

На правах рукописи



Кириллова Ирина Васильевна

**АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ТОНКИХ
УПРУГИХ ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ**

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Саратов – 2025

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского».

Научный консультант: Ломакин Евгений Викторович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории пластичности механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, г. Москва

Официальные
оппоненты: Шитикова Марина Вячеславовна, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики НИУ МГСУ, г. Москва

Ерофеев Владимир Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, директор Института проблем машиностроения РАН - филиала Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук», г. Нижний Новгород

Федотенков Григорий Валерьевич, доктор физико-математических наук, профессор, доцент кафедры «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин» Московского авиационного института, г. Москва

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет», г. Санкт-Петербург

Защита диссертации состоится 18 февраля 2026 г. в 14-00 часов на заседании диссертационного совета 24.1.508.01 в Институте прикладной механики Российской Академии наук по адресу 125040, г. Москва, Ленинградский проспект, дом 7, стр. 1, в конференц-зале, кабинет 136.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ИПРИМ РАН и на сайте <http://iam.ras.ru/kirillovadiss/>

Автореферат разослан «___» _____ 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.508.01

Корнев Ю.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В различных отраслях современной техники (ракетно-космическая, авиастроение, судостроение, строительная техника и многое другое) находят широкое применение оболочечные конструкции. При этом в условиях функционирования таких конструкций в случае высоких и сверхвысоких скоростей перемещения в воздушной и водных средах, а также при ударных внешних воздействиях различного типа актуальными являются задачи расчёта нестационарного напряженно-деформированного состояния (НДС) тонких оболочек при ударных нагрузках. Задачи оптимального выбора формы, толщины, материала оболочечных конструкций предъявляют особые требования к анализу в них динамического НДС с учётом возникновения и распространения нестационарных волн.

Динамическая трёхмерная линейная теория упругости полностью описывает рассматриваемые процессы для случая малых деформаций. Однако сложность краевых задач этой теории для тонкостенных конструкций произвольной формы определяет известные трудности в описании качественных свойств нестационарных процессов, знание которых необходимо для постановки численных методов определения значений компонент НДС. Поэтому исследователи шли по пути разработки приближённых двумерных теорий; при этом применялись три основных метода: метод гипотез, метод степенных рядов и метод асимптотического интегрирования исходных трёхмерных уравнений теории упругости. Среди двумерных теорий самыми работающими теориями стали теория Кирхгофа-Лява и теория типа Тимошенко. Тем не менее ни одна из двумерных теорий не может полностью описать нестационарные волны в оболочках.

Так, теория Кирхгофа-Лява искажает скорость волны расширения, заменяя её скоростью двумерной волны растяжения-сжатия. При этом разрешающие уравнения этой теории перестают быть уравнениями гиперболического типа. Попытки вернуть гиперболический тип разрешающих уравнений двумерной теории привели к построению теории типа Тимошенко. К недостатку двумерной теории Кирхгофа-Лява по искажению скорости волны расширения здесь добавилась проблема появления ложного фронта волны сдвига. Эти принципиальные недостатки связаны с тем фактом, что двумерные теории воспринимают квазифронты, описываемые быстроизменяющимися составляющими НДС, как истинные фронты волн.

Если в статических задачах теории тонких оболочек применение двумерных теорий оправдано работой принципа Сен-Венана (когда трёхмерная теория должна применяться в случае торцевых воздействий только в малой, порядка толщины оболочки, окрестности торца), то в случае нестационарной динамики этот принцип работает гораздо сложнее. Впервые его свойства были описаны в работах В.В. Новожилова и Л.И. Слепяна и было доказано, что способ приложения ударной нагрузки на торец определяет НДС не только в его окрестности, но и в малых окрестностях передних фронтов волн.

Указанные выше свойства принципа Сен-Венана и свойства нестационарно-

го НДС в окрестностях квазифронтов (фронт волны растяжения-сжатия по двумерной теории Кирхгофа-Лява и ложный фронт волны сдвига по теории типа Тимошенко), определяющие быструю изменяемость НДС в узких зонах фронтов и квазифронтов, показывают его существенную неоднородность в различных участках фазовой плоскости. Следовательно, единую двумерную теорию, описывающую нестационарное НДС во всех участках фазовой плоскости построить не представляется возможным, поэтому необходимо разбить фазовую плоскость на участки с однородной изменяемостью решения и строить приближенные теории для каждого такого участка. Такой метод является разновидностью метода сращиваемых разложений, когда полнота выбора составляющих НДС определяется доказательством наличия областей согласования асимптотик решения в соседних областях фазовой плоскости.

Представленный метод сращиваемых разложений впервые был описан в монографии Л.Ю. Коссовича «Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек». Однако здесь и в последующей монографии Ю.Д. Каплунова, Л.Ю. Коссовича и Е.В. Нольде «Dynamics of thin walled elastic bodies» работа над построением полной асимптотической теории нестационарных процессов в тонких упругих оболочках была только начата. Необходимо расширить рассмотрение всех случаев НДС в соответствии с классификацией типов торцевого и лицевого ударных воздействий, построить асимптотически оптимальные уравнения всех видов погранслоёв, обосновать полноту построения рассматриваемых НДС представленными составляющими и осуществить построение асимптотических решений краевых задач для составляющих НДС оболочек вращения произвольного профиля.

Следует отметить, что универсальность рассматриваемых асимптотических методов позволяет обобщить их на сложные случаи тонкостенных конструкций и на разного вида неупругие материалы, изучаемые в настоящее время различными авторами. Так, волны Рэлея и Лява при отрицательном коэффициенте Пуассона рассматривались в работах Р.В. Гольдштейна, В.А. Городцова, Д.С. Лисовенко и др. Нестационарные волновые процессы в микроупругих, вязкоупругих, типа Коссера, композиционных, электромагнитоупругих конструкциях изучались в работах Ю.А. Россихина, М.В. Шитиковой, Д.В. Тарлаковского, Г.В. Федотенкова, В.И. Ерофеева и др. Новые асимптотические методы в динамике тонкостенных конструкций и волноводов представлены в работах П.Е. Товстика, С.М. Бауэр, Г.И. Михасёва, Ю.И. Димитриенко, А.Г. Горшкова и других авторов.

Степень разработанности темы исследования. Основы теории оболочек были заложены В.З. Власовым, А.Л. Гольденвейзером, А.И. Лурье и В.В. Новожиловым. При этом методы построения уравнений двумерной теории оболочек и пластин условно делятся на аналитические, энергетические и асимптотические.

В направлении разработки аналитических методов следует отметить работы Н.А. Кильчевского, И.Н. Векуа, В.В. Новожилова, Л.И. Слепяна, А.И. Лурье, В.З. Власова и др. При этом основными здесь являются метод степенных рядов и метод разложения по специальным функциям. В случае степенных рядов компо-

ненты НДС разлагаются в ряды по степеням нормальной координаты, а в качестве специальных функций используются различные полиномы (в частности, полиномы Лежандра).

Следует отметить попытки исправления недостатков двумерной теории Кирхгофа-Лява и её обобщений, связанных с гипотезой прямолинейной нормали. Так, С.П. Тимошенко отказался от этой гипотезы и вывел уравнения динамики балки, имеющие гиперболический тип. Для оболочек такое обобщение было выполнено затем Т. Лином, Г. Морганом, И. Мирским, Т. Германом, С.А. Амбарцумяном, Л.Я. Айнолой, И.Г. Терегуловым, И-Юань Юй, Д.В. Бабичем и др.

Возможность применения асимптотических методов при исследовании НДС в тонких оболочках основывается на специфике их геометрии – свойство малой толщины этих конструкций определяет, что уравнения трёхмерной теории упругости относятся к классу сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных по координатам срединной поверхности. Основной вклад в создание и развитие асимптотической теории оболочек был внесен А.Л. Гольденвейзером – введение понятия показателей изменяемости по пространственным координатам позволило построить для статических задач итерационные процессы, приводящие к двумерным теориям оболочек и теориям плоского и антиплоского погранслоя. Метод асимптотического интегрирования исходных трёхмерных уравнений теории упругости для вывода уравнений статической теории оболочек применялся также М. Джонсоном, Е. Рейснером, А. Грином, П. Нагди, С.А. Амбарцумяном и К.Ф. Черных. Следует отметить также формулирование А.Л. Гольденвейзером модифицированного принципа Сен-Венана и вывод условий затухания асимптотически главной части НДС. Применение асимптотических методов в динамических задачах теории оболочек было начато А.Л. Гольденвейзером, В.В. Болотиным, П.Е. Товстиком и В.Б. Лидским в направлении изучения колебаний.

Поскольку решения нестационарных теорий оболочек обладают неоднородной изменяемостью по координатам и времени, то асимптотический подход к этим задачам может быть рассмотрен с позиции расчленения НДС на составляющие с однородными значениями показателей изменяемости и динамичности в своих областях применения в фазовой плоскости. Впервые метод расчленения нестационарного НДС был рассмотрен в работах Н.А. Алумяэ, Л. Поверуса, У.К. Нигула, Н.Д. Векслера. При этом на основе сопоставления численных результатов, полученных методами конечных разностей, перевала, стационарной фазы, прифронтной асимптотики, был проведён анализ областей эффективной применимости теории типа Тимошенко и теории Кирхгофа-Лява в задачах для пластин и оболочек вращения.

Таким образом, была создана база, позволяющая системно подойти к построению новой приближённой теории распространения нестационарных волн в тонких оболочках. В работах Л.Ю. Коссовича была сформулирована модификация метода сращиваемых разложений, когда в различных участках фазовой плоскости асимптотическим методом строятся приближённые теории с учётом доказа-

тельности полноты решения путём выделения областей согласования соседних составляющих. Для воздействий продольного тангенциального и изгибающего типов (соответственно, LT и LM) в качестве составляющих НДС были выделены безмоментная и изгибная составляющие теории Кирхгофа-Лява, а также плоский и антиплоский динамические погранслои. Однако, неоднородность показателей изменяемости динамического погранслоя определила возможность и необходимость модернизации этой асимптотической теории. В работах Ю.Д. Каплунова, Л.Ю. Коссовича, Е.В. Нольде и И.В. Кирилловой построены асимптотические уравнения параболического погранслоя (в окрестности фронта двумерной волны растяжения по теории Кирхгофа-Лява) для произвольных оболочек вращения и асимптотические уравнения гиперболического погранслоя (в окрестности фронта волны расширения) для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны. Необходимо также отметить, что начало разработки асимптотических методов в случае ударных воздействий нормального типа NW было положено в работах Л.Ю. Коссовича, А.Н. Кушеккалиева, В.А. Ковалёва и О.В. Таранова: для пластин и цилиндрических оболочек рассмотрен погранслой в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея.

Цель и задачи исследования. Целью настоящей диссертации является развитие асимптотической теории нестационарного напряжённо-деформированного состояния в оболочках вращения произвольного профиля при ударных нагрузках. Для достижения цели работы решаются следующие задачи.

1. Применение метода сращиваемых разложений при исследовании НДС оболочек вращения произвольной формы с помощью составляющих с различными показателями изменяемости и динамичности при всех характерных типах ударных торцевых воздействий (продольного воздействия тангенциального типа, продольного воздействия изгибающего типа, нормального воздействия).
2. Вывод асимптотически оптимальных уравнений для составляющих нестационарного НДС: эллиптический погранслой при поверхностных и торцевых ударных воздействиях, гиперболические погранслои в окрестностях фронтов волн расширения и сдвига.
3. Доказательство полноты разработанной схемы расчленения нестационарного НДС путём определения асимптотик расположения в фазовой плоскости границ областей согласования соседних составляющих.
4. Разработка аналитических (асимптотических) методов решения краевых задач для эллиптического и гиперболического погранслоёв.

Схема расчленения нестационарного НДС на составляющие должна окончательно определить области применения классических двумерных теорий Кирхгофа-Лява и типа Тимошенко, реализовать моделирование работы принципа Сен-Венана для случая нестационарных ударных воздействий на тонкостенные конструкции.

Вывод асимптотически оптимальных уравнений для составляющих рассматриваемого нестационарного НДС должен основываться на особенностях его поведения в различных областях фазовой плоскости. Так, погранслои в окрестностях волновых фронтов и квазифронтов имеют достаточно большую изменчивость и локализованы в узких прифронтовых зонах, что должно приводить к построению вполне простых уравнений, описывающих поведение асимптотически главных напряжений, деформаций и перемещений, терпящих разрывы на фронтах и скачки на квазифронтах.

Полнота представления нестационарного НДС выделяемыми составляющими должна быть обеспечена наличием их областей согласования в фазовой плоскости. Расположение этих областей и совпадение с некоторой асимптотической погрешностью решений для соседних составляющих могут быть выявлены с помощью асимптотической оценки разрешающих уравнений.

Возможность разработки аналитических методов решения краевых задач для составляющих нестационарного НДС оболочек вращения произвольного профиля определяется двумя главными факторами. Первый фактор заключается в том, что аналитические точные решения рассматриваемых краевых задач могут быть построены с помощью интегральных преобразований (Лапласа по времени и Фурье по продольной координате) только для пластин и цилиндрических оболочек, когда разрешающие уравнения движения содержат постоянные коэффициенты. Согласно второму фактору, в рассматриваемом случае оболочек вращения радиусы кривизны имеют, как правило, меньшую изменчивость по сравнению с изменчивостью основных составляющих нестационарного НДС, что приводит к возможности использования при решении краевых задач различных асимптотических методов.

Научная новизна. Асимптотические методы, представленные в диссертации, позволили выстроить единую оптимальную систему приближённых теорий, описывающих в совокупности нестационарное НДС тонких оболочек на примере оболочек вращения произвольного профиля. Помимо известных теорий Кирхгофа-Лява и теории параболического погранслоя в окрестности квазифронта двумерной волны растяжения-сжатия применяются разработанные в диссертации теории эллиптического погранслоя при поверхностных и торцевых ударных воздействиях, а также гиперболических погранслоёв в окрестностях фронтов волн расширения и сдвига. Сформулированы асимптотические оценки областей применимости составляющих нестационарного НДС в фазовой плоскости. Доказано совпадение решений для этих составляющих в областях согласования. Разработаны асимптотические методы решения краевых задач для эллиптического и гиперболического погранслоёв с учётом асимптотического представления геометрии передних волновых фронтов. Получены новые асимптотические решения динамических задач для цилиндрических оболочек.

Теоретическая и практическая значимость работы. Универсальность разработанных асимптотических методов определяет возможность распространить их на широкие классы оболочек произвольной геометрии, оболочек из материалов

различного неупругого типа и оболочек, находящихся под действием нагрузок, сложно меняющихся по времени и координатам.

Разработанная эффективная аналитическая теория нестационарного НДС оболочек вращения применима для расчёта тонкостенных оболочечных конструкций в приборостроении, космической технике, авиастроении, судостроении, машиностроении и других отраслях промышленности при расчёте конструкций, работающих в условиях ударных и быстроизменяющихся во времени воздействий. Полученные при этом аналитические методы целесообразно использовать также для анализа НДС конструкций при его расчётах численными методами.

Методология и методы исследования. Диссертационное исследование посвящено изучению процесса распространения нестационарных волн в произвольных упругих оболочках вращения при ударных торцевых и поверхностных нагрузках и построению с этой целью асимптотической теории, включающей расчленение НДС в фазовой плоскости на составляющие с различными показателями изменчивости и динамичности, вывод асимптотически приближённых уравнений для составляющих, доказательство полноты представления НДС этими составляющими и разработку методов аналитического решения краевых задач.

Представленная асимптотическая теория нестационарного НДС тонких оболочек вращения базируется на двух основных положениях. Первое положение определяет инструмент для вывода асимптотически оптимальных уравнений – понятий показателей изменчивости НДС по пространственным координатам и динамичности по времени. Второе положение определяет использование варианта метода сращиваемых разложений, когда в фазовой плоскости выделяются области применимости составляющих НДС, а полнота представления НДС определяется существованием областей согласования. Вывод асимптотически оптимальных уравнений для составляющих осуществляется методом асимптотического интегрирования трёхмерных уравнений теории упругости, причём для погранслоёв они выводятся из трёхмерных уравнений в специальных координатах, введённых в окрестностях волновых фронтов и квазифронтов.

При решении краевых задач в случае безмоментной составляющей НДС применяется метод прифронтной асимптотики, так как изменчивость решения по продольной координате совпадает с изменчивостью геометрических параметров. Все остальные составляющие НДС являются быстроизменяющимися по продольной координате, что даёт возможность использовать при решении краевых задач асимптотический метод экспоненциальных представлений в пространстве интегрального преобразования Лапласа. Для обращения изображений в зависимости от краевой задачи используются разложения в ряд по модам колебаний, специальный метод прифронтной асимптотики (разложение по отрицательным степеням преобразования Лапласа), разложение по положительным степеням параметра преобразования и др.

Положения, выносимые на защиту.

1. Схемы расчленения нестационарного НДС тонких упругих оболочек вращения произвольного профиля при ударных торцевых воздействиях типов LT, LM, NW, использующие следующие составляющие: безмоментная и моментная по теории Кирхгофа-Лява, квазистатический погранслои типа Сен-Венана, симметричная и антисимметричная коротковолновые высокочастотные малоамплитудные, параболический погранслои (в окрестности фронта волны растяжения-сжатия по двумерной теории), эллиптический погранслои (в окрестности условного фронта волны Рэлея), а также симметричный и антисимметричный гиперболические погранслои в окрестностях фронтов волн расширения и сдвига.
2. Асимптотическая теория гиперболического погранслоя в малых окрестностях фронтов волн расширения и сдвига с учётом асимптотического моделирования их геометрии.
3. Асимптотическая теория эллиптического погранслоя в малой окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея при лицевых и торцевых ударных воздействиях с учётом затухания данного вида НДС при удалении от лицевых поверхностей.
4. Асимптотические методы решения краевых задач для основных составляющих нестационарного НДС.
5. Доказательство полноты представленных схем расчленения нестационарного НДС через асимптотическое совпадение соседних (в фазовой плоскости) составляющих в областях их согласования и определение асимптотических границ этих областей.

Степень достоверности результатов работы обеспечивается, прежде всего, правильно применяемыми методами асимптотического интегрирования исходных трёхмерных уравнений динамической теории упругости для получения асимптотически оптимальных уравнений составляющих НДС в различных областях фазовой плоскости в соответствии со значениями показателей изменяемости и динамичности. Доказательство корректности предложенных схем расчленения НДС в характерных случаях внешних воздействий реализуется путём выявления в фазовой плоскости областей согласования, где уравнения составляющих асимптотически совпадают. Разработанные асимптотические методы решения краевых задач основаны на их механических свойствах, базируются на точных решениях для цилиндрических оболочек, а численные расчёты на примере сферических оболочек показывают их эффективность.

Апробация работы. Основные результаты выполненных исследований доложены на российских и международных научных конференциях, съездах, школах и семинарах: XIX и XVIII Всероссийская школа «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (Ростов-на-Дону, 2025, 2024), Семинар кафедры математической теории упругости и биомеханики СГУ (Саратов, 2025),

Семинар по механике сплошной среды им. Л.А. Галина ИПМехРАН (Москва, 2025), X Поляховские чтения (Санкт-Петербург, 2024), Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2023, 2019), XIII, XII и XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Санкт-Петербург, 2023; Уфа, 2019; Казань, 2015), 5th International Conference on Topical Problems of Continuum Mechanics with a Special Session in Honor of Alexander Manzurov's 60th Birthday (Armenia, 2017), XVIII Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2016), Twelfth International Conference on Computational Structures Technology (Italy, 2014), Topical Problems in Theoretical and Applied Mechanics (India, 2013), VI сессия Научного совета РАН по механике (Барнаул, 2012), Ninth International Conference on Computational Structures Technology (Greece, 2008), Eleventh International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing (Malta, 2007).

Внедрение полученных научных результатов. Результаты диссертации внедрены в учебный процесс механико-математического факультета ФГБОУ ВО «СГУ имени Н.Г. Чернышевского», а также в практическую деятельность АО «Газприборавтоматикасервис», о чем имеются акты об использовании и внедрении.

Диссертация соответствует паспорту специальности 1.1.8. «Механика деформируемого твердого тела» по пунктам 2, 3, 8: п. 2 «Теория определяющих соотношений деформируемых тел с простой и сложной структурой» (физико-математические науки); п. 3 «Задачи теории упругости, теории пластичности, теории вязкоупругости» (физико-математические науки); п. 8 «Динамика деформируемого твёрдого тела. Теория волновых процессов в средах различной структуры» (физико-математические науки).

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа изложена на 283 страницах машинописного текста, содержит 28 рисунков, состоит из введения, 6 глав, заключения, списка основных обозначений, списка литературы, содержащего 241 источник.

Личный вклад автора. В диссертации изложены результаты исследований, полученные автором самостоятельно, а также в совместных работах. Работы [1 – 6, 15] выполнены без соавторов. Статьи [7 – 14] и главы монографий из серии Advanced Structured Materials [1–3], написаны в соавторстве. В статьях [7 – 10, 13] и в главах монографий [1 – 3] автору принадлежат формулирование целей исследований и постановок задач, проведение исследований, анализ и интерпретация полученных результатов, разработка концепции и дизайна статей, подготовка статей к публикации, соавтору принадлежит разработка методологии исследования, а также участие в анализе, верификации и интерпретации полученных результатов. В статье [11] автору принадлежит формулировка целей исследования и задач, разработка концепции и дизайна статей, подготовка статьи к публикации. В ста-

тье [12] автору принадлежит формулирование исследовательских целей, анализ и интерпретация полученных результатов. В статье [14] автору принадлежит выполнение асимптотического анализа.

Кириллова И.В. принимала непосредственное участие в написании научных статей и подготовке текстов и презентаций докладов на научных конференциях.

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано 15 работ в научных изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора наук, и 3 главы в зарубежных монографиях (Scopus).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования, рассмотрена степень её разработанности, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, методология и методы исследования, представлены положения, выносимые на защиту, апробация результатов и информация о структуре работы.

Глава 1 посвящена общей постановке задач, рассматриваемых в диссертации. Представлена теоретическая база для работы над асимптотической теорией нестационарного напряженно-деформированного состояния (НДС) в тонкостенных конструкциях на примере тонких оболочек вращения произвольного профиля. Описываются постановки краевых задач по трёхмерной теории упругости, приводящих к трём принципиально разным видам нестационарного НДС в различных участках фазовой плоскости с выделением областей применимости различных приближённых теорий. Приведены асимптотически оптимальные уравнения безмоментной и моментной составляющих теории Кирхгофа-Лява, уравнения параболического погранслоя и коротковолновой высокочастотной составляющей.

Рассмотрены характерные виды нестационарного НДС при трёх главных типах торцевых нагрузок LT, LM, NW по классификации У.К. Нигула. Проанализировано соответствие рассматриваемых схем применения разработанного вида асимптотического метода сращиваемых разложений принципу Сен-Венана в случае переходных волновых процессов в динамике тонкостенных конструкций.

Исследования проведены на базе трёхмерной теории упругости с криволинейными координатами (α, θ, z) , где α – длина дуги вдоль образующей, θ – угол в окружном направлении, z – координата внешней нормали к срединной поверхности. Запишем уравнения движения и закона Гука для осесимметричного НДС:

$$\begin{aligned}
& H_2 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \alpha} + H_1 H_2 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + \frac{B' H_1}{B} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \\
& + \left(2 \frac{H_2}{R_1} - \frac{H_1}{R_2} \right) \sigma_{13} - \rho H_1 H_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0, \\
& H_2 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \alpha} + H_1 H_2 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} - \frac{H_2}{R_1} \sigma_{11} - \frac{H_1}{R_2} \sigma_{22} + \\
& + \left(\frac{H_1}{R_2} + \frac{H_2}{R_1} \right) \sigma_{33} - \frac{B' H_1}{B} \sigma_{13} - \rho H_1 H_2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{1 + \nu} \left[\frac{k_2}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \left(\frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{B'}{H_2 B} v_1 \right) + \left(\frac{k_2}{H_1 R_1} + \frac{k_1}{H_2 R_2} \right) v_3 \right], \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{1 + \nu} \left[k_1 \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) + k_2 \frac{B'}{H_2 B} v_1 + \left(\frac{k_1}{H_1 R_1} + \frac{k_2}{H_2 R_2} \right) v_3 \right], \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{1 + \nu} \left[k_1 \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{B'}{H_2 B} v_1 \right) + k_2 \frac{\partial v_3}{\partial z} + k_1 \left(\frac{1}{H_1 R_1} + \frac{1}{H_2 R_2} \right) v_3 \right], \\
\sigma_{13} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} - \frac{1}{H_1 R_1} v_1 \right), \quad \sigma_{23} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \frac{\partial v_2}{\partial z},
\end{aligned} \tag{2}$$

где σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) – напряжения; v_i – перемещения; t – время; $H_i = 1 + z/R_i$ – приведенные коэффициенты Ламе; R_i ($i = 1, 2$) – главные радиусы кривизны срединной поверхности; $B(\alpha)$ – расстояние от точки срединной поверхности до оси вращения; ρ , E и ν – плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки; $k_1 = \nu/(1 - 2\nu)$, $k_2 = (1 - \nu)/(1 - 2\nu)$.

В **Главе 2** выводятся асимптотически оптимальные уравнения гиперболических погранслоёв для общего случая оболочек вращения с учётом изменяющейся в процессе распространения волн геометрической формы волновых фронтов, когда они, в отличие от случая оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны, уже не формируются нормальными к срединной поверхности. Рассматриваются оболочки вращения малой изменяемости, когда производные от их геометрических параметров в масштабе характерных значений радиусов кривизны и сами геометрические параметры асимптотически соизмеримы в рамках оценки через малый параметр относительной толщины оболочки. При ударе на торец $\alpha = 0$ волновое поле можно представить в виде наложения элементарной волны, возбуждённой непосредственно торцом, и элементарных волн, отражённых от лицевых поверхностей. При выходе переднего фронта волны расширения за предел области, соизмеримой с толщиной оболочки, в его формировании по всей длине будут участвовать все типы элементарных волн, порождённых как торцевой, так и лицевыми поверхностями, определяя сложную поверхность, зависящую от кривизны оболочки. При

этом образующая передней фронтальной поверхности (представляемая отрезком линии пересечения этой фронтальной поверхности с перпендикулярной ей плоскостью, проходящей через ось срединной поверхности вращения) расположена в области оболочки протяженностью по образующей срединной поверхности порядка её толщины.

Асимптотическая оценка формы образующей переднего фронта волны расширения показала, что с асимптотической погрешностью порядка относительной толщины оболочки ε ($\varepsilon = h/R$, где h – полутолщина, R – характерное значение радиусов кривизны) фронт линейно определяется через поперечную координату по формуле:

$$\alpha = \alpha_0 \left[1 - \frac{z}{\alpha} F(\alpha) + O(\varepsilon^2) \right], \quad \alpha_0 = c_1 t, \quad F(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{R_1}. \quad (3)$$

Уравнение для фронта волны сдвига строится аналогично и также имеет вид (3). Координата фронта на образующей срединной поверхности определяется уже скоростью волны сдвига: $\alpha_0 = c_2 t$.

Для вывода асимптотически оптимальных уравнений гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения введём новые координаты α_F , z_F :

$$\alpha_F = \alpha, \quad z_F = z \sqrt{1 + F^2(\alpha)}, \quad (4)$$

которые должны заменить в уравнениях гиперболического погранслоя нормальную координату z . В этом случае при $\alpha = c_1 t$ координата z_F отсчитывается вдоль новой координатной линии, совпадающей с передним фронтом волны. Далее вводятся переменные, характеризующие большую изменчивость НДС в малой, порядка $O(\varepsilon^2)$, окрестности фронта волны расширения (3):

$$x = \frac{1}{\varepsilon^2}(\tau_0 - \xi_{F0}), \quad \tau_0 = c_1 t/R, \quad \xi_{F0} = \alpha_F/R. \quad (5)$$

Введение переменных (5) позволило явно выделить области применимости разрабатываемых асимптотически оптимальных уравнений гиперболического погранслоя, представленных на рисунке 1. Здесь для сравнения изображены искомые области применимости для цилиндрической оболочки (а) и оболочки вращения (б).



Рисунок 1 — Схемы областей применимости гиперболического погранслоя в цилиндрической оболочке (а) и оболочке вращения (б)

Особенностью построения асимптотически оптимальных уравнений погранслоёв, в отличие от построения статических и динамических уравнений теории Кирхгофа-Лява, является асимптотическое интегрирование в прифронтных координатах, к которым и относятся переменные (5). Также должны быть определены асимптотические величины компонент напряжений и деформаций, которые для рассматриваемого вида погранслоя имеют вид:

$$v_1 = R\varepsilon v_1^*, \quad v_3 = R\varepsilon^2 v_3^*, \quad \sigma_{11} = E\varepsilon^{-1} \sigma_{11}^*, \quad \sigma_{33} = E\varepsilon^{-1} \sigma_{33}^*, \quad \sigma_{13} = E\sigma_{13}^*, \quad (6)$$

где величины со звёздочками обладают одним и тем же асимптотическим порядком. Переходя в трёхмерных уравнениях теории упругости от переменных (4) к прифронтным переменным (5) и учитывая асимптотические величины компонент (6), получаем с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ замкнутую систему относительно асимптотически главных компонент рассматриваемого вида нестационарного НДС, которая в исходной размерной форме принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha_F^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{2z_F F}{R_1(1 + F^2)} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha_F \partial z_F} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_F} &= 0, \\ \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1 + \nu)\varkappa^2} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_F}, \quad \sigma_{33} = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_F}, \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{1 + \nu} \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_1}{\partial z_F}, \quad \varkappa = c_2/c_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку полученные разрешающие уравнения движения свелись к одному уравнению второго порядка, то граничные условия записываются только для асимптотически главных компонент как на торце, так и на лицевых поверхностях. Отметим также, что при возвращении в уравнении (7) к исходным координатам α, z приходим к следующему разрешающему уравнению:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} = 0, \quad (8)$$

которое описывает гиперболический погранслои в окрестности $O(\varepsilon)$, внутри которой он и содержится с толщиной порядка $O(\varepsilon^2)$.

При воздействии типа NW главный разрыв напряжений переносится фронтом волны сдвига, а рассуждения относительно фронта волны расширения легко обобщаются на рассматриваемый случай. При этом искомый фронт волны сдвига также определяется уравнением (3), где $\alpha_0 = c_2 t$. Асимптотика компонент рассматриваемого погранслоя задаётся теперь следующим образом:

$$v_1 = R\varepsilon^2 v_1^*, \quad v_3 = R\varepsilon v_3^*, \quad \sigma_{11} = E\sigma_{11}^*, \quad \sigma_{33} = E\sigma_{33}^*, \quad \sigma_{13} = E\varepsilon^{-1} \sigma_{13}^*, \quad (9)$$

а замкнутая система относительно асимптотически главных компонент перемещений и напряжений записывается в виде:

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha_F^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \frac{2z_F F}{R_1(1 + F^2)} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha_F \partial z_F} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_F} = 0, \quad (10)$$

$$\sigma_{13} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_F}, \quad \sigma_{11} = \frac{E}{(1 + \nu)} \frac{\partial v_3}{\partial z_F}, \quad \sigma_{33} = \frac{E}{1 + \nu} \frac{\partial v_3}{\partial z_F}.$$

Переход в (10) к исходным координатам (α, z) , как и в случае волны расширения, даёт следующее разрешающее уравнение:

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} = 0, \quad (11)$$

в области $O(\varepsilon)$, содержащей узкую прифронтную зону размером $O(\varepsilon^2)$ в окрестности $\alpha_F = c_2 t$.

Механический смысл гиперболического погранслоя определяется работой принципа Сен-Венана в динамике нестационарных конструкций: способ приложения нагрузки на торец влияет на компоненты НДС не только в его малой окрестности, но и переносится фронтами волн расширения и сдвига в их малых окрестностях.

В **Главе 3** представлена картина построения волнового НДС оболочек вращения при ударных торцевых продольных воздействиях тангенциального типа.

Полная схема расчленения нестационарного НДС изображена на рисунке 2. Используется безмоментная составляющая по теории Кирхгофа-Лява (область \mathcal{R}_4), наложение безмоментной составляющей и квазистатического погранслоя типа Сен-Венана (область \mathcal{R}_5), параболический погранслои в окрестности квазифронта – фронта двумерной волны растяжения-сжатия по теории Кирхгофа-Лява, распространяющегося со скоростью c_3 (область \mathcal{R}_3), симметричная коротковолновая высокочастотная малоамплитудная составляющая (область \mathcal{R}_2) и симметричный гиперболический погранслои в окрестности фронта волны расширения (область \mathcal{R}_1). Полнота представленной схемы расчленения доказывается наличием областей согласования $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$.

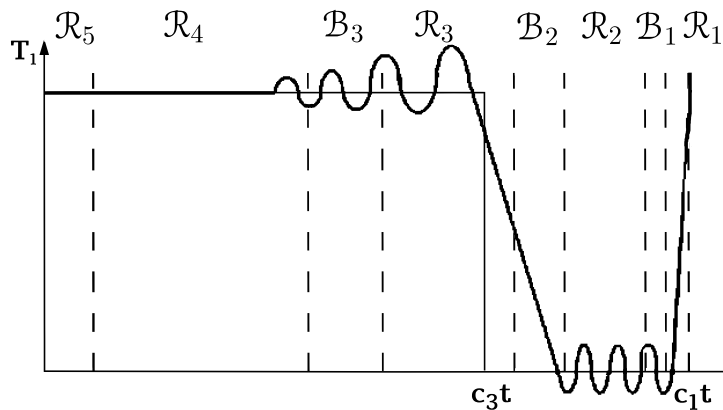


Рисунок 2 — Схема решения для продольного усилия T_1

Разработаны асимптотические методы решения для основных составляющих НДС. В рассматриваемом случае осесимметричной задачи решение для безмоментной составляющей найдено с помощью простейшего метода прифронтной асимптотики в виде разложения в ряды по степеням расстояния от текущей точки до фронта волны, коэффициенты которых определяются с помощью рекуррентных соотношений. Явный вид первых приближений для продольного усилия T_1 имеет вид:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} T_{1,n}(\xi_0)(\tau_0 - \xi_0)^{n-1} H(\tau_0 - \xi_0), \quad T_{1,1} = I \sqrt{\frac{B_0}{B}}, \\
T_{1,2} &= -\frac{I}{2\sqrt{B}} \left[A_1 - (1 - 2\nu) \sqrt{B_0} \frac{B'}{B} + \int_0^{\xi_0} R_8 d\xi_0 \right], \quad \xi_0 = \frac{\alpha}{R}, \quad \tau_0 = \frac{c_3 t}{R}, \\
A_1 &= (1 - 2\nu) \frac{B'(0)}{\sqrt{B_0}}, \quad B_0 = B(0), \quad B'_0 = B'(0), \\
R_8 &= \frac{1}{2B} \left(\sqrt{\frac{B_0}{B}} B' \right)' + (R_4^2 - R_3) \sqrt{\frac{B_0}{B}}, \\
R_3 &= \nu \left(\frac{B'}{B} \right)' - (1 - \nu) \left(\frac{B'}{B} \right)^2, \quad R_4 = \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Решение для гиперболического погранслоя строится на базе точного решения в случае симметричного по нормальной координате погранслоя для цилиндрической оболочки, полученного методом двукратного интегрального преобразования Лапласа по времени и Фурье по продольной координате. В общем случае оболочек вращения используется метод разложения изображения решения в пространстве преобразования Лапласа по времени по модам колебаний, экспоненциального представления для мод колебаний и специального вида разложения изображений по отрицательным степеням параметра преобразования. В результате решение представляется разложением в ряд по функциям Бесселя, а выражение для напряжения σ_{11} имеет следующую форму:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{2I}{\pi} \sqrt{\frac{B_0}{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \left[(n - 1/2) \pi \zeta_F / \sqrt{1 + F^2} \right]}{n - 1/2} \times \\
&\times J_0 \left[\sqrt{2} (n - 1/2) \pi \sqrt{\xi(\tau - \xi)} \right] H(\tau - \xi_F), \\
\xi_F &= \alpha_F / h, \quad \tau = c_1 t / R, \quad \zeta_F = z_F / h.
\end{aligned} \tag{13}$$

Решение для параболического погранслоя построено с помощью метода экспоненциальных представлений в пространстве преобразования Лапласа по времени и разложения изображения в ряд по положительным степеням параметра преобра-

зования. Оригинал решения выражается через интеграл от функции Эйри $Ai(x)$:

$$T_1 = I \sqrt{\frac{B_0}{B}} \left[\frac{1}{3} + \int_0^y Ai(x) dx \right], \quad y = \left[\frac{2(1-\nu)^2}{\nu^2 \varepsilon^2 \xi_0} \right]^{\frac{1}{3}} (\tau_0 - \xi_0), \quad (14)$$

где x – переменная интегрирования.

Подробно рассмотрен вопрос о полноте описания рассматриваемого НДС указанными асимптотически приближенными теориями. Определены границы всех областей согласования \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_2 , \mathcal{B}_3 и доказано асимптотическое совпадение уравнений соседних составляющих в этих областях. Асимптотические оценки границ областей согласования задаются следующим образом. Область согласования параболического погранслоя и двумерной тангенциальной составляющей \mathcal{B}_3 : $\varepsilon^{2/3} \ll \tau_0 - \xi_0 \ll 1$, область согласования параболического погранслоя и симметричного коротковолнового высокочастотного приближения \mathcal{B}_2 : $\xi_0 - \tau_0 = O(\varepsilon^{2/3})$, область согласования симметричного гиперболического погранслоя и симметричного коротковолнового высокочастотного приближения \mathcal{B}_1 : $c_1 \tau_0 / c_3 - \xi_{F0} = O(\varepsilon^2)$, $\zeta_F \leq \sqrt{1 + F^2(\xi_{F0})}$, $\xi_{F0} = \alpha_F / R$.

Разработанные асимптотические методы решения краевых задач для основных составляющих нестационарного НДС оболочек вращения иллюстрируются на примере сферической оболочки при значении малого параметра $\varepsilon = 0.05$ и величине угла между осью оболочки и нормалью торцевого сечения $\theta_T = 0.2$. На рисунке 3 представлен график суммарного значения продольного усилия в момент времени $\tau_0 = 2$ в окрестности фронта двумерной волны. Видно, как решение для параболического погранслоя (сплошная жирная линия) сглаживает разрыв двумерного безмоментного решения (штрихованная линия) и как осциллирует, затухая, вокруг двумерной составляющей. Поведение фронта волны расширения и зона применимости гиперболического погранслоя проиллюстрированы на рисунке 4.

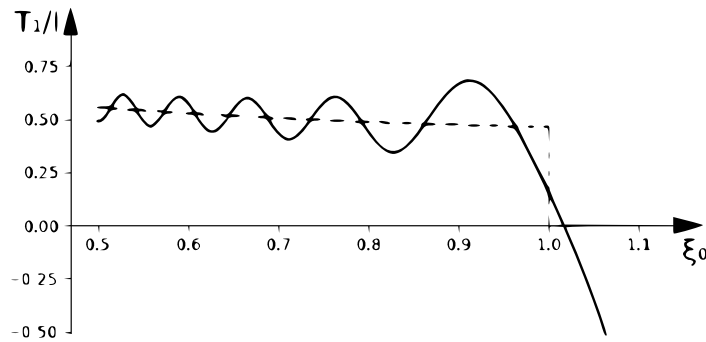


Рисунок 3 — График продольного усилия T_1 в момент времени $\tau_0 = 2$ в окрестности квазифронта

График расчёта продольного усилия в узкой окрестности переднего фронта для момента времени $\tau_0 = 2$ изображён на рисунке 5.

В **Главе 4** рассматривается волновое НДС оболочек вращения при ударных торцевых продольных воздействиях изгибающего типа. Схема расчленения нестационарного НДС изображена на рисунке 6. Используется двумерная моментная

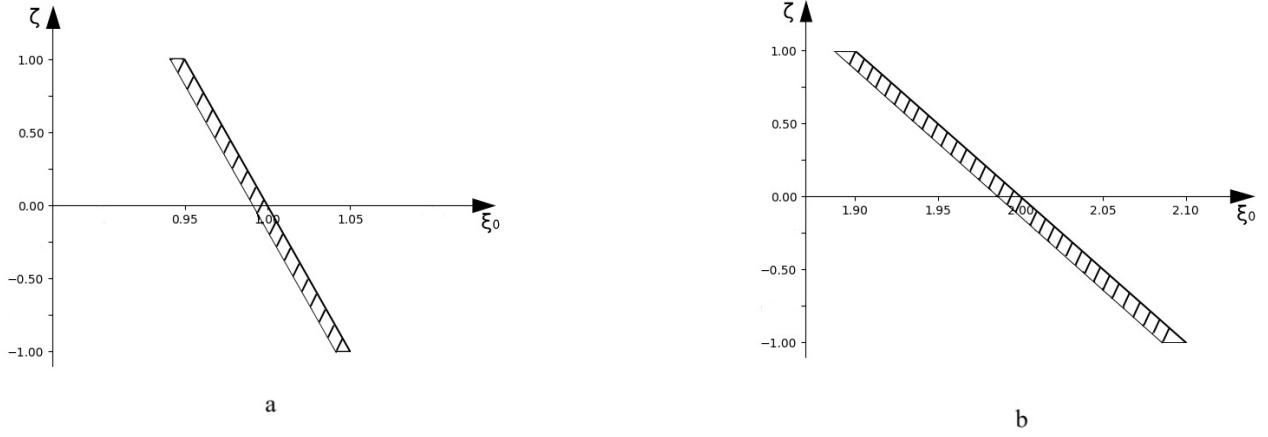


Рисунок 4 — Схемы расположения областей действия гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения для моментов времени $\tau_0 = 1$ (а) и $\tau_0 = 2$ (б)

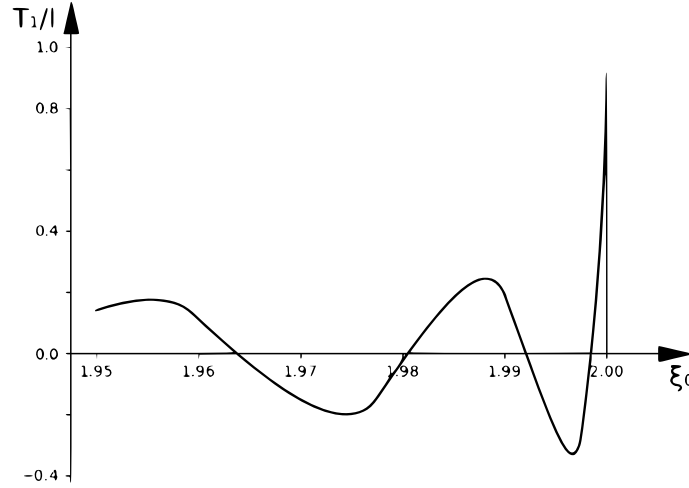


Рисунок 5 — График продольного усилия T_1 в окрестности фронта волны расширения в момент времени $\tau_0 = 2$

(изгибная) составляющая по теории Кирхгофа-Лява (область \mathcal{R}_3), наложение моментной составляющей и квазистатического погранслоя типа Сен-Венана (область \mathcal{R}_4), антисимметричная коротковолновая высокочастотная малоамплитудная составляющая (область \mathcal{R}_2) и гиперболический антисимметричный погранслои в окрестности фронта волны расширения (область \mathcal{R}_1). Полнота представленной схемы расчленения доказывается наличием областей согласования $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$.

Как и в случае торцевого воздействия типа LT, в рассматриваемом случае разработаны асимптотические методы решения для всех основных составляющих НДС. Решение для изгибной составляющей по теории Кирхгофа-Лява строится с помощью метода экспоненциальных представлений в пространстве интегрального преобразования Лапласа по временной переменной. Обращение изображений проводится с помощью специального вида разложений по отрицательным степеням параметра преобразования, а оригиналы решений представляются в виде разло-

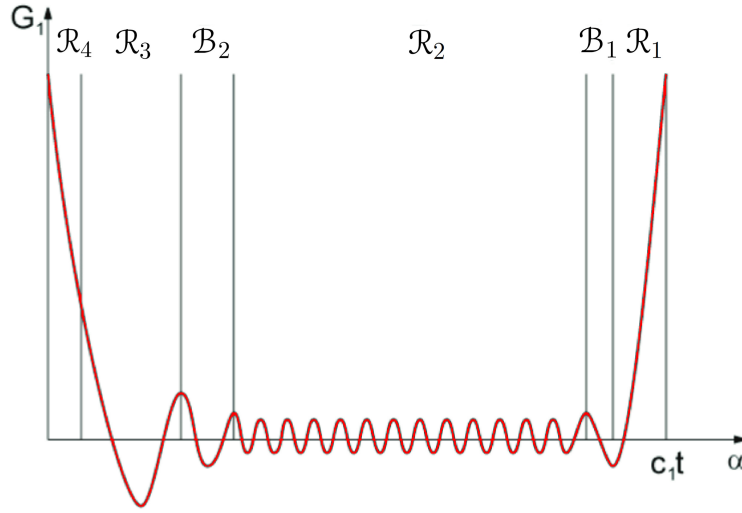


Рисунок 6 — Схема решения для изгибающего момента G_1

жений по известным функциям $D_{m,c}$ и $D_{m,s}$, для которых имеются рекуррентные соотношения, причём эти функции с младшими номерами определяются через интегралы Френеля. В начальном приближении выражение для изгибающего момента G_1 имеет вид:

$$G_1 = I \sqrt{\frac{B_0}{B}} \left[1 - C\left(\frac{\sqrt{3}\xi_0^2}{2\varepsilon\tau_0}\right) - S\left(\frac{\sqrt{3}\xi_0^2}{2\varepsilon\tau_0}\right) \right], \quad \xi_0 = \alpha/R, \quad \tau_0 = c_3 t/R, \quad (15)$$

где $C(y^2)$ и $S(y^2)$ – интегралы Френеля.

Решение для гиперболического погранслоя строится на базе точного решения в случае уже антисимметричного по нормальной координате погранслоя для цилиндрической оболочки, полученного тем же, что и в случае воздействия ЛТ, методом двукратного интегрального преобразования. При этом методика асимптотического решения в случае оболочек вращения произвольного профиля полностью повторяет алгоритмы решения краевой задачи для разрешающего уравнения (7) в случае ЛТ воздействия. Так, выражение для нормального напряжения σ_{11} имеет следующий вид:

$$\sigma_{11} = \frac{2I}{\pi} \sqrt{\frac{B_0}{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin \left[n\pi \zeta_F / \sqrt{1+F^2} \right]}{n} J_0 \left(\sqrt{2} n \pi \sqrt{\xi_F(\tau - \xi_F)} \right) \times \quad (16)$$

$$\times H(\tau - \xi_F), \quad \xi_F = \alpha_F/h, \quad \tau = c_1 t/R, \quad \zeta_F = z_F/h.$$

Как и в предыдущем случае торцевого воздействия, полнота представления нестационарного НДС рассматриваемыми составляющими доказана наличием областей согласования и определением их границ. Область согласования изгибной составляющей теории Кирхгофа-Лява и антисимметричного коротковолнового высокочастотного приближения (область B_2) задаётся следующим асимптотическим неравенством: $\varepsilon^{1/2} \ll \xi_0 \ll 1$. Область согласования антисимметричного гиперболиче-

ского погранслоя и антисимметричного коротковолнового высокочастотного приближения \mathcal{B}_1 совпадает с областью согласования соответствующих симметричных составляющих при воздействии ЛТ.

На рисунках 7, 8 представлены графики изгибающего момента в сферической оболочке в случае ЛМ воздействия при тех же геометрических и механических параметрах, что и в примере из Главы 3, для моментов времени $\tau_0 = 1$ и $\tau_0 = 2$.

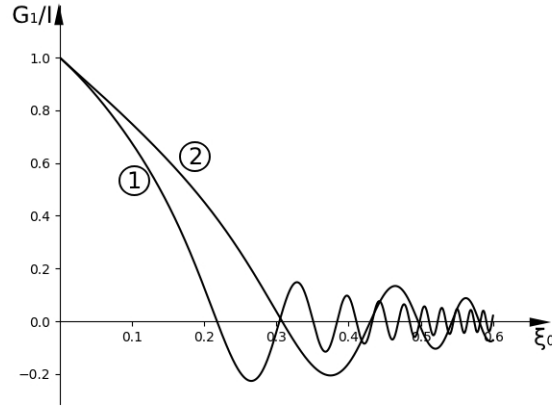


Рисунок 7 — Графики изгибающего момента G_1 в моменты времени $\tau_0 = 1$ (график 1) и $\tau_0 = 2$ (график 2)

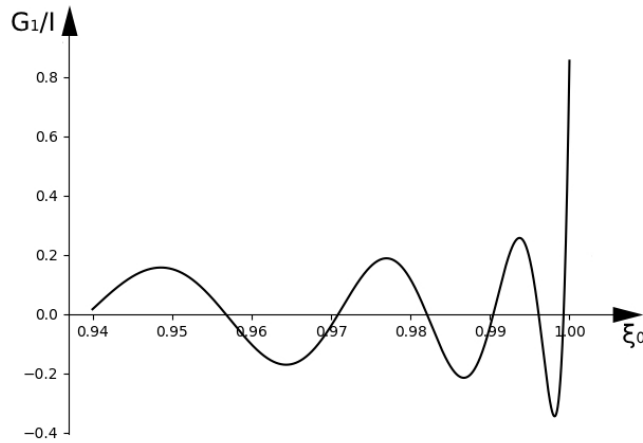


Рисунок 8 — График изгибающего момента G_1/I в окрестности фронта волны расширения в момент времени $\tau_0 = 1$

Глава 5 посвящена выводу асимптотически оптимальных уравнений эллиптического погранслоя в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея при ударных торцевых и поверхностных воздействиях нормального типа. Поскольку рассмотрение вопроса о выводе уравнений искомого погранслоя основывается на базовой работе Ю.Д. Каплунова и Л.Ю. Коссовича о дальнем поле

волны Рэлея для прямолинейной полуплоскости, опубликованной в ДАН в 2004 году, то сначала строятся асимптотически оптимальные уравнения для эллиптического погранслоя в случае полуплоскости с криволинейной границей. Затем рассматриваются оболочки вращения произвольного профиля при действии нормальной ударной нагрузки на лицевые поверхности. В пространстве переменных $\xi = \alpha/h$, $\tau = c_1 t/h$, $\zeta = z/h$ применяется символический метод Лурье с операторами $\partial_\xi = \partial/\partial\xi$, $\partial_\tau = \partial/\partial\tau$ и решаются обыкновенные дифференциальные уравнения при условии, что операторы ∂_ξ , ∂_τ рассматриваются как некие постоянные. При этом для перемещений в следующей операторной форме:

$$v_1 = e^{\lambda\zeta} D, \quad v_3 = e^{\lambda\zeta} F, \quad (17)$$

где λ, D, F – некоторые операторы, получаем относительно D, F систему алгебраических уравнений, решая которые находим выражения для показателя степени λ и связь между коэффициентами F и D . Уравнения для этих коэффициентов получаем из граничных условий. Далее вводится новый малый параметр $\eta = 1/T$, $\tau = O(T)$, $T \gg 1$ и масштабированные переменные y, τ_* :

$$y = \frac{\xi - \varkappa_R \tau}{\eta}, \quad \tau_* = \eta \tau, \quad \varkappa_R = c_R/c_2, \quad (18)$$

где c_R – скорость условного фронта поверхностной волны Рэлея, позволяющие построить прифронтовую асимптотику в дальнем поле волны Рэлея. Далее вводятся в рассмотрение новые операторы $\partial_y = \partial/\partial y$, $\partial_{\tau_*} = \partial/\partial\tau_*$, после перехода к которым проводится разложение по малому параметру η . Также вводятся аналоги объёмного и сдвигового потенциалов Ламе φ и ψ , разделяемые на две части: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\psi = \psi_1 + \psi_2$. Индексами «1» и «2» здесь обозначены те части потенциалов, которые задают положительное и отрицательное по ζ распространение возмущений. Вид операторных представлений потенциальных функций показывает, что они описываются следующими эллиптическими уравнениями при условии учёта только первичных волн, инициируемых лицевыми поверхностями:

$$\begin{aligned} a^2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} &= 0, \quad i = 1, 2, \quad a = \sqrt{1 - \varkappa^2 \varkappa_R^2}, \quad \varkappa = c_2/c_1, \\ b^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} &= 0, \quad i = 1, 2, \quad b = \sqrt{1 - \varkappa^2} \end{aligned} \quad (19)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \varkappa_R^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \tau^2} + k_c \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} &= \frac{(1 + \nu)h}{E} \frac{\varkappa_R B_\omega}{b} P, \quad i = 1, 2; \quad z = \pm h, \\ \left(a + \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a} \right) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha^2} - \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a} \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} + \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} + \\ + \left(g + \frac{\varkappa_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \alpha^2} - \frac{\varkappa_R^2}{2} \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} &= 0, \quad i = 1, 2; \quad z = \pm h, \end{aligned} \quad (20)$$

где постоянные g, k_c, B_ω определяются выражениями:

$$g = 1 - \mathfrak{x}_R^2/2, \quad k_c = 2 + \mathfrak{x}_R B_\omega, \quad B_\omega = 2 \left(\frac{\mathfrak{x}_R}{1 - \mathfrak{x}_R^2} + \frac{\mathfrak{x}_R^2}{1 - \mathfrak{x}_R^2} - \frac{2\mathfrak{x}_R}{1 - \mathfrak{x}_R^2/2} \right), \quad (21)$$

а $P(\alpha, t)$ – нормальное ударное воздействие на поверхности $z = \pm h$. Выражения для перемещений и напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} v_1 &= h \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} + b \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} \right), \quad v_3 = h \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} + \frac{1}{b} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right), \\ \sigma_{33} &= -\frac{Eh}{(1+\nu)} \sum_{i=1}^2 \left[\left(g + \frac{\mathfrak{x}_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha^2} - \frac{\mathfrak{x}_R^2}{2} \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \left(b + \frac{\mathfrak{x}_R^2}{2b} \right) \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \alpha^2} - \frac{\mathfrak{x}_R^2}{2b} \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} + \left(b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} \right], \\ \sigma_{13} &= \frac{Eh}{(1+\nu)} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha \partial z} + \frac{g}{b} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \alpha \partial z} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Система уравнений (19) – (22) работает при условии быстрого затухания компонент эллиптического погранслоя при удалении от лицевых поверхностей. Расчёты для конкретных задач, проведённые в следующей главе, подтверждают такое свойство компонент НДС. В представленной работе построены также асимптотически оптимальные уравнения, уточняющие представленную систему за счёт учёта волн, отражённых при падении первичных волн на противоположные лицевые поверхности.

В случае торцевого ударного воздействия задача для полубесконечной оболочки сводится к эквивалентной задаче для бесконечной оболочки путём выделения частного решения исходных уравнений, удовлетворяющего только торцевым граничным условиям и имеющего вид:

$$\begin{aligned} v_1^{(0)} &= 0, \quad v_3^{(0)} = -I \left[\sqrt{\frac{B_0}{B}} (\tau_0 - \xi_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \Phi_n(\xi_0) (\tau_0 - \xi_0)^n \right] H(\tau_0 - \xi_0), \\ \sigma_{13}^{(0)} &= I \left[\sqrt{\frac{B_0}{B}} + \sum_{n=2}^{\infty} (n\Phi_n - \Phi'_{n-1}) (\tau_0 - \xi_0)^{n-1} \right] H(\tau_0 - \xi_0), \\ \sigma_{11}^{(0)} &= \sigma_{33}^{(0)} = 0, \quad \Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{B}}, \quad \Phi_n = \frac{1}{2n\sqrt{B}} \int_0^{\xi_0} \frac{1}{\sqrt{B}} \frac{d}{d\xi_0} \left(\frac{1}{B} \frac{d\Phi_{n-1}}{d\xi_0} \right) d\xi_0, \\ \xi_0 &= \alpha/R, \quad \tau_0 = c_2 t/R. \end{aligned} \quad (23)$$

Представим решение нашей задачи в виде суммы НДС = НДС⁽⁰⁾ + НДС⁽¹⁾, где составляющая с верхним индексом «0» определяется выражением (23), а для

составляющей с верхним индексом «1» должны быть поставлены следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \xi_0} &= 0, \quad v_1^{(1)} = 0, \quad \xi_0 = 0, \\ \sigma_{13}^{(1)} &= -I \left[\sqrt{\frac{B_0}{B}} + \sum_{n=2}^{\infty} (n\Phi_n - \Phi'_{n-1})(\tau_0 - \xi_0)^{n-1} \right] H(\tau_0 - \xi_0), \\ \sigma_{33}^{(1)} &= 0, \quad \zeta = \pm 1. \end{aligned} \quad (24)$$

Рассматривается сначала оболочка вращения с плоской торцевой поверхностью (рисунок 9). Тогда бесконечная оболочка вращения, состоящая из двух таких состыкованных полубесконечных оболочек, обеспечивает выполнение торцевых граничных условий (24) и имеет НДС, соответствующее исходной оболочке. Задачу определения эллиптического погранслоя для неё назовём эквивалентной.

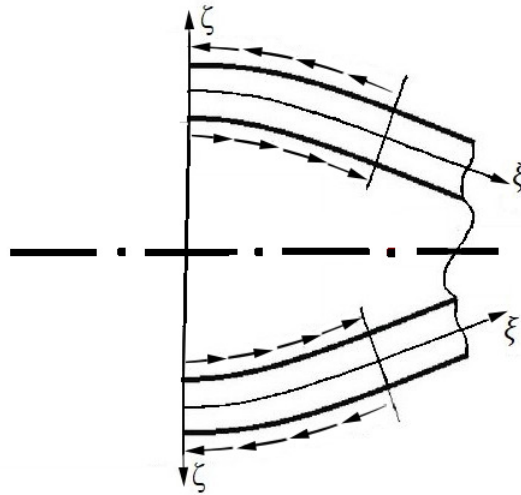


Рисунок 9 — Схема нагружения на лицевые поверхности полубесконечной оболочки в эквивалентной задаче

Вывод асимптотически оптимальных уравнений эллиптического погранслоя в эквивалентной задаче производится по тем же алгоритмам, что и ранее в случае нормального воздействия на лицевые поверхности: используются символический метод Лурье, переход к фронтовым координатам (18) и решение дифференциальных уравнений относительно потенциальных функций φ_i^\pm , ψ_i^\pm в областях $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$ с учётом асимптотических разложений по малому параметру η . В итоге для этих функций, задаваемых уравнениями (19), граничные условия и выражения для перемещений и напряжений запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \Psi_1^\pm}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \Psi_1^\pm}{\partial t^2} + \frac{k_c}{\mathfrak{x}_R^2} \frac{B'}{B} \frac{\partial \Psi_1^\pm}{\partial \alpha} = \frac{B_\omega}{g \mathfrak{x}_R} \frac{\partial S}{\partial \alpha}, \quad z = -h, \\
& \frac{\partial^2 \Psi_2^\pm}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \Psi_2^\pm}{\partial t^2} + \frac{k_c}{\mathfrak{x}_R^2} \frac{B'}{B} \frac{\partial \Psi_2^\pm}{\partial \alpha} = -\frac{B_\omega}{g \mathfrak{x}_R} \frac{\partial S}{\partial \alpha}, \quad z = h, \\
& \left(g + \frac{\mathfrak{x}_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_i^\pm}{\partial \alpha^2} - \frac{\mathfrak{x}_R^2}{2c_R^2} \frac{\partial^2 \varphi_i^\pm}{\partial t^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_i^\pm}{\partial \alpha} + \left(b + \frac{\mathfrak{x}_R^2}{2b} \right) \frac{\partial^2 \psi_i^\pm}{\partial \alpha^2} - \\
& - \frac{\mathfrak{x}_R^2}{2bc_R^2} \frac{\partial^2 \psi_i^\pm}{\partial t^2} + \left(b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_i^\pm}{\partial \alpha} = 0, \quad i = 1, 2, \quad z = \mp h, \\
& \Psi_i^\pm = \pm h \frac{\partial \psi_i^\pm}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= h \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \varphi_i^\pm}{\partial \alpha} + b \frac{\partial \psi_i^\pm}{\partial \alpha} \right), \quad v_3 = h \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \varphi_i^\pm}{\partial z} + \frac{1}{b} \frac{\partial \psi_i^\pm}{\partial z} \right), \\
\sigma_{33} &= -\frac{Eh}{1+\nu} \sum_{i=1}^2 \left(g \frac{\partial^2 \varphi_i^\pm}{\partial \alpha^2} + b \frac{\partial^2 \psi_i^\pm}{\partial \alpha^2} \right), \\
\sigma_{13} &= \frac{Eh}{1+\nu} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi_i^\pm}{\partial \alpha \partial z} \pm \frac{\mathfrak{x}_R^2 \mathfrak{x}_R^2}{a^2 c_R} \frac{\partial^2 \varphi_i^\pm}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2a^2} \frac{B'}{B} \frac{\partial^2 \varphi_i^\pm}{\partial z} + \right. \\
& \left. + \frac{g + \mathfrak{x}_R^2}{b} \frac{\partial^2 \psi_i^\pm}{\partial \alpha \partial z} \pm \frac{\mathfrak{x}_R^2}{bc_R} \frac{\partial^2 \psi_i^\pm}{\partial z \partial t} + \frac{1}{b} \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_i^\pm}{\partial z} \right).
\end{aligned} \tag{26}$$

Выражение для напряжения σ_{13} в (26) неудобно для использования интегрального преобразования Фурье в случае оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны, поэтому в работе построено его новое представление. Подобно предшествующему случаю нормального воздействия на лицевые поверхности, проведено также уточнение полученной системы уравнений с учётом отражённых первичных волн.

Рассмотренная эквивалентная задача для выделенного класса оболочек вращения позволяет сделать выводы о том, что в каждой полубесконечной части бесконечной оболочки эллиптический погранслои движется в соответствии с направлением движения поверхностной волновой нагрузки и полностью ею определяется. Построенная асимптотическая модель последовательно обобщает схему решения, разработанную для случая поверхностной ударной нагрузки – как в направлении построения асимптотически оптимальных разрешающих уравнений, так и в направлении разработки методики их решения.

В общем же случае оболочек вращения с неплоской торцевой поверхностью разрешающие уравнения (25), (26) сохраняют свою силу для эквивалентной задачи

о распространении эллиптического погранслоя и в полубесконечной оболочке.

В **Главе 6** рассматривается нестационарное НДС оболочек вращения произвольного профиля при торцевых и поверхностных ударных воздействиях нормального типа. Схема расчленения НДС при ударных торцевых воздействиях изображена на рисунке 10. Используются двумерная составляющая по теории Кирхгофа-Лява (область \mathcal{R}_4), наложение изгибной составляющей и квазистатического погранслоя типа Сен-Венана (область \mathcal{R}_5), антисимметричная коротковолновая высокочастотная составляющая (область \mathcal{R}_1), эллиптический погранслой в окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея (область \mathcal{R}_3) и антисимметричный гиперболический погранслой в окрестности фронта волны сдвига (область \mathcal{R}_2). Полнота рассматриваемой схемы расчленения доказывается наличием областей согласования $\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1$.

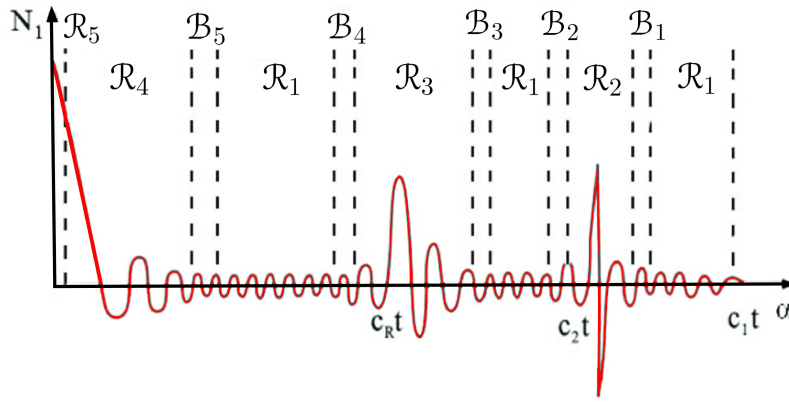


Рисунок 10 — Схема решения для перерезывающей силы N_1 в оболочке вращения при торцевой ударной нагрузке

Разработаны асимптотические методы решения для всех основных составляющих рассматриваемого типа НДС. Алгоритм решения для изгибной составляющей полностью совпадает с соответствующим алгоритмом, изложенным для случая ЛМ нагружения. В начальном приближении выражение для перерезывающей силы имеет вид:

$$N_1 = I \sqrt{\frac{B_0}{B}} \left[1 - 2C \left(\frac{\sqrt{3}\xi_0^2}{2\varepsilon\tau_0} \right) \right], \quad \xi_0 = \alpha/R, \quad \tau_0 = c_3 t/R. \quad (27)$$

Методы решения краевых задач для эллиптического погранслоя при поверхностном ударном воздействии отработаны на примере волны, инициируемой лицевой поверхностью $z = -h$ и определяемой потенциалами φ_1, ψ_1 при следующем виде ударного воздействия P :

$$P = \begin{cases} pH(\tau_0), & |\xi_0| \leq l, \\ 0, & |\xi_0| > l, \end{cases} \quad (28)$$

где p — амплитуда нагрузки, l — ширина кольца нагрузки на поверхности.

В случае гиперболического погранслоя решение общей задачи строится, как и ранее, на базе точного решения для искомого погранслоя в цилиндрической оболочке, полученного методом двукратного интегрального преобразования Лапласа по времени и Фурье по продольной координате. В общем случае оболочек вращения сначала строится асимптотическое решение для граничных значений потенциальных функций: используется интегральное преобразование Лапласа по времени и метод экспоненциальных представлений в пространстве изображений. При этом найдено соотношение, определяющее связь с соответствующим решением для цилиндрической оболочки. Доказано, что аналогичная связь может быть установлена для всех компонент НДС в основной области. Тогда решение для напряжения σ_{33} при действии нормальной нагрузки (28) записывается в следующем виде:

$$\sigma_{33} = p \frac{B_\omega}{2\pi \mathfrak{a}_R} \left[\frac{B(l_0)}{B(\xi_0)} \right]^{k_r} \left[-\operatorname{arctg} \left(\frac{2la(1+\zeta)}{a^2(1+\zeta)^2 - l_*^2 + (\xi - \mathfrak{a}_R \tau)^2} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \left(\frac{2lb(1+\zeta)}{b^2(1+\zeta)^2 - l^2 + (\xi - \mathfrak{a}_R \tau)^2} \right) \right], \quad (29)$$

$$\xi = \alpha/h, \quad \zeta = z/h, \quad \tau = c_2 t/h, \quad l_* = l/h, \quad l_0 = l/R.$$

Асимптотический анализ решения (29) показывает, что вне малых окрестностей условного фронта волны Рэлея его порядок уменьшается пропорционально малому параметру ε .

В случае задачи об эллиптическом погранслое в полубесконечной оболочке сначала, как и при выводе разрешающих уравнений, рассматривается случай плоского торцевого сечения. Решение краевой эквивалентной задачи для бесконечной оболочки проводится выше описанными методами. Окончательное выражение для касательного напряжения σ_{13} имеет вид:

$$\sigma_{13} = I \frac{B_\omega}{\pi \mathfrak{a}_R b^2} \left[\frac{B_0}{B(\xi_0)} \right]^{k_r} \left[-\operatorname{arctg} \left(\frac{2a\xi(1+\zeta)}{a^2(1+\zeta)^2 - \xi^2 + \mathfrak{a}_R^2 \tau^2} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \left(\frac{2b\xi(1+\zeta)}{b^2(1+\zeta)^2 - \xi^2 + \mathfrak{a}_R^2 \tau^2} \right) \right], \quad (30)$$

$$\xi = \alpha/h, \quad \zeta = z/h, \quad \tau = c_2 t/h.$$

Поскольку полученное решение (30) определяется, в асимптотически главном, ударной поверхностной нагрузкой из решения для частной задачи, то оно справедливо также и в общем случае оболочек вращения с неплоским торцевым сечением. Численные расчёты, проведённые для решений (29), (30) на примере сферической оболочки, подтвердили основные положения разработанной асимптотики.

Анализ существования и расположения областей согласования подтвердил полноту представления данного вида НДС рассмотренными составляющими. Область согласования изгибной составляющей теории Кирхгофа-Лява и антисимметричного коротковолнового высокочастотного приближения (область \mathcal{B}_5) совпадает с

областью согласования аналогичных составляющих при воздействии LM. Области согласования эллиптического погранслоя с антисимметричным коротковолновым высокочастотным приближением (области \mathcal{B}_4 и \mathcal{B}_3) задаются асимптотической оценкой $|\xi_0 - \varkappa_R \tau_0| = O(\varepsilon \eta)$. Области согласования антисимметричного гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны сдвига и антисимметричного коротковолнового высокочастотного приближения (области \mathcal{B}_2 и \mathcal{B}_1) задаются асимптотическими оценками $|\tau_0 - \xi_0| = O(\varepsilon^2)$, $|\zeta_F| \leq \sqrt{1 + F^2(\xi_{F0})}$, $\xi_{F0} = \alpha_F/R$.

В этой главе приводится также решение для антисимметричного гиперболического погранслоя, имеющего место при данном виде нагружения в окрестности фронта волны сдвига, и описываемого разрешающими уравнениями (10). Разработана методика решения краевой задачи для этого погранслоя аналогично случаю воздействия типа LM.

В заключении представленной диссертационной работы описана асимптотическая теория нестационарных волновых процессов в тонких оболочках вращения произвольного профиля. Основные результаты исследований заключаются в следующем:

1. Асимптотический метод сращиваемых разложений с различными значениями показателей изменяемости по координатам и показателя динамичности позволил свести решение краевой задачи трёхмерной теории упругости, определяющей нестационарное НДС в оболочках вращения, к системе краевых задач, описывающих следующие составляющие:
 - безмоментную и моментную составляющие теории Кирхгофа-Лява, удовлетворяющие, соответственно, тангенциальной и нетангенциальной части граничных условий в двумерной форме; при этом безмоментная составляющая описывает распространение двумерных волн растяжения-сжатия и сдвига;
 - малоамплитудную симметричную и антисимметричную по нормальной координате коротковолновую высокочастотную составляющую, являющуюся асимптотическим обобщением плоской задачи теории упругости для полосы;
 - эллиптический погранслоем, определяющий при лицевых и торцевых ударных воздействиях НДС оболочки в малой окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея, обладающий свойством быстрого затухания с удалением от каждой лицевой поверхности; название этот погранслоем получил в соответствии с эллиптическим типом разрешающей системы уравнений относительно потенциальных функций при описании поведения НДС в теле оболочки, тогда как граничные условия на лицевых поверхностях задаются относительно потенциальных функций гиперболическими уравнениями;
 - параболический погранслоем, определяющий НДС оболочки в малой окрестности квазифронта, являющегося с точки зрения двумерной теории фрон-

том волны растяжения-сжатия;

- симметричный и антисимметричный по нормальной координате гиперболический погранслои, определяющий НДС оболочки в малых окрестностях фронтов волн расширения и сдвига, представляемых, по новой асимптотической модели, повернутыми нормальными к срединной поверхности; название этот погранслои получил в соответствии с видом разрешающего уравнения гиперболического типа второго порядка относительно продольного перемещения (окрестность фронта волны расширения) и нормального перемещения (окрестность фронта волны сдвига).

2. Методом асимптотического интегрирования исходных точных трёхмерных уравнений линейной теории упругости построены при различных соотношениях показателей изменяемости напряжённо-деформированного состояния по пространственным координатам и показателя динамичности асимптотически оптимальные уравнения двумерных составляющих теории Кирхгофа-Лява, гиперболического и эллиптического погранслоёв (в дополнение к известным уравнениям параболического погранслоя и коротковолновой высокочастотной составляющей).

3. В дополнение к известным методам решения краевых задач для двумерных составляющих и параболического погранслоя построены асимптотические методы решения краевых задач для погранслоёв:

- решения для эллиптического погранслоя в случае ударного воздействия на лицевые поверхности и для эквивалентной задачи в случае ударного торцевого воздействия построены на базе точных решений для цилиндрической оболочки, полученных с помощью двукратных преобразований Лапласа и Фурье, и основаны на следующем подходе: методом экспоненциального представления в пространстве преобразования Лапласа ищется сначала решение для граничных значений потенциальных функций на лицевых поверхностях, а затем строится в теле оболочки решение системы разрешающих уравнений эллиптического типа;
- решения для всех типов гиперболических погранслоёв построены методом разложения по модам колебаний на базе соответствующих решений для цилиндрической оболочки при условии построения мод методом экспоненциального представления в пространстве преобразования Лапласа по времени; обращение изображений проводится специальной формой метода прифронтной асимптотики, когда разложения изображений в ряды по обратным степеням параметра преобразования приводят к разложениям по функциям Бесселя, быстро сходящимся в рассматриваемой области; построенная общая методика позволяет получать решения в малых окрестностях фронтов волн расширения и сдвига.

4. Выполнено доказательство полноты представления нестационарного НДС оболочек вращения при всех трёх типах ударных воздействий (продольного, тангенциального типа (LT); продольного, изгибающего типа (LM); нормального типа (NW)) путём выявления областей согласования соседних составляющих в фазовой плоскости. Найдены асимптотические оценки границ всех областей согласования составляющих при всех типах ударных воздействий. Доказано совпадение в областях согласования асимптотик уравнений соседних составляющих.
5. Проведённые исследования полностью определили области применимости двумерных теорий Кирхгофа-Лява и типа Тимошенко.
6. Численные расчёты составляющих нестационарного НДС на примере сферической оболочки для всех типов воздействий показали высокую эффективность разработанных аналитических методов решения краевых задач.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в рецензируемых журналах

1. Кириллова, И.В. Асимптотический метод в задачах об эллиптическом погранслое в оболочках вращения при ударных воздействиях нормального типа / И.В. Кириллова // Изв. РАН. МТТ. – 2025. – № 1. – С. 158-169. – DOI: 10.31857/S102635192-5010085
2. Кириллова, И.В. Асимптотическая теория нестационарных упругих волн в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях изгибающего типа / И.В. Кириллова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2025. – Т. 25, № 1. – С. 80-90. – DOI: 10.18500/1816-9791-2025-25-1-80-90 1
3. Kirillova, I.V. Asymptotic model of non-stationary processes in shells of revolution under the action of end impact loads of bending type / I. V. Kirillova // Mechanics of Solids. – 2024. – Vol. 59, N. 7. – pp. 3756–3768. – DOI: 10.1134/S0025654424606591
4. Кириллова, И.В. Эллиптический погранслой в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа / И.В. Кириллова // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2024. – № 5. – С. 48-59. – DOI: 10.31857/S1026351924050045 (Версия: Kirillova I.V. Elliptic boundary layer in shells of revolution under surface shock loading of normal type // Mechanics of Solids. – 2024. – Vol. 59, N 5. – pp. 2686-2693. – DOI: 10.1134/S0025654424604397)
5. Кириллова, И.В. Гиперболический погранслой в окрестности фронта волны сдвига в оболочках вращения / И.В. Кириллова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, № 3. – С. 394-401. – DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-3-394-401

6. Кириллова, И.В. Асимптотическая теория гиперболического погранслоя в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях тангенциального типа / И.В. Кириллова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, № 2. – С. 222-230. – DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230
7. Кириллова, И.В. Асимптотическая теория волновых процессов в оболочках вращения при ударных поверхностных и торцевых нормальных воздействиях / И.В. Кириллова, Л.Ю. Коссович // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2022. – № 2. – С. 35-49. – DOI: 10.31857/S057232992202012X (Версия: Kirillova I.V., Kossovich L.Y. Asymptotic theory of wave processes in shells of revolution under surface impact and normal end actions // Mechanics of Solids. – 2022. – Vol. 57, N 2. – pp. 232-243. – DOI: 10.3103/S0025654422020078)
8. Кириллова, И.В. Асимптотические методы исследования эллиптического погранслоя в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях нормального типа / И.В. Кириллова, Л.Ю. Коссович // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – № 5. – С. 131-137. – DOI: 10.31857/S0572329920050104 (Версия: Kirillova I.V., Kossovich L.Y. Asymptotic methods for studying an elliptical boundary layer in shells of revolution under normal type shock end impacts // Mechanics of Solids. – 2020. – Vol. 55, N 5. – pp. 710-715. – DOI: 10.3103/S0025654420050106)
9. Кириллова, И.В. Уточненные уравнения эллиптического погранслоя в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа / И.В. Кириллова, Л.Ю. Коссович // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2017. – Т. 4, № 1. – С. 113-120. – DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.113 (Версия: Kirillova I.V., Kossovich L.Y. Refined equations of elliptic boundary layer in shells of revolution under normal shock surface loading // Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics. – 2017. – V. 50, N 1. – С. 68-73. – DOI: 10.3103/S1063454117010058)
10. Кириллова, И.В. Эллиптический погранслои в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа / И.В. Кириллова, Л.Ю. Коссович // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2016. – Т. 3, № 1. – С. 139-146. – eLIBRARY ID: 26087045. – EDN: VYWLAV
11. Коссович, Л.Ю. Разложение решения задач теории упругости для полосы в ряд по модам / Л.Ю. Коссович, В.А. Юрко, И.В. Кириллова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т. 11, № 2. – С. 83-96. – DOI: 10.18500/1816-9791-2011-11-2-83-96
12. Вельмисова, А.И. Распространение и отражение гармонических волн в плоском акустическом слое с кусочно-неоднородными гибкими стенками / А.И. Вельмисова, М.В. Вильде, И.В. Кириллова // Известия Саратовского университета.

Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т. 11, № 4. – С. 68-73. – DOI: 10.18500/1816-9791-2011-11-4-68-73

13. Кириллова, И.В. Гиперболические погранслои в составных цилиндрических оболочках / И.В. Кириллова, Л.Ю. Коссович // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2009. – № 3. – С. 89-101. – eLIBRARY ID: – 12328108 EDN: KJUELZ (Версия: Kirillova I.V., Kossovich L.Y. Hyperbolic boundary layers in compound cylindrical shells // Mechanics of Solids. – 2009. Vol. 44, N 3. – pp. 409-420. – DOI: 10.3103/S0025654409030108)

14. Каплунов, Ю.Д. Дисперсия волн в плоском акустическом слое с гибкими упругими стенками / Ю.Д. Каплунов, И.В. Кириллова, Ю.А. Постнова // Акустический журнал. – 2004. – Т. 50, № 6. – С. 802-806. – eLIBRARY ID: 17349666 – EDN: OPRFWL (Версия: Kaplunov Yu.D., Kirillova I.V., Postnova Yu.A. Dispersion of waves in a plane acoustic layer with flexible elastic walls // Acoustical Physics. – 2004. – Vol. 50, N 6. – pp. 694-698. – DOI: 10.1134/1.1825100)

15. Кириллова, И.В. Области применимости погранслоев в окрестностях фронтов волн в оболочках вращения нулевой гауссовой кривизны / И.В. Кириллова // Известия Академии наук. Механика твердого тела. – 2003. – № 6. – С. 117-126. – eLIBRARY ID: 17268796. – EDN: ONXFOP. (Версия: I.V. Kirillova Applicability regions of wave front boundary layers in shells of revolution of zero Gaussian curvature // Mech. Solids. 2003. – 38 (6). pp. 95-101)

Главы в монографиях

1. Kirillova, I.V. An asymptotic model for the nonstationary waves in the shells of revolution initiated by the LT type edge shock loading / I.V. Kirillova, L.Y. Kossovich // Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. Book series: Advanced Structured Materials. Springer Nature Switzerland AG. – 2025. – Vol. 223. – pp. 315-342. – DOI:10.1007/978-3-031-90022-8-22

2. Kirillova, I.V. Analysis of solutions for elliptic boundary layer in cylindrical shells at edge shock loading / I.V. Kirillova, L.Y. Kossovich // Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures. Book series: Advanced Structured Materials. Springer Nature Switzerland AG. – 2022. – Vol. 151. – pp. 131-140. – DOI:10.1007/978-3-030-87185-7-11

3. Kirillova, I.V. Elliptic boundary layer in shells of revolution under normal edge shock loading / I.V. Kirillova, L.Y. Kossovich // Strength, Durability, and Dynamics. Multiscale solid mechanics. Book series: Advanced Structured Materials. Springer Nature Switzerland AG. – 2021. – Vol. 141. – pp. 249-260. – DOI: 10.1007/978-3-030-54928-2