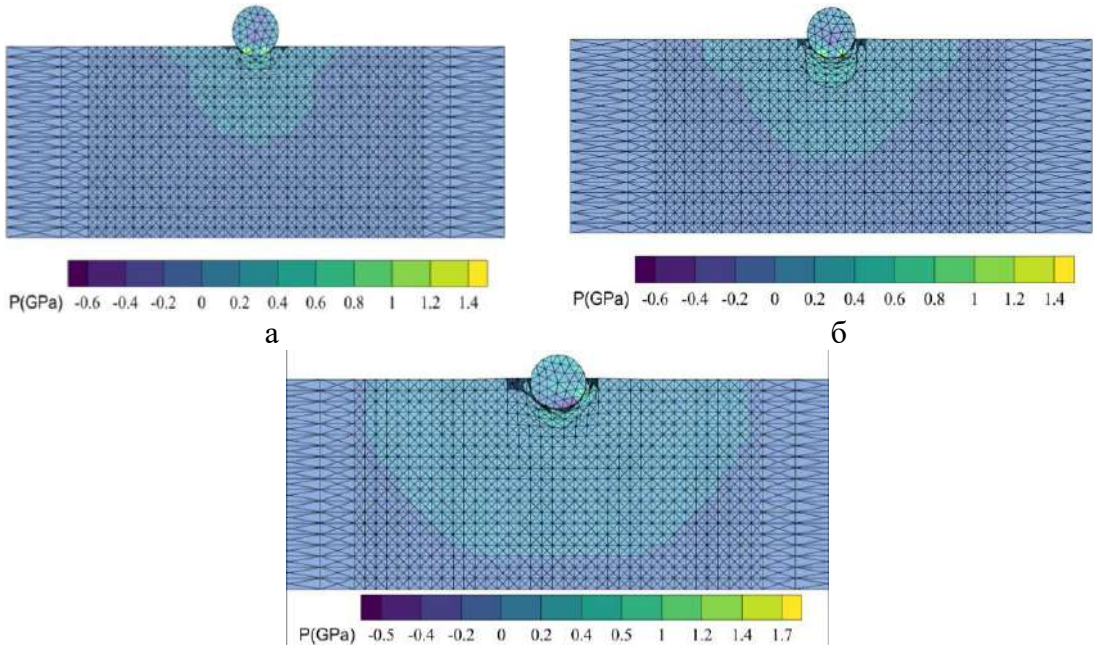
Результаты моделирования удара.

Скорость встречи, V, м/с	Глубина проникания, Hmod, мм	Динамическая прочность на сжатие, RD, ГПа	Диаметр кратера, D, мм	DIF
200	9,52	0,1410	34	1,9
232,2	10,71	0,1484	40,8	2

Скорость встречи, V, м/с	Глубина проникания, Hmod, мм	Динамическая прочность на сжатие, RD, ГПа	Диаметр кратера, D, мм	DIF
248,2	10,88	0,1707	34	2,3
311,7	13,6	0,1781	37,4	2,4
323,3	13,26	0,1855	40,8	2,5
368,9	15,3	0,2078	47,6	2,8
394,4	17	0,1929	47,6	2,6
421,7	17	0,2226	54,4	3
600	22,44	0,2894	54,4	3,9
800	28,22	0,3562	64,6	4,8

В процессе удара в мишени образовывался характерный откольный кратер. С увеличением скорости удара его диаметр увеличивается.

Момент столкновения снаряда с мишенью характеризуется значительным ростом давления в месте удара и стремительным распространением ударной волны вглубь мишени (рис.2). Тем не менее толщина мишени позволяет снизить силу напряжений при достижении тыльной стороны и исключить образование тыльного откола.



а б в

Рис.2. Вид в момент времени 18 мкс от начала расчёта при скоростях а) 200 м/с; б) 394 м/с; в) 600 м/с.

В момент остановки (рис.3) ударника разрушения бетона достигают максимума, завершается формирование лицевого кратера. Деформирование ударника при этом минимально.

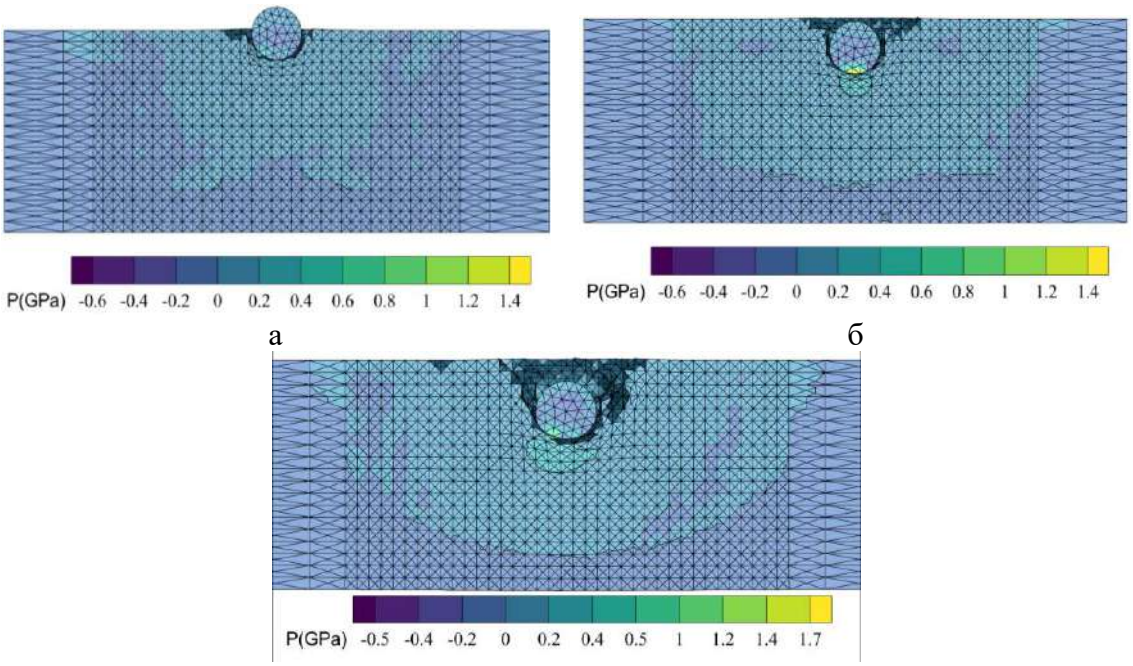


Рис.3. Вид в момент времени остановки ударника при скоростях а) 200 м/с; б) 394 м/с; в) 600 м/с.

3. ВЫВОДЫ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Опираясь на то, что в диапазоне скоростей до 800 м/с зависимость глубины проникания сохраняется линейной, можно сделать вывод о корректности получаемых при моделировании результатов (рис.4).

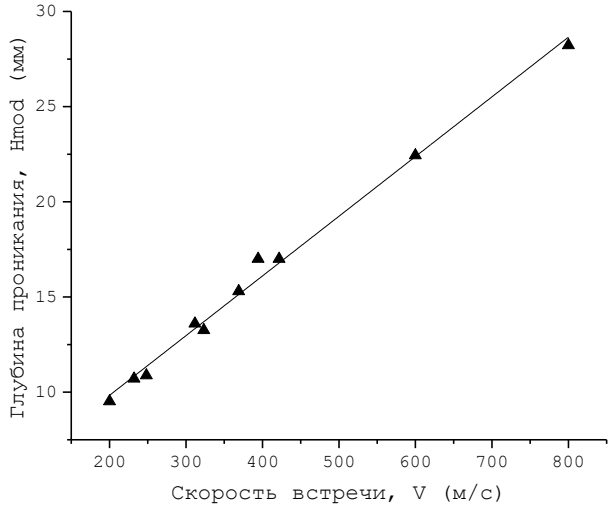


Рис.4. Зависимость глубины проникания от скорости при моделировании.

При этом значения динамической прочности растут с увеличением скорости (рис.5). Поскольку упрочнение бетона имеет свой предел, можно предположить, что функция прочности от скорости будет иметь вид степенной функции $f\left(x\right)=a+b\sqrt{x}$.

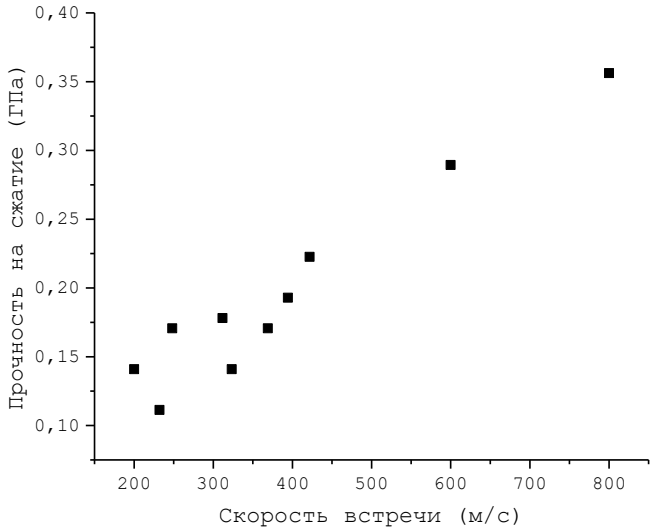


Рис.5. Значения динамической прочности на сжатие от скорости при моделировании.

Результаты моделирования позволили определить ряд закономерностей, описывающих поведение бетонной мишени при ударе стальным шариком в диапазоне скоростей от 200 до 800 м/с. Наиболее существенное влияние на глубину проникания оказывает скорость встречи, которой пропорциональны как глубина кратера, так и величина динамической прочности материала.

В процессе моделирования было получено два важных параметра: прогнозируемая глубина проникания и значение динамической прочности на сжатие RD. Эти зависимости можно использовать для дальнейшего прогнозирования поведения этого бетона с другими ударниками и при других скоростях, экстраполируя данные и используя полученные при расчёте значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пляскин А.С., Бабарыкина А.И. *Анализ эмпирических закономерностей ударного взаимодействия снаряда с преградой* / X Международная научно-практическая конференция «Современные тенденции развития науки и мирового сообщества в эпоху цифровизации». Сборник материалов. – М.: Алеф, 2022. – С.364-371.
2. Ning H., Ren H., Wang W., Nie X. *Impact Resistance of Ultra-High-Performance Concrete Composite Structures* // Materials. – 2023. – Vol.16(23). – 7456.
3. Xu L., Liu Y., Yan J., Shi Z., Wang H., Xu Y., Huang F. *High-speed penetration of ogive-nose projectiles into thick concrete targets: Tests and a projectile nose evolution model* // Defence Technology. – 2024. – Vol.32. – Pp.553-571.
4. Wu H.J., Qian F., Huang F., Wang Y.N. *Projectile Nose Mass Abrasion of High-Speed Penetration into Concrete* // Advances in Mechanical Engineering. – 2012. – 9 p.
5. Sazhenkov N.A., Semenova S.V., Voronova L.V., Kurakina A.D., Nikhamkina M.Sh., Baxevanakis K., Roy A., Stergiou T., Silberschmidt V.V. *Polyurea-coated glass-fibre-reinforced laminate under high-speed impact: Experimental study* // Procedia Structural Integrity. – 2020. – Vol.28. – Pp.1572-1578.
6. Qin S., Wu G., Wu Z., Wang Z., Liu Y. *Dynamic Response of Projectile and Charge During Penetration into Concrete Target* // Defence Technology. – 2024. – Vol.20. – №1.

7. Lu D., Meng F., Zhou X., Zhuo Y., Gao Z., Du X. *A dynamic elastoplastic model of concrete based on a modeling method with environmental factors as constitutive variables* // Journal of Engineering Mechanics. – 2023. – Vol.149. – No.12.
8. Marzec I., Tejchman J., Winnicki A. *Computational simulations of concrete behaviour under dynamic conditions using elasto-visco-plastic model with non-local softening* // Computers and Concrete. – 2015. – Vol.15. – No.4. – Pp.515-545.
9. Кумпяк О.Г., Галяутдинов З.Р., Кокорин Д.Н. *Прочность и деформативность железобетонных конструкций на податливых опорах при кратковременном динамическом нагружении*. – Томск: Издательство Томского государственного архитектурно-строительного университета, 2016. – 277 с.
10. Никулин А.И. *О динамической прочности бетона при неоднородном импульсном сжатии* // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. – 2017. – №1. – С.77-81.

УДК 539.5
EDN YFSEZE
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.35

НЕУПРУГАЯ ДЕФОРМАЦИЯ И ЭВОЛЮЦИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ ЛЕГКИХ СПЛАВОВ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ПРОДАВЛИВАНИИ*

Скрипняк В.В., Чирков М.О., Скрипняк В.А., Кушнарев А.Г.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Легкие сплавы обладают низкой массовой плотностью, высокими удельными прочностными характеристиками, высокими механическими демпфирующими свойствами, электромагнитной экранирующей способностью, высокой теплопроводностью, что делает их перспективными конструкционными материалами, позволяющими значительно снизить вес конструкций [1,2]. В связи с этим важной задачей является получение информации о механическом поведении конструкционных легких сплавов в широком диапазоне условий нагружения, включая динамические воздействия. Следует отметить, что магниевые сплавы относятся к изомеханической подгруппе сплавов с гексагональной плотноупакованной кристаллической решеткой (ГПУ), механическое поведение которых отличается от поведения других подгрупп ГПУ сплавов [3]. Для повышения точности теоретических прогнозов, полученных с помощью численного моделирования механического поведения (деформации и разрушения) магниевых сплавов в условиях ударного воздействия, необходимо модифицировать определяющие уравнения и модели возникновения повреждений и разрушения [4,5]. Одним из важных аспектов описания механического поведения деформируемых магниевых сплавов при высокоскоростном деформировании изделий является прогнозирование локализации пластической деформации и развития повреждений. Исследования показали, что эквивалентная скорость деформации и значение параметра трехосности напряженного состояния оказывают существенное влияние на развитие повреждений и разрушения магниевых и алюминиевых сплавов при высокоскоростной деформации [6]. Целью данной работы было изучение механических свойств тонколистового проката из сплавов АМг2 и МА2-1 при двухосном растяжении при штамповке полусферическим индентором.

МАТЕРИАЛЫ И ИСПЫТАНИЯ

Испытания на высокоскоростное продавливание полусферическим и цилиндрическим индентором образцов из алюминиевого сплава AMg2 (Al 1520) и промышленного магниевого сплава МА2-1 (Mg–3Al–1Zn) были проведены в соответствии со стандартами ISO 8490-86 и ASTM E643-09, а также рекомендациями INSTRON. Деформацию, повреждение и излом образцов исследовали при штамповке со скоростями $0{,}1 \pm 0{,}001$ м/с, $1 \pm 0{,}01$ м/с,

* *Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда: проект 24-79-10103. Авторы благодарят Российский научный фонд за поддержку исследований.*

$5 \pm 0{,}01$ м/с и $10 \pm 0{,}1$ м/с. Усилия регистрировались с помощью сертифицированного динамического датчика Кистлера. Образец закреплялся в зажимном устройстве, перемещающемся с заданной скоростью. Было проведено пять испытаний для каждой скорости продавливания. Жесткость высокоскоростного сервогидравлического испытательного стенда Instron VHS 40/50-20 и система контроля скорости перемещения образцов обеспечивали нагружение образцов с высокой степенью постоянства заданных скоростей продавливания. Образцы сплава АМг2 (ГОСТ 17232-99) имели следующий химический состав (мас.%): 2,2 % Mg, 0,06 % Mn, 0,5 % Fe, 0,4 % Si, 0,1 % Cu, Al – остальное. Массовая плотность 2,690 г/см^3.Температура плавления T_m, 913 K. Средний размер зерна в образцах листового проката составлял 40 ± 10 мкм. Модуль сдвига сплава АМг2 при комнатной температуре $\mu = 17$ ГПа, модуль Юнга $E = 27$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}33$, квазистатический предел текучести $\sigma_{0,2} = 80 \ldots 150 \pm 5$ МПа. Предел прочности при растяжении $\sigma_в = 190 \ldots 250 \pm 10$ МПа, удельная теплоемкость в диапазоне до 0.4 температуры плавления $C_p = 963$ Дж/(кг•К) и коэффициент Тейлора-Куинни $\beta \approx 0{,}9$.

Образцы сплава МА2-1 (Mg-3Al-1Zn) имели химический состав (мас. %): 93,7% Mg, 4,36% Al, 1,34% Zn и 0,39% Mn, а средний размер зерна: 80 ± 10 мкм. Массовая плотность сплава МА2-1 составляла 1,79 г/см3, при квазистатических нагрузках при температуре 295 К сплав имел предел текучести $\sigma_{0,2} = 145 \ldots 150$ МПа, предел прочности при растяжении $\sigma_в = 260 - 280$ МПа, относительное удлинение до разрушения $\delta \sim 5 \ldots 12$ %. Модуль сдвига сплава МА2-1 при комнатной температуре $\mu = 17$ ГПа, модуль Юнга $E = 44{,}55$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}35$, квазистатический предел текучести $\sigma_{0,2} = 150 \pm 5$ МПа. Предел прочности при растяжении $\sigma_в = 250 \pm 10$ МПа, удельная теплоемкость в диапазоне до 0.4 температуры плавления $C_p = 1088$ Дж/(кг•К) и коэффициент Тейлора-Куинни $\beta \approx 0{,}4 \ldots 0{,}6$ [7].

Образцы МА2-1 толщиной $2{,}0 \pm 0{,}01$ мм для испытаний на двухосное растяжение при штамповке полусферическим индентором были вырезаны перпендикулярно оси симметрии из стержня диаметром 60 мм электроэрозионным методом. Образцы АМг2 толщиной $1{,}05 \pm 0{,}05$ мм и диаметром $60 \pm 0{,}2$ мм для продавливания инденторами были вырезаны электроэрозионным методом из листового проката сплава. Снижение коэффициента трения между образцами и индентором во время испытаний на продавливание было достигнуто за счет полировки поверхностей образцов и использования масляной смазки. Между индентором и поверхностью образца использовалась смазка IPF ER-3 (ООО «Газпромнефть-смазка», Москва, Россия), которая значительно снижает трение при штамповке и обладает противоизносными свойствами.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Численное моделирование пластического течения и развития повреждений сплавов при динамической штамповке пластин полусферическим индентором проводилось с использованием оригинального модуля UMAT в комплексе LS DYNA в ANSYS WB 19.2. Механический отклик пластин при штамповке описывается системой уравнений в соответствии с лагранжевым подходом

и включает уравнения сохранения изотропной непрерывной среды, кинематические соотношения, определяющие соотношения [8], уравнение релаксации для тензора отклоняющих напряжений [3], пластический потенциал в модифицированной форме Гурсона-Твергаарда-Нидлемана [9], термодинамические соотношения для определения изменений температуры при деформировании сплавов с высокой скоростью деформации, уравнения кинетики разрушения Нидлемана [10].

Напряжение текучести сплава при развитии повреждения было описано с использованием определяющего соотношения [9]

$$\left(\sigma_{\text{eq}}^2/\sigma_{\text{s}}^{\text{c}}\sigma_{\text{s}}^{\text{t}}\right)+2\text{q}_1\ \text{g*}\cosh\left[-\text{q}_2\text{p}\Big/\left(2\sqrt{\sigma_{\text{s}}^{\text{c}}\sigma_{\text{s}}^{\text{t}}}\right)\right]+ \\ +\left(1-\text{g*}\right)\left[3\left(\sigma_{\text{s}}^{\text{c}}-\sigma_{\text{s}}^{\text{t}}\right)/\sigma_{\text{s}}^{\text{c}}\sigma_{\text{s}}^{\text{t}}\right]\text{p}-1-\left(\text{q}_3\text{g*}\right)^2=0, \quad (1)$$

где σ_{eq} – эквивалентное напряжение Мизеса, σ_s^c – предел текучести при сжатии, σ_s^t – предел текучести при растяжении, p – давление, q_1, q_2 и q_3 – параметры модели, а g* – параметр повреждения материала.

Поскольку магниевые сплавы обладают значительной асимметрией в сопротивлении пластической деформации при сжатии и растяжении, пластический потенциал был принят в виде (1). Если пределы текучести сплава при растяжении и сжатии одинаковы, уравнение (1) сводится к традиционной форме Гурсона-Твергаарда-Нидлемана [10].

Для описания зависимости σ_s от скорости деформации, эквивалентной пластической деформации и температуры была использована модификация уравнения состояния Зерилли-Армстронга для алюминиевых сплавов в форме (2) и магниевых сплавов с ГПУ-решеткой в форме (3) [8]

$$\sigma_{\text{s}}=\sigma_{\text{s0}}+\text{C}_2\left(\varepsilon_{eq}^p\right)^{\text{n}}\exp\left\{-C_3\ T+C_4T\ln\left(\dot{\varepsilon}^*\right)\right\}, \quad (2)$$

$$\sigma_{\text{s}}=\text{C}_1\left(\varepsilon_{eq}^p\right)^{0.5}+\left(\sigma_{\text{s0}}+\text{C}_2\left(\varepsilon_{eq}^p\right)^{\text{n}}\right)\exp\left\{-C_3\ T+C_4T\ln\left(\dot{\varepsilon}^*\right)\right\}, \quad (3)$$

где σ_{s0}, n, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 – параметры материала при растяжении и сжатии, T – температура, $\varepsilon^*=\dot{\varepsilon}_{eq}^p/\dot{\varepsilon}_{eq0}$, $\dot{\varepsilon}_{eq}^p=\left[\left(2/3\right)\dot{\varepsilon}_{ij}^p\dot{\varepsilon}_{ij}^p\right]^{1/2}$, $\dot{\varepsilon}_{eq0}=1c^{-1}$.

Коэффициенты уравнений (2) и (3) для сплавов АМг2 и МА2-1 приведены в Таблице 1.

Таблица 1.

Коэффициенты определяющего уравнения для сплавов АМг2 и МА2-1.

Марка сплава	Условие нагружения	σ_{s0}, МПа	C_1, МПа	C_2, МПа	C_3, K^{-1}	C_4, K^{-1}	n
АМг2	Растяжение	125	0	395	0,000338	0,00044	0,25
АМг2	Сжатие	120	0	387	0,000338	0,0000338	0,25
МА2-1	Растяжение	250	0	440	0,00162	0,00005	0,17
МА2-1	Сжатие	190	40	57600	0,00162	0,00008	2

Возрастание температуры при пластическом течении за счет диссипации энергии был определен в адиабатическом приближении [3]

$$T=T_0+\int_0^{\varepsilon_{eq}^p}\left(\beta/\rho C_p\right)\sigma_{eq}d\varepsilon_{eq}^p, \quad (4)$$

где T_0 – начальная температура, $\beta \sim 0,47$ – коэффициент Тейлора–Куинни для МА2-1 [7] и $\beta \sim 0,9$ алюминиевых сплавов, $\sigma_{eq} = \left[(3/2)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - 0,5\sigma_{kk}^2 \right]^{1/2}$ – эквивалентное напряжение Мизеса, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ρ – массовая плотность, C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, является эквивалентной пластической деформацией.

Уменьшение сопротивления пластическому течению, вызванное нагревом в результате рассеивания работы напряжений при пластических деформациях, влияет на возникновение локализации пластического течения и последующий рост параметра повреждаемости в материале. Зарождение повреждений описывается с использованием нормального распределения. Скорость роста параметра повреждаемости, обусловленная увеличением размеров повреждений, связана с объемными неупругими деформациями. Модель пластичного разрушения Гурсона-Твергаарда-Нидлемана (GTN) требует знания 9 коэффициентов: трех модельных коэффициентов (q_1, q_2 и q_3), начальной доли повреждения f_0, трех коэффициентов кинетики повреждения (ε_N, s_N и f_N) и двух коэффициентов разрушения (f_c и f_F) [8]. В данном исследовании предполагалось, что возникновение повреждений в пластинах при штамповке начинается в образовавшихся зонах локализации пластических деформаций. Заключительная стадия пластичного разрушения состоит в слиянии повреждений в зоне разрушения в трещину, что приводит к ускорению скорости роста параметра повреждения g* вплоть до разрушения, когда параметр повреждения достигает значения f_F.

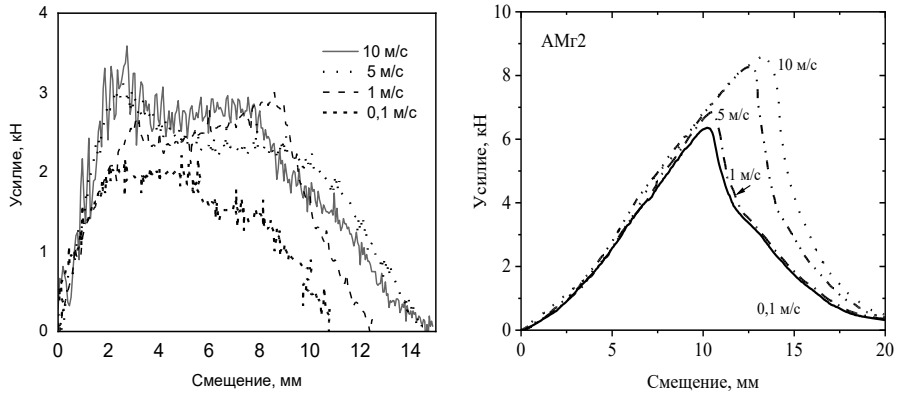
Параметры модели для сплава МА2-1 были получены при численном моделировании испытания на одноосное растяжение: $q_1 = 1,5$, $q_2 = 1$, $q_3 = 1,0$, $f_0 = 0$, $f_N = 0,156$, $f_c = 0,112$, $f_F = 0,260$, $\varepsilon_N = 0,1$, $s_N = 0,02$. Параметры модели для сплава АМг2 были получены в результате полуобратного численного моделирования испытания на одноосное растяжение: $q_1 = 1,5$, $q_2 = 1$, $q_3 = 2,25$, $f_0 = 0$, $f_N = 0,136$, $f_c = 0,02$, $f_F = 0,03$, $\varepsilon_N = 0,26$, $s_N = 0,1$.

В начальный момент времени материал пластины находится в однородном температурном поле в ненапряженном состоянии. Контактные условия взаимодействия индентора с образцом и зажимного устройства с образцом были описаны с использованием модели, реализованной в алгоритме LS DYNA: automatic_surface_to_surface. Параметры коэффициента трения были установлены FS = 0,4, коэффициенты демпфирования – VDC = 30, что обеспечило отсутствие колебаний расчетных сил в зоне контакта. В расчетах использовалась конечно-разностная схема второго порядка с характерным шагом пространственной сетки 0,3 мм. Для дискретизации расчетной области образца использовались трехмерные линейные гексагональные элементы (~200 000 элементов). Элементы индентора и зажимного устройства были смоделированы как абсолютно твердые тела. Выбранный шаг пространственной сетки обеспечил сходимость результатов численного моделирования.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Экспериментальные кривые силового сопротивления пробиванию в зависимости от отклонения $F(u_3)$ для скоростей от 0,1 до 10 м/с показаны на рис.1. Закономерности зависимости усилия воздействия пуансона от величины

прогиба, показанные на рис.1, сохраняются для всего исследованного диапазона скоростей продавливания листового проката МА2-1 и АМг2.

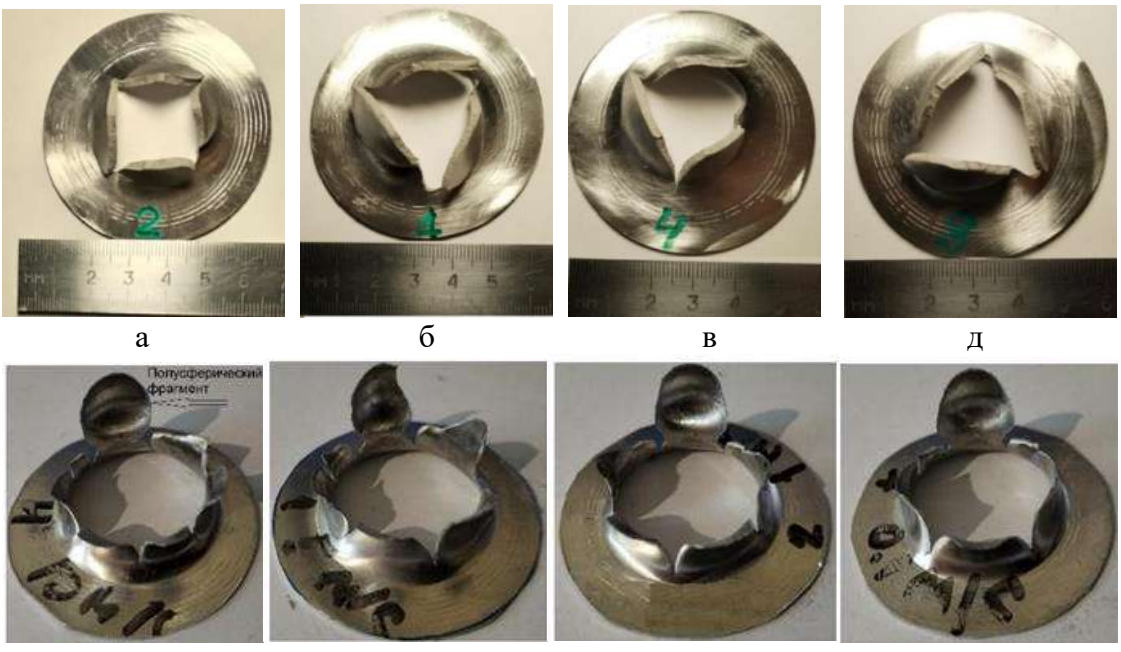


а б

Рис.1. а) Экспериментальные диаграммы $F(u_3)$ для сплава МА2-1; б) для АМг2.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что в рассматриваемом диапазоне скоростей нагружения от 0,1 до 10 м/с в сплаве МА2-1 реализуется вязкое разрушение в условиях деформации при продавливании.

На рис.2 показаны фотографии образцов после продавливания.



а б в д

е ж з и

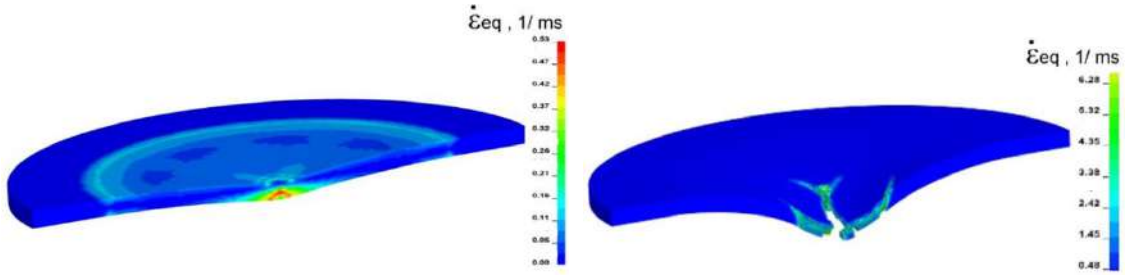
Рис.2. Фотографии образцов МА2-1 после вдавливания полусферическим штампом со скоростями (а) 10, (б) 5, (в) 1 и (г) 0,1 м/с, образцов АМг2 после продавливания со скоростью (е) 10, (ж) 5, (з) 1 и (и) 0,1 м/с.

Результаты анализа разрушения образцов сплавов МА2-1 и АМг2 при продавливании показали, что конфигурации трещин в зоне вдавливания индентора различаются. Форма формирующихся трещин зависит от скорости вдавливания и толщины образцов. При скорости вдавливания 10 м/с на всех испытанных образцах из сплава МА2-1 толщиной 2 мм образовались только радиальные трещины, которые привели к раскрытию 4 фрагментов. При более

низких скоростях продавливания в образцах сплава МА2-1 образовались только три радиальные трещины, которые привели к раскрытию 3 фрагментов.

При разрушении сплава АМг2 в результате воздействии полусферического индентора образуются окружные трещины.

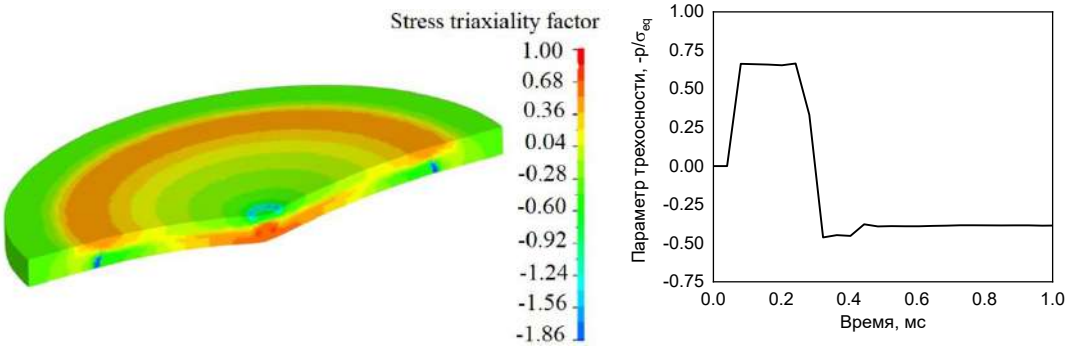
Результаты численного моделирования процессов динамического продавливания образцов листового проката легких сплавов позволяют провести анализ напряженно-деформированного состояния при прогибе образцов и формировании трещин. Расчетное распределение эффективных скоростей деформации по поперечному сечению образцов из сплава МА2-1 показано на рис.3 в моменты времени 0,202 мс (а) и 0,606 мс (б) продавливания со скоростью 10 м/с. Результаты свидетельствуют о зарождении трещин в центральной зоне нагружаемого образца, где реализуются максимальные скорости деформации растяжения. Развитие пластических деформаций приводит к релаксации эквивалентных сдвиговых напряжений и сопровождается изменениями локальных значений параметра трехосности напряженного состояния. Конфигурация образующихся трещин, полученная в результате расчетов, согласуется с экспериментальными результатами, показанными на рис.3б.



а б

Рис.3. Расчетное распределение эффективных скоростей деформации ($1мс^{-1}$) в поперечном сечении образцов МА2-1 со скоростью вдавливания 10 м/с в моменты времени (а) 0,202 и (б) 0,606 мс.

Рассчитанное распределение параметра трехосности напряженного состояния в поперечном сечении образцов из сплава МА2-1 в момент времени 0,202 мс при скорости вдавливания 10 м/с показано на рис.4а.



а б

Рис.4. Рассчитанное распределение трехосности напряженного состояния $-p/\sigma_{eq}$ в поперечном сечении образца МА2-1 при вдавливании в момент времени 0,202 мс (а), изменение параметра трехосности напряженного состояния в центральной точке образца во времени (б).

Результаты моделирования свидетельствуют о неоднородном и нестационарном во времени распределении параметра трехосности напряженного состояния в процессе разрушения при продавливании. Изменение параметра трехосности напряженного состояния в центральной точке образца при продавливании показано на рис.4б.

Рассчитанное распределение эквивалентной пластической деформации и эквивалентного напряжения Мизеса в поперечном сечении образцов АМг2 показано на рис.5 при продавливании со скоростью 10 м/с.

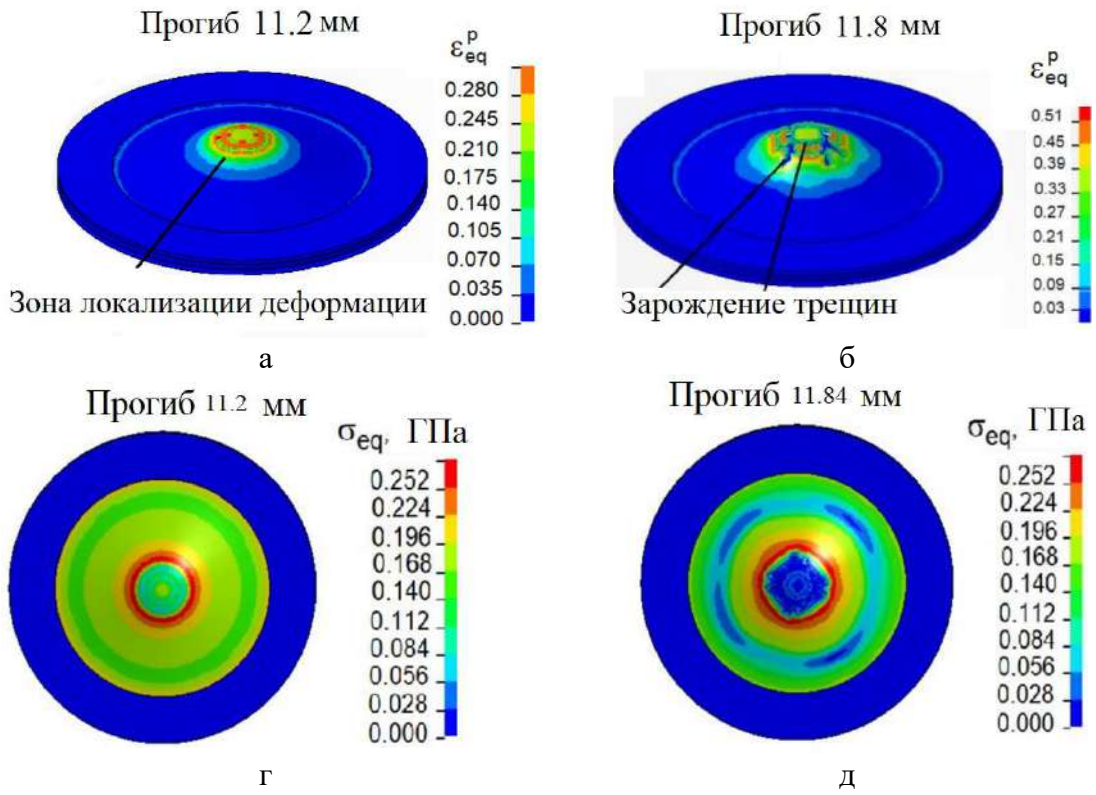


Рис.5. Распределение эквивалентной пластической деформации (а), (б) и эквивалентного напряжения Мизеса (в), (г) в поперечном сечении образцов AMg2 при продавливании со скоростью 10 м/с.

Максимальные значения эквивалентной пластической деформации достигаются при растяжении материала в приповерхностном слое на тыльной поверхности нагруженной пластины. Поэтому при продавливании алюминиевой пластины трещины начинаются именно с тыльной поверхности пластин, что приводит к образованию системы трещин с увеличением деформации. Кольцевые зоны локализации пластической деформации являются причиной формирования кольцевых зон поврежденности сплава с последующим образованием кольцевых трещин. Экспериментальные и расчетные зависимости силы пробивания от прогиба имеют хорошую корреляцию при скоростях 0,01, 0,1, 1, 5 и 10 м/с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведены экспериментальные и теоретические исследования процессов деформации и разрушения магниевого сплава МА2-1 и алюминиевого сплава АМг2 при двухосном растяжении при штамповке полусферическим индентором

со скоростями 0,1, 1, 5 и 10 м/с при комнатной температуре. Установлено, что для сплава МА2-1 эквивалентные пластические деформации, при которых начинается накопление повреждений, близки к значениям начала неустойчивости пластического течения и уменьшаются с увеличением скорости растягивающей деформации от 0,1 до 1000 $с^{-1}$. При продавливании образцов листового проката сплава МА2-1 в диапазоне скоростей нагружения от 0,1 до 10 м/с разрушение является вязким. При двухосном растяжении образца в условиях продавливания полусферическим индентором эквивалентная деформация начала разрушения значительно ниже значений величин, определяемых при одноосном растяжении со скоростями деформации 0,1, 10, 100 и 1000 $с^{-1}$ и комнатной температуре. Деформации перед разрушением магниевого сплава при двухосном растяжении при штамповке увеличиваются с увеличением скорости деформации. Полученные результаты численного моделирования высокоскоростной штамповки пластин из сплава МА2-1 полусферическим индентором свидетельствуют о том, что материал пластины деформируется в условиях изменяющегося параметра трехосности напряженного состояния, величина которого перед разрушением уменьшается с увеличением скорости деформации. Полученные результаты свидетельствуют о потенциальной возможности использования динамической штамповки для производства изделий из листового проката из магниевого сплава МА2-1. Результаты исследований, полученные в данной работе, могут быть использованы при разработке и модификации расчетных моделей механического поведения конструкций из магниевых сплавов, подверженных пластическому деформированию при динамических воздействиях. Показано, что при высокоскоростном растяжении происходит пластическое разрушение алюминиевого сплава АМг2 в результате зарождения и роста повреждений в зонах локализации пластической деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yang J., Zhu Z., Han S., Gu Y., Zhu Z., Zhang H.-D. *Evolution, limitations, advantages, and future challenges of magnesium alloys as materials for aerospace applications* // J. Alloy. Compd. – 2024. – Vol.1008. – 176707.
2. Yang M., Chen C., Wang D., Shao Y., Zhou W., Shuai C., Yang Y., Ning X. *Biomedical rare-earth magnesium alloy: Current status and future prospects* // J. Magnes. Alloy. – 2024. – Vol.12. – Pp.1260-1282.
3. Skripnyak V.V., Skripnyak V.A. *Hexagonal close-packed (hcp) alloys under dynamic impacts* // J. Appl. Phys. – 2022. – Vol.131. – 165902.
4. Wang J., Yuan X., Jin P., Ma H., Shi B., Zheng H., Chen T., Xia W. *Study on modified Johnson-Cook constitutive material model to predict the dynamic behavior Mg-1Al-4Y alloy* // Mater. Res. Express. – 2020. – Vol.7. – 026522.
5. Luan J., Sun C., Li X., Zhang Q. *Constitutive model for AZ31 magnesium alloy based on isothermal compression test* // Mater. Sci. Technol. – 2014. – Vol.30. – Pp.211-219.
6. Huang X., Hou J., Lin B., Li B., Jiang B. *Deformation localization behavior research of AZ31 magnesium alloy under impact load* // J. Phys. Conf. Ser. – 2023. – Vol.2541. – 012054.
7. Ozdur N.A., Ermana S.C., Seghir R., Stainier L., Aydıner C.C. *A thermomechanical investigation of textured magnesium in an effort to validate crystalplasticity simulations* // Procedia Structural Integrity IWPDF. – 2023. – Vol.61. – Pp.277-284.

8. Zerilli F.J., Armstrong R.W. *Constitutive equation for h.c.p. metals and high strength alloy steels. High strain rate effects on polymer, metal and ceramic matrix composites and other advanced materials* // ASME. – 1995. – Vol.48. – Pp.121-126.
9. Zhu X., Lei·Y., Wan H., Li·S., Dui G. *Constitutive modeling of porosity and grain size effects on superelasticity of porous nanocrystalline NiTi shape memory alloy* // Acta Mechanica. – 2023. – Vol.234. – Pp.6499-6513.
10. Needleman A., Tvergaard V. *Analyses of plastic flow localization in metals* // Appl. Mech. Rev. – 1992. – Vol.45. – Pp.S3-S18.

Геомеханика. Современные методы исследований

УДК 624.1
EDN RSSTVX
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.36

РЕЗУЛЬТАТЫ СОПОСТАВИТЕЛЬНЫХ ОПЫТОВ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ МЕРЗЛЫХ И ОТТАИВАЮЩИХ ГРУНТОВ МЕТОДОМ ШАРОВОГО ШТАМПА В РЕЖИМЕ ПОЛЗУЧЕСТИ И РЕЛАКСАЦИИ

Гуляев А.П., Тимерханов Р.Д., Королев М.В.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

Приближенный метод определения длительного сцепления при помощи шарового штампа как для слабых связных грунтов (ил, торф и т.д.), так и для глин твердой консистенции или вечномерзлых грунтов был предложен проф. Н.А. Цытовичем еще в 1947 г. [1]. В данном способе величина сил сцепления определяется по результатам измерения остаточной глубины вдавливания S^{∞} диаметром D при действии на него постоянной нагрузки P. То есть в классическом способе испытания ведут в режиме задаваемой нагрузки (режиме ползучести).

Шаровые штампы применяют для испытаний как в лабораторных, так и полевых условиях. Этот способ привлекателен простотой реализации и возможностью сокращения времени испытания для получения значения длительного сцепления.

В ИПРИМ РАН в течение ряда лет ведутся работы по развитию данного способа испытаний и расширения его возможностей [2-4]. В частности, была разработана методика испытаний шаровым штампом в режиме задаваемой осадки (режиме релаксации напряжений), в которой использована идея динамометрического метода проф. С.С. Вялова [1,2].

1. ПРОВЕДЕНИЕ СЕРИИ СОПОСТАВИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДЛИТЕЛЬНОГО УДЕЛЬНОГО СЦЕПЛЕНИЯ ШАРОВЫМ ШТАМПОМ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ МЕТОДИКЕ (В РЕЖИМЕ ЗАДАВАЕМЫХ НАГРУЗОК) И ПО ПРЕДЛАГАЕМОЙ МЕТОДИКЕ (В РЕЖИМЕ ЗАДАВАЕМЫХ ОСАДОК)

Цель эксперимента: сравнить результаты экспериментов по двум разным методикам.

Для проведения экспериментов в режиме задаваемой нагрузки использовался стандартный прибор шарового штампа, а для экспериментов в режиме задаваемой осадки был изготовлен прибор, в котором перемещение шарового штампа задается с помощью винтового редуктора, а возникающее усилие регистрируется с помощью электронного динамометра (рис.1).

Испытаниям подвергался суглинок в мягко-пластичном состоянии. Для предотвращения образца от высыхания поверхность образца покрывалась смазкой и пленкой с отверстием для штампа.

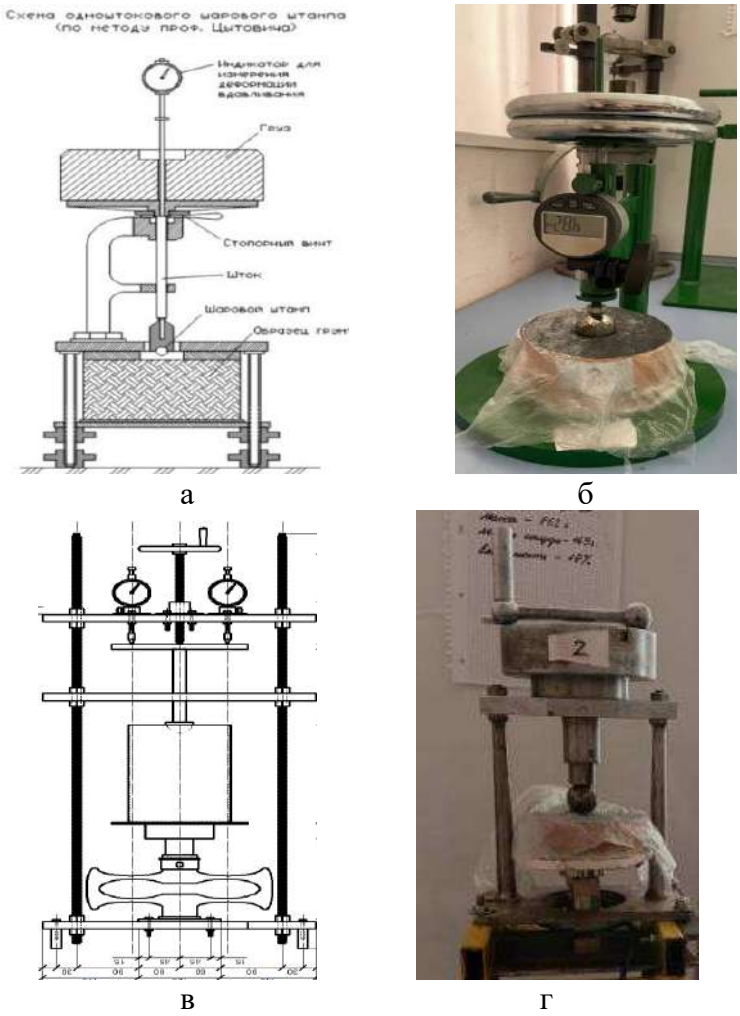


Рис.1. Принципиальные схемы и фото приборов шарового штампа: схема (а) и фото (б) прибора для испытания в режиме задаваемой нагрузки и схема (в) и фото (г) прибора для испытания в режиме задаваемой осадки.

Поскольку результаты испытаний существенно зависят от соотношения осадки шарового штампа к его диаметру, в сопоставительных экспериментах было очень важно, чтобы данное соотношение по этим двум методикам было одинаковым. Для этого сначала эксперименты проводились в режиме задаваемых перемещений. Для этого с помощью винтового редуктора шаровому штампу задавалась осадка, равная $S/D = 0,4$.

Это соответствует рекомендуемому диапазону соотношений S/D

$$0,005 < S/D < 0,1, \qquad (1)$$

где S – глубина отпечатка (осадка штампа), D – диаметр шарового штампа.

При проведении экспериментов в режиме задаваемых нагрузок для того, чтобы обеспечить равенство соотношений S/D при использовании этих двух методик, к шаровому штампу прикладывался груз, равный величине конечной стабилизированной нагрузки, полученной в результате испытаний в режиме задаваемых перемещений. В частности, величина этой средней в трех опытах нагрузки принималась равной 10,6 Н.

Для вычисления величины сцепления связных пластичных грунтов использовалась зависимость

$$C^{\infty} = \alpha P / \pi D S^{\infty}, \qquad (2)$$

где P – величина вертикальной нагрузки, α – теоретический коэффициент, полученный А.Ю. Ишлинским на основе задачи для пластичных тел, обладающих сцеплением, равный 0,175-0,18.

Результаты сопоставительных экспериментов представлены в Таблице 1.

Таблица 1.

Результаты сопоставительных экспериментов по двум разным методикам.

Время [мин]	Режим задаваемой нагрузки (ГОСТ)			Режим задаваемой осадки (ПРР)		
	C [Кпа]	C [Кпа]	C [Кпа]	C [Кпа]	C [Кпа]	C [Кпа]
0	0	0	0	31,8	32,7	34,7
4,8	115,4	83,3	75,5	26,9	27,6	29,2
9,6	107,1	78.9	65,2	24,3	24,9	26,1
15	93,8	75,0	60,0	23,9	24,3	25,1
18	88,2	65,2	55,6	22,2	22,9	24,5
30	83,3	60,0	53,6,0	21,6	22,2	24,3
60	75,0	51,7	50,0	20,2	21,6	24,3
120	65,2	44,1	46,2	20,0	21,2	23,5
240	58,8	42,9	44,1	19,6	21,0	23,5
360	54,5	41,1	41,7	-	-	-
480	52,6	40,0	40,5	19,4	20,8	23,5
720	39,9	30,1	29,5	19,3	20,7	23,4
1140	27,0	21,0	21,0	19,2	20,6	23,3
Среднее	23 КПа (за 24 часа)			21 КПа (за 24 часа)		

Как видно из Таблицы 1, среднее значение удельного сцепления, полученного по двум различным методикам, достаточно близки, что подтверждает возможность проведения испытаний шаровым штампом по предлагаемой методике (в режиме задаваемых перемещений). Небольшой разброс значений связан с естественной неоднородностью образцов. Приведем также графики испытаний шаровым штампом.

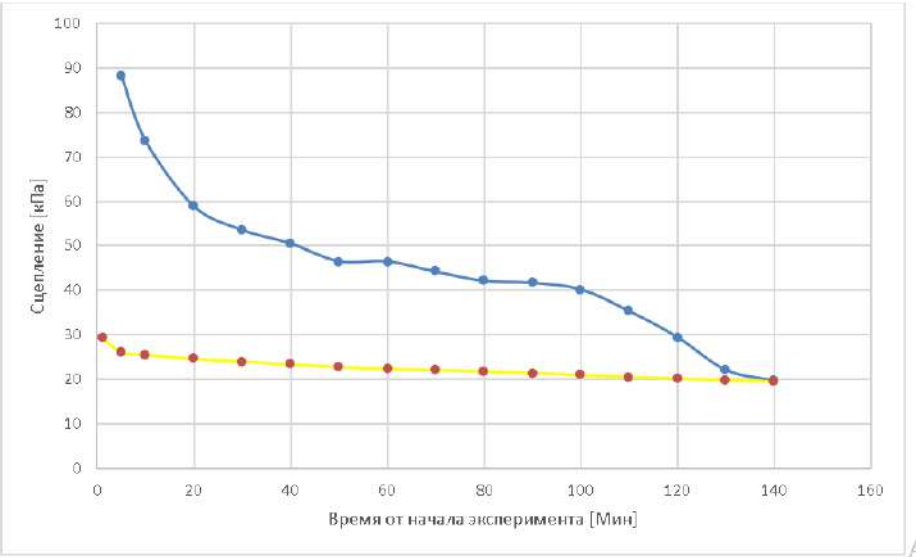


Рис.2. График изменения сцепления во времени по результатам по классической методике в режиме ползучести (точки красного цвета) и по методике испытаний в режиме релаксации напряжений.

Такая разница в характере графиков объясняется тем, что по классической методике в режиме задаваемой нагрузки (ползучести) уменьшение значения сцепления связано с тем, что площадь контакта шарового штампа все время увеличивается, а в режиме задаваемой осадки (релаксации) площадь контакта остается постоянной.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНОГО СЦЕПЛЕНИЯ МЕРЗЛЫХ ГРУНТОВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ В ХОДЕ ОДНОГО ОПЫТА ПРИ СТУПЕНЧАТОМ ИЗМЕНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ

В МГСУ и позднее в ИПРИМ РАН [5,6] была разработана методика определения значения длительного сцепления мерзлых грунтов при различных температурах в ходе одного опыта. Для её реализации был разработан мобильный прибор шарового штампа с компактной климатической камерой. Отличительной особенностью прибора является то, что все нагрузочные и измерительные устройства расположены вне морозильной камеры – это позволяет избежать погрешностей, связанных с температурными деформациями силовых и измерительных элементов, и производить испытания при разных значениях температуры на одном образце в ходе одного опыта.

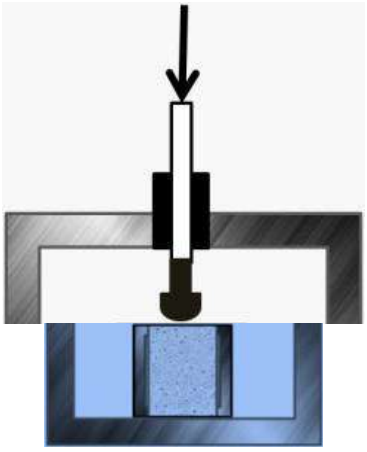
Процесс испытаний заключается в том, что в морозильную камеру помещается образец для испытаний при температуре массива. Далее на поверхность образца устанавливается шаровой штамп и штампу задается осадка, чтобы соблюдалось соотношение (1), и образец испытывается в режиме релаксации нагрузки. После достижения стабилизированного значения нагрузки, температуру в камере увеличивают на ступень. (Например, температура в камере была -5C^{o} и её изменили до значения -3C^{o}). В результате образец выйдет из состояния равновесия, опять произойдет релаксация внешней нагрузки и образец придет в новое равновесное состояние, но уже при новом значении отрицательной температуры. Таким образом, можно получить в ходе одного испытания несколько значений стабилизированной нагрузки при разных значениях температуры и, поскольку при этом отношение S/D в опыте практически не меняется, полученные результаты будут сопоставимы.

В 2025 г. авторами были продолжены работы по техническому усовершенствованию прибора. В частности, прибор был снабжен более чувствительным устройством для поддержания заданной температуры в морозильной камере.

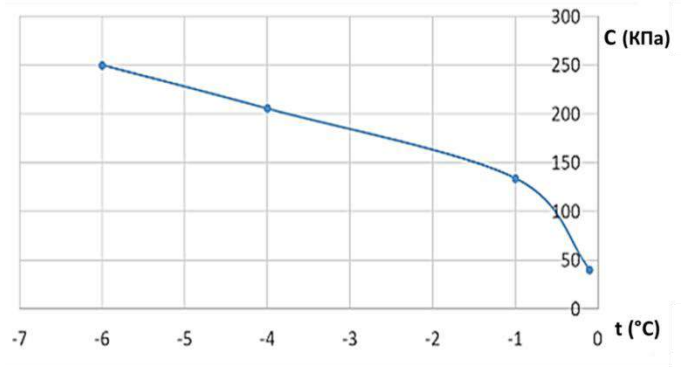
3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНОГО СЦЕПЛЕНИЯ МЕРЗЛЫХ ГРУНТОВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ В ХОДЕ ОДНОГО ОПЫТА ПРИ НЕПРЕРЫВНОМ ОТТАИВАНИИ ОБРАЗЦА

В целях упрощения процесса испытаний, авторами разрабатывалась идея не ступенчатого изменения температуры, а плавного изменения температуры при естественном оттаивании. При этом важно было соблюсти условие, чтобы процесс естественного оттаивания образца происходил достаточно медленно, чтобы успевала произойти релаксация нагрузки. Для этого вместо климатической камеры образец помещался в массивную бетонную оболочку с температурой, равной начальной температуры образца. Это существенно замедляло оттаивание образца и делало изменение температуры внутри образца более равномерным.

Были проведены первые методические опыты по проверке данной идеи. На рис.3 показана схема испытаний и первые результаты экспериментов.



а



б

Рис.3. а) Схема контейнера с массивной оболочкой и образцом грунта внутри для замедления процесса оттаивания; б) результаты определения удельного сцепления при плавном изменении температуры в ходе естественного оттаивания образца.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ ГРУНТА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЯ ШАРОВЫМ ШТАМПОМ В РЕЖИМЕ ПОЛЗУЧЕСТИ- РЕЛАКСАЦИИ

Для расчета скоростей движения медленно смещающихся оползневых масс, расчетов деформации различных, в том числе, подпорных сооружений и для оценки давлений на подпорные стенки в ряде случаев необходимо располагать значением коэффициента вязкости реологических грунтов, который определяется экспериментально Для определения коэффициента вязкости используется «метод шарика», который был детально разработан на кафедре Инженерной геологии и механики грунтов МАДИ еще в 60-70 гг. XX века. Метод основан на наблюдениях за скоростью погружения втопленного в грунт на половину своего диаметра стального шарика. Погружение осуществляется путем приложения к шарику внешней нагрузки, что можно рассматривать как фиктивное увеличение плотности материала шарика. Фиктивная плотность шарика определяется по формуле

$$\gamma_{ш} = \frac{p_{сист} + p_{гр}}{V_{ш}}, \qquad (3)$$

где $p_{сист}$ – вес системы, $p_{гр}$ – вес груза, $V_{ш} = \frac{4}{3}\pi r^3$ – объем шарика при радиусе r.

При достижении шариком постоянной скорости погружения, о чем судят по линейному характеру зависимости перемещения шарика во времени, определяют скорость его погружения $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, где Δs – величина погружения шарика в грунт за период времени Δt. Величину коэффициента вязкости η при $v \approx const$ вычисляют по формуле Стокса

$$\eta_{Ст} = \frac{\gamma_{ш} - \gamma_{г}}{18v} d^2, \qquad (4)$$

где $\gamma_ш$ – плотность шарика с учетом приложенного груза, $\gamma_г$ – плотность грунта, d – диаметр шарика, v – постоянная скорость погружения шарика в грунт.

Сущность методики заключается в том, что через упругий элемент (жесткий динамометр с винтом) к шаровому штампу, погруженному в грунт на половину его диаметра, прикладывается вертикальная нагрузка и далее испытания ведут в режиме ползучести-релаксации.

Вследствие осадки шарика во времени за счет разжатия упругого элемента происходит уменьшение вдавливающей нагрузки до тех пор, пока система не придет в новое равновесное состояние. По величинам начальной и конечной нагрузок на линейном участке можно определить коэффициент вязкости. При этом следует отметить, что при динамометре достаточно большой жесткости осадка шарика меняется незначительно.

Преобразуем формулу Стокса (4) для случая нагружения шарика через упругий элемент – динамометр с винтом. Учитывая, что величина изменения нагрузки ΔP будет линейно связана через жесткость динамометра с величиной изменения осадки шарика Δs, то есть

$$\Delta P = k \cdot \Delta s, \tag{5}$$

где k – жесткость упругого элемента (динамометра), которая измеряется в кН/м.

Таким образом, скорость осадки штампа $\mathrm{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ за промежуток времени Δt, будет равна

$$\mathrm{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta P}{k \cdot \Delta t}. \tag{6}$$

Подставляем выражение (5) в формулу (3), после преобразований получим окончательное выражение для определения коэффициента вязкости, который будет зависеть от жесткости динамометра, величины изменения релаксирующего напряжения на линейном участке графика за промежуток времени и от удельного веса самого грунта.

В настоящее время авторы ведут исследования по экспериментальной проверке данной методики.

Таким образом, испытания шаровым штампом обладают большим потенциалом для дальнейшей модернизации и могут быть значительно более информативными, чем по традиционной классической методике. Планируется дальнейшее проведение данных исследований, в частности, более глубокая экспериментальная проверка описанных методик и разработка методики определения коэффициента вязкости по испытаниям шаровым штампом при различных температурах в ходе одного опыта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вялов С.С. *Реологические основы механики грунтов. Учебное пособие для строительных вузов*. – М.: Высшая школа, 1978. – 447 с.
2. Королев М.В. *О значимости научного наследия Н.А. Цытовича и С.С. Вялова в становлении и развитии инженерного мерзлотоведения. Развитие метода шарового штампа Н.А. Цытовича и динамометрического метода С.С. Вялова для определения длительной прочности мерзлых грунтов* / IV международная НПК «Современные технологии инженерных изысканий, проектирования и строительства на многолетнемерзлых грунтах». Сборник трудов. – Москва, 2021.

3. Королев М.В. *Развитие метода шарового штампа Н.А. Цытовича и динамометрического метода С.С. Вялова для определения параметров длительной прочности грунтов при различных температура* // Фундаменты. – 2021. – №4. – С.4-8.
4. Королев М.В. *Системные инновации в методах исследования механических свойств грунтов*. – М.: ООО «Сам Полиграфист», 2018. – 376 с.
5. Ухов С.Б., Королев М.В., Брызгалин Ю.В. *Определение параметров длительной прочности грунтов при испытании в режиме ползучести и релаксации* / Сборник научных трудов ВНИИ оснований и подземных сооружений им. Н.М. Герсеванова. – М.: Стройиздат, 1990. – С.237-249.
6. Ухов С.Б., Королев М.В., Монастырский А.Е. *Способ определения длительного сцепления мерзлых грунтов*. А.С. СССР №1561032, опубликовано в Б.И. №16 от 30.04.1990.

УДК 539.3
EDN ZRGZSS
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.37

ДЕФОРМАЦИОННЫЕ ПОСТОЯННЫЕ И ЭВОЛЮЦИЯ ПРОНИЦАЕМОСТИ НЕФТЕНАСЫЩЕННЫХ И ЭКСТРАГИРОВАННЫХ НИЗКО- И ВЫСОКОПОРИСТЫХ КАРБОНАТНЫХ ПОРОД ПРИ ТРЕХОСНОМ НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ*

Зайцев А.В.[1], Химуля В.В.[2], Шевцов Н.И.[2], Поснов А.С.[1], Карев В.И.[2], Коваленко Ю.Ф.[2]

[1]*Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия*
[2]*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

Горные породы обладают естественной анизотропией деформационных, прочностных и фильтрационных свойств, которая способна изменять свой тип в процессе нагружения. При проведении экспериментов обнаруживаются существенные различия в материальных постоянных, определенных для образцов, даже, если они изготавливаются из одного и того же кернового материала и располагаются в непосредственной близости друг от друга. При проведении идентификации деформационных и прочностных свойств, а также материальных функций, описывающих неупругое поведение, используется предположение, что геологические породы изотропны. Это существенно ограничивает возможности описания деформирования и разрушения, а зачастую делает вообще невозможным проведение классификации дефектов и трещин, развивающихся по разным сценариям в разных плоскостях. Все это осложняет решение актуальных и практически значимых задач надежного проектирования и строительства подземных конструкций и сооружений, задач по предотвращению аварийных ситуаций, эффективной и безопасной разработки и эксплуатации скважин и горных выработок.

В настоящее время подавляющее большинство экспериментальных исследований проводится по традиционной условно трехосной схеме с использованием установок кармановского типа и цилиндрических образцов. Поэтому далеко не всегда удается воспроизводить в эксперименте реальные трехмерные напряженные состояния и реальные программы (истории) нагружения, возникающие в массиве горных пород. В реальных условиях залегания и эксплуатации в горных породах напряжения, действующие в трех взаимно ортогональных направлениях, могут быть существенно различными, а само нагружение – непропорционально. Для физического моделирования реальных напряженно-деформированных состояний геоматериалов конструируются установки истинно трехосного нагружения, которые способны независимо и одновременно изменять напряжения или деформации по каждой из трех осей.

Проведена обработка результатов испытаний кубических образцов высоко- и низкопористых нефтенасыщенных известняков, слагающих продуктивные

* *Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант РНФ 25–21–00442).*

пласты одного из месторождений Пермского края. Эксперименты проведены на Испытательной системе трехосного независимого нагружения (ИСТНН) лаборатории геомеханики ИПМех РАН. ИСТНН обеспечивает равномерное приложение нагрузок по всей площади поверхности образца в процессе деформирования, включая стадию разрушения [1-9]. ИСТНН позволяет проводить «жесткое» и «мягкое» нагружение. Измерение проницаемости осуществляется пропусканием сжатого воздуха через образец вдоль одной оси непрерывно во время проведения эксперимента на трехосное непропорциональное нагружение. Для этого в одной паре плит ИСТНН имеются каналы для подачи сжатого газа в образец и отвода профильтровавшего через образец газа, а также перфорированные венты для равномерного подвода и отвода газа по поверхности грани образца.

Образец для измерения проницаемости по одному из направлений при сложном напряженно-деформированном состоянии подготавливается следующим образом: на четыре грани образца, параллельные оси фильтрации, наносится оболочка из полимеризующегося раствора на латексной основе или водного раствора поливинилацетата. Несмотря на то, что толщина оболочки не превышает 50 мкм (исключаются существенные погрешности в результатах измерения деформаций), она обладает достаточной прочностью и эластичностью для гарантированной герметичности образца на различных этапах деформирования и разрушения. Перед испытаниями между гранями образца и наконечниками нажимных плит ИСТНН устанавливались тонкие фторопластовые прокладки со смазкой для исключения влияния трения при сжатии образца.

Разработана программа трехосного непропорционального нагружения. Нагружение проводилось в три этапа, которые отличались друг от друга величиной давления всестороннего сжатия. На всех этапах активное нагружение и разгрузка осуществлялись предельно «жестко». Это позволяло исключить приток энергии со стороны нагружающей системы, который потенциально мог выступить источником для развития неконтролируемого макроразрушения образцов высоко- и низкопористых нефтенасыщенных известняков. Давление всестороннего сжатия поддерживалось постоянным (2 МПа, 10 МПа или 20 МПа на первом, втором и третьем циклах нагружения соответственно) по двум осям x_1 и x_3 (предельно «мягкое» нагружение), а по третьей оси x_2 было реализовано вновь предельно «жесткое» активное сжатие. Первый цикл предварительного предельно «жесткого» гидростатического сжатия до давления 2 МПа позволяет, по предположению, «закрыть» микротрещины, образовавшиеся при извлечении кернового материала из массива или образовавшиеся в результате наличия собственных напряжений. Предельно «жесткая» разгрузка начиналась тогда, когда зависимость $\sigma_{22} \sim \varepsilon_{22}$ отклонялась от прямой. Разгрузка по оси x_2 (с той же скоростью, что и активное нагружение) осуществлялась до тех пор, пока напряжение σ_{22} не достигало 2 МПа, 10 МПа или 20 МПа на соответствующих циклах. После реализации трех циклов полная разгрузка образца позволила провести изучение порового пространства на высокоразрешающем рентгеновском томографе Procon X-Ray CT-MINI лаборатории геомеханики ИПМех РАН. На рис.1 представлены экспериментальные зависимости напряжений, деформаций и проницаемости, полученные на ИСТНН, для экстрагированного образца высокопористого нефтенасыщенного известняка на первом этапе нагружения.

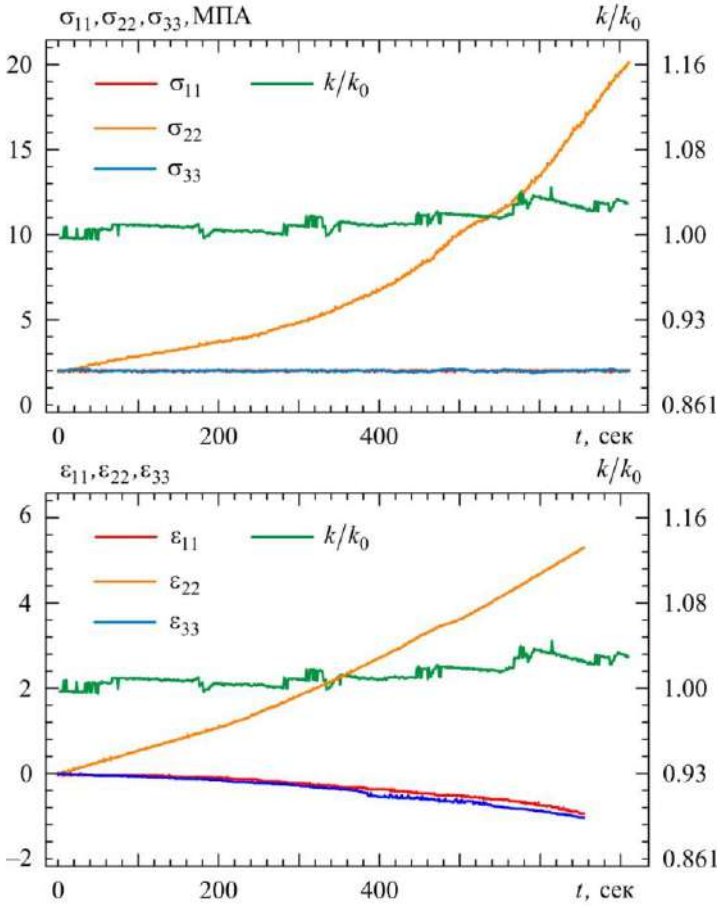


Рис.1. Отработка программы на первом этапе нагруженияи эволюция нормированной (отнесенной к начальной k_0) проницаемости экстрагированного образца высокопористого (объемная доля пор – 0,22, характерный размер – 3 мм) нефтенасыщенного известняка с глубиной залегания 1113 м.

«Близость» кривых $\varepsilon_{11} \sim t$ и $\varepsilon_{33} \sim t$ (рис.1) при их кардинальном различии от $\varepsilon_{22} \sim t$ позволила выдвинуть гипотезу о том, что высоко- и низкопористые нефтенасыщенные известняки обладают естественной трансверсальной изотропией. Плоскость изотропии задается напластованием, если оно может быть определено. Идентификация пяти упругих модулей (две пары модулей нормальной упругости и коэффициентов Пуассона) трансверсально-изотропного тела связана с необходимостью решения недоопределенной системы уравнений. Для решения проблемы недоопределенности предполагаем, что исходному трансверсально-изотропному телу ставится в соответствие фиктивное изотропное.

Применялось два способа определения модуля нормальной упругости и коэффициента Пуассона фиктивного изотропного тела. В первом способе для исходной недоопределенной системы из трех уравнений (обобщенный закон Гука) записывались две системы, из решения которых находились две пары искомых модулей. Второй способ идентификации упругих модулей фиктивного изотропного тела связан с решением двух уравнений, записанных в инвариантном виде. Эти уравнения содержат величины, инвариантные относительно преобразований, допустимых над изотропным телом, а коэффициентами связи являются модули сдвига и объемного сжатия [10,11]. В отличие от первого способа удается определить единственную пару искомых модулей.

Найденные модули нормальной упругости и коэффициенты Пуассона фиктивного изотропного тела, подставленные в системы из трех уравнений обобщенного закона Гука, позволяют записать выражения для оставшихся трех упругих модулей трансверсально-изотропной горной породы. В первом способе будет четыре варианта определения искомых величин, а во втором – два.

Проводилась проверка удовлетворения найденных независимых упругих модулей горных пород условиям положительности собственных значений оператора упругости (условие существования упругого трансверсально-изотропного тела). Если упругие модули не удовлетворяют вышеперечисленным условиям в форме неравенств, делается вывод о том, что найденные характеристики не являются искомыми деформационными постоянными.

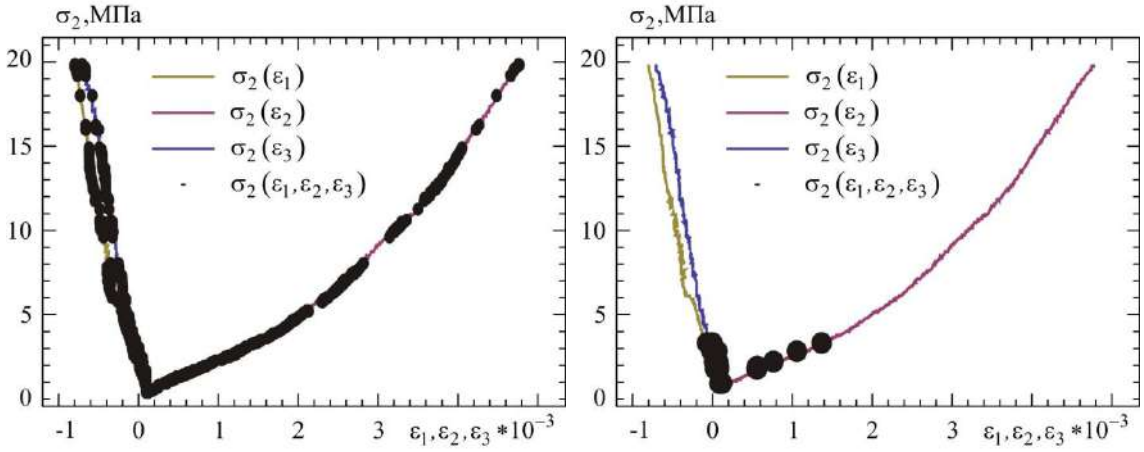


Рис.2. Диаграммы деформирования с равновесными напряженно-деформированными состояниями (точки на кривых), для которых выполняются условия положительности собственных значений оператора упругости. Различные варианты определения модуля нормальной упругости и коэффициента Пуассона фиктивного изотропного тела.

Таблица 1.

Деформационные постоянные высокопористого нефтенасыщенного и экстрагированного известняка, и нормированные (отнесенные к начальной k_0) проницаемости, определенные для правых границ диапазона изменения σ_{22}.

Экстракция	Цикл нагружения и диапазон изменения σ_{22}	E, ГПа	E', ГПа	ν	ν'	k/k_0
Не проводилась	Первый цикл, 2 – 20 МПа	2,10/2,14 3,61/2,33	2,24/2,27 2,57/1,75	0,33/0,33 0,17/0,13	0,65/0,63 0,49/0,49	1,32
	Второй цикл, 10 – 30 МПа	7,46/7,60 11,37/11,39	7,67/7,82 10,30/10,43	0,39/0,38 0,20/0,22	0,57/0,57 0,43/0,43	0,96
	Третий цикл, 20 – 40 МПа	9,71/9,79 15,68/17,01	10,28/10,39 13,00/14,19	0,43/0,43 0,24/0,24	0,55/0,55 0,47/0,47	0,98

Проведена	Первый цикл, 2 – 20 МПа	1,88/1,87 / 4,62/5,43	3,38/3,42 / 4,11/4,96	0,28/0,28 / 0,25/0,23	0,86/0,90 / 0,42/0,39	0,88
	Второй цикл, 10 – 30 МПа	3,04/3,06 / 8,27/8,27	5,64/5,73 / 5,65/5,88	0,35/0,35 / 0,24/0,26	0,76/0,75 / 0,50/0,50	0,97
	Третий цикл, 20 – 40 МПа	2,74 / 2,75 / 19,57 / 19,57	3,90/4,01 / 18,94/18,89	0,41/0,41 / 0,47/0,47	0,69/0,68 / 0,49/0,49	0,98

Примечание: характеристики определены по коэффициентам Пуассона и модулям нормальной упругости фиктивного изотропного тела ν_1 и ν_2 (первое и второе значения числителя), E_1 и E_2 (первое и второе значение знаменателя).

На диаграммах деформирования (рис.2) равновесные напряженно-деформированные состояния, для которых выполняются условия положительности собственных значений оператора упругости, отмечены точками. Наиболее «жесткие» ограничения на вычисляемые значения накладывают модули нормальной упругости в плоскости напластования в качестве четвертной независимой деформационной характеристики, определяемой для фиктивного изотропного тела. Этому варианту соответствует меньшее количество точек.

Пятая деформационная постоянная трансверсально-изотропной среды – продольный модуль сдвига не может быть найден из решения системы уравнений обобщенного закона Гука из-за отсутствия в программе нагружения сдвига. Для ее определения можно воспользоваться ограничениями в форме неравенств, представленными в работах [12-15], или разработать методику проведения эксперимента на кручение образца из геоматериала и последующую его расшифровку. Модуль сдвига в поперечный плоскости (плоскость изотропии) принимается равным модулю сдвига фиктивного изотропного тела.

Нефтенасыщенные горные породы перед проведением экспериментов подвергаются экстракции, в результате которой из минерального пористого каркаса извлекается его органическое и неорганическое наполнение. В результате проведения экспериментов с экстрагированными геоматериалами удается получить зависимости силовых факторов от кинематических, обработка которых приводит к идентификации материальных постоянных и функций пористого минерального каркаса. В редких случаях после экстракции происходит повторное насыщение образцов керосином. В настоящее время важным малоизученным вопросом остается экспериментальное исследование закономерностей совместного деформирования и оценка взаимного влияния минерального каркаса пористых горных пород и его углеводородного наполнителя при трехосном непропорциональном нагружении.

Значения четырех упругих модулей были идентифицированы для четырех литотипов высоко- и низкопористых нефтенасыщенных известняков. Проведена оценка влияния предварительной экстракции на деформационные свойства карбонатных пород. Показано существенное влияние органической фазы на значения модулей нормальной упругости, коэффициентов Пуассона и нормированных коэффициентов проницаемости в направлении активного нагружения для различных диапазонов давлений обжатия (Таблица 1). Практически все «мгновенные» значения упругих характеристик фиктивных изотропных тел удовлетворяют условиям положительности собственных значений оператора упругости. Было забраковано не более 5% идентифицируемых величин,

относящихся к начальным участкам диаграмм деформирования. Обращает на себя внимание, что ни один из материалов (экстрагированные или нефтесодержащие породы) не мог быть классифицирован, как изотропный (Таблица 1).

У нефтесодержащих высокопористых известняков модули нормальной упругости существенно возрастают с ростом начального давления обжатия. Это может быть объяснено тем, что в высокопористом нефтенасыщенном известняке есть фаза, которая пронизывает весь материал и перераспределяет напряжения на стенки минерального карбонатного каркаса. Если провести эксперименты по тем же самым программам нагружения с экстрагированным образцом, то при обработке их результатов можно заметить, что при давлении обжатия 2 МПа, 10 МПа наблюдается рост модулей Юнга, который связан с компакцией при сжатии и значительном уменьшении размера пор. Однако на 3 цикле нагружения модули нормальной упругости уменьшаются. Последнее связано с началом разрушения минерального каркаса, которое происходит в локальных областях без вовлечения в этот процесс всего объема материала. Локальность разрушения вызвана отсутствием органической фазы, которая была удалена до проведения испытаний. О начале разрушения породы также свидетельствует существенный рост коэффициентов Пуассона, вызванный смыканием пор, фрагментацией и компакцией минерального карбонатного каркаса.

Условие положительности собственных значений оператора упругости, а также использование модуля Юнга в плоскости напластования в качестве четвертной независимой деформационной характеристики, определяемой для фиктивного изотропного тела, является «жесткими» и чувствительными к изменению типа упругой симметрии ограничениями, позволяющими обнаружить признаки деформационной анизотропии. Подтверждением этого вывода являются идентифицированные значения коэффициентов Пуассона, которые совпадают с точностью до 4% (3 цикл нагружения экстрагированного высокопористого известняка), и модули нормальной упругости, которые отличны друг от друга на до 3%. Это свидетельствует о том, что экстрагированного известняк из-за множественного дисперсного разрушения минерального каркаса и консолидации проявляет отклик на трехосное нагружение, типичный для изотропного тела, близкого по своим свойствам к несжимаемому.

Обратим также внимание на изменение нормированной проницаемости k/k_0 (отнесенной к проницаемости, регистрируемой в начале цикла нагружения) высокопористых известняков при проведении экспериментов по разработанной программе (Таблица 1). Это изменение отражает закономерности механического поведения и проявления различных механизмов разрушения. Рост проницаемости неэкстрагированного образца при активном нагружении и давлении обжатия 2 МПа свидетельствует о появлении дефектов, зарождение которых происходит по механизмам сдвига. Однако на втором и третьем циклах нагружения неэкстрагированных высокопористых известняков (и экстрагированных пород на всех этапах нагружения) наблюдается устойчивая компакция геоматериалов, сопровождаемая значительным уменьшением размера пор и смыканием трещиноподобных дефектов. Это приводит к снижению проницаемости геоматериала.

Таким образом, полученные результаты идентификации деформационных свойств нефтенасыщенных известняков, полученные для различных давлений обжатия, свидетельствуют о существенном влиянии фазы углеводородного сырья и на значения модулей нормальной упругости, и коэффициентов Пуассона.

Это свидетельствует о том, что при разработке геомеханических моделей необходимо учитывать наличие наполнения среды даже для низкопористых карбонатных сред. В противном случае задачи надежного проектирования и строительства подземных конструкций и сооружений, задачи по предотвращению аварийных ситуаций, эффективной и безопасной разработки и эксплуатации скважин и горных выработок не смогут быть успешно решены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карев В.И., Климов Д.М., Коваленко Ю.Ф., Устинов К.Б. *О разрушении осадочных горных пород в условиях сложного трехосного напряженного состояния* // Изв. РАН. МТТ. – 2016. – №5. – С.15-21.
2. Сидорин Ю.В., Устинов К.Б., Сиротин А.А., Коваленко Ю.Ф., Карев В.И., Зайцев А.В., Журавлев А.Б. *Экспериментальное исследование деформирования горных пород в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния* // Процессы в геосредах. – 2016. – №6. – С.148-155.
3. Пантелеев И.А., Коваленко Ю.Ф., Сидорин Ю.В., Зайцев А.В., Карев В.И., Устинов К.Б., Шевцов Н.И. *Эволюция поврежденности при сложном неравнокомпонентном сжатии песчаника по данным акустической эмиссии* // Физическая мезомеханика. – 2019. – Т.22. – №4. – С.56-63.
4. Шевцов Н.И., Зайцев А.В., Пантелеев И.А. *Исследование связи напряженно-деформированного состояния горных пород с потоком акустической эмиссии на испытательной системе трехосного независимого нагружения* // Процессы в геосредах. – 2019. – №1(19). – С.129-136.
5. Пантелеев И.А., Мубассарова В.А., Зайцев А.В., Шевцов Н.И., Коваленко Ю.Ф., Карев В.И. *Эффект Кайзера при трехосном сжатии песчаника с последовательным вращением эллипсоида заданных напряжений* // ФТПРПИ. – 2020. – №3. – С.47-55.
6. Пантелеев И.А., Мубассарова В.А., Зайцев А.В., Карев В.И., Коваленко Ю.Ф., Устинов К.Б., Шевцов Н.И. *Эффект Кайзера при многоосном непропорциональном сжатии песчаника* // Доклады РАН. Физика, технические науки. – 2020. – Т.495. – №1. – С.63-67.
7. Пантелеев И.А., Зайцев А.В., Устинов К.Б., Мубассарова В.А., Шевцов Н.И., Химуля В.В., Карев В.И., Коваленко Ю.Ф. *Ориентационная природа эффекта деформационной памяти при трехосном циклическом неравнокомпонентном сжатии песчаника* // Вестник Самарского гос. технического ун-та. Физико-математические науки. – 2022. – Т.26. – №2. – С.293-310.
8. Shevtsov N., Zaitsev A., Panteleev I. *Deformation and destruction of rocks on the true triaxial loading system with continuous acoustic emission registration* / In book: Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes: Karev V., Klimov D., Pokazeev K. (eds). – Cham: Springer, 2019. – Pp.424-432.
9. Karev V., Kovalenko Yu., Ustinov K., Panteleev I., Zaitsev A. *Failure mechanisms under triaxial non-proportional loading of rocks on the basis of acoustic emission measurements* / Rock Mechanics for Natural Resources and Infrastructure Development: Full Papers; Proc. of the 14th Intern. Congress on Rock Mechanics and Rock Engineering (ISRM 2019). Leiden: CRC Press/Balkema. – 2020. – Vol.6. – Pp.1014-1021.

10. Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
11. Рыхлевский Я. *О законе Гука* // ПММ. – 1984. – Т.48. – Вып.3. – С.420-435.
12. Barden L. *Stresses and displacements in a cross anisotropic soil* // Geotechnique. – 1963. – Vol.13. – No.3. – Pp.198-210.
13. Knops R.J., Payne L.E. *Uniqueness theorems in linear elasticity* / In book: Springer Tracts in Natural Philosophy. Vol.19. – Berlin, Heidelberg: Springer, 1971. – 132 p.
14. Exadaktylos G.E. *On the constraints and relations of elastic constants of transversely isotropic geomaterials* // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. – 2001. – Vol.38. – No.7. – Pp.941-956.
15. Батугин С.А., Ниренбург Р.К. *Приближенная зависимость между упругими константами анизотропных горных пород и параметры анизотропии* // ФТПРПИ. – 1972. – №1. – С.43-52.

УДК 624.1
EDN EUSIBQ
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.38

ПЕРСПЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ, МЕТОДИКИ И ПРИБОРЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОЛЕТНЕМЕРЗЛЫХ ГРУНТОВ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ИХ ФИЗИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

Королев М.В.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

Успех проектирования, строительства и последующей эксплуатации сооружений, возводимых на многолетнемерзлых грунтах, напрямую зависит от качества и достоверности информации, полученной в ходе инженерно-геологических, и, в частности, геомеханических изысканий. Определение механических характеристик многолетнемерзлых грунтов, используемых в геомеханических расчетах, представляет собой сложную задачу, поскольку эти грунты обладают рядом специфических свойств, существенно осложняющих получение достоверных данных.

Многолетнемерзлые грунты обладают ярко выраженными реологическими свойствами, проявляющимися в значительных деформациях ползучести и существенном снижении прочности во времени, что требует проведения длительных испытаний. Их механические свойства существенно зависят от температуры. Поскольку в результате климатических изменений и техногенных факторов температура мерзлых грунтов основания может существенно меняться в течение срока эксплуатации сооружения, требуется определять значение механических характеристик при различных значениях отрицательной температуры и в процессе оттаивания. Это во много раз увеличивает необходимое количество сложных и длительных испытаний, которые сложно провести в полевых условиях, а в лабораторных условиях требуют использования дорогостоящего специального оборудования и высокой квалификации специалистов.

Кроме этого, многолетнемерзлые грунты разнообразны по происхождению, составу и строению, многие из них обладают существенной масштабной неоднородностью, что требует проведение большого количества дорогих полевых крупномасштабных испытаний, необходимое количество которых невозможно реализовать на практике.

В настоящее время на Севере РФ реализуются масштабные инфраструктурные проекты, связанные с массовым строительством большого числа капитальных сооружений различного назначения. Существующая инфраструктура, находящаяся в зоне риска, также нуждается в сохранении.

Как показывает практика, применяемые в настоящее время методы и методики геомеханических испытаний обладают малой информативностью, высокой стоимостью, сложностью в реализации и значительной длительностью и поэтому объективно не в состоянии справиться с новыми вызовами. В этой связи представляется актуальным определить требования, которые выдвигаются сегодня к методам и методикам геомеханических испытаний.

Перспективные методы исследования механических свойств оценивались известными учеными и специалистами в разное время по-разному, в зависимости

от уровня развития геомеханики, от приоритетных задач на данном периоде и в зависимости от технических, организационных и экономических возможностей на данном этапе.

Перспективность того или иного **метода** геомеханических испытаний определяется возможностью **широкого и эффективного использования** и **дальнейшего совершенствования** и модернизации способов, приборов и методик испытаний на **основе данного общего подхода** (метода) **для рационального решения приоритетных задач в определенных областях и условиях** строительства.

Более объективно степень перспективности того или иного метода можно оценить с помощью SWOT-анализа. Это метод стратегического планирования, который применяется для оценки перспектив развития компаний и бизнес проектов. Его можно использовать и для оценки перспективности технической идеи. При этом анализе выявляются **внутренние факторы** (сильные стороны и слабые стороны) и **внешние факторы** (возможности и проблемы).

Признаками перспективности метода являются:

- простота идеи;
- идею легко объяснить;
- не требует больших затрат на реализацию;
- возможность быстрого внедрения и быстрого получения положительного эффекта;
- возможность широкого внедрения (размеры рынка);
- оригинальность и уникальность идеи;
- возможность дальнейшего развития общей идеи;
- возможность использования идеи для решения широкого круга задач.

Дополнительными требованиями к перспективным методам являются:

– оптимальная точность и воспроизводимость, обеспечивающая повторяемость результатов;

– релевантность внешним условиям, т.е. способность в эксперименте воспроизводить реальные натурные условия (изменение температуры, оттаивание, НДС и др.);

– маштабируемость, т.е. возможность перехода от лабораторных к полевым крупномасштабным испытаниям;

– мультидциплинарность и комплексность – т.е. возможность интеграции различных методов (например, механику и термодинамику);

– достаточность получения необходимых параметров, полученных в эксперименте, при проведении геомеханических расчетов.

Оценивая перспективность методов геомеханических испытаний на данном этапе, следует также учитывать дополнительные внешние факторы:

• Сложное экономическое положение в РФ (необходимость экономии средств, при проведении изысканий и строительстве).

• Технологическую изоляцию РФ и возникшие сложности в использовании иностранных расчетных комплексов и иностранного оборудования.

• Необходимость курса на самостоятельное технологическое развитие. Отказ от «западных» подходов во многих сферах: в подготовке кадров, в нормотворчестве, в создании благоприятных условий для внедрения перспективных, ранее не востребованных отечественных разработок и др.

• Нехватку высококвалифицированных кадров на местах, способных проводить сложные геомеханические испытания.

• Изменение приоритетов страны: необходимость максимально быстрого перехода от страны, осуществляющей экспорт природных ресурсов к промышленной, высокотехнологичной и «самодостаточной» державе, что потребует реализацию приоритетных проектов в сжатые сроки.

В связи с вышеизложенным, возникают новые существенные дополнительные требования к методам геомеханических испытаний.

Перспективные методы геомеханических изысканий должны быть:

- технологичными;
- информативными;
- позволяющие с достаточной для практических целей точностью определять необходимые параметры моделей грунтов при изменении их состояния, которые используются в расчетах;
- экономически выгодными и позволяющими существенно сократить сроки и стоимость испытаний;
- простыми в технической реализации;
- реализуемыми на отечественном оборудовании;
- не требующими особо высокой квалификации персонала.

Все существующие способы и методики геомеханических испытаний можно достаточно полно охарактеризовать следующими тремя основными технико-экономическими категориями: «точность» (достоверность), «стоимость» и «скорость» (время) испытаний (рис.1).

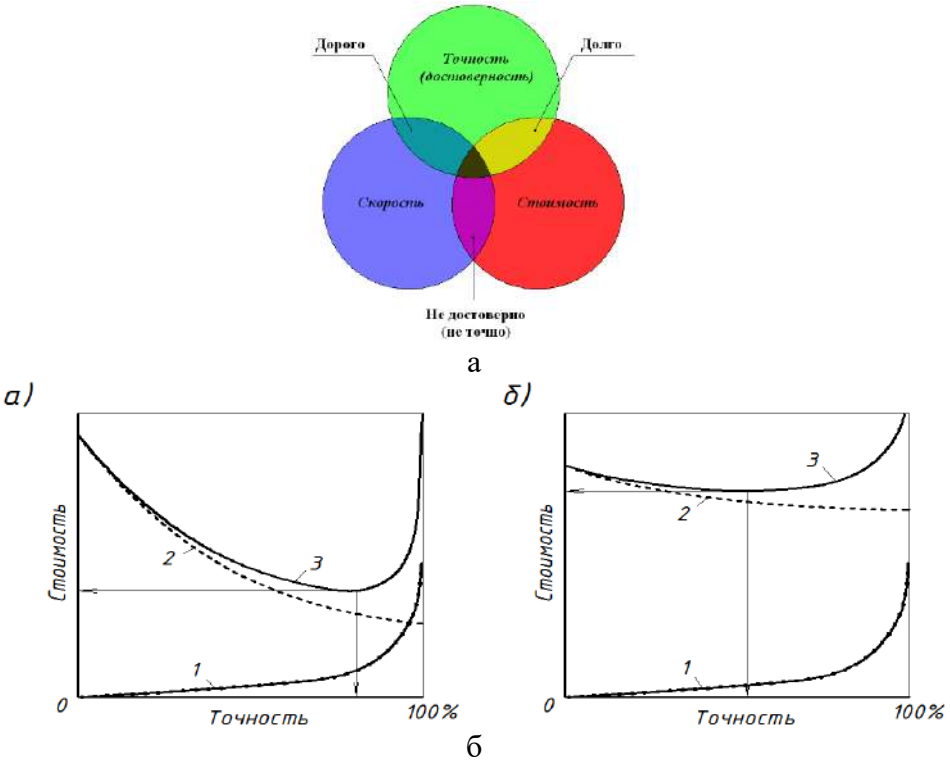


Рис.1. а) Диаграмма экономических категорий, характеризующих методы геомеханических испытаний; б) Зависимость стоимости испытаний (1), стоимости сооружения (2) и их суммарной стоимости (3) от точности испытаний, а) для сооружения, стоимость которого значительно зависит от точности определения характеристик; б) для сооружения, стоимость которого мало зависит от точности испытаний.

Стоимость сооружения (рис.1, кривая 2) зависит от достоверности инженерно-геологических изысканий и, соответственно, точности (достоверности) определения механических характеристик грунтов основания. С увеличением точности стоимость сооружения уменьшается за счет уменьшения неоправданных запасов. С другой стороны, при увеличении точности геомеханических изысканий возрастает их стоимость (рис.1, кривая 1). Суммарная же стоимость геомеханических изысканий и сооружения (рис.1, кривая 3) будет иметь минимум в определенной точке, которая соответствует не максимальной, а оптимальной точности при минимуме общих затрат. Если стоимость сооружения существенно зависит от точности геомеханических испытаний (график а), то оптимальная точность должна быть высокой, если нет (график б), то и оптимальная точность испытаний может быть невысокой. Таким образом, экономия на точности и достоверности изысканий значительно увеличивает стоимость сооружения. С другой стороны, нет необходимости однозначно стремиться к неоправданному экономически повышению точности испытаний [1].

В ИПРИМ РАН разработаны методы (способы, методики, приборы), которые полностью соответствуют критериям «перспективности» и сочетают в себе такие качества, как минимальная стоимость, высокая информативность, простота реализации, оптимальная точность определений при существенном сокращении стоимости и времени испытаний [1-5].

В частности, разработаны методики, позволяющие в ходе испытания одного образца определить параметры длительной прочности мерзлых грунтов, причем при различных значениях отрицательной температуры и в процессе оттаивания, что существенно сокращает трудозатраты, количество и время испытаний и существенно увеличивает их точность.

Методики основаны на испытаниях в режиме задаваемых деформаций, без разрушения образца, при которых образцу ступенчато задаются сдвиговые деформации и далее образец на каждой ступени деформаций выдерживается до релаксации сдвиговых (разрушающих) напряжений (рис.2). В процессе опыта можно изменять как величину удерживающих нормальных напряжений, так и, в последствие температуру образца грунта, что и дает возможность определять параметры прочности при различных значениях температуры на одном образце.

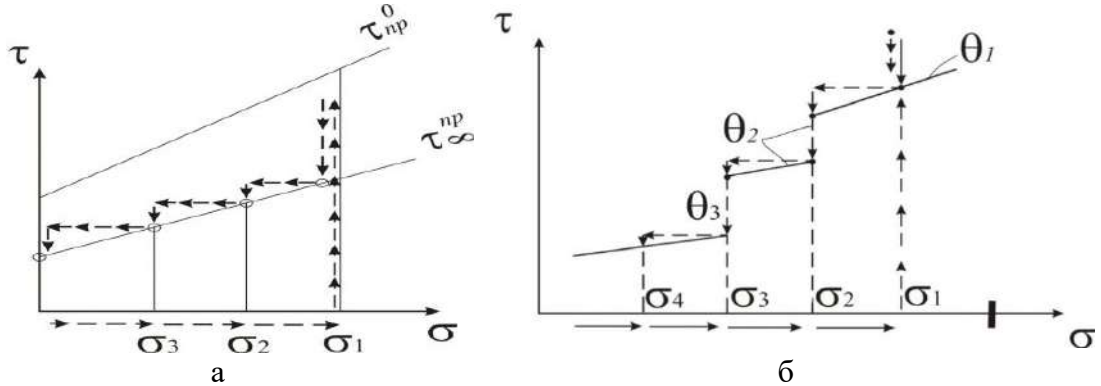


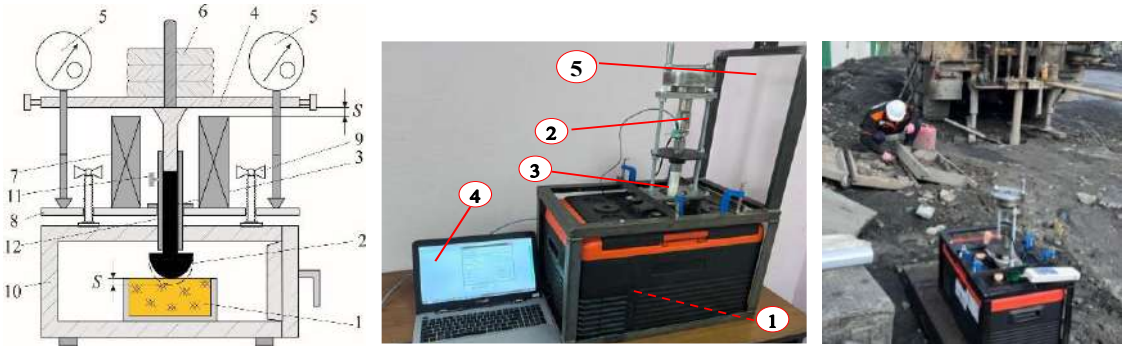
Рис.2. а) Программа нагружения и кривые условно-мгновенной и длительной прочности при фиксированной температуре; б) то же при различных значениях отрицательной температуры θ_1; θ_2; θ_3.

Проведенные сопоставительные испытания по разработанным и традиционным методикам показали хорошую сходимость результатов.

На основе разработанных методик созданы опытные образцы компактного переносного оборудования для проведения испытаний различными методами: на одноосное сжатие, при помощи шарового штампа, для трехосных и сдвиговых испытаний.

Отличительной особенностью этих приборов является то, что в мини климатическую камеру помещается только образец для испытаний, а нагрузочные и измерительные устройства находятся снаружи. На рис.3 для примера приведена принципиальная схема и фото прибора для определения сцепления мерзлого грунта при различных значениях отрицательной температуры и в процессе оттаивания
на одном образце в ходе одного опыта [4].

Малый вес и размер приборов позволяет их использовать в полевых условиях непосредственно на стройплощадке, в месте отбора образцов (рис.3).



а б в

Рис.3. а) Вариант схемы прибора шарового штампа: 1 – образец грунта, 2 – шаровой штамп, 3 – подвижной шток, 4 – грузовая платформа с держателями индикаторов, 5 – индикаторы часового типа, 6 – груз, 7 – динамометры, 8 – опорная плита, 9 – регулировочные винты для создания требуемого зазора, 10 – мини климатическая камера, 11 – стопорный винт. б) Фото другого варианта прибора шарового штампа: 1 – мини климатическая камера, 2 – винтовой редуктор для создания нагрузки с динамометром, 3 – подвижной шток, 4 – компьютер для автоматической регистрации измерений, 5 – опорная рама. в) Фото прибора в процессе полевых испытаний.

В дальнейшем планируется разработать стандарты организации, позволяющие использовать новые методики в геомеханических изысканиях и продолжить разработку методик с учетом других негативных добавочных воздействий (водонасыщение, динамические нагрузки, загрязнения нефтепродуктами и др.).

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ СХЕМ И ОБОРУДОВАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПОЛЕВЫХ ИСПЫТАНИЙ.

Наиболее достоверные результаты определения механических характеристик масштабно неоднородных грунтов получаются при проведении полевых испытаний. Однако эти испытания являются дорогостоящими, трудозатратными
и требуют долгих подготовительных работ, поэтому их трудно осуществить.

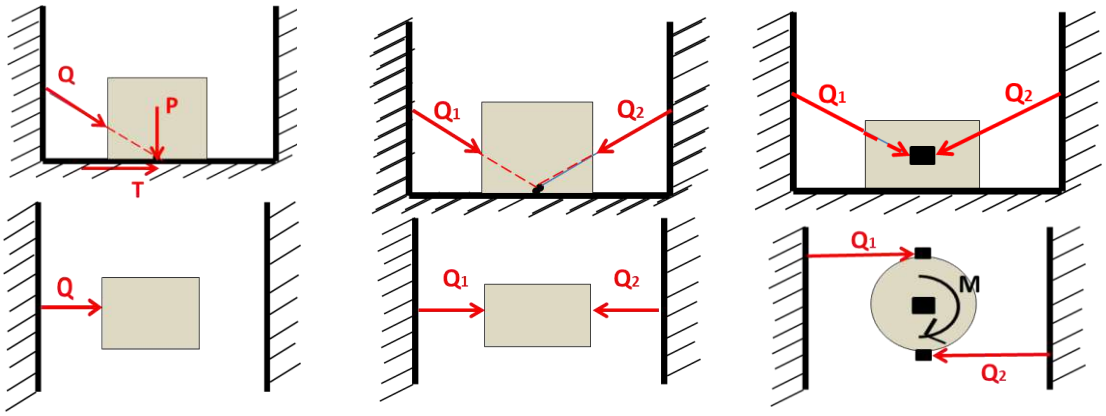
Направления инноваций в области совершенствования полевых испытаний:

- Использование эффективных и информативных методик.

- Оптимизация количества испытаний на основе предварительных расчетов.
- Сокращение трудоемкости и сроков проведения подготовительных работ за счет применения инвентарных установок и более простых в реализации схем нагружения.
- Использование для интерпретации опытных данных в опытах, где реализуется сложное напряженное состояние численных расчетов.
- Создание более равномерного напряженно-деформированного состояния и температурного состояния при проведении опытов.

Традиционный метод определения параметров прочности грунтов путем сдвига целиков в шурфах, основан на независимом приложении к целику постоянной вертикальной сжимающей и ступенчато возрастающей касательной сдвигающей нагрузок. Однако проведение испытаний по такой схеме встречает существенные технические сложности, значительно увеличивающие время подготовительных работ: необходимость устройства анкерной балки и анкеров для восприятия вертикального реактивного усилия и необходимость использования распределительных плит и катков для возможности независимого приложения к целику нормальной и касательной нагрузки.

Значительно более технологичной схемой является испытание целиков грунта на сдвиг в шурфе наклонной нагрузкой. В этом случае, при приложении к целику силы, направленной под углом, при её ступенчатом увеличении, одновременно происходит увеличение как сдвигающей, так и сжимающей нагрузки. Траектория нагружения при этом отличается от классических испытаний, но зато такая схема не требует устройства анкеров, упорной балки и катков, что существенно сокращает время подготовительных работ и более чем в два раза сокращает стоимость испытания. Для независимого определения угла внутреннего трения и удельного сцепления, как и в случае традиционных испытаний требуется испытать минимум два целика, но в данном случае с разным углом наклона нагрузки (рис.4а). Возможно также использовать и другие схемы приложения нагрузки: с помощью двух домкратов, установленных под углом навстречу друг другу для осуществления прямого (рис.4б) и кольцевого сдвига.



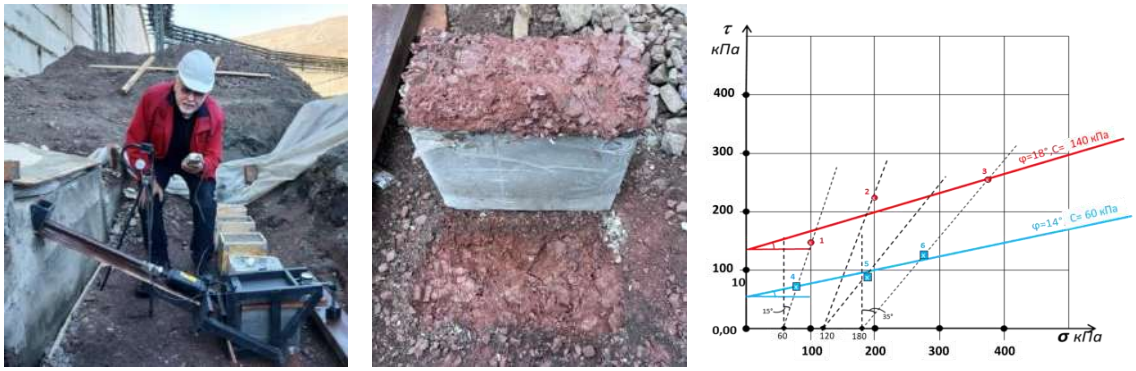
а б в

Рис.4. Схемы приложения нагрузки под углом к штампу при испытаниях на сдвиг: а) наклонной нагрузкой; наклонными нагрузками, направленными под углом друг к другу.

При этом схема на рис.4б позволяет осуществлять нагрузку и разгрузку практически по любой траектории и использовать при испытаниях методику ползуче-релаксационного режима.

Для увеличения технологичности испытаний по сдвигу целиков в шурфах было разработано ***специальное инвентарное устройство***, состоящее из металлической обоймы и толкателя, который может устанавливаться под разными углами (рис.5).

Опт применения показал, что установка позволяет существенно снизить трудоемкость подготовительных работ, а также производить испытания в труднодоступных местах.



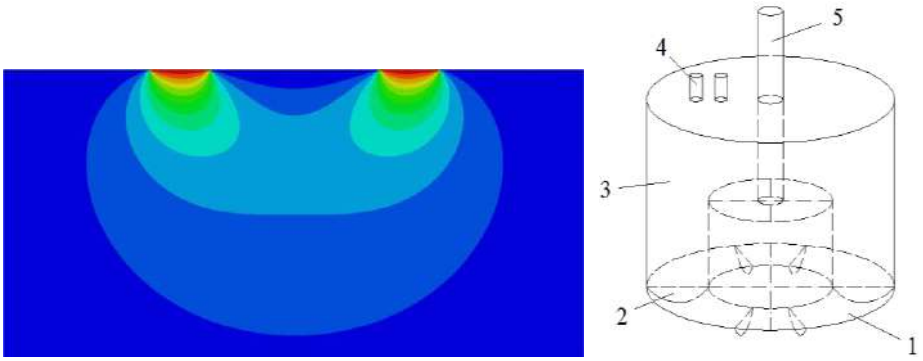
а б в

Рис.5. Испытания трещиноватого мергеля сдвигом бетонных штампов наклонной нагрузкой. а) фото процесса испытаний; б) поверхность сдвига; в) результаты испытаний мергеля при природной влажности и в водонасыщенном состоянии.

Приведем пример одной из разработок с использованием инвентарных штампов. ***Новая установка кольцевого ребристого штампа с ребрами криволинейного очертания для испытаний мерзлых грунтов при различных температурах.***

С помощью кольцевого ребристого штампа можно проводить испытания в режиме ползучести-редаксации и проводить опыты по определению параметров прочности при различных температурах в ходе одного эксперимента не только в климокамере, но и в натурных условиях (в шурфах и коротких скважинах). При использовании обычного кольцевого ребристого штампа с прямоугольными ребрами возникает проблема создания равномерного температурного поля под ребрами штампа. С целью усовершенствования метода было предложено ребра штампа делать не в виде прямоугольных пластин, а округлой формы, повторяющей кривую линии равных температур, которая формируется под подошвой кольцевого штампа при её нагревании. Тогда при приложении крутящей нагрузки сдвиг грунта будет осуществляться точно по границе слоя грунта с одинаковой температурой. Для этого были проведены численные температурные расчеты изменения температуры грунта в массиве при изменении её под кольцевой подошвой штампа. Расчеты проводились с помощью программного комплекса «Abacus». Как показали проведенные расчеты, форма линии равных температур при таком нагреве одинакова и не зависит от теплофизических свойств грунта (рис.6а) Это обстоятельство дает возможность для определения механических свойств грунта при различных температурах в натурных условиях.

На рис.6а приведены результаты численных температурных расчетов при нагревании подошвы кольцевого штампа. На рис.6б показана принципиальная схема устройства. [7].



а б

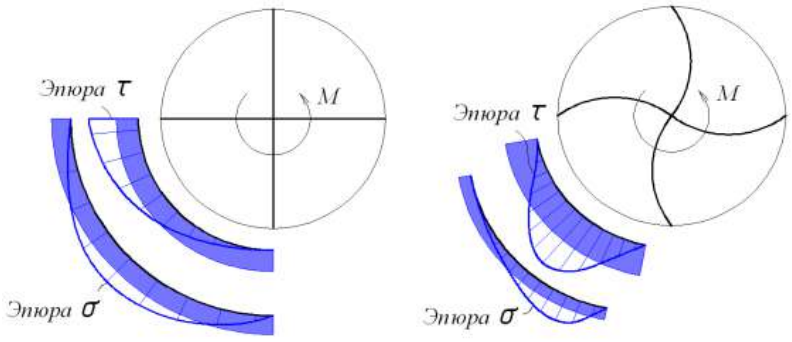
Рис.6. а) Результаты численных расчетов изменения изолиний температуры в массиве мерзлого грунта при её изменении на поверхности под подошвой кольцевого штампа (стабилизированное установившееся состояние); б) схема установки: 1 – подошва кольцевого штампа, 2 – овальные ребра, 3 – бак с теплоносителем, 4 – подводящий и отводящий трубопроводы, 5 – вал штампа для передачи крутящего момента и вертикальной нагрузки.

РАЗРАБОТКА ПОЛЕВЫХ ЭКСПРЕСС МЕТОДОВ ПОЛЕВЫХ ИСПЫТАНИЙ

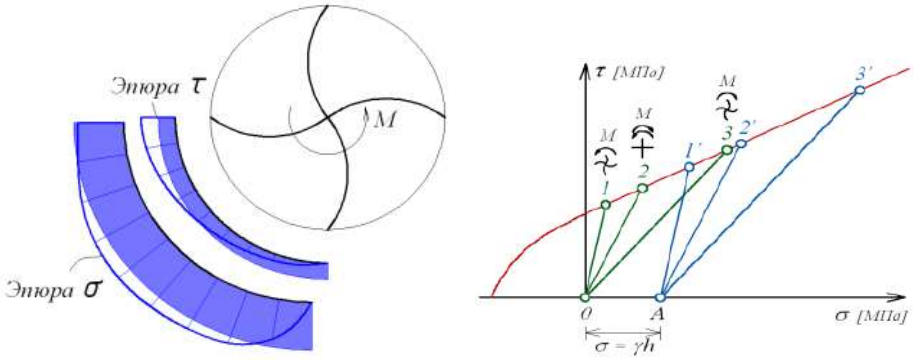
Основным направлением инноваций в этой области являлось создание простых в реализации и более информативных способов проведения механических испытаний. Для этого разработаны (или усовершенствованы) способы испытаний наклонной и крутящей нагрузкой с применением инвентарного оборудования. Приведем примеры таких разработок.

Способ определения угла внутреннего трения и удельного сцепления с помощью крыльчатки с криволинейными лопастями (для талых и оттаявших грунтов).

Отличием предлагаемого способа от известного способа испытания грунтов крыльчаткой является то, что лопасти крыльчатки имеют криволинейную поверхность. Таким образом, при вращении модифицированной крыльчатки в разные стороны или при использовании крыльчаток с различным радиусом кривизны лопастей реализуются различные напряженно-деформированные состояния. Равнодействующая напряжений, возникающих при повороте крыльчатки в разные стороны, направлена под разными углами, что дает возможность получить два уравнения для раздельного определения угла внутреннего трения и удельного сцепления [6].



а б



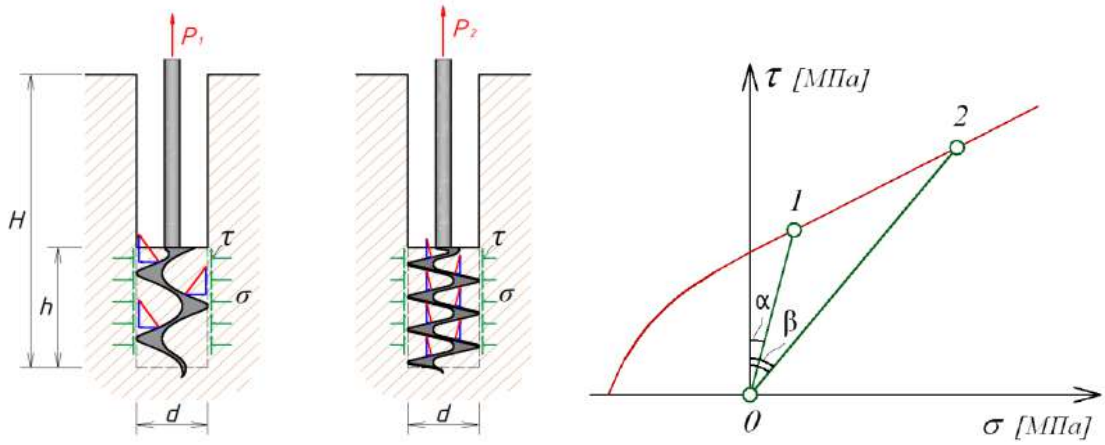
в г

Рис.7. Эпюры касательных и радиальных напряжений, возникающих при кручении крыльчатки с разной формой лопастей. а) при прямолинейной форме лопастей; б) при вогнутой форме; в) при выпуклой форме; г) траектории нагружения в зависимости от формы лопастей крыльчатки.

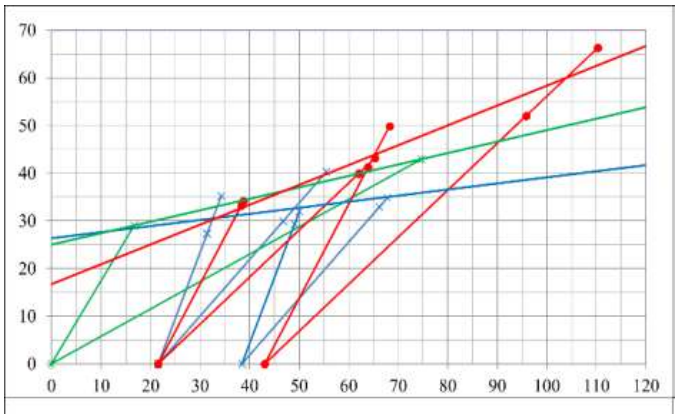
На рис.7 показаны характерные эпюры нормальных и касательных напряжений для вышеописанных случаев и траектории нагружения крыльчаток с разной кривизной лопастей.

Новый способ определения параметров прочности грунта путем выдергивания буровых винтовых шнеков с разным шагом витков.

Способ применяется для опробования массива грунта по глубине непосредственно при проходке скважины ручным бурением. Сущность метода заключается в том, что шнеки с различными углами атаки завинчиваются в грунт с минимальным его нарушением, для чего поступательное движение должно соответствует вращательному движению шнека. Для определения прочностных характеристик грунтов после упора шнека в стопор он при кручении выдергивает грунт, с замером усилия выдергивания [6]. Благодаря применению шнеков с различным углам атаки, при выдергивании на цилиндрической поверхности среза действуют различные радиальные сжимающие и касательные нагрузки, соотношение которых зависит от угла атаки шнека, благодаря чему возможно построение зависимости предельных касательных напряжений от нормальных (рис.8б).



а б



в

Рис.8. а) схема шнеков с различным углом атаки; б) траектория нагружения при выдергивании шнеков с различным углом атаки; в) сопоставление результатов экспериментов различными способами: красный цвет – испытания крыльчаткой с криволинейными лопастями; зеленый цвет – испытания целиков на сдвиг наклонной нагрузкой; голубой цвет – испытания с помощью шнеков с разным углом атаки, завинченных в грунт.

На основе вышеописанных экспресс методов разработана конструкция мобильной многофункциональной установки для проведения предварительных инженерно-геологических изысканий в труднодоступных местах и в условии плотной городской застройки. И при строительстве дорог и линейных сооружений [7].

ВЫВОДЫ

Инновационные разработки ИПРИМ РАН представляют собой взаимосвязанную систему методов, методик и приборов, позволяющих с достаточной для практических целей точностью определять значения механических характеристик грунтов при негативном воздействии дополнительных факторов. Эти разработки полностью соответствуют требованиям, предъявляемым к перспективным методам испытаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Королев М.В. *Перспективные методы определения механических свойств многолетнемерзлых грунтов* // Научный вестник Арктики. 2022. – №12. – С.23-33.
2. Королев М.В. *Системные инновации в методах исследования механических свойств грунтов*. – М.: ООО «Сам Полиграфист», 2018. – 376 с.
3. Королев М.В., Егоров В.Н., Власов А.Н., Знаменский В.В., Куцевич О.И., Икрамова А.Е. *Примеры и причины аварий сооружений. Вопросы оценки и обеспечения качества строительных объектов, надежной работы оснований и фундаментов в условиях меняющихся природных и техногенных воздействий: монография*. – М.: ООО «СамПолиграфист», 2020. – 216 с.
4. Королев М.В., Кыльчик Н.А. *Об эффективности и перспективах совершенствования методик и приборов, применяемых для определения механических характеристик многолетнемерзлых грунтов при различных температурах* // Журнал «Фундаменты». – 2023. – №2. – С.26-30.

5. Королев М.В. *Инновационные разработки ИПРИМ РАН в области создания перспективных методов, методик и приборов геомеханических испытаний* // Журнал «Фундаменты». – 2024. – №2(16). – С.12-16.
6. Королев М.В., Куцевич О.И., Кубецкий В.Л. *Определение механических свойств грунтов касательной крутящей нагрузкой* // Журнал «Фундаменты». – 2022. – №1(7). – С.18-23.
7. Королев М.В. *Геомеханические изыскания для строительства транспортных сооружений в криолитозоне* // Дороги. Инновации в строительстве. – 2025. – №123. – С.110-114.

УДК 624.1
EDN YMNKJO
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.39

АНАЛИЗ ПРОБЛЕМ СТРОИТЕЛЬСТВА И ЭКСПЛУАТАЦИИ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ НА ТЕРРИТОРИИ ГОРОДА НОРИЛЬСКА В УСЛОВИЯХ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ МНОГОЛЕТНЕМЕРЗЛЫХ ГРУНТОВ

Михайлова Е.С.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия
Центр мониторинга зданий и сооружений ЗФ «ПАО «ГМК «Норильский никель»», г. Норильск, Россия

Норильский промышленный район расположен севернее Полярного круга, в южной части Таймырского полуострова на территории сплошного распространения многолетнемерзлых грунтов (ММГ), характеризующихся высокой льдистостью, неоднородным строением и чувствительностью к термическому воздействию. Основные породы – суглинки, пески, мерзлые коренные породы, часто содержащие ледяные включения и прослои.

Климатический режим г. Норильска можно охарактеризовать следующим образом: суровая продолжительная зима, устойчивый снежный покров, сравнительно короткое, прохладное лето. Наиболее важными факторами формирования климата является западный перенос воздушных масс и влияние континента. Взаимодействие этих двух факторов обеспечивает быструю смену циклонов над рассматриваемой территорией, что способствует частым изменениям погоды и сильным ветрам. Среднегодовая температура воздуха составляет -9,6°С. Значения показателей температурного режима в г. Норильске приведены на рис.1.

Показатель	Янв.	Фев.	Март	Апр.	Май	Июнь	Июль	Авг.	Сен.	Окт.	Нояб.	Дек.	Год
Абсолютный максимум, °C	−3	−2	7,4	10,5	22,8	30,4	31	28,7	18,6	9,6	3,1	−1	31
Средний максимум, °C	−23,9	−23,6	−18,4	−10	−1,7	10,4	18,2	15	6,9	−6,7	−16,9	−21,6	−6,2
Средняя температура, °C	−27,2	−26,9	−21,9	−13,9	−4,8	7	14,3	11,4	4	−9,5	−20,2	−25,1	−9,6
Средний минимум, °C	−31	−30,7	−26,4	−18,5	−8,4	3,2	10	7,6	1,2	−12,5	−23,9	−28,9	−13,4
Абсолютный минимум, °C	−53,1	−52	−48	−38,7	−26,8	−9,8	−0,4	−1	−13	−36	−48,9	−51	−53,1

Рис.1. Показания температурного режима в г. Норильске.

По данным Росгидромета и международных исследований, среднегодовая температура воздуха в Арктической зоне России, включая Норильск, растет быстрее, чем в среднем на планете. На графике, рис.2, показана тенденция изменения климата в г. Норильске с 1979 по 2024 гг. Линия тренда (пунктирная) поднимается слева направо, что свидетельствует изменению температуры в положительную сторону.

Как показало исследование, проведенное компанией «Норильский никель» совместно с учеными Института физики атмосферы, рост температуры атмосферного воздуха в г. Норильске составляет порядка 0,6 градуса за десятилетие, а температура же массива многолетнемерзлых грунтов за это время изменяется примерно на 1,5 градуса. Такая разница между изменениями

среднегодовых температур наружного воздуха и температур грунтового массива объясняется тем, что температура многолетнемерзлых грунтов зависит от многих природных факторов и конкретных условий площадки.

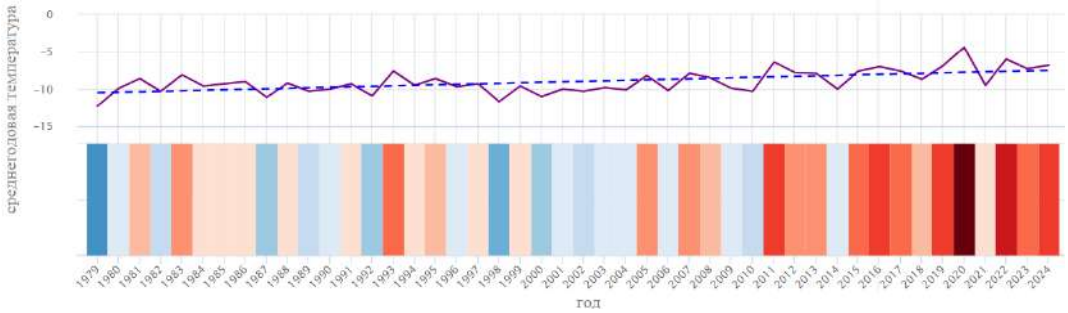


Рис.2. График изменения среднегодовой температуры в г. Норильске в период с 1979 по 2024 гг.

Для г. Норильска сохранение вечной мерзлоты без преувеличения жизненно важно, т.к. большинство зданий и сооружений в городе построено на свайных фундаментах, вмороженных в грунт. Если обратимся к истории г. Норильска, то первая массовая застройка проходила в 1940-1960 гг. В эти годы строительство велось преимущественно на территориях с близким выходом к поверхности скальных грунтов – оттаивание мерзлоты здесь не могло привести к критическим деформациям. Но город в советское время разрастался довольно быстро, а значит, нужно было искать решение для строительства в условиях мерзлоты. Решение было найдено инженером-гидротехником Михаилом Кимом. Оно заключалось в использовании метода свайного строительства, который предполагал использование в качестве основания саму вечную мерзлоту. В основе метода, придуманного Кимом, лежало правило – дома со свайным фундаментом и проветриваемым подпольем, построенные на вечной мерзлоте при правильной эксплуатации и постоянном мониторинге, могут стоять на различных мерзлых грунтах так же прочно, как на скальном основании. К сожалению, в наше время забыли про основные составляющие правила М. Кима, а именно «при правильной эксплуатации и постоянном мониторинге», поэтому первая проблема, с которой сталкиваются в городе Норильске, – это тепловое влияние на грунты основания самого здания, в результате нарушения правил эксплуатации вентилируемых подполий зданий, которое должно обеспечивать естественное охлаждение поверхности основания за счет циркуляции воздуха. К таким нарушениям относится (рис.3):

– отсутствие гидроизоляции и теплоизоляции на трубопроводах тепловодоснабжения. Непроизведенная изоляция труб повышает температуру подполья при эксплуатации. Постепенно тепло передается в грунт, формируя локальные таликовые очаги и ослабляя основание;

– прорыв труб в результате износа коммуникаций, отсутствие или расположение водоотводных лотков выше уровня планировки подполий. Прорыв труб вызывает длительное поступление теплой воды в подполье. Вода фильтрует грунты, ускоряет протаивание и вызывает неравномерные просадки фундаментов;

– недостаточное вентилирование подполий. Малые размеры продухов, недостаточная высота подполий, расположение продухов ниже максимального уровня снегового покрова снижают приток холодного воздуха, нарушается

естественная вентилируемость подполий. Это приводит к локальному прогреву подполья и ухудшению температурного режима основания;

– уменьшение потока холодного воздуха в подполье. Размещение большого количества коммуникаций в подполье и несущих конструкций вблизи продухов подполья перекрывают вентилируемые потоки. Это уменьшает охлаждение основания и способствует возникновению локальных ореолов оттаивания;

– отсутствие отвода паводковых вод от фундамента. Отсутствуют водоотводные лотки или края водоотводных лотков расположены выше уровня планировки поверхности подполий, что препятствует водоотведению аварийных вод с поверхности подполий и, как следствие, ведет к деградации мерзлоты основания и возникновению осадочных деформаций зданий. Вода со временем проникает внутрь несущих конструкции, разрушая арматуру и бетон. Также в большинстве подполий гидроизоляционное покрытие изношено (имеет разрывы и разрушения) либо вовсе отсутствует;

– замусоривание подполий. Накопление различных брошенных предметов, списанных вещей и материалов в подпольях зданий блокирует прохождение воздуха. Возникает застой теплого воздуха и локальное повышение температуры грунта под зданием.



Рис.3. Ошибки, допускаемые в ходе эксплуатации подполий (съемка тепловизора): а) отсутствие теплоизоляции на трубопроводах; б) прорыв трубы в результате износа коммуникаций; в) уменьшение потока холодного воздуха в подполье (закрытие продуха); г) замусоривание подполий.

Помимо влияния на грунты самого здания на деградацию мерзлоты оказывает тепловое воздействие окружающая его застройка, а именно (рис.4):

– тепловое воздействие системы подземных коллекторов на мерзлые грунты. Протяженность тепловодоснабжающих сетей и системы водоотведения в г. Норильске около 740 км, а степень износа этих коммуникаций около 81%. Прокладка коммуникаций осуществляется в двухъярусных вентилируемых каналах, в которых, как показывают исследования, не удается добиться поддержания отрицательных температур воздуха в нижнем ярусе. Температурный

режим внутри каналов, выше предусмотренных проектами, а протаивание мерзлых грунтов по ним – больше расчетного [1]. В результате значительная часть каналов в городе находится в аварийном состоянии. Вокруг коллекторов формируются постоянные ореолы оттаивания из-за неэффективности системы естественной вентиляции и частого прорыва труб. В связи с этим происходит неравномерное оттаивание, влекущее за собой осадку и разрушение коллекторов. Кроме того, в области действия внутригрунтовых источников тепла может наблюдаться увеличение влажности грунта по сравнению с обычными участками. Коллекторы в г. Норильске находятся в непосредственной близости к жилым домам, поэтому все, что происходит с грунтами вокруг них влияет на грунт под сваями жилых домов;

– перераспределение снежных отложений и складирование снежных отвалов. Перераспределение снежных отложений изменяет условия теплообмена на различных участках населенного пункта, а температурный режим грунтов на всей территории становится еще более дифференцированным по сравнению с природными условиями [2]. Характерно повышение средневзвешенной по площади застройки средней годовой температуры поверхности грунтов. В дополнение к вышеизложенному, складирование снежных отвалов во дворах домов оказывает отепляющую роль, вследствие чего происходит повышение температуры оснований соседних зданий и сооружений [3].

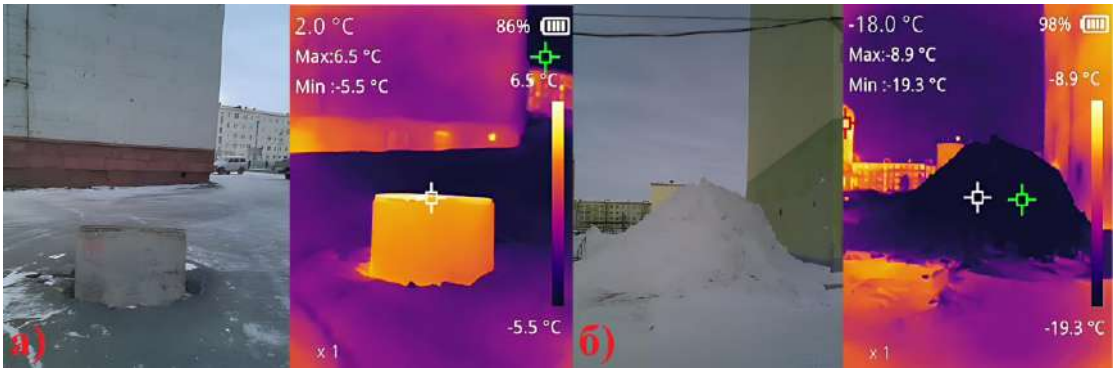


Рис.4. Отепляющее воздействие окружающей застройки на грунты (съемка тепловизора): а) воздействие системы подземных коллекторов; б) воздействие снежных отвалов, расположенных в жилых кварталах города

Для г. Норильска не менее важную роль в отеплении оснований зданий и сооружений играют и фильтрующие насыпные грунты. По мере старения коммуникаций, утечки возникают чаще и становятся обильнее, отепляя основания. Особенно интенсивно развиваются процессы отепления грунтов на участках, где склоны и ложбины естественного рельефа погребены под водопроницаемыми насыпями. Характер теплообмена в грунтах при возникновении фильтрационных потоков коренным образом изменяется – конвективная составляющая становится определяющей. Интенсивное оттаивание грунтов под воздействием фильтрационных потоков приводит к тому, что потоки грунтовых вод уходят ниже глубины сезонного промерзания, и начинается процесс необратимого оттаивания вечной мерзлоты [4].

На сегодняшний день состояние жилищного фонда в г. Норильске вызывает опасения. По данным за первое полугодие 2025 года, степень износа жилого фонда в городе превышает 45%. Каждый десятый дом нуждается в реконструкции, а в перспективе двадцати лет около трети всего жилья придёт

в непригодное состояние. Аварийный жилищный фонд составляет 50 296,9 м^2 площади жилых помещений и состоит из восьми многоквартирных домов. Основная причина аварийного состояния жилых домов, которое может вызвать их обрушение, – это деформация оснований и фундаментов зданий из-за деградации вечной мерзлоты. На 01.07.2025 г. на «особом контроле» по состоянию грунтов оснований зданий числится 179 жилых дома (каждый 4-й жилой дом г. Норильска) [5]. Обращаясь к статистике: в 1995 году на «особом контроле» был 71 дом.

В последние годы проблема сохранения существующих зданий на вечномерзлых грунтах стала особенно острой. В г. Норильске сейчас применяют несколько методов, для восстановления несущей способности отепленых оснований, а именно:

– снижение нагрузки на грунты основания путем демонтажа нескольких этажей или замена тяжелых конструкций на облегченные. Применение данного метода снижает давление на грунты и уменьшает риск развития дальнейших деформаций;

– изменение конструктивной схемы сооружения и увеличение пространственной жесткости. Установка дополнительных опор или монолитных обойм перераспределяет нагрузку и снижает неравномерные деформации без вмешательства в массив грунта;

– укрепление тела фундамента путем инъекций (инъектирование). Цементные, полимерные растворы заполняют пустоты и повышают прочность грунта. Применимы локально, но требуют контроля глубины проникновения и качества распределения раствора;

– термостабилизация грунта с применением хладагента. Система позволяет удерживать отрицательный температурный режим под зданием. Эффективна при точечном применении, но требует дорогостоящего оборудования и длительного мониторинга.

К сожалению, опыт восстановления несущей способности оттаивающих грунтов оснований эксплуатируемых зданий в г. Норильске невелик. За последние 30 лет были как успешные, так и провальные результаты восстановления несущей способности грунтов оснований. Так, например, в случае растепления грунтов основания одним из наиболее распространенных методов является промораживание грунта. Ранее в г. Норильске применяли охлаждение путем нагнетания воздуха через скважины, использовали низкотемпературные рассолы и парожидкостные термосифоны. В последние годы для термостабилизации грунтов основания применяют сезонно действующие охлаждающие устройства. Однако возникает вопрос о целесообразности использования этой технологии, особенно когда речь идет об исключительном применении данного решения без проведения сравнительных анализов и оценок эффективности.

Так, например, на одном из объектов г. Норильска в 2019 году была предпринята попытка стабилизировать грунт под фундаментом с использованием хладагента. На данном объекте техногенные воздействия хозяйственных и паводковых вод на основание здания привели к растеплению грунтов до глубины 13 метров. Для восстановления мерзлого состояния грунтов оснований и несущей способности фундаментов была запроектирована установка устройства вертикальных естественно-действующих систем охлаждения («ВЕТ»). «ВЕТ» представляет собой систему из вертикальных охлаждающих трубок, которые служат для циркуляции хладагента и замораживания грунта, соединительных трубок, объединяющих охлаждающие трубки и конденсаторный

блок, расположенный на поверхности грунта. Принцип действия системы: в охлаждающих трубах происходит перенос тепла грунта к хладагенту, который переходит из жидкой фазы в парообразную, пар перемещается в сторону конденсаторного блока, где конденсируется в жидкую фазу, отдавая тепло через оребрение в атмосферу. Охлажденный и сконденсированный хладагент вновь стекает в испарительную систему и повторяет цикл движения. Таким образом, термостабилизаторы работают исключительно в холодное время года, при потеплении процесс прекращается, так как хладагент перестаёт конденсироваться (рис.5).



Рис.5. Установка системы вертикальной термостабилизации.

Проект был реализован, но результаты выполненной работы не были должным образом проанализированы и оценены специалистами. Несмотря на это, уже сейчас видны негативные последствия (рис.6).



Рис.6. Негативные последствия термостабилизации: трещины на несущих конструкциях и просадка грунта в подполье.

Наблюдается дальнейшее раскрытие трещин и образование новых дефектов на фундаментных конструкциях [6]. Также после установки системы «ВЕТ» сформировалась массивная просадка грунта под зданием и вокруг него в результате изменения гидрологической и геокриологической ситуации на прилегающей территории. Термостабилизация грунтов имеет ряд существенных недостатков, делающих данный метод неэффективным в долгосрочной перспективе: высокая стоимость, ограниченный срок службы, риск технической неисправности. Стоит отметить, что термостабилизация

направлена на поддержание текущего состояния грунтов, но она не устраняет причину их таяния, в том числе из-за техногенных факторов. Даже если удастся временно стабилизировать температуру грунта, это не остановит процесс, который продолжает оказывать влияние на состояние мерзлоты.

Противоположный (положительный) результат применения системы «ВЕТ» можем видеть на примере девятиэтажного дома, расположенного по адресу: Солнечный проезд, д.12. Дом начали строить еще в 1993 году. До планировки территории гидрографическая сеть района строительства была представлена оз. Утиным, которое принадлежало бассейну р. Щучьей. Наибольшая глубина озера в районе участка изысканий по данным промеров 1978 года составляла 5-6 метров. На момент выполнения изысканий под жилой дом территория была уже частично спланирована насыпными грунтами, озеро Утиное располагалось в районе строительных осей 23-27 проектируемого здания, глубина озера составляла 1-2 м (рис.7). По архивным материалам в 1993 году грунты находились в мерзлом и талом состоянии. Мерзлые грунты были распространены в юго-западной части площадки изысканий, вне исторического контура озера Утиного (оси 1-12). В центральной части участка изысканий (оси 12-27), где озеро Утиное было засыпано, ранее фиксировался сквозной и подмерзлотный подозерный талик на глубине 6 м. По этой причине в 1996 году было принято решение прекратить строительство дома. Дом на протяжении нескольких десятков лет считался долгостроем.

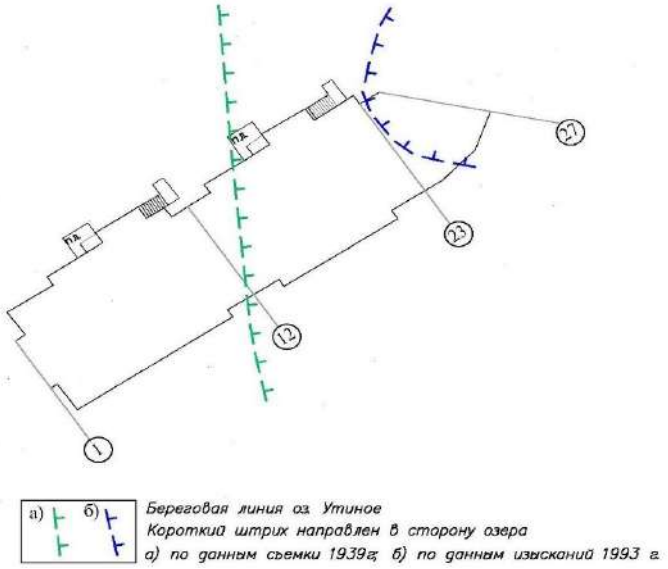


Рис.7. Положение береговой линии озера утиное в разные годы.

По итогу выполненных работ в 2021 году установлено, что границы таликовой зоны за 25 лет сократились, и геокриологические условия характеризуются процессом аггредации мерзлых грунтов (новообразовавшаяся толща мерзлых грунтов более 10 м). Выявлена положительная динамика мерзлотных условий. У торцевой стены дома (возле которой предположительно проходила береговая линия озера Утиное) были установлены термостабилизаторы (система «ВЕТ»), поддерживающие отрицательную температуру грунтов. В доме была выполнена перепланировка в соответствии со всеми современными нормами и требованиями, применяемыми к жилым домам. В 2023 году дом был сдан в эксплуатацию (рис.8). На сегодняшний день в доме ведется ежеквартальный мониторинг. Новые деформации отсутствуют в термометрических скважинах,

грунты на глубине 12 м в мерзлом состоянии. Стоит отметить, что на данном объекте система «ВЕТ» установлена по своему прямому назначению, а именно поддержание текущего (мерзлого) состояния грунтов, а не для замораживания уже растепленных грунтов.



Рис.8. Восстановление дома по адресу: Солнечный проезд, д.12.

В 2023 году впервые в г. Норильске была опробована технология – инъектирование грунта. Такой проект решили реализовать на одном из общественных зданий г. Норильска. Здание было построено еще в 60-х годах прошлого века, имеет комбинированный фундамент (часть здания опирается на скальный грунт, вторая часть здания опирается на суглинистый мерзлый грунт, в качестве основания использованы висячие сваи). В 2018 году было зафиксировано резкое ухудшение состояния конструкций «0» цикла (образование новых вертикальных трещин на ростверках и сваях). К 2019 году деформации продолжились, дефекты были зафиксированы уже на конструкциях, расположенных выше отметки 0.000 (трещины в кирпичных перегородках, на несущих стенах, зазоры между полом и перегородками). В термометрических скважинах, расположенных в подполье здания, фиксировались положительные температуры грунта на глубине 10-12 м. Причин повышения температур многолетнемерзлых грунтов несколько: негативное влияние двух подземных коллекторов, нарушение условия вентилирования подполья при благоустройстве территории, отступление от исходного проекта (в котором предусматривались вентиляционные шахты). И уже в 2021 году здание было выведено из эксплуатации в связи с аварийным состоянием несущих конструкций и грунтового основания.

В 2022 году был предложен проект по восстановлению несущей способности грунтов основания здания, который включал в себя два этапа: первый этап – инъектирование полимерных смол в грунт под торец каждой сваи и столба здания для стабилизации основания; второй этап – установка вертикальных термостабилизаторов грунта и оборудование системы принудительной вентиляции для обеспечения температурного режима в подполье -10ºС и постоянного обдува конденсаторных частей термостабилизаторов. Проект был реализован в 2023 году, но после выполненных процедур деформации продолжились. В 2024 году было принято решение выполнить буровые работы: проходка скважин для изучения инженерно-геологического и геокриологического строения основания; отбор образцов грунтов для последующих лабораторных исследований, укрепленных специальным составом грунта после инъектирования.

Работы были проведены в конце 2024 года, однако, при их выполнении инъектируемый раствор был обнаружен только в трех скважинах из двенадцати. Материал инъекции, который по проекту должен был располагаться под торцом сваи, был обнаружен только в верхней части разреза в дисперсных грунтах на глубинах, не превышающих 5,9 м (при глубине заложения свай 10-12 м). Сравнение ключевых параметров грунтов до и после инъектирования по отобранным образцам показало, что изменения оказались минимальными, что указывает на неэффективность реализованного мероприятия по усилению грунтов основания [7]. Причины неэффективности использованного метода инъекционного усиления фундаментов могли быть различные: негомогенность дисперсных грунтов и наличие крупнопористых слоёв привели к неравномерному распределению раствора (часть состава ушла в верхние горизонты, не достигнув торцов свай); недостаточная проходимость и (или) неверный подбор вязкости/гидравлического режима инъектирования ограничили глубину проникновения раствора в грунт; отсутствие предварительного опробирования системы и корректировки схемы работ в соответствии с полученными результатами, а также слабый геотехнический надзор увеличили риск нецелевого внедрения раствора и снизили эффективность укрепления оснований.

Главной причиной прогрессирующего отепления оснований и последующих деформаций зданий в г. Норильске является неправильная эксплуатация и поддержание температурного режима вентилируемого подполья. Недопустимы интенсивные продолжительные утечки воды из аварийных коммуникаций, это приводит к развитию таликов в основании и способствует интенсификации процессов морозной деструкции бетона в конструкциях фундаментов. К другим не менее важным причинам можно отнести и несовершенство действующих строительных норм и правил. Действующие и все предыдущие нормативные документы, касающиеся строительства и эксплуатации сооружений в зоне вечной мерзлоты, как правило, исходили и исходят из обеспечения устойчивости одного конкретного сооружения, включая тепловую устойчивость его мерзлого основания, и не рассматривают тепловую устойчивость оснований на единой территории групп зданий и сооружений, кварталов, микрорайонов. Еще одной проблемой г. Норильска является отсутствие опыта оптимизации технических решений по восстановлению несущей способности отепленных мерзлых оснований. Отсутствуют объективные методы оценки состояния отепленных оснований, нет отработанных технических решений по компенсации отепляющих воздействий на основания эксплуатируемых зданий. До настоящего времени нет даже однозначных оценок по эффективности технических средств термостабилизации и инъектирования, а также не определены границы областей оптимального применения каждого из этих методов.

ВЫВОДЫ

1) Для выбора эффективных мер по сохранению работоспособности ЗиС прежде всего **необходимо** установить основные причины деградации мерзлоты и, по возможности, их ликвидировать. В противном случае применяемые меры могут оказаться неэффективными.

2) Арсенал методов сохранения ЗиС в работоспособном состоянии в настоящее время недостаточен, **необходимо** проведение системных исследований по обобщению опыта и разработке эффективных адаптационных технологий. Нужно интегрировать в работу полевые и лабораторные

исследования по адаптации методов (инъекции, термостабилизации и др.). Испытания и валидация технологий обязательны перед масштабным применением.

3) Несмотря на растущие масштабы деформации зданий вследствие отепления вечномерзлых оснований, отработанные варианты нормативных или хотя бы даже рекомендательных документов по восстановлению несущей способности отепленных грунтов – отсутствуют. Известны только отдельные случаи практического решения этой проблемы, причем, в каждом из них использовались разные средства, подходы и технологии. **Необходимо** разработать стандарты, в которых будут указаны критерии применения различных технологий в зависимости от инженерно-геологических и геокриологических условий площадки строительства. Стандарты обеспечат сопоставимость решений и снизят риск неэффективных работ.

4) **Необходимо** принять организационно-технические меры по соблюдению правил технической эксплуатации зданий. Ввести регулярный мониторинг за ЗиС с дистанционными и локальными датчиками температуры, влаги и деформаций (работающие в реальном времени). Мониторинг даст ранние сигналы возникающих деформаций или позволит скорректировать меры, уже применяемые на объекте.

5) **Необходимо** разработать региональные модели прогноза деградации ММГ для Норильского промышленного района. Создать региональные центры геокриологической безопасности в г. Норильске – для координации исследований, мониторинга и внедрений инноваций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изменение температурного режима многолетнемерзлых грунтов в г. Норильске ставит под угрозу безопасность строительства и эксплуатации объектов. Без фундаментального переосмысления подходов к проектированию, мониторингу и адаптации инфраструктуры, существует реальная угроза масштабных техногенных аварий и существенных экономических потерь. Необходим переход к устойчивому развитию арктического строительства, основанному на долгосрочном прогнозировании и внедрении инновационных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Евтихиев А.Л. *Работы нулевого цикла на строительстве в условиях Севера. 2-е изд., доп. и перераб*. – Л.: Стройиздат. Ленингр. отделение, 1977. – 149 с.
2. Березовский Б.И., Васьковский А.П. *Проектирование и строительство зданий в условиях сурового климата и вечномерзлых грунтов. Строительство в условиях вечномерзлых грунтов: Учеб. пособие для строит. специальностей вузов*. – Л.: Стройиздат. Ленингр. отделение, 1977. – 232 с.
3. Бутюгин В.В. *Инженерная геодинамика снега. Норильский регион: монография*. – Санкт-Петербург: ГУАП, 2008. – 185 с.
4. Колесникова О.В. *Исследование влияния строительных техногенных воздействий на формирование природно-техногенной системы в криолитозоне (на примере г. Норильска)* / дисс. канд. тех. наук. – М.: МГСУ, 1999. – 186 с.

5. *Итоги социально-экономического развития муниципального образования города Норильск за 1 полугодие 2025 года: отчет администрации города*. – Норильск, 2025. – 65 с.
6. Керимов А.Г. *О целесообразности применения активной термостабилизации под МКД в Норильске и о рисках*. – Норильск: НПО «Фундамент», 2017-2025. URL: https://www.npofundament.com/. Дата публикации: 6 июля 2023.
7. Алексеев А.Г. *Технический отчет по результатам инженерно-геологических изысканий на объекте «N»*. – М.: НИИОСП им. Н.М. Герсеванова, 2025. – 605 с.

УДК 69+0049:624.154
EDN YSGOIR
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.40

ГИБРИДНАЯ МОДЕЛЬ РЕШАТЕЛЯ ДЛЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО АНАЛИЗА ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ГЕОТЕХНИКИ

Нестеров И.В., Щербаков А.А., Пантюхова К.К.

ФГАОУ ВО Российский университет транспорта РУТ (МИИТ), г. Москва, Россия

Современный уровень развития вычислительной техники позволяет выполнять конечно-элементный анализ [1-4] строительных конструкций на базе дискретных моделей большой размерности. При моделировании совместной работы инженерного сооружения, с грунтовым массивом возникают серьезные вычислительные проблемы, особенно если толща грунта моделируется объемными конечными элементами. Это приводит к значительному возрастанию размерности задачи, увеличению времени расчета, снижению точности вычислений. В большинстве систем прочностного анализа используются прямые методы решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$Ax = b, \qquad (1)$$

построенные на Гауссовом исключении [3] (рис.1).

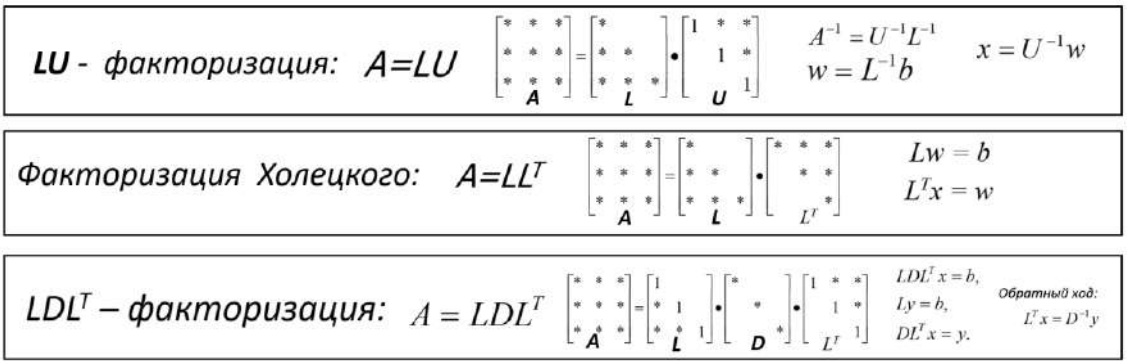


Рис.1. Прямые методы решения СЛАУ.

К ним относятся LU-факторизация [5,6], разложение Холецкого [5], LDL^T – факторизация [5,6], фронтальный метод [5] и др. Решение СЛАУ прямыми методами может быть получено за фиксированное число шагов, напрямую связанное с размерностью задачи. Но у прямых методов есть ряд существенных недостатков, ограничивающих их применение для решения задач большой размерности:

1. Большой объём памяти для хранения матрицы жёсткости;
2. Нелинейная зависимость между размерностью задачи и временем решения СЛАУ;
3. Падение точности решения СЛАУ и значительное увеличение времени расчёта с ростом размерности задачи;

На рис.2 показан результат решения задачи давления штампа на грунт с адаптивным изменением густоты сетки КЭ. В программном комплексе, с помощью которого выполнялся расчёт, решение СЛАУ выполнялось

с использованием LU-факторизации. На рис.2 приведены вертикальные перемещения угловых точек штампа. Налицо значительная потеря симметрии, погрешность составила 15.5%.

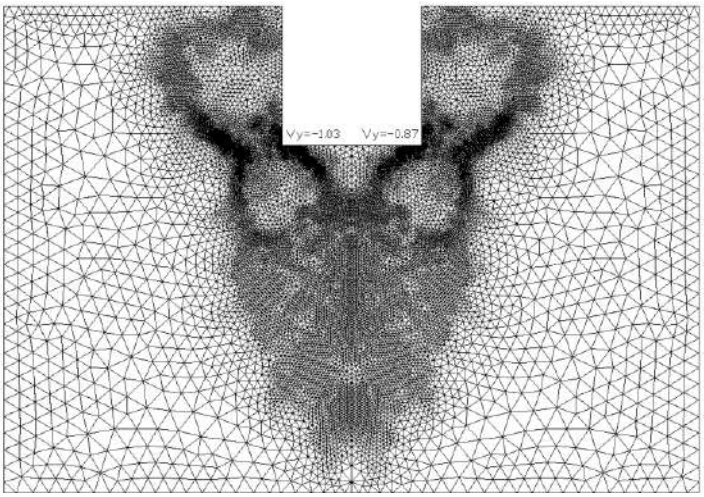


Рис.2. Решение задачи давления штампа на грунт.

Наряду с прямыми методами решения СЛАУ для прикладных задач геотехники можно использовать итерационные методы. Среди них наибольшей популярностью пользуются различные модификации метода сопряженных градиентов [6,7]. На рис.3 приведена математическая модель итераций одной из модификаций метода сопряжённых градиентов (МСГ).

$$l_k = \begin{cases} 0\ ,\ k=0\ ; \\ q_k \dfrac{(r_k\ ,\ \Delta r_{k-1})}{(r_{k-1}\ ,\ r_{k-1})}\ ; \end{cases}$$

$$q_{k+1} = \begin{cases} \dfrac{([R]r_k\ ,\ r_k)}{(r_k\ ,\ r_k)}\ ,\ k=0\ ; \\ \dfrac{1}{(r_k,\ r_k)} \{\ ([R]r_k\ ,\ r_k) - \\ \quad l_k\ [(\Delta r_{k-1}\ ,\ r_k) + \\ \quad\quad ([R]r_k\ ,\ \Delta Z_{k-1})] + \\ \quad l_k^2\ (\Delta r_{k-1}\ ,\ \Delta Z_{k-1})\ \}\ ; \end{cases}$$

$$\Delta Z_k = \frac{1}{q_{k+1}} (-r_k + l_k \cdot \Delta Z_{k-1})\ ;$$

$$Z_{k+1} = Z_k + \Delta Z_k\ ;$$

$$\Delta r_k = \frac{1}{q_{k+1}} (-[R]r_k + l_k \cdot \Delta r_{k-1})\ ;$$

$$r_{k+1} = r_k + \Delta r_k\ ;$$

Рис.3. Итерационная схема решения СЛАУ методом сопряжённых градиентов.

Этот метод эффективен, когда матрица жесткости однородна и заполнена элементами примерно одного порядка. Такие матрицы характерны для дискретных моделей грунтовых массивов. Они относятся к классу разреженных матриц большой размерности. Так как в ходе решения СЛАУ итерационными методами исходная матрица системы не меняется, то для решателя используется компактная схема хранения матрицы жесткости в разреженном строчном формате, что позволяет значительно сэкономить память ЭВМ. Если матрица жёсткости системы неоднородна, то сходимость метода сопряжённых градиентов ухудшается. В таких случаях для улучшения сходимости используют различные преобразования исходной матрицы жёсткости, именуемые предобуславливателями. Наиболее простая схема предобуславливателя с единичной главной диагональю представлена на рис.4.

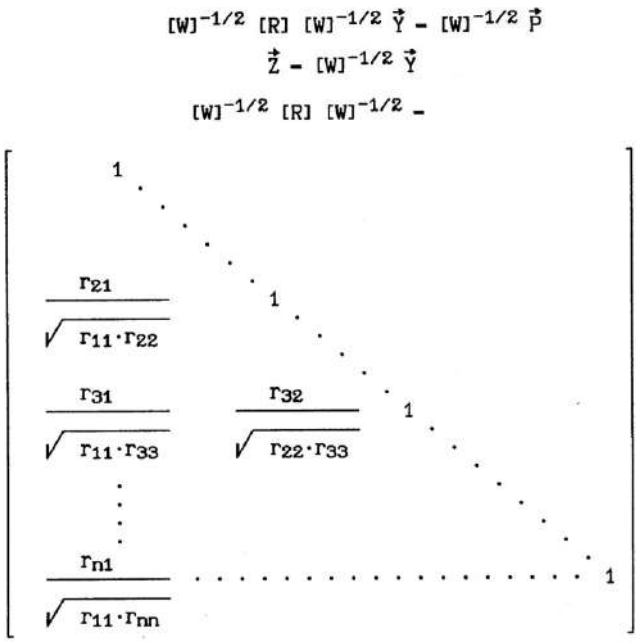


Рис.4. Итерационная схема решения СЛАУ методом сопряжённых градиентов с предобуславливанием.

В качестве «тяжёлых» предобуславливателей иногда используют неполное разложение Холецкого [9], предобуславливатель с контролем спектральных свойств преобразованной матрицы [10] и др. На рис.5. приведён общий сравнительный анализ прямых и итерационных методов решения СЛАУ, из которого можно сделать вывод, что недостатки прямых методов антисимметрично преобразуются в достоинства итерационных методов.

Прямые методы	Итерационные методы
Достоинства: 1. Решение СЛАУ может быть получено за фиксированное число шагов; **Недостатки:** 1. Большой объем памяти для хранения матрицы жёсткости; 2. Нелинейная зависимость между размерностью задачи и времени решения СЛАУ; 3. Падение точности решения СЛАУ с ростом размерности задачи;	**Достоинства:** 1. Небольшой объем памяти для хранения матрицы жёсткости; 2. Улучшение сходимости с ростом размерности задачи; 3. Контроль точности решения СЛАУ; **Недостатки:** 1. Решение не может быть получено за фиксированное число итераций; 2. Матрица жёсткости системы должна быть однородной ;

Рис.5. Сравнительный анализ методов решения СЛАУ.

Коллективом авторов была разработана вычислительная технология решения СЛАУ, позволяющая объединить достоинства прямых и итерационных методов для решения прикладных задач геотехники. Рассмотрим подробнее особенности этого алгоритма. Для прочностного анализа инженерных сооружений, контактирующих с грунтовым массивом, можно выполнить декомпозицию дискретной модели МКЭ на три основные части:

1. Надземная часть инженерного сооружения;
2. Подземная часть инженерного сооружения;
3. Толща грунта;

Для КЭ-анализа надземной и подземной частей инженерного сооружения целесообразно использовать прямые методы решения СЛАУ, так как матрицы жёсткости этих частей сооружения содержат линейные и угловые степени свободы с разными порядками жесткостей. А для прочностного расчёта толщи грунта, у которой матрица жёсткости однородная, удобнее использовать метод сопряжённых градиентов. Объединить прямую и итерационную схему решения СЛАУ можно с использованием метода суперэлементов [8], применив его для первичной обработки матриц жёсткости надземной и подземной частей инженерного сооружения. Вычислительная схема метода суперэлементов или метода подконструкций сводится к последовательному исключению внутренних узлов из матрицы жёсткости суперэлемента (рис.6).

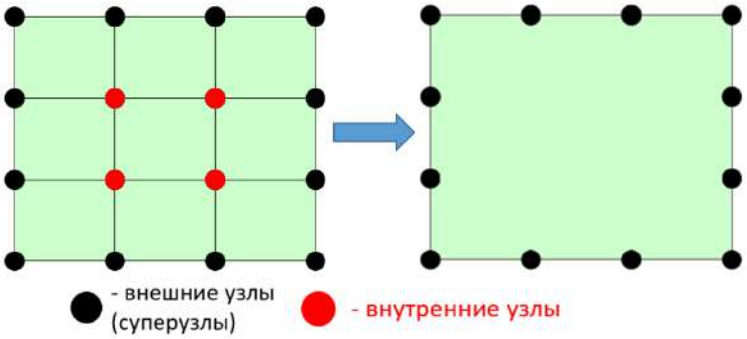


Рис.6. Схема формирования суперэлемента.

Эта процедура называется статическая конденсация. Математическая модель статической конденсации приведена на рис.7.

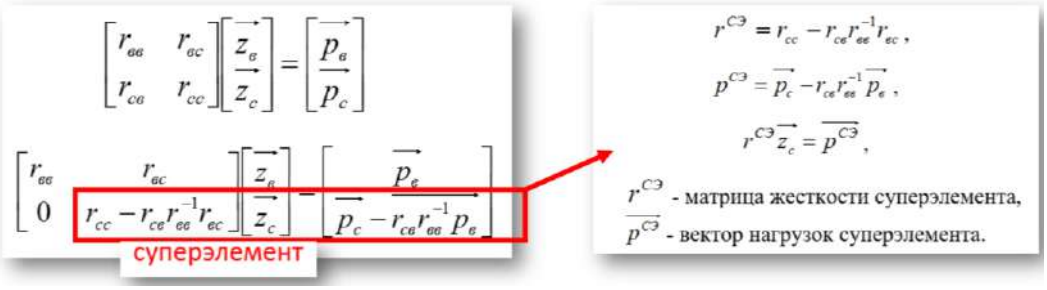


Рис.7. Математическая модель статической конденсации.

Таким образом, на базе метода суперэлементов можно построить гибридный алгоритм решения СЛАУ для КЭ-анализа задач геотехники, позволяющий совместить прямые и итерационные методы решения системы линейных алгебраических уравнений МКЭ. На рис.8-9 представлен общий алгоритм декомпозиции дискретной модели инженерного сооружения для решения СЛАУ гибридным методом.

Сначала генерируется общая КЭ-модель (рис.8), далее формируются суперэлементы надземной и подземной частей сооружения. Эти суперэлементы объединяются в единый суперэлемент (рис.9), из которого исключаются внутренние узлы и оставляются только суперузлы, граничащие с грунтовой средой (рис.9). На этом обработка дискретных моделей надземной и подземной частей сооружения прямым методом заканчивается. Для финальной части процедуры решения СЛАУ гибридным методом используется дискретная модель, представленная на рис.9. Далее решение СЛАУ выполняется методом сопряженных градиентов.

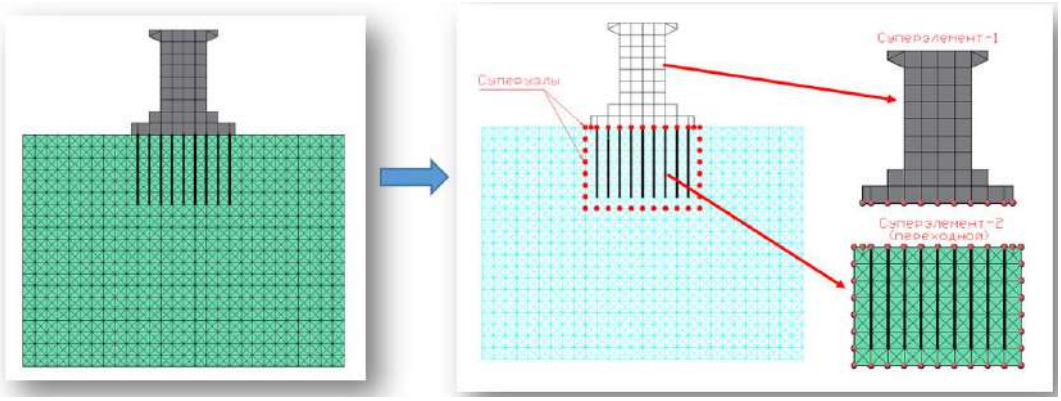


Рис.8. Формирование суперэлемента надземной и подземной части опоры.

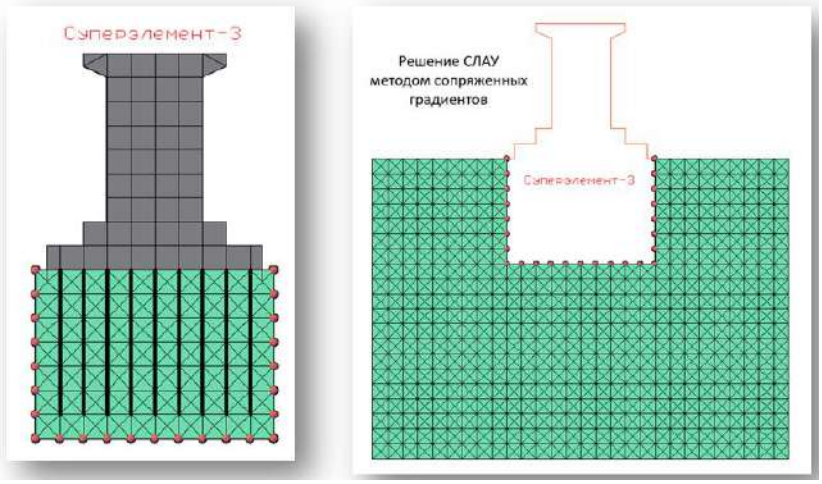


Рис.9. Дискретная модель опоры для финальной обработки МСГ.

Численная реализация представленного алгоритма была выполнена в программном комплексе ВМ2, разработанного Щербаковым А.А. на кафедре «Системы автоматизированного проектирования» РУТ(МИИТ). Рассмотрим решение практических задач с использование гибридной модели решателя СЛАУ.

Задача 1. Давление штампа на грунт с адаптивной сеткой КЭ (рис.10). Жёсткий штамп моделировался стержневыми КЭ.

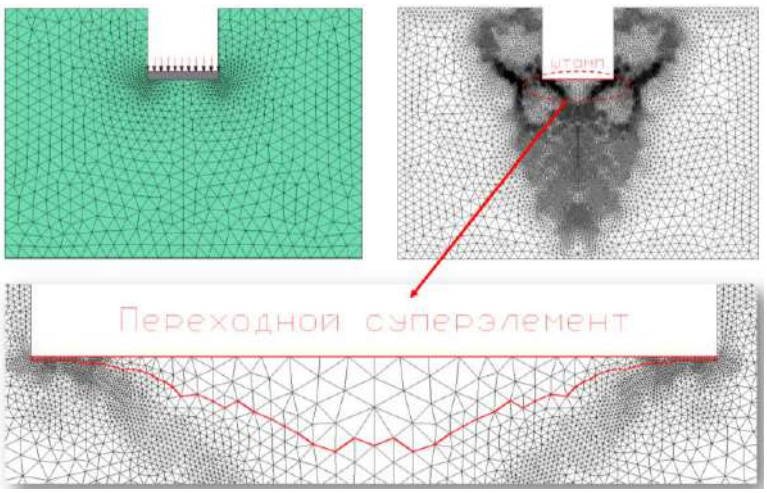


Рис.10. Давление штампа на грунт с адаптивной сеткой КЭ. Дискретная модель.

Для этой задачи СЛАУ решалась тремя методами: LDL^T – факторизацией, методом сопряжённых градиентов с предобуславливателем (рис.4) и гибридным

методом. Время решения СЛАУ приведено в Таблице 1. Гибридная модель решения СЛАУ показала высокое быстродействие, она в 3 раза быстрее МСГ с предобуславливателем и в 5.5 быстрее прямого метода LDL^T – факторизации.

Таблица 1.

Время решения СЛАУ прямыми и итерационными методами.

	Метод решения СЛАУ		
	LDL^T – факторизация	Гибридная модель	Метод сопряжённых градиентов с предобуславливателем
Количество итераций (МСГ)		1032	3946
Время решения СЛАУ	3.45 сек	0.63 сек	1.94 сек

Задача 2. Статический расчёт многоэтажного здания совместно с толщей грунта (рис.11). Задача решалась в линейной постановке. Каркас здания железобетонный с опорой на свайное основание. Общие характеристики расчётной схемы: 87 000 узлов, 522 000 степеней свободы.

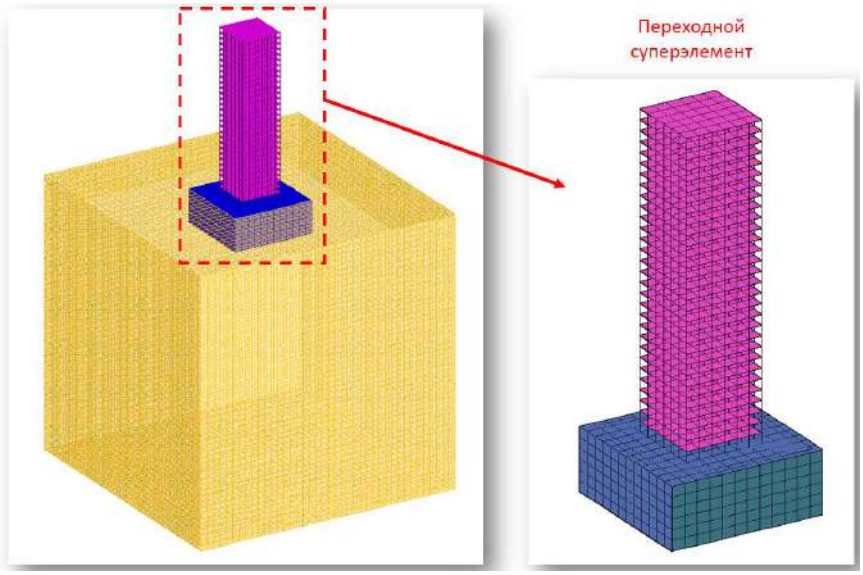


Рис.11. Расчёт многоэтажного здания.

Для оценки устойчивости решения СЛАУ итерационными методами, задача решалась с разными соотношениями модулей упругости бетона каркаса здания и грунта. Сначала были приняты стандартные характеристики модулей упругости для бетона и грунта (рис.12). Коэффициент соотношения модулей упругости грунта и бетона составил: $K_E = 300/387000 = 7.75 \cdot 10^{-4}$. Время решения СЛАУ приведено на рис.12.

Далее модуль упругости грунта был намеренно занижен, а модуль упругости бетона увеличен на несколько порядков (рис.13). Расчёт был выполнен с коэффициентом соотношения модулей упругости грунта и бетона: $K_E = 1.0/10^8 = 1.0 \cdot 10^{-8}$. Время решения СЛАУ приведено на рис.13.

Бетон: E = 387000 кг/кв.см, mu = 0.3;
Грунт: E = 300 кг/кв.см, mu = 0.4.

	Метод решения СЛАУ		
	LDL^t факторизация	Гибридная модель	Метод сопряженных градиентов с предобусл.
Количество итераций (МСГ)		979	3665
Время решения СЛАУ	1 ч. 37 мин	33.3 сек	63.2 сек

Рис.12. Время решения СЛАУ прямыми и итерационными методами для $K_E = 7.75 \cdot 10^{-4}$.

Бетон: E = 1e+8 кг/кв.см, mu = 0.3;
Грунт: E = 1 кг/кв.см, mu = 0.4.

	Метод решения СЛАУ		
	LDL^t факторизация	Гибридная модель	Метод сопряженных градиентов с предобусл.
Количество итераций (МСГ)		1042	11351
Время решения СЛАУ	1 ч. 37 мин	35.15 сек	162.53 сек

Рис.13. Время решения СЛАУ прямыми и итерационными методами для $K_E = 1.0 \cdot 10^{-8}$.

Как видно из временных показателей решения СЛАУ, приведенных на рис.12,13, время расчёта стандартного МСГ при понижении K_E увеличилось в 2.57 раза, а для гибридного метода увеличилось незначительно, что свидетельствует об устойчивости итерационной схемы гибридного метода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан гибридный метод решения СЛАУ для прочностного анализа по МКЭ инженерных сооружений, контактирующих с грунтовой средой. Разработано программное обеспечение, реализующее гибридный метод решения СЛАУ. Выполнены тестовые расчёты и сравнительный анализ времени решения СЛАУ прямым, итерационным и гибридным методами. Сравнительный анализ времени решения СЛАУ показал высокую эффективность гибридного метода для решения прикладных задач геотехники.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галлагер Р. *Метод конечных элементов. Основы*. – М.: Мир,1984. – 428 с.
2. Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике*. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
3. Дарков А.В., Шапошников Н.Н., *Строительная механика: Учеб.для строит. спец вузов*. – М.: Высшая школа, 1986. – 607 с.
4. Фадеев А.Б. *Метод конечных элементов в геотехнике*. – М.: Недра, 1987. – 224 с.

5. Фиалко С.Ю. *Прямые методы решения систем линейных уравнений в современных МКЭ-комплексах*. – М.: Издательство СКАД СОФТ, Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ), 2009. – 160 с.
6. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. *Вычислительные методы линейной алгебры*. – М.-Л.: Физматгиз, 1963. – 734 с.
7. Воеводин В.В. *Численные методы линейной алгебры. Теория и алгоритмы*. – М.: Наука, 1966. – 248 с.
8. Постнов В.А., Дмитриев С.А., Елтышев Б.К., Родионов А.А. *Метод супер-элементов в расчётах инженерных сооружений*. – Л: Судостроение, 1979. – 288 с.
9. Милюкова О.Ю. *MPI+OpenMP реализация метода сопряженных градиентов с предобусловливателем IC(0) на основе использования переупорядочения узлов сетки* // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. – 2022. – №63. – 32 с.
10. Шашкин А.Г., Шашкин К.Г. *Основные закономерности взаимодействия основания и надземных конструкций здания* // Развитие городов и геотехническое строительство. – 2006. – №10. – С.63-92.

УДК 624.13
EDN ZAPKZQ
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2025.41

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДЕГРАДАЦИИ СВОЙСТВ ГРУНТОВ С ПОМОЩЬЮ ВРЕМЕННЫХ СВЁРТОЧНЫХ СЕТЕЙ (TCN)

Тишин Н.Р., Озмидов О.Р., Селиванова О.С.

АО МОСТДОРГЕОТРЕСТ, г. Москва, Россия

Доклад посвящён прогнозированию деградации прочностных и деформационных свойств грунтов при циклическом промораживании-оттаивании на основе временных свёрточных нейронных сетей (Temporal Convolutional Network, TCN). В качестве исходных данных использован массив лабораторных исследований мерзлотной лаборатории *АО МОСТДОРГЕОТРЕСТ* по объекту высокоскоростной железнодорожной магистрали. Рассматриваются параметры Eur, E50, Eoed и Cu для 27 инженерно-геологических элементов (ИГЭ) при 0, 3, 5 и 10 циклах промораживания с прогнозом до 24 циклов. Предлагается TCN-подход, позволяющий объединить многосерийные экспериментальные данные, учесть нелинейный характер деградации и сформировать надёжный прогноз остаточных характеристик для расчёта устойчивости откосов и осадок земляного полотна ВСЖД.

Ключевые слова: циклическое промораживание-оттаивание; временные свёрточные сети (TCN); модуль деформации E50; недренированная прочность Cu; виброползучесть; высокоскоростные железные дороги

ВВЕДЕНИЕ

Циклическое промораживание и оттаивание (П-О) существенно влияет на прочностные и деформационные свойства грунтов, что особенно критично для высокоскоростных железнодорожных магистралей, эксплуатируемых в условиях сезонно- и вечномерзлых грунтов. Повторяющиеся фазовые переходы внутрипоровой воды приводят к разрушению структуры, росту пористости, развитию трещиноватости и снижению несущей способности основания. Совместное воздействие П-О и динамических нагрузок от высокоскоростного подвижного состава вызывает криовиброползучесть и криовиброразжижение, что напрямую влияет на устойчивость откосов выемок и величину осадок земляного полотна.

По результатам выполненных лабораторных исследований и анализа литературных источников установлено, что основная доля деградации механических характеристик грунтов (до 30-40% и более) приходится на первые 5-10 циклов П-О, после чего темп ухудшения свойств заметно снижается. Это согласуется с результатами испытаний грунтов плато Цинхай–Тибет, железнодорожных оснований в северных регионах, а также данными НИР ВСЖД, где прогноз на 24-й цикл показывает дополнительное снижение параметров не более 3%.

Нормативные документы (СП 23.13330.2018, СП 116.13330.2012, СП 25.13330.2020, СП 420.1325800.2018, СП 381.1325800.2018) требуют учитывать изменение физико-механических свойств грунтов под влиянием П-О и динамических воздействий при расчёте устойчивости откосов и оснований сооружений. В этой связи актуальной является задача построения моделей

долговременного прогноза деградации свойств грунтов, способных работать с ограниченными лабораторными сериями и одновременно использовать накопленные архивные данные.

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И ПРОГРАММА ЛАБОРАТОРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Массив данных сформирован по результатам специальных лабораторных испытаний грунтов основания проектируемых выемок высокоскоростной магистрали. Для 27 инженерно-геологических элементов (ИГЭ) были определены физические, деформационные и прочностные характеристики до промораживания, после динамического воздействия и после 3, 5 и 10 циклов по схеме «промораживание–оттаивание» с прогнозным расчётом до 24 циклов.

Каждый цикл включал замораживание образцов при заданной отрицательной температуре в течение регламентированного интервала и последующее оттаивание до исходных температурно-влажностных условий. После заданного числа циклов определялись модуль деформации E50, модуль одноосного сжатия Eoed, модуль разгрузки–перезагрузки Eur и недренированная прочность Cu. Дополнительно проводились динамические испытания для оценки коэффициента виброползучести и остаточного снижения прочности после воздействия псевдоциклической нагрузки, моделирующей проход высокоскоростных поездов.

Обобщение результатов по параметрам показало, что среднее снижение Cu, Eur, E50 и Eoed к 10-му циклу составляет около 40%, а дополнительное снижение от 10 до 24 циклов по результатам прогноза не превышает 1-3% от исходного значения. Наиболее уязвимыми оказались ИГЭ 11з3, 11ж4, 12ж4 (потери 60-73%), тогда как ИГЭ 14дБ, 11г демонстрируют относительно высокую устойчивость (17-20%). Динамическое воздействие приводит к дополнительному снижению модулей деформации на 3-30% и Cu на 2-15%.

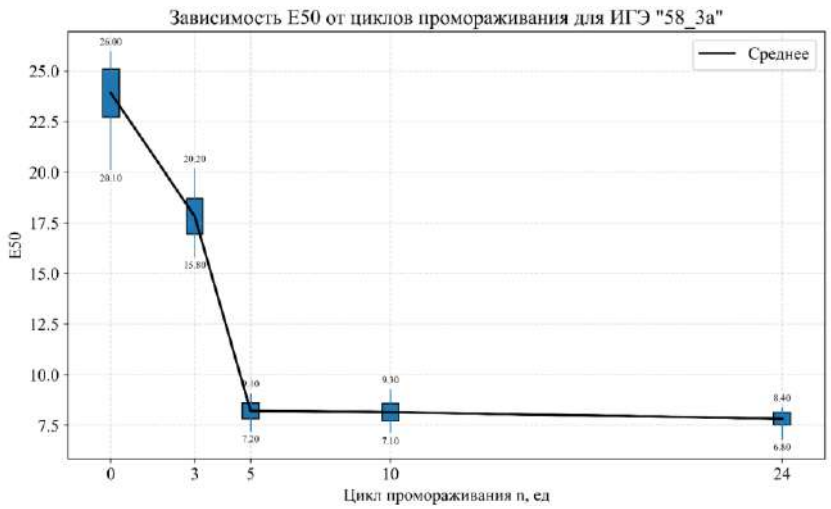


Рис.1. Примеры экспериментальных графиков деградации свойств грунтов (данные НИР 91-25-НИР.10).

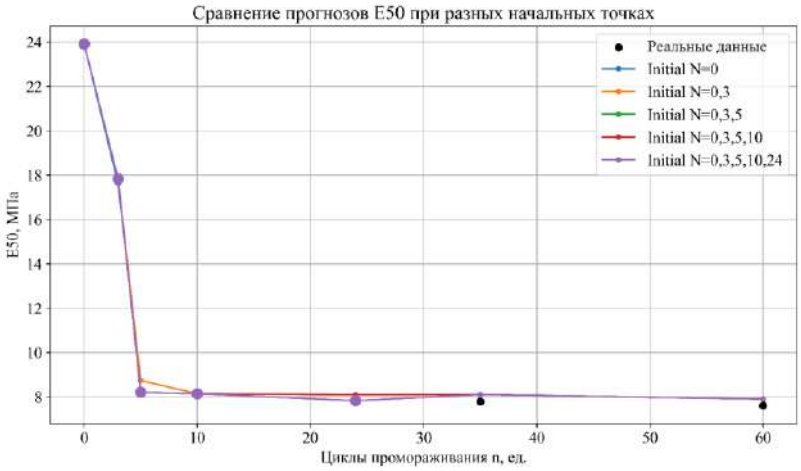


Рис.2. Характер изменения относительных параметров грунтов при циклическом промораживании–оттаивании.

2. МЕТОДИКА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДЕГРАДАЦИИ СВОЙСТВ НА ОСНОВЕ TCN

Для прогнозирования деградации свойств грунтов использована совокупность моделей: классических моделей временных рядов (ARIMA, модель Хольта), суперпозиции физико-математических зависимостей деградации и временной свёрточной нейронной сети (Temporal Convolutional Network, TCN). В рамках данного доклада основное внимание уделяется TCN как наиболее перспективному инструменту для обработки многосерийных данных и учёта нелинейных закономерностей.

TCN представляет собой сверточную архитектуру с каузальными и дилатированными свёртками, остаточными связями и контролируемым полем восприятия. Каузальность обеспечивает использование только текущих и прошлых значений временного ряда при формировании прогноза, а дилатация позволяет эффективно моделировать долгосрочные зависимости без чрезмерного увеличения глубины сети. Остаточные блоки повышают устойчивость обучения и предотвращают затухание градиентов при работе с длинными последовательностями.

В рассматриваемой постановке TCN обучалась на совокупности временных рядов по всем ИГЭ одновременно. Входной вектор включал номер цикла N, тип ИГЭ, исходные физические параметры, наличие/отсутствие динамического воздействия, а также нормированные значения целевых параметров на предыдущих циклах. Выходом служили прогнозные значения E50, Eoed, Eur и Cu на следующий цикл и на заданный горизонт (до 24 циклов). Такая мультисерийная постановка позволяет модели извлекать общие закономерности деградации для разных типов грунтов и условий нагружения, что принципиально недостижимо для одномерных моделей ARIMA и Хольта.

Обработка данных и обучение TCN выполнялись в среде Python с использованием библиотек pandas и NumPy для работы с временными рядами, statsmodels для реализации ARIMA и модели Хольта, а также TensorFlow/Keras для построения TCN-архитектуры. Временные ряды были приведены к единой сетке по числу циклов П-О с шагом $\Delta N = 1$, выполнена нормализация по диапазону и стандартизация по ИГЭ, отфильтрованы аномальные и отрицательные значения.

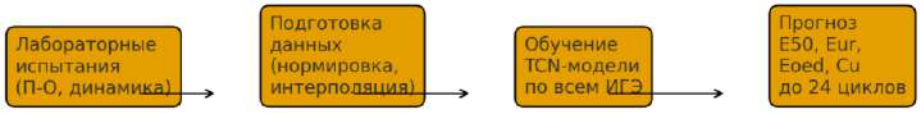


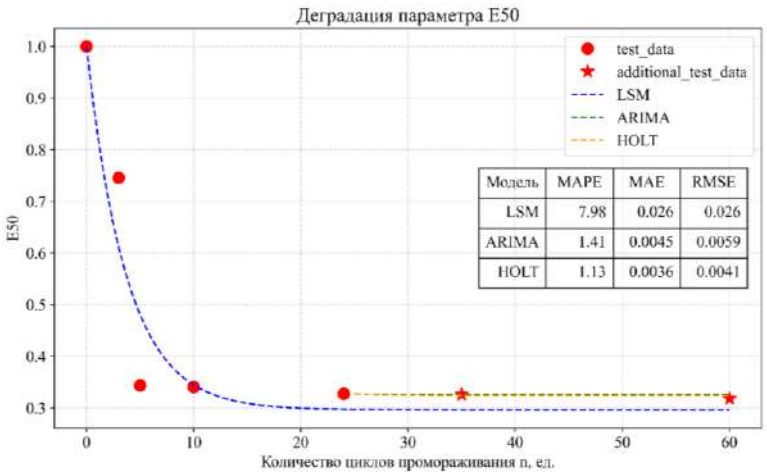
Рис.3. Схема конвейера обработки данных и прогнозирования деградации свойств грунтов с помощью TCN.

3. СРАВНЕНИЕ TCN С КЛАССИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ И ФИЗИЧЕСКИМИ ЗАВИСИМОСТЯМИ ДЕГРАДАЦИИ

Для сопоставления эффективности TCN с классическими подходами были реализованы модели ARIMA(p, d, q) с подбором параметров по критериям AIC/BIC и модель Хольта с аддитивным демпфированным трендом. Параллельно использовалась суперпозиция экспоненциальной и логарифмической функций деградации, описывающая быструю начальную потерю прочности и последующую стадию стабилизации. Параметры физической модели подбирались методом наименьших квадратов по экспериментальным точкам 0-10 циклов.

Показано, что ARIMA и модель Хольта достаточно хорошо описывают монотонный тренд для отдельных образцов при малом числе точек $(N \leq 10)$, однако чувствительны к шуму, требуют предварительного обеспечения стационарности и не позволяют использовать информацию от других ИГЭ. Физическая суперпозиционная модель даёт корректную физическую интерпретацию параметров, но нуждается в достаточном количестве наблюдений и усложняется при наличии выбросов и смены режима деградации.

TCN, напротив, позволяет одновременно использовать данные всех ИГЭ, автоматически выделяя типичные формы процесса «быстрый спад – плато», и даёт устойчивый прогноз на горизонте до 24 циклов даже при ограниченном числе экспериментальных точек для отдельных элементов. По результатам численных экспериментов TCN обеспечивает снижение среднеквадратической и относительной ошибок прогноза до инженерно приемлемого уровня и корректно воспроизводит главную особенность процесса: концентрацию основных потерь прочности и жёсткости в диапазоне 0-10 циклов с дополнительным снижением не более 3% к 24-му циклу.



Модель	MAPE	MAE	RMSE
LSM	7.98	0.026	0.026
ARIMA	1.41	0.0045	0.0059
HOLT	1.13	0.0036	0.0041

Рис.4. Иллюстрация результатов деградации параметров грунтов по данным НИР (пример по выбранным ИГЭ).

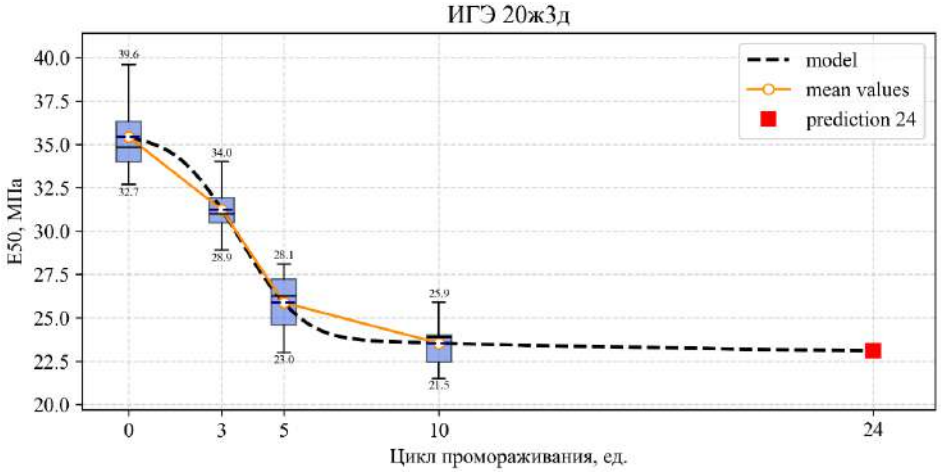


Рис.5. Обобщённые зависимости относительных модулей и прочности от числа циклов П-О.

4. ИНЖЕНЕРНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ РАСЧЁТА ВСЖД

Построенная TCN-модель, калиброванная на массиве циклических и динамических испытаний, может использоваться как источник входных данных для конечно-элементных расчётов устойчивости откосов выемок и осадок земляного полотна высокоскоростных железных дорог. Прогнозируемые значения E50, Eoed, Eur и Cu на 24-й цикл, а также учёт влияния динамических нагрузок через коэффициент виброползучести позволяют задавать в расчётах не только текущие, но и прогнозные характеристики грунтов на конце нормативного срока эксплуатации.

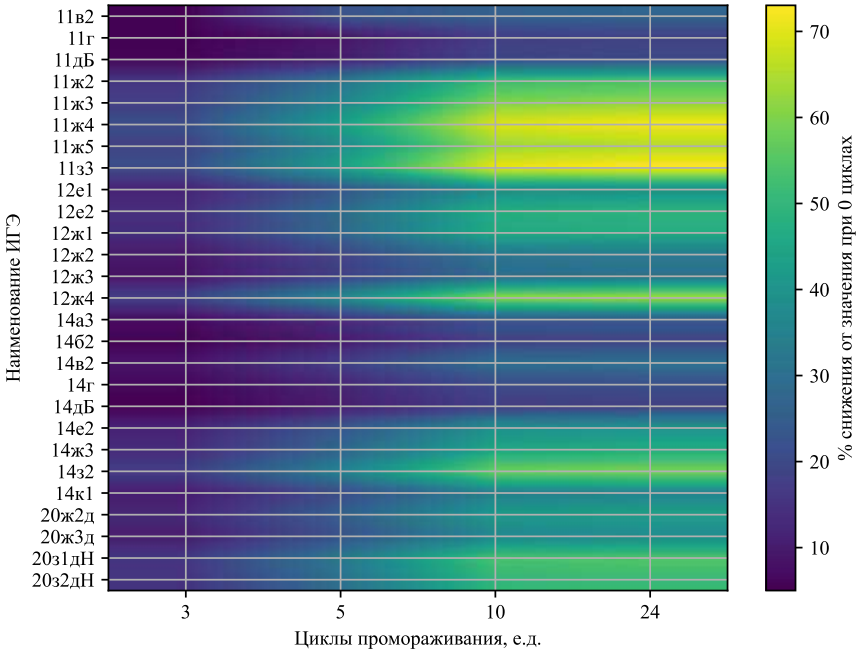


Рис.6. Процентное снижение по ИГЭ и циклам.

Результаты TCN-прогноза согласуются с требованиями СП 420.1325800.2018 и СП 381.1325800.2018, согласно которым при оценке устойчивости откосов необходимо учитывать потенциальное ухудшение свойств

грунтов под воздействием природных и техногенных факторов, включая П-О и динамическое нагружение. Идентификация наиболее уязвимых ИГЭ (11з3, 11ж4, 12ж4 и др.) позволяет количественно оценить ожидаемое снижение запасов устойчивости и обосновать необходимость применения дополнительных мер инженерной защиты: дренажа, термостабилизации, армирования, подпорных сооружений и др.

Дальнейшее развитие подхода планируется за счёт включения параметров виброползучести и показателей усталостной деградации в единую многомерную нейросетевую модель, а также интеграции результатов лабораторных испытаний с данными полевого мониторинга (инклинометрия, деформационные марки, термометрические цепочки). Это создаёт основу для цифрового «двойника» грунтового основания ВСЖД, объединяющего физико-математические модели, лабораторные испытания и нейросетевой прогноз деградации.

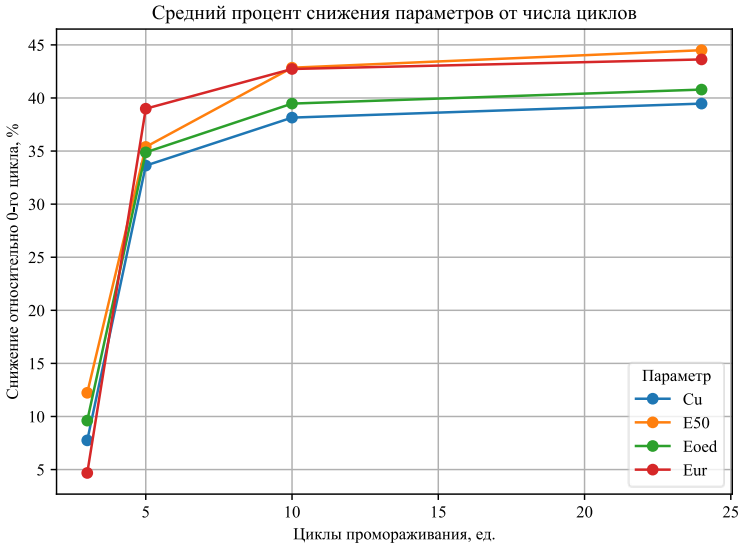


Рис.7.

ВЫВОДЫ

Циклическое промораживание–оттаивание в сочетании с динамическими нагрузками приводит к существенной деградации прочностных и деформационных характеристик грунтов основания ВСЖД: среднее снижение параметров Cu, Eur, E50 и Eoed к 10-му циклу составляет порядка 40%, а динамическое воздействие дополнительно снижает модуль деформации на 3-30% и недренированную прочность на 2-15%.

Анализ массива лабораторных данных по 27 ИГЭ показывает, что основная деградация свойств происходит в диапазоне 0-10 циклов П-О, тогда как прогноз на 24-й цикл даёт дополнительное снижение не более 3% от исходного уровня. Это подтверждает целесообразность использования предельного числа расчётных циклов порядка 20-25 при проектировании земляного полотна высокоскоростных линий.

Классические модели временных рядов (ARIMA, модель Хольта) и суперпозиция экспоненциальной и логарифмической функций деградации обеспечивают удовлетворительную точность для отдельных образцов, но не учитывают информацию других ИГЭ и предъявляют более жёсткие требования к структуре данных (стационарность, отсутствие существенного шума).

Временные свёрточные сети (TCN) позволяют единообразно обрабатывать многосерийные данные по всем ИГЭ, учитывать нелинейный характер деградации и получать устойчивый прогноз до 24 циклов П-О. TCN корректно воспроизводит форму процесса «быстрый спад – плато» и даёт инженерно приемлемые значения остаточных характеристик для последующего использования в расчётах устойчивости откосов и осадок земляного полотна.

Разработанный TCN-подход, основанный на массиве НИР 91-25-НИР.10, может быть масштабирован на другие объекты транспортной инфраструктуры, а также интегрирован с системами мониторинга для построения цифровых двойников грунтовых оснований в условиях сезонного и вечномерзлого климата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bai S., Kolter J.Z., Koltun V. *An Empirical Evaluation of Generic Convolutional and Recurrent Networks for Sequence Modeling* / Proceedings of the 35th International Conference on Machine Learning (ICML). – Stockholm: PMLR, 2018. – Vol.80. – Pp.393-404.
2. Bigl S.R., Shoop S.A. *Soil moisture prediction during freeze-thaw using a coupled heat and moisture flow model (FROSTB)*: *CRREL Report 94-11*. – Hanover: U.S. Army Cold Regions Research and Engineering Laboratory, 1994. – 22 p.
3. Bing H., He P. *Experimental investigations on the influence of cyclical freezing and thawing on physical and mechanical properties of saline soil* // Environmental Earth Sciences. – 2011. – Vol.64. – No.2. – Pp.431-436.
4. Chen J., Wang C., Liu Z. *Repeated freeze-thaw cycles on mechanical properties of clay* // Heliyon. – 2024. – Vol.10. – No.3. – e14216.
5. Holt C.C. *Forecasting seasonals and trends by exponentially weighted moving averages*. – Pittsburgh: Carnegie Institute of Technology, 1957. – 12 p. (Office of Naval Research Memorandum; No.52).
6. Jiang H., Han H., Liu X. et al. *Effect of repeated freeze-thaw cycles on mechanical properties of clay* // Heliyon. – 2024. – Vol.10. – No.5. – e27261.
7. Matsumura S., Miura S., Yokohama S., Kawamura S. *Cyclic deformation-strength evaluation of compacted volcanic soil subjected to freeze–thaw sequence* // Soils and Foundations. – 2015. – Vol.55. – No.1. – Pp.86-98.
8. Spasennikova K.A., Anikin G.V., Plotnikov S.N., Ishkov A.A. *Method of stochastic prediction of soil temperatures with GET systems* // Soil Mechanics and Foundation Engineering. – 2019. – Vol.56. – No.4. – Pp.267-274.
9. Sun B., Ma J., Li Z. et al. *The influence mechanism of freeze-thaw on soil erosion: a review* // Water. – 2019. – Vol.11. – No.8. – 1010.
10. Wang D.Y., Ma W., Niu Y.H., Chang X.X. *Effects of cyclic freezing and thawing on mechanical properties of Qinghai–Tibet clay* // Cold Regions Science and Technology. – 2007. – Vol.48. – No.1. – Pp.34-43.
11. Yang Z., Mou X., Ji H., He S. *Effects of freeze–thaw on bank soil mechanical properties and bank stability* // Scientific Reports. – 2024. – Vol.14. – 9808.
12. Yao X., Fang L., Qi J., Yu F. *Study on mechanism of freeze-thaw cycles induced changes in soil strength using electrical resistivity and X-ray computed tomography* // Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering. – 2017. – Vol.139. – No.2. – 021501.
13. Zhang Z., Ma W., Roman L. et al. *Freeze-thaw cycles–physical time analogy theory based method for predicting long-term shear strength of frozen soil* // Rock and Soil Mechanics. – 2021. – Vol.42. – No.1. – Pp.1-10.

Типография ООО «Сам Полиграфист» Подписано в печать 19.12.2025
г. Москва, Волгоградский пр., д.42, корп.5 Объем 40,8 п.л. Тираж 250 экз. Зак. №3815