

На правах рукописи



Царев Роман Олегович

**Нелокальная во времени модель динамического деформирования
стержневых систем**

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела
(технические науки)

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва – 2026 г.

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт прикладной механики Российской академии наук» (ИПРИМ РАН) в отделе «Механика структурированной и гетерогенной среды».

Научный руководитель: кандидат технических наук, доцент
Бадина Елена Сергеевна

Официальные оппоненты: **Сердюк Дмитрий Олегович**,
доктор физико-математических наук, доцент,
федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего
образования «Московский авиационный
институт (национальный исследовательский
университет)», кафедра 902 «Сопротивление
материалов, динамика и прочность машин»,
профессор.
Хомченко Антон Васильевич,
кандидат технических наук,
общество с ограниченной ответственностью
«АУРУС-АЭРО», начальник отдела нагрузок и
аэроупругости управления прочности, г. Москва

Ведущая организация: Акционерное общество «Научно-
исследовательский центр «Строительство»,
г. Москва

Защита диссертации состоится «10» июня 2026 г. В 14:00 на заседании диссертационного совета 24.1.508.01 в Институте прикладной механики Российской Академии наук по адресу: 125040, г. Москва, Ленинградский просп., д. 7, стр. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ИПРИМ РАН и на сайте <https://iam.ras.ru/tsarevdiss/>.

Автореферат разослан «___» апреля 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.508.01



Корнев Юрий Витальевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Настоящая работа направлена на развитие и совершенствование методов математического моделирования динамического поведения конструктивных элементов, выполненных из композитных материалов. Сложность таких задач обусловлена неоднородностью подобных материалов, а также анизотропностью их физико-механических свойств.

Нормативные документы предписывают для анализа систем и конструкций из композитных материалов использовать детализированные трёхмерные численные модели, позволяющие с высокой точностью описывать их структуру и свойства. Такие модели дают качественный результат при моделировании отдельных ответственных узлов и соединений. Однако они обладают существенным недостатком — высокой вычислительной сложностью, что ограничивает их применение при многовариантных расчётах, оптимизации, а также при решении задач, требующих моделирования больших систем или их поведения в течение длительных временных интервалов.

В связи с этим актуальной становится задача разработки альтернативных менее ресурсоёмких моделей, эквивалентных подробным трёхмерным в смысле адекватности описания динамического поведения элементов и конструкций, выполненных из композитных материалов.

Одним из возможных подходов к решению этой задачи является построение одномерных моделей на основе специальных гипотез. В настоящей работе в качестве такой гипотезы используется предположение о нелокальности во времени упругих свойств материала.

Настоящее исследование является частью проекта, поддержанного РФФИ (проект №25-11-00140)

Степень разработанности темы исследования. Вопросам приведения трёхмерных задач деформирования твердых тел под нагрузкой к задачам меньшей размерности посвящены исследования: Г. Кирхгофа, А. Лява, Л. Эйлера, Я. Бернулли, С.П. Тимошенко, Н.А. Кильчевского, С.И. Жаворонка, Б.Д. Аннина, Э.И. Григолюка, Ю.М. Волчкова, В.В. Елисеева и др.

Задача приведения трёхмерных моделей композитных материалов, учитывающих особенности их внутренней структуры или анизотропность их свойств, к одномерным не имеет единственного решения. Критерием эффективности выбранного подхода может служить степень соответствия полученных результатов экспериментальным данным в определенном классе задач.

Разработке неклассических моделей, в том числе нелокальных, отражающих характерные особенности деформирования твердых тел при различных видах нагружения, посвящены исследования: Л. Больцмана, В. Вольтерра, Ю. Н. Работнова, И.А. Кунина, Р. Тупина,

Р. Миндлина, С. А. Лурье, П.А. Белова, Ю.О. Соляева, Д.Б. Волкова-Богородского, А. К. Эрингена, Х. Т. Бэнкса, Д. Дж. Инмана, И. Лея, М. И. Фрисвелла, С. А. Адхикари, А. Пизано, П. Фуски, К. Полицотто, Ю.В. Петрова, В. Д. Потапова, А.Н. Потапова, Ю.А. Россихина, М.В. Шитиковой, В.Н. Сидорова, Е. С. Бадьиной и многих других.

Вопросами описания поведения неконсервативных систем занимались: Дж. Рэлей, У. Кельвин, В. Фойгт, Ю. Ишлинский, А. Р. Ржаницын, Н. Н. Давиденков, Е. С. Сорокин, И. Л. Корчинский, Я.Г. Пановко, А.И. Цейтлин, В.А. Фельдштейн, А.Н. Данилин, А. Нашиф, Д. Джоунс, и др.

Целью диссертационного исследования является развитие методов математического моделирования динамического поведения неконсервативных стержневых систем, выполненных из композитных материалов, с учетом характерных особенностей их динамического деформирования.

Задачи исследования:

1) провести анализ существующих математических моделей динамического поведения стержневых систем, выполненных из композитных материалов, а также методов приведения трехмерных моделей к моделям меньшей размерности;

2) разработать математическую модель нелокальных во времени упругих свойств материала, позволяющую учесть характерные свойства динамического поведения стержневых элементов и систем, выполненных из композитных материалов;

3) интегрировать разработанную модель в алгоритм метода конечных элементов;

4) разработать методику определения масштабного параметра нелокальной во времени модели на основании экспериментальных данных;

5) отработать методику определения масштабного параметра нелокальной модели на серии численных экспериментов и выявить зависимость масштабного параметра от геометрических характеристик поперечного сечения и характеристик материала стержневых элементов;

6) для оценки достоверности модели провести сравнение полученных результатов с результатами лабораторных испытаний.

Научная новизна диссертационного исследования заключается в том, что впервые:

1) на основании определяющих соотношений нелокальной механики разработана математическая модель динамического деформирования стержневых систем с учетом нелокальных во времени упругих свойств материала, позволяющая описывать динамическое поведение конструктивных элементов, выполненных из композитных материалов;

2) выявлен характер изменения результатов моделирования колебательных процессов стержневых элементов и систем при изменении значения масштабного параметра нелокальной

модели;

3) показано, что модель может быть использована для описания динамического поведения материалов, характеризующихся частотно независимым внутренним трением.

Теоретическая и практическая значимость работы:

1) на основании результатов исследования показано, что одномерные модели, построенные в предположении нелокальности во времени упругих свойств материала, могут служить альтернативой ресурсоёмким подробным трёхмерным моделям при описании процессов динамического деформирования элементов и систем, выполненных из композитных материалов;

2) разработанная модель интегрирована в алгоритм МКЭ, и может быть эффективно использована при решении задач оптимального или рационального проектирования стержневых систем, что крайне важно именно в случае новых композитных материалов, так как для их успешного внедрения принципиальным является поиск наиболее эффективных конструктивных решений;

3) разработана методика определения масштабных параметров нелокальной во времени модели упругих свойств материала на основании экспериментальных данных.

Методология и методы исследования. В качестве методологической базы при выполнении исследования использовались основные положения механики деформируемого твердого тела, теории упругости и нелокальной механики.

Положения, выносимые на защиту:

1) интегрированная в алгоритм МКЭ нелокальная во времени модель динамического деформирования стержневых систем, выполненных из композитных материалов;

2) методика определения управляющего параметра нелокальной во времени модели динамического деформирования по результатам численного или физического эксперимента;

3) обоснование возможности применения одномерных стержневых моделей, построенных с учётом нелокальных во времени упругих свойств материала, при описании динамического поведения композитных элементов;

4) обоснование возможности применения разработанной модели для описания динамического поведения материалов, характеризующихся частотно независимым внутренним трением.

Достоверность результатов, полученных в ходе исследования, обеспечивается корректным использованием обоснованных положений и методов механики деформируемого твердого тела, а также сравнением с результатами численных и лабораторных экспериментов.

Апробация работы

Основные результаты диссертационного исследования докладывались на научно-практических конференциях российского и международного уровня:

I Международная научная конференция «Соломинские чтения» (2022)

- III, IV и V Международные научно-технические конференции «Проектирование, строительство и эксплуатация мостов, тоннелей и метрополитенов» - чтения, посвященные памяти Лавра Дмитриевича Проскурякова (2022, 2023, 2024)

- XI и X Международные научные конференции «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» «Золотовские чтения» (2023, 2024)

- XII, XIII и XIV Всероссийские научные конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского (2022, 2023, 2024)

- IX Международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (2025)

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы, из 148 наименований, 3 приложений. Работа изложена на 122 страницах машинописного текста, содержит 58 рисунков, 6 таблиц.

Личный вклад автора. В диссертации изложены результаты исследований, полученные автором самостоятельно и в соавторстве. Статьи [6,7] выполнены без соавторов. В работах [1-3,5] автором выполнены: разработка математических моделей и их программная реализация, обработка, анализ, интерпретация и верификация полученных результатов, а также подготовка статей к публикации. Программа для ЭВМ, на которую получено свидетельство о регистрации [4], разработана автором.

Царев Р.О. принимал непосредственное участие в написании научных статей и подготовке текстов и презентаций докладов на научных конференциях.

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано 7 работ в научных изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание степени кандидата технических наук.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится обоснование выбора предмета исследования, показана степень его разработанности, сформулированы цель и задачи исследований, определена научная новизна, теоретическая и практическая значимость, методология и методы исследований, приведены положения, выносимые на защиту, и сведения по достоверности результатов и их апробации на научных конференциях.

В первой главе представлен обзор экспериментальных и теоретических исследований, посвящённых вопросам построения неклассических моделей деформируемых элементов и

систем, в том числе неконсервативных, а также вопросам разработки моделей сокращенной размерности, эквивалентных трехмерным, описывающих напряженно-деформированное состояние твердых тел. Также приведены основные теоретические положения, используемые в диссертационном исследовании.

В самом общем случае нелокальная постановка задачи динамики твердых тел предполагает, что упругие и демпфирующие силы в некоторой точке тела зависят не только от локальных во времени и пространстве значений деформаций и скоростей деформаций соответственно, но и от значений деформаций и скоростей деформаций в некоторой окрестности рассматриваемой точки, на всей истории деформирования тела, причем влияние точек в пространстве друг на друга тем меньше, чем больше расстояние между ними, а влияние предыдущей истории деформирования на состояние системы в текущий момент убывает со временем.

В классической локальной постановке физический закон вязкоупругости Фойгта имеет вид:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl} + X^{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t}, \quad (1)$$

где $X^{ijkl} = C^{ijkl} t_e$, C^{ijkl} – тензор упругих модулей, X^{ijkl} – тензор коэффициентов вязкости, t_e – время запаздывания, σ^{ij} , ε_{kl} – компоненты тензоров деформаций и напряжений.

Линейный тензор деформации связан с вектором перемещений соотношениями Коши:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (\nabla_k u_l + \nabla_l u_k). \quad (2)$$

При переходе к нелокальной постановке соотношение (1) принимает вид:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t K(\bar{r}, \bar{\theta}) R(t, \tau) \varepsilon_{kl}(\theta, \tau) d\tau d\theta + X^{ijkl} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t C(\bar{r}, \bar{\theta}) G(t, \tau) \dot{\varepsilon}_{kl}(\theta, \tau) d\tau d\theta. \quad (3)$$

Здесь: K , C – ядра нелокальных в пространстве операторов упругости и демпфирования соответственно, R и G – ядра нелокальных во времени операторов упругости и демпфирования соответственно, $\bar{r}, \bar{\theta}$ – вектора пространственных координат, t, τ – время, Ω – окрестность рассматриваемой точки.

Ядра нелокальных операторов считаются инвариантными относительно сдвигов во времени и пространстве, то есть:

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} = & C^{ijkl} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t K(|\bar{r} - \bar{\theta}|) R(t - \tau) \varepsilon_{kl}(\theta, \tau) d\tau d\theta \\ & + X^{ijkl} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t C(|\bar{r} - \bar{\theta}|) G(t - \tau) \dot{\varepsilon}_{kl}(\theta, \tau) d\tau d\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

В выражении (4) ядровые функции считаются изотропными, т.е. скорости убывания

влияния точек во времени и пространстве друг на друга одинаковы во всех направлениях. В самом общем случае ядра могут рассматриваться как анизотропные, т.е. имеющие разную скорость убывания влияния в различных направлениях.

Учет всех четырех типов нелокальности одновременно при решении задач динамики твердых тел имеет смысл только в том случае, если этого требуют реальные особенности динамического поведения рассматриваемого материала. Для феноменологического описания динамики элементов, выполненных из композитных материалов, используются различные частные случаи выражения (4), позволяющие добиться достаточной точности вычислений, но не перегружающие модель.

Путем использования в качестве ядровой функции δ – функции Дирака из самого общего нелокального соотношения между напряжениями и деформациями можно получить частные случаи нелокальных моделей.

В случае представления всех 4 ядер в виде δ – функций Дирака из выражения (4) получим:

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} = & C^{ijkl} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t \delta(|\bar{r} - \bar{\theta}|) \delta(t - \tau) \varepsilon_{kl}(\theta, \tau) d\tau d\theta \\ & + X^{ijkl} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t \delta(|\bar{r} - \bar{\theta}|) \delta(t - \tau) \dot{\varepsilon}_{kl}(\theta, \tau) d\tau d\theta . \end{aligned} \quad (5)$$

Нетрудно увидеть, что выражение (5) аналогично локальной классической вязкоупругой модели (1), которая, таким образом, является частным случаем нелокальной модели.

Путем различных комбинаций δ – функций с нелокальными ядрами из соотношения (4) можно получить различные типы нелокальных моделей, рассматриваемых в литературе, например:

- нелокальную в пространстве модель упругих свойств материала (аналогичную модели Эрингена):

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} = & C^{ijkl} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t \mathbf{K}(|\bar{r} - \bar{\theta}|) \delta(t - \tau) \varepsilon_{kl}(\theta, \tau) d\tau d\theta \\ & + X^{ijkl} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t \delta(|\bar{r} - \bar{\theta}|) \delta(t - \tau) \dot{\varepsilon}_{kl}(\theta, \tau) d\tau d\theta ; \end{aligned} \quad (6)$$

- нелокальную в пространстве модель внутреннего трения:

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} = & C^{ijkl} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t \delta(|\bar{r} - \bar{\theta}|) \delta(t - \tau) \varepsilon_{kl}(\theta, \tau) d\tau d\theta \\ & + X^{ijkl} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t \mathbf{C}(|\bar{r} - \bar{\theta}|) \delta(t - \tau) \dot{\varepsilon}_{kl}(\theta, \tau) d\tau d\theta ; \end{aligned} \quad (7)$$

-нелокальную во времени модель внутреннего трения:

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} = & C^{ijkl} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t \delta(|\bar{r} - \bar{\theta}|) \delta(t - \tau) \varepsilon_{kl}(\theta, \tau) d\tau d\theta \\ & + X^{ijkl} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t \delta(|\bar{r} - \bar{\theta}|) \mathbf{G}(t - \tau) \dot{\varepsilon}_{kl}(\theta, \tau) d\tau d\theta . \end{aligned} \quad (8)$$

Необходимо отметить, что модели (7) и (8) описывают частотно-зависимое внутреннее трение в материале. В диссертационном исследовании предложено применение нелокальной модели для описания частотно-независимого внутреннего трения.

С целью расширения класса решаемых задач в настоящей работе разрабатывается модель, основанная на четвертом типе нелокальности. Модель основана на предположении о зависимости упругих сил не только от деформированного состояния в рассматриваемый момент времени, но и от предыдущей истории деформирования системы, то есть упругие свойства материала считаются нелокальными во времени:

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} = & C^{ijkl} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t \delta(|\bar{r} - \bar{\theta}|) \mathbf{R}(t - \tau) \varepsilon_{kl}(\theta, \tau) d\tau d\theta \\ & + X^{ijkl} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t \delta(|\bar{r} - \bar{\theta}|) \delta(t - \tau) \dot{\varepsilon}_{kl}(\theta, \tau) d\tau d\theta . \end{aligned} \quad (9)$$

Выполнив интегрирование δ – функций в (9) и учитывая только период времени от начала колебаний системы, можем получить:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \int_0^t \mathbf{R}(t - \tau) \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau + X^{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} . \quad (10)$$

В качестве ядра нелокального оператора могут использоваться различные виды функций, например, экспоненциальное ядро (11) или ядро в виде функции ошибок (12), представленные на рисунке 1:

$$\mathbf{R}(t - \tau) = \frac{1}{\eta_r} e^{-\frac{1}{\eta_r}(t-\tau)} , \quad (11)$$

$$\mathbf{R}(t - \tau) = \frac{2}{\eta_r \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{1}{\eta_r}\right)^2 (t-\tau)^2} . \quad (12)$$

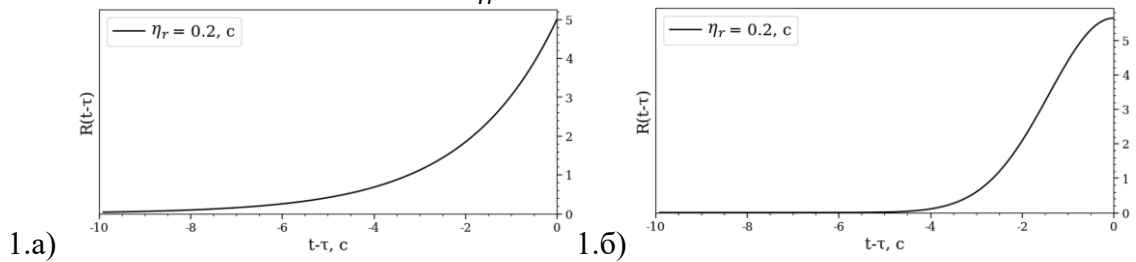


Рисунок 1 – (1.а) ядро в виде экспоненциальной функции. (1.б) ядро в виде функции ошибок

Память материала считается затухающей. Параметром, характеризующим скорость убывания ядровой функции, является параметр η_r . Он определяет, насколько большой участок предыдущей истории деформирования оказывает значительное влияние на состояние системы в текущий момент. В литературе его часто называют масштабом влияния. В дальнейшем в настоящей работе будет использоваться термин «масштабный параметр».

Ядро нелокального оператора должно отвечать условию нормирования:

$$\int_{-\infty}^t R(t-\tau) d\tau = 1, \quad \text{при } t > t_n |_{R(t-\tau) \approx 0}: \int_0^t R(t-\tau) d\tau \approx 1. \quad (13)$$

Общим свойством перечисленных функций с учетом условия (13) является то, что при достаточно малых значениях масштабного параметра ядровая функция сводится к δ – функции Дирака, а модель – к классической локальной.

Во второй главе выполняется вывод конечно-элементных соотношений для нелокальной во времени модели динамического деформирования.

Для вывода конечно-элементных соотношений нелокальной во времени модели динамического деформирования использовался принцип возможных перемещений:

$$\int_V \rho_A \ddot{u}_i \delta u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_A q_i \delta u_i dA + \int_V F_i \delta u_i dV. \quad (14)$$

Здесь $i, j = 1, 2, 3$, ρ – плотность материала, q_i – поверхностные силы, F_i – объёмные силы, σ_{ij} – напряжение, δu_i – поле возможных перемещений, $\delta \varepsilon_{ij}$ – поле возможных деформаций.

Используя определяющее соотношение нелокальной модели динамического деформирования (10), можем переписать выражение (14) в виде:

$$\begin{aligned} \int_V \rho_A \ddot{u}_i \delta u_i dV + \int_V \left(C^{ijkl} \int_0^t R_t(t-\tau) \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau + X^{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \right) \delta \varepsilon_{ij} dV \\ = \int_A q_i \delta u_i dA + \int_V F_i \delta u_i dV. \end{aligned} \quad (15)$$

Разделим в выражении (15) на две части слагаемое, отвечающее за нелокальную жёсткость и за внутреннее вязкое трение, тогда:

$$\begin{aligned} \int_V \rho_A \ddot{u}_i \delta u_i dV + \int_V C^{ijkl} \int_0^t R_t(t-\tau) \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V X^{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \delta \varepsilon_{ij} dV \\ = \int_A q_i \delta u_i dA + \int_V F_i \delta u_i dV. \end{aligned} \quad (16)$$

При использовании конечно-элементного подхода, поля действительных перемещений заменяются приближенными:

$$\tilde{u} \approx \mathbf{N} \mathbf{d}, \quad (17)$$

где \mathbf{N} – матрица функций формы, \mathbf{d} – вектор узловых перемещений.

С использованием матрицы дифференциальных операторов \mathbf{A} обозначим $\mathbf{A} \mathbf{N} = \mathbf{B}$ и получим:

$$\delta u = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{v}} = \mathbf{N}; \quad \delta \varepsilon = \mathbf{B}; \quad \tilde{\varepsilon} = \mathbf{A} \mathbf{N} \mathbf{d} = \mathbf{B} \mathbf{d}. \quad (18)$$

Здесь \mathbf{A} – матрица дифференциальных операторов.

Тогда, опуская возможные узловые перемещения, выражение (16) мы можем записать в матричной форме:

$$\int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \ddot{\mathbf{d}} + \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{X} \mathbf{B} dV \dot{\mathbf{d}} + \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \int_0^t R(t-\tau) \mathbf{B} \mathbf{d}(\tau) d\tau dV = \int_A \mathbf{N} \mathbf{q} dA + \int_V \mathbf{N} \mathbf{F} dV \quad (19)$$

Для модели изгибаемой балки Эйлера-Бернулли деформации связаны с прогибом следующим соотношением:

$$\varepsilon_{11} = -y \frac{d^2 v}{dx^2}. \quad (20)$$

Здесь x – продольная координата балки, y – расстояние от нейтрального слоя изгибаемой балки до точки, в которой вычисляется деформация ε_{11} , v – функция прогиба балки.

Приближенное решение $\tilde{v} \approx \mathbf{N} \mathbf{d}$ для каждого элемента балки можно записать с использованием интерполяционных полиномов Эрмита:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{2s^3}{l^3} - \frac{3s^2}{l^2} + 1 \\ \frac{s^3}{l^2} - \frac{2s^2}{l} + s \\ \frac{3s^2}{l^2} - \frac{2s^3}{l^3} \\ \frac{s^3}{l^2} - \frac{s^2}{l} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

где l – длина элемента, $s \in [0, l]$ – продольная координата элемента.

Используя $\frac{d^2}{ds^2}$ в качестве дифференциального оператора \mathbf{A} , для вычисления приближенных деформаций получим:

$$\mathbf{B}^T = \frac{d^2 \mathbf{N}^T}{ds^2} = \left[\frac{12s}{l^3} - \frac{6}{l^2} \quad \frac{6s}{l^2} - \frac{4}{l} \quad \frac{6}{l^2} - \frac{12s}{l^3} \quad \frac{6s}{l^2} - \frac{2s}{l} \right]. \quad (22)$$

Поскольку все элементы матрицы \mathbf{B} не зависят от времени, её можно вынести за знак интеграла по времени в выражении (19). Учитывая при этом, что осевой момент инерции сечения

определяется как $I_z = \int_A y^2 dA$, получим:

$$\int_l \rho AN^T N ds \ddot{\mathbf{d}} + \int_l \mathbf{B}^T \chi I_z \mathbf{B} ds \dot{\mathbf{d}} + \int_l EI_z \mathbf{B}^T \mathbf{B} \int_0^t R(t-\tau) \mathbf{d}(\tau) d\tau ds = \mathbf{F}. \quad (23)$$

Здесь $\mathbf{M}_i = \int_l \rho AN^T N ds$ – матрица масс стержневого элемента, $\mathbf{D}_i = \int_l \mathbf{B}^T \chi I_z \mathbf{B} ds$ – матрица демпфирования стержневого элемента, $\mathbf{K}_i = \int_l EI_z \mathbf{B}^T \mathbf{B} ds$ – матрица жесткости стержневого элемента, $\chi = Et_e$, где t_e – время запаздывания, \mathbf{F} – вектор узловых нагрузок.

Таким образом, подставив вектор функций формы \mathbf{N} и вектор их производных \mathbf{B} в интеграл для нахождения матрицы жесткости получим:

$$\mathbf{K}_i^{\text{изг}} = \int_l EI_z \begin{bmatrix} \frac{12s}{l^3} - \frac{6}{l^2} & \frac{6s}{l^2} - \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} - \frac{12s}{l^3} & \frac{6s}{l^2} - \frac{2s}{l} \\ \frac{6s}{l^2} - \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} - \frac{12s}{l^3} & \frac{6}{l^2} - \frac{12s}{l^3} & \frac{6s}{l^2} - \frac{2s}{l} \\ \frac{6}{l^2} - \frac{12s}{l^3} & \frac{6s}{l^2} - \frac{2s}{l} & \frac{12s}{l^3} - \frac{6}{l^2} & \frac{6s}{l^2} - \frac{4}{l} \\ \frac{6s}{l^2} - \frac{2s}{l} & \frac{6s}{l^2} - \frac{4}{l} & \frac{6s}{l^2} - \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} - \frac{12s}{l^3} \end{bmatrix} ds, \quad (24)$$

Проведя вычисления, получим матрицу жесткости изгибаемого стержневого элемента:

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Локальные матрицы масс и демпфирования выводились аналогичным образом и имеют стандартный вид. После сборки локальных матриц в глобальные, уравнение движения в конечно-элементной формулировке для нелокальной во времени модели динамического деформирования может быть записано следующим образом:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \int_0^t R(t-\tau) \mathbf{d}(\tau) d\tau = \mathbf{F}. \quad (26)$$

Здесь $\ddot{\mathbf{d}}$ – вектор узловых ускорений, $\dot{\mathbf{d}}$ – вектор узловых скоростей, \mathbf{d} – вектор узловых перемещений.

В настоящей работе в качестве ядра нелокального оператора использовалось ядро в виде функции Гаусса (12), которое для компактности было представлено в следующем виде:

$$R(t-\tau) = 2\eta/\sqrt{\pi} e^{-\eta^2(t-\tau)^2}. \quad (27)$$

Здесь $\eta = 1/\eta_r$.

Так как решение задачи динамики методом конечных элементов основывается на

дискретизации во времени, интегральное ядро (28) было заменено конечной суммой:

$$R = \sum_{j=1}^i \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2 \left(t_i - \left(\tau_j - \frac{\Delta t}{2} \right) \right)^2} \Delta t \quad (28)$$

Для решения уравнения движения балки элемента использовался метод Ньюмарка. Для аппроксимации узловых скоростей и ускорений применялся конечно-разностный подход.

При решении уравнения движения методом Ньюмарка ядровая функция накладывается на весь процесс деформирования начиная от момента t_{i+1} , поэтому дискретный аналог интегрального ядра (28) был разделен на две части (Рисунок 2):

$$\beta = \Delta t \sum_{j=1}^i \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2 (t_i - t_{j-1})^2}, \quad \alpha = \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2 (t_{i+1} - t_i)^2} \Delta t, \quad (29)$$

где α - весовой коэффициент, при d_{i+1} , и β - сумма всех остальных весов.

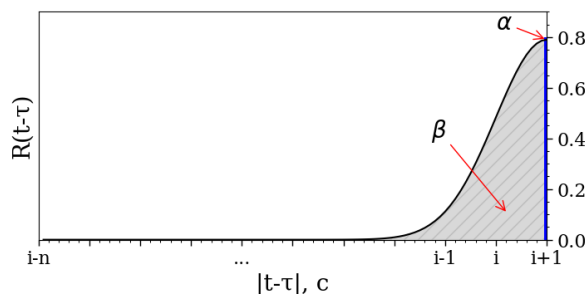


Рисунок 2 – Разделение интегрального ядра при численном решении уравнения равновесия по неявной схеме

Тогда выражение (26) можно представить в виде:

$$\mathbf{M} \left[\frac{2}{\Delta t^2} (\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i - \dot{\mathbf{d}}_i \Delta t) - \ddot{\mathbf{d}}_i \right] + \mathbf{D} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i) + \mathbf{K}\beta + \mathbf{K}\alpha = \mathbf{F}_{i+1} \quad (30)$$

Для удобства вычислений сгруппируем элементы уравнения при переменных \mathbf{d}_i , $\dot{\mathbf{d}}_i$, $\ddot{\mathbf{d}}_i$.

$$\mathbf{Q} = \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{D} + \mathbf{K}\alpha, \quad \mathbf{Q}_1 = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M}, \quad \mathbf{Q}_2 = \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{D}, \quad (31)$$

После всех преобразований вычислительная схема для решения уравнения движения методом Ньюмарка принимает вид:

$$\mathbf{Q} \mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}_i + \mathbf{Q}_1 \dot{\mathbf{d}}_i + \mathbf{Q}_2 \mathbf{d}_i - \mathbf{K}\beta. \quad (32)$$

Для решения уравнения движения и вычисления перемещений, скоростей и ускорений узлов балки был разработан программный модуль на языке программирования Python.

Следующим этапом исследования стала оценка влияния изменения масштабного параметра η на результаты численного моделирования. В качестве примера рассматривалась 12-ти метровая балка (Рисунок 3), защемленная по концам, выполненная из термореактивного винилэфирного стеклопластика I класса, характеристики которого приведены в таблице 1. Коэффициент относительного демпфирования материала в долях от критического принят 0,042.

Балка загружена мгновенно приложенной и равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью -10 кН/м. На первом шаге при $i = 1$ в качестве начальных условий принято $v_0 = 0$.

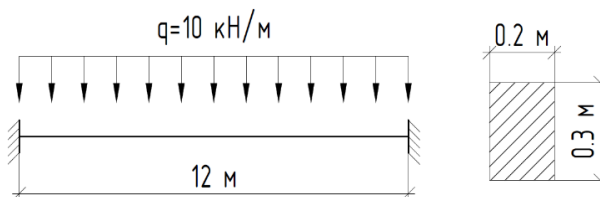


Рисунок 3 – Расчетная схема защемленной балки

Таблица 1. Характеристики термореактивного винилэфирного стеклопластика I класса для одномерного моделирования:

Модуль Юнга в продольном направлении, E_{lw}	17,2 ГПа
Коэффициент Пуассона в продольном направлении, μ_{lw}	0,32
Плотность материала, ρ	1900 кг/м ³
Относительный коэффициент демпфирования, γ	0,042

В результате моделирования были получены три графика колебаний при различных масштабных параметрах нелокальной модели.

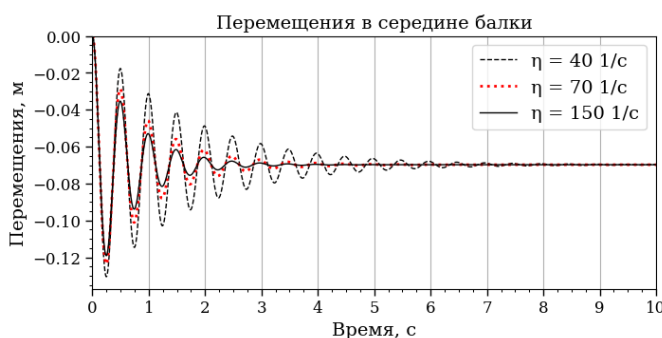


Рисунок 4 – Графики вертикального перемещения центрального узла балки, полученные для трех реализаций расчета с различными масштабными параметрами

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы: масштабный параметр η оказывает влияние на амплитуду колебаний; при уменьшении η наблюдается увеличение амплитуды колебаний конструкции; частота колебаний остаётся неизменной при изменении η .

В третьей главе описана методика калибровки нелокальной во времени модели упругих свойств материала, а также выполнена её отработка по результатам численного эксперимента.

Одной из ключевых проблем при применении нелокальных моделей является необходимость определения масштабного параметра. В рамках настоящего исследования предложена методика определения масштабного параметра по экспериментальным данным на основе метода наименьших квадратов. Для определения значения масштабного параметра, обеспечивающего минимальное расхождение результатов, полученных с использованием нелокальной модели, с результатами эксперимента, был применён метод золотого сечения.

Предложенная методика обрабатывалась по результатам численного эксперимента. В качестве численного эксперимента использовано решение задачи динамики в трехмерной постановке на базе конечно-элементной модели, построенной в верифицированном расчетном комплексе Midas-Civil. Моделировалась 12-ти метровая балка, зашпеленная по концам (Рисунок 3). В качестве материала балки был принят трансверсально-изотропный материал: термореактивный винилэфирный стеклопластик I класса. Характеристики материала приведены в таблице 2. Балка в поперечном сечении представляет собой прямоугольник высотой 0,3м и шириной 0,2м. Балка нагружена мгновенно приложенной и равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью -10 кН/м.

Таблица 2. Характеристики термореактивного винилэфирного стеклопластика I класса для трехмерной твердотельной модели:

Модуль Юнга в продольном направлении, E_{lw}	17,2 ГПа
Модуль Юнга в поперечном направлении, E_{cw}	12,2 ГПа
Коэффициент Пуассона в продольном направлении, μ_{lw}	0,32
Коэффициент Пуассона в поперечном направлении, μ_{cw}	0,15
Плотность материала, ρ	1900 кг/м ³
Относительный коэффициент демпфирования, γ	0,042

При моделировании использовались восьмиузловые твердотельные конечные элементы. Внутреннее трение в трехмерной конечно-элементной модели, используемой в качестве численного эксперимента, является частотно зависимым, т.е. коэффициент вязкости меняется при изменении геометрии балки и частот её собственных колебаний.

Полученные результаты конечно-элементного моделирования были экспортированы в разработанный на языке Python программный модуль, реализующий алгоритм калибровки нелокальной модели и определения значения масштабного параметра η .

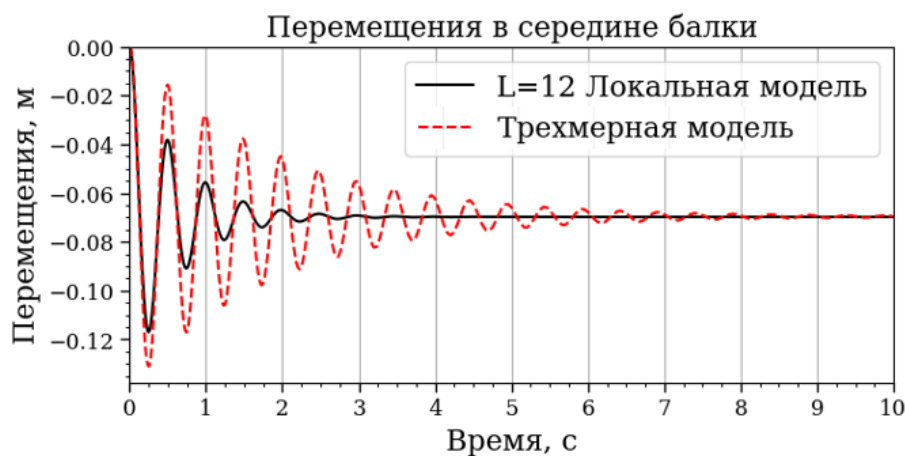


Рисунок 5 – Сравнение результатов численного эксперимента с результатами вычислений по модели, приближенной к классической локальной. Величина относительной ошибки: 12,97%

Сравнивая результаты численного эксперимента с результатами (Рисунок 5), полученными по модели, приближенной к классической локальной, можно сказать, что расхождения по амплитуде весьма значительны, что указывает на ограниченность применимости классического подхода в рассматриваемом классе задач.

На рисунке 6 представлено сравнение результатов, полученных с использованием откалиброванной нелокальной во времени модели упругих свойств материала с данными численного эксперимента.

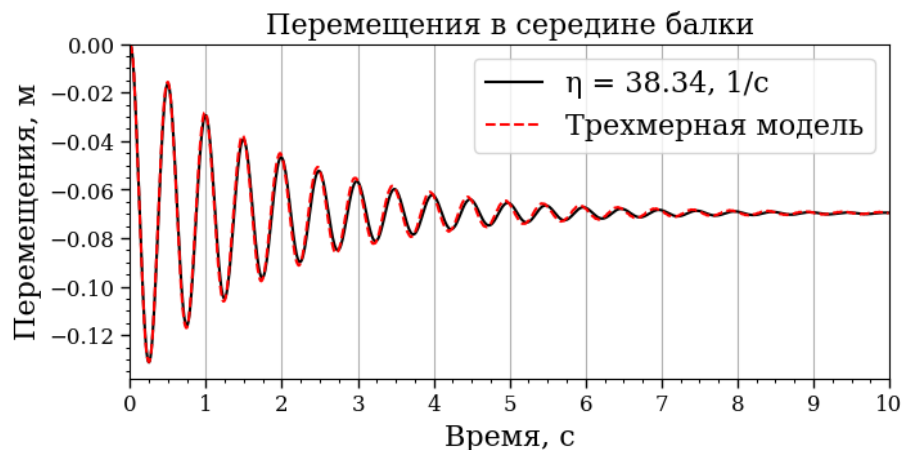


Рисунок 6 – Сравнение результатов численного эксперимента с результатами одномерного моделирования с использованием откалиброванной модели нелокального во времени деформирования. Величина относительной ошибки: 2,66%

Результаты одномерного моделирования, полученные по нелокальной во времени модели упругих свойств материала, показывают значительное снижение относительной ошибки и увеличение соответствия данным численного эксперимента. Несмотря на то, что в одномерной модели не учитывалась трансверсальная изотропия материала (в силу допущений и размерности модели), величина относительной ошибки по сравнению с классическим вариантом многократно уменьшилась. Необходимо отметить, что трехмерная твердотельная модель характеризуется ~ 17280 степенями свободы, а одномерная нелокальная – только 26.

Практическая применимость любой модели определяется не только её точностью, но и универсальностью. Очевидно, что если модель требует повторной калибровки каждый раз при изменении геометрии конструкции, то её применение в инженерной практике становится крайне затруднительным.

Для оценки устойчивости масштабного параметра η была проведена серия численных экспериментов для балок различной длины. Результаты моделирования представлены в таблице 3 и на рисунке 7.

Таблица 3. Результаты серии численных экспериментов

L, м	$\frac{\chi}{E}$, с	η , 1/с	Соотношение* коэффициентов вязкости	Соотношение* масштабных параметров
10	0,014	52,9	1,00	1,00
11	0,017	44,8	0,83	0,85
12	0,021	38,3	0,69	0,73
13	0,024	34,0	0,59	0,64
14	0,028	29,6	0,51	0,56
15	0,032	26,3	0,44	0,50
16	0,036	22,9	0,39	0,43
17	0,041	20,6	0,35	0,39
18	0,046	18,3	0,31	0,35

* – Все соотношения в таблице 3, получены относительно величин, определенных для балки длиной 10 м.

Здесь L – длина балки, χ – коэффициент вязкости, E – модуль Юнга, η – масштабный параметр

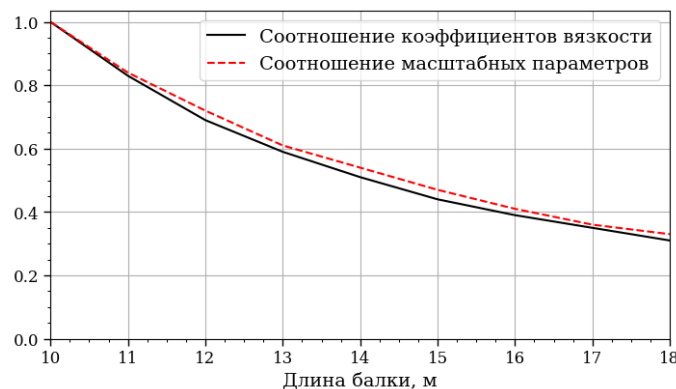


Рисунок 7 – Графики соотношения коэффициентов вязкости и соотношения масштабных параметров

В результате анализа полученных данных (Рисунок 7) было установлено, что существует устойчивая взаимосвязь между изменением коэффициента вязкости и масштабного параметра: отношение масштабных параметров между балками разных длин оказывается близким к отношению соответствующих коэффициентов вязкости. Это обеспечивает возможность аппроксимации параметра η при известных демпфирующих свойствах системы.

На основании этого наблюдения, а также с учетом частотной зависимости демпфирующих сил в трехмерной конечно-элементной модели, было сформулировано предположение: если бы демпфирование в численном эксперименте было частотно независимым, то и масштабный параметр η также сохранял бы постоянное значение, вне зависимости от геометрии конструкции.

Для проверки этой гипотезы было проведено моделирование балок длиной 12 и 14 метров. При этом в расчётах коэффициент вязкости был задан как условно частотно независимый. Чтобы компенсировать изменение частот собственных колебаний и, соответственно, изменение коэффициентов вязкости для балок различной длины, относительный коэффициент демпфирования материала $\xi = 0.042$ для балки длиной 14 метров был умножен на отношения частот между этими балками (35).

Таким образом демпфирующие свойства для 14–и метровой балки были приведены к

$$\xi_{14} = \xi \frac{v_{14}}{v_{12}} = 0.031 \quad (35)$$

демпфирующим свойствам для балки длиной 12 метров. Такой подход обеспечил сопоставимые характеристики демпфирования в моделируемых системах.

Анализируя полученные результаты (Рисунок 8) для балки длиной 14 метров с установленным масштабным параметром $\eta=38,34$ 1/с, определенным ранее для балки длиной 12 метров (рисунок 6), можно видеть, что в случае, частотно-независимого внутреннего трения в исходной системе, масштабный параметр η остаётся постоянным для конструкций с различной геометрией. Различия в относительных ошибках между моделью и численным экспериментом оказались незначительными, из чего можно сделать вывод, что масштабный параметр является параметром материала и не зависит от геометрии системы.

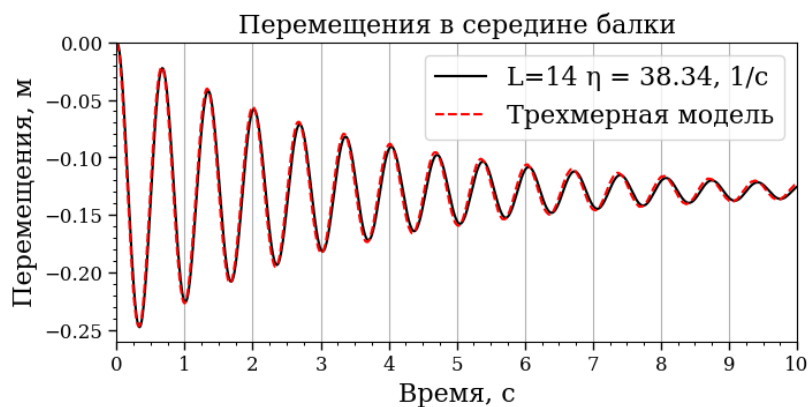


Рисунок 8 – Сравнение результатов условно частотно независимого численного эксперимента с результатами модели нелокального по времени деформирования для балки длиной 14 метров при расчетном масштабном параметре $\eta = 38,34$ 1/с. Величина относительной ошибки: 3,75%

Таким образом, было показано, что при обеспечении частотной независимости демпфирования нелокальная во времени модель динамического деформирования стержневых систем может использоваться без повторной калибровки масштабного параметра.

Разработанная нелокальная во времени модель упругих свойств материала была встроена в алгоритм метода конечных элементов для моделирования колебаний сложных стержневых систем. Далее рассматривалась задача о колебаниях рамной конструкции с использованием разработанной модели. Для реализации её решения в матрицу жёсткости конечных элементов

были добавлены компоненты, отвечающие за деформирование элементов в продольном направлении.

В качестве численного примера была рассмотрена П-образная рама, выполненная из того же материала, что и балка в предыдущем примере (Таблица 2). Геометрические параметры, а также нагрузка и закрепления отражены в расчетной схеме (Рисунок 9).

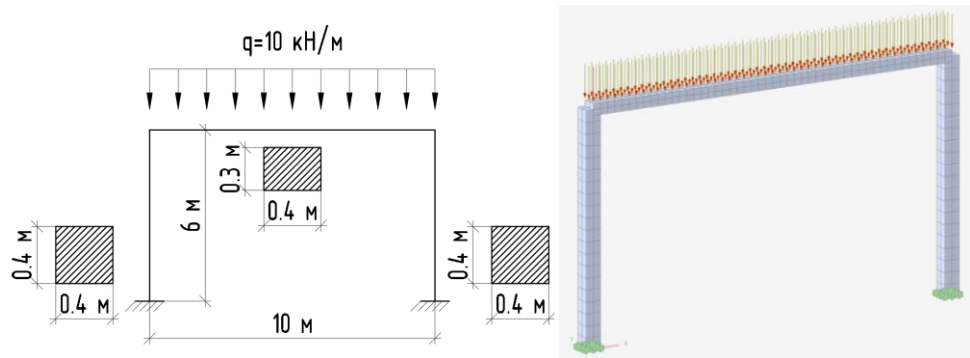


Рисунок 9 – Расчетная схема П-образной рамы

Как и ранее для балки изначально результаты трехмерного моделирования, полученные с учетом трансверсальной изотропии материала, сравнивались с результатами, полученными с использованием одномерной классической локальной модели (Рисунок 10).

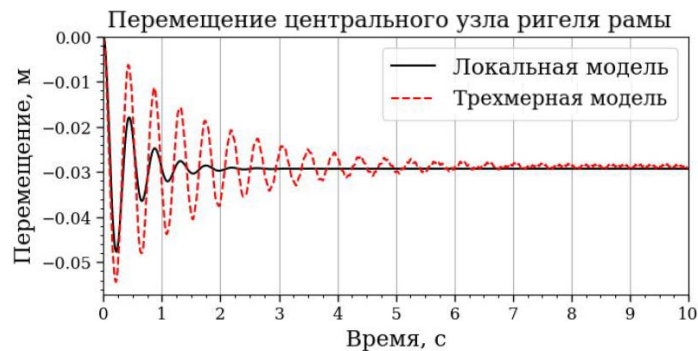


Рисунок 10 – Сравнение результатов численного эксперимента с результатами одномерного моделирования по модели, приближенной к классической локальной модели. Величина относительной ошибки: 13,56%

Далее была проведена калибровка нелокальной во времени модели упругих свойств материала, по данным вычислительного эксперимента (Рисунок 11).

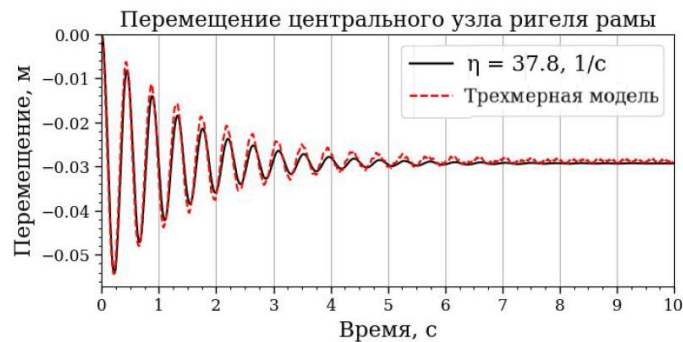


Рисунок 11 – Сравнение результатов численного эксперимента, с результатами одномерного моделирования с использованием откалиброванной модели нелокального во времени деформирования. Величина относительной ошибки: 5,41%.

Результаты одномерного моделирования, полученные по нелокальной во времени модели упругих свойств материала, показали значительное снижение относительной ошибки и улучшение соответствия данным численного эксперимента.

Здесь важно отметить, что низшая собственная частота колебаний рассматриваемой рамы получилась близкой к частоте изгибаемой балки длиной 12 метров, описанной выше. Соответственно время запаздывания для рамы $t_{ef} = 0.022$ с. также получилось близким соответствующему значению для балки $t_{eb} = 0.021$ с. По результатам калибровки масштабные параметры для этих систем также получились близкими. Это подтверждает, что масштабный параметр является характеристикой материала.

В четвёртой главе для оценки жизнеспособности разработанной нелокальной во времени модели динамического деформирования стержневых систем была выполнена её калибровка по результатам лабораторных испытаний балок из высокопрочных лёгких бетонов. Лабораторный эксперимент выполнен при поддержке НОЦ «Наноматериалы и нанотехнологии» и НИИ экспериментальной механики НИУ МГСУ

Балки для испытаний были изготовлены из цементных композитов, разработанных в лаборатории НОЦ «Наноматериалы и нанотехнологии» НИУ МГСУ. Материалы характеризуются пределом прочности – от 40 до 106 МПа – при плотности, варьирующейся от 1300 до 1900 кг/м³. В качестве наполнителей использовались: керамические микросферы (К), стеклянные микросферы (С) и стеклянные микросферы с добавлением микрофибры (СФ). В диссертации рассматривались экспериментальные балки из материалов 1700К, 1700С и 1900СФ.

Верификация параметров модели проводилась на основе результатов лабораторных испытаний. Испытания проводились с применением импульсного возбуждения с помощью ударного молотка для модальных испытаний производства фирмы Bruel&Kjaer (Рисунок 12.б). Одна из рассмотренных балок представлена на рисунке 12.а и 12.в.

Для регистрации ускорений конструкции в середине и четверти пролета балки были установлены одноосевые акселерометры с чувствительностью 100 мВ/г. Полученный сигнал синхронизировался и регистрировался с использованием многоканальной измерительной системы National Instruments PXIe-1082, обеспечивающей частоту дискретизации до 10 МГц. Импульсное воздействие на каждую испытываемую балку осуществлялось дважды: первый раз возле акселерометра в середине пролета, и второй раз возле акселерометра в четверти пролета.

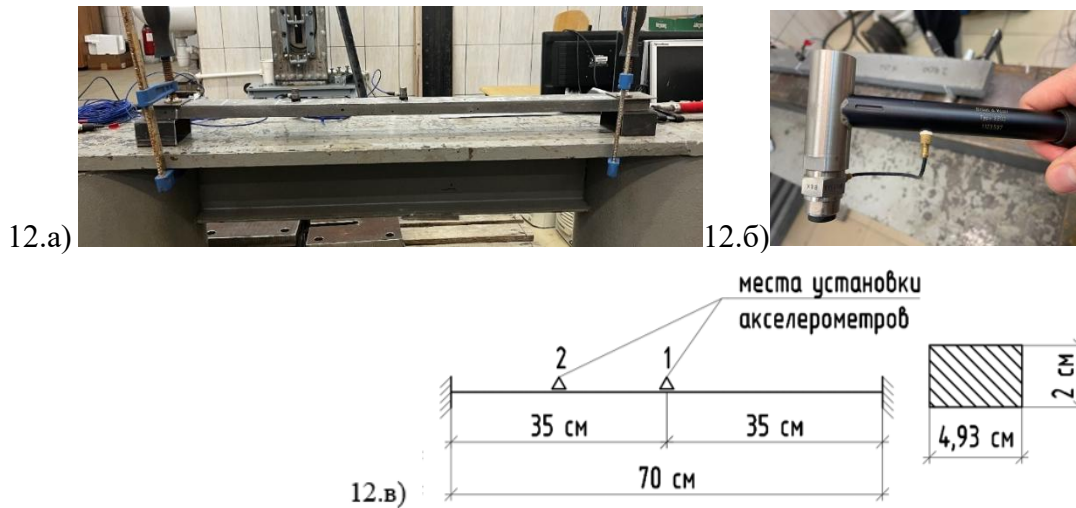


Рисунок 12 – Фотография экспериментальной установки (12.а), Фотография ударного молотка (12.б), Расчетная схема экспериментальной установки (12.в).

В качестве исходных данных для калибровки модели использовались акселерограммы полученные по результатам лабораторных экспериментов. На рисунке 13 представлена акселерограммы для балок из материала 1700К и 1900СФ соответственно.

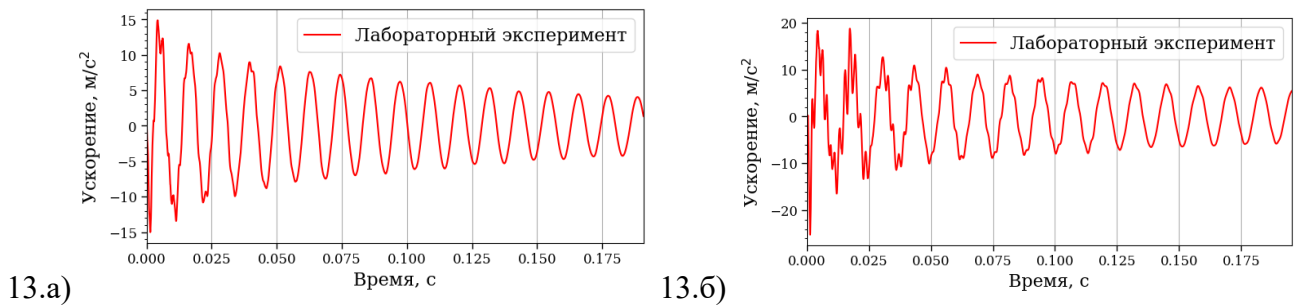


Рисунок 13 – Выборка из акселерограммы лабораторного эксперимента для жестко заземленных балок 1700К (13.а) и 1900СФ (13.б), при импульсном воздействии, приложенном в середине пролёта.

Расчетные характеристики материала балки, принятые для одномерного моделирования, приведены в таблице 4.

Таблица 4. Характеристики материала балки:

Характеристики материала балки:	1700К	1900СФ
Модуль Юнга E, ГПа	75,0	68,0
Плотность материала ρ , кг/м ³	1700	1900
Относительный коэффициент демпфирования γ	0,0765	0,044

На основании этих данных было проведено моделирование для определения масштабного параметра η . Изначально результаты эксперимента сравнивались с классической локальной моделью. На рисунке 14 приведено такое сравнение для балки из материала 1700К.

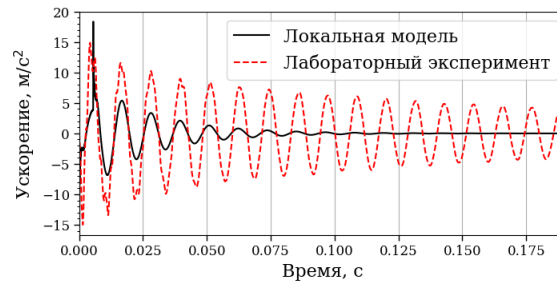
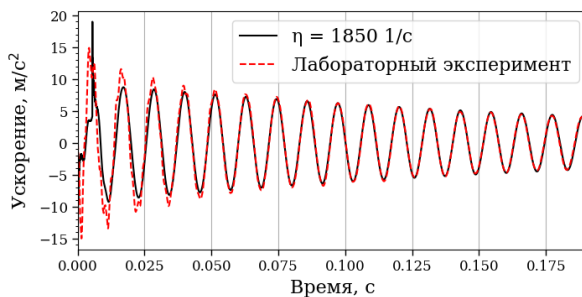
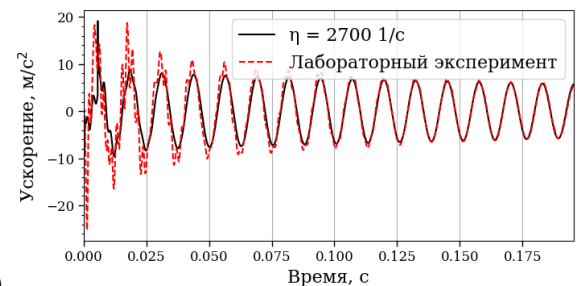


Рисунок 14 – Сравнение результатов лабораторного эксперимента 1700К с результатами, полученными с использованием одномерной модели, приближенной к классической локальной

Как видно на графике, классическая локальная модель не позволяет достоверно описать колебательный процесс балки из цементного композита. Далее представлены результаты, полученные с помощью откалиброванной нелокальной во времени модели динамического деформирования (Рисунок 15). Из рисунка 15 видно, что применение нелокального подхода позволило добиться значительно лучшего соответствия экспериментальным данным.



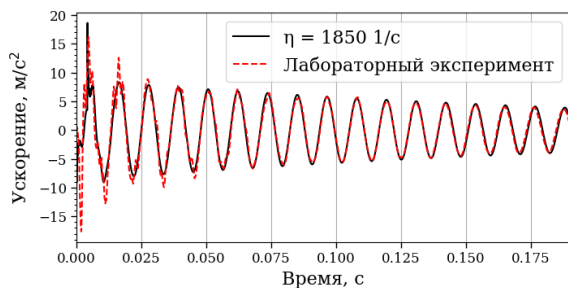
15.a)



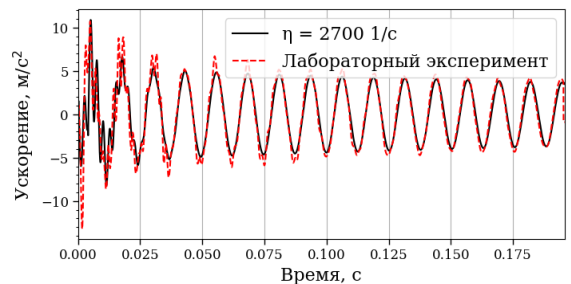
15.б)

Рисунок 15 – Сравнение результатов для балок 1700К (15.a) и 1900CF (15.б) с результатами откалиброванной нелокальной модели, при импульсном воздействии, приложенном в середине пролёта

Для оценки достоверности полученных значений масштабного параметра была проведена верификация по акселерограммам, полученным для тех же самых балок, но при импульсном воздействии в четверти пролета. В этом случае не проводилась калибровка, вместо этого было проведено моделирование с заранее установленными масштабными параметрами, полученными на предыдущем этапе. Результаты сопоставлялись с акселерограммой, полученной при импульсном воздействии в четверти пролёта, что позволило оценить устойчивость и физическую обоснованность найденного значения масштабного параметра.



16.a)



16.б)

Рисунок 16 – Сравнение результатов для балки 1700К (16.a) и 1900CF (16.б) с результатами откалиброванной нелокальной модели, при импульсном воздействии, приложенном в четверти пролёта.

Сравнение результатов, полученных с использованием нелокальной модели, с экспериментальными данными показало, что масштабный параметр сохраняется при изменении

условий нагружения. Это подтверждает вывод, сделанный ранее при отработке методики калибровки нелокальной модели по результатам численных экспериментов: масштабный параметр является параметром материала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Проведен анализ существующих моделей динамического поведения стержневых элементов и систем, выполненных из композитных материалов, и выявлено, что нелокальный подход позволяет создавать математические модели, позволяющие достоверно описывать поведение таких материалов.

2. Разработана нелокальная во времени модель динамического деформирования стержневых элементов и систем.

3. На основании результатов, полученных с использованием разработанной модели, показано, что она может служить менее ресурсоемкой альтернативой подробным трехмерным моделям при описании динамического поведения композитных материалов.

4. Выполнена интеграция разработанной модели в алгоритм метода конечных элементов, с целью обеспечения её применимости при решении прикладных задач.

5. Разработана методика определения масштабного параметра нелокальной во времени модели с использованием экспериментальных данных.

6. На результатах серии численных экспериментов отработана методика определения масштабного параметра нелокальной во времени модели, и, на основании полученных результатов, показано, что масштабный параметр является характеристикой материала.

7. Обоснована возможность применения разработанной модели для описания динамического поведения материалов, характеризующихся частотно независимым внутренним трением.

8. Показано, что в сравнении с локальной классической моделью разработанная в диссертации модель позволяет добиться лучшего совпадения с результатами лабораторных экспериментов.

9. Рекомендуется использовать данную модель в качестве альтернативы подробным трехмерным моделям при решении задач оптимального проектирования стержневых систем, выполненных из композитных материалов.

10. В качестве перспективы дальнейших исследований в этом направлении может быть рассмотрена комбинация модели, представленной в диссертации, с моделями, основанными на других типах нелокальности.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ:

а) в рецензируемых научных изданиях рекомендованных ВАК:

1) Sidorov, V. N. Dynamic Model of Beam Deformation with Consider Nonlocal in Time Elastic Properties of the Material / V. N. Sidorov, E. S. Badina, R. O. Tsarev // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2022. – Vol. 18, No. 4. – P. 124-131.

2) Sidorov, V. N. Calibration of the Nonlocal Dynamic Deformation Model of a Flexural Beam Based on Numerical Experiment Results / V. N. Sidorov, E. S. Badina, R. O. Tsarev // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2024. – Vol. 20, No. 2. – P. 132-140.

3) Sidorov, V. N. Nonlocal in time dynamic deformation model and its calibration based on the beam vibration experiment results/ V. N. Sidorov, E. S. Badina, R. O. Tsarev // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2025. – Vol. 21 No. 2. – P. 161-170.

б) свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ:

4) Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024669757 Российская Федерация. BeamNonLocalStiffnessFE.exe: № 2024669067: заявл. 13.08.2024: опубл. 21.08.2024 / В. Н. Сидоров, Е. С. Бадина, Р. О. Царев; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет".

в) в других изданиях:

5) Бадина, Е. С. Применение неявной схемы при конечно-элементном моделировании динамического поведения композитных балок с учетом нелокальных во времени свойств материала / Е. С. Бадина, Р. О. Царев // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред : Сборник трудов 12-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, Москва, 15–17 ноября 2022 года. – Москва: Общество с ограниченной ответственностью "Сам Полиграфист", 2022. – С. 32-37.

6) Царев, Р. О. Калибровка нелокальной модели динамического деформирования изгибаемой балки по результатам численного эксперимента / Р. О. Царев // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред : сборник трудов 13ой Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, Москва, 14–16 ноября 2023 года. – Москва: Общество с ограниченной ответственностью "Сам Полиграфист", 2023. – С. 143-148.

7) Царев, Р. О. Моделирование колебаний стержневых конструкций с применением нелокального подхода / Р. О. Царев // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред: Сборник трудов 14-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, Москва, 23–25 октября 2024 года. – Москва: ООО "Сам Полиграфист", 2024. – С. 151-158.