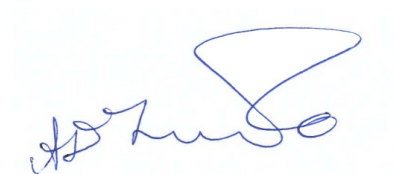


Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
«ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»
(ИПРИМ РАН)

На правах рукописи

УДК 539.3



Устенко Анастасия Дмитриевна

**ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ
КЛАССОВ МЕХАНИЧЕСКИХ МЕТАМАТЕРИАЛОВ С СЕТЧАТОЙ
СТРУКТУРОЙ**

1.1.8 Механика деформируемого твёрдого тела

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м.н. Соляев Ю.О.

Москва, 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. Ауксетика с эффектом микро-дилатации.....	13
1.1. Теория упругости с учётом микро-дилатации	16
1.2. Эффективные свойства материала с микро-дилатацией	18
1.3. Структура метаматериала-ауксетика	19
1.4. Эффективные характеристики метаматериала	20
1.5. Геометрическая интерпретация микро-дилатации внутри ячейки периодичности.....	23
1.6. Эффективные упругие характеристики метаматериала-ауксетика при неоднородных деформациях.....	24
1.7. Алгоритм идентификации параметров микро-дилатационной теории упругости	26
1.8. Результаты моделирования.....	28
1.9. Выводы	36
2. Балки с сетчатой структурой	39
2.1. Геометрия балок с сетчатой структурой.....	40
2.2. Численное моделирование.....	41
2.3. Идентификация параметров градиентной теории упругости для балок с сетчатой структурой..	43
2.4. Градиентные балочные теории.....	44
2.5. Описание размерных эффектов в задачах деформации сетчатых балок и идентификация масштабных параметров градиентной балочной теории	48
2.6. Выводы	51
3. Трёхслойные балки с заполнителями из нелокальных метаматериалов	52
3.1. Материал, геометрия и изготовление	53
3.2. Варианты связей заполнителя	54
3.3. Экспериментальные испытания	56
3.4. Численное моделирование удара	57
3.5. Результаты статических испытаний.....	60
3.6. Результаты динамических испытаний	64
3.7. Выводы	72
4. Сетчатые метаматериалы с асимметрией ячеек периодичности	74
4.1. Метод смещения связей	76
4.2. Выбор геометрии ячеек периодичности	78
4.3. Изготовление.....	80
4.4. Оценка относительной плотности.....	83
4.5. Методы экспериментальных исследований	84
4.6. Методы численного моделирования экспериментов	86
4.7. Результаты испытаний	87
4.8. Анализ изменения удельных характеристик метаматериала.....	94
4.9. Результаты численного моделирования	96
4.10. Выводы	99
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	100
Список литературы.....	102

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы и степень её разработанности. Практически, всё что все что встречается в природе (горные породы, ткани и костные структуры, древесина) и искусственно созданные материалы (металлы, композиционные материалы, пластики, метаматериалы) имеют специфическую сложную внутреннюю структуру, которая, ко всему прочему, изменяется в процессе деформирования и при определенных условиях значительно влияет на механическое поведение конструкций в целом. В рамках классической теории упругости, которая исходит из представления, что среда является континуумом материальных точек, становится труднодостижимым описание механического поведения некоторых материалов со сложной микроструктурой. Таким образом, для адекватного описания таких материалов (сред) необходимо учитывать внутренние степени свободы [1-2] и наличие структурных уровней для связи низких масштабов с более высокими [7]. В зависимости от типа материала и масштабного уровня применяются различные модели механики обобщённых сред [9]. Чем выше масштабный уровень модели, тем менее она требовательна к описанию неоднородности материала. Впервые в 1887 году в качестве обобщения классической теории упругости Voight W. рассмотрел среду с учётом моментных взаимодействий [5]. Затем в 1909 году братья Э. и Ф. Коссера ввели соответствующие обобщённые переменные (перемещения во всех направлениях и три вращательные степени свободы) [6]. Работы Коссера были десятилетиями непопулярны, тогда как в 1960-х годах настало интенсивное развитие обобщённых моделей сред с учётом большего числа степеней свободы (микрополярная, микроформная среды, среда со «стесненным вращением», градиентная модель и прочие).

Одним из примеров материалов со сложной внутренней структурой являются метаматериалы – новый класс инженерных материалов, предназначенный для достижения уникальных свойств, которые отсутствуют в природных материалах. Первое упоминание встречается в работе [8], где автором R. Walser вводятся принципиальные различия в понятиях и интерпретации «традиционных» композиционных материалов и метаматериалов. Особенностью метаматериалов является то, что их свойства в большей степени зависят от геометрических параметров их структуры, а не от объёмного или сырьевого содержания материала, используемого для их создания. С интенсивным развитием современной науки и технологий (например, аддитивных) стало возможным создание функциональных материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона [11, 77, 92, 142, 147], отрицательным КТР [62, 158, 170], отрицательным коэффициентом преломления, отрицательной диэлектрической проницаемостью, отрицательной

магнитной восприимчивостью [180, 182, 183, 185] и прочее. Универсальным свойством, присущим метаматериалам, является их сравнительно малый вес (lightweight structures – см. рис. 3). Таким образом, они могут быть перспективной альтернативой, применяемой в ответственных изделиях для авиационной и аэрокосмической промышленности, а также гражданского строительства [23, 62, 102, 175, 184, 186], интеллектуальные системы (сенсоры), биоинженерных системах (коронарный стент, тканевая инженерия (tissue engineering) и т.д [142, 147, 181].

Далее в данной диссертации речь идёт о стречневых искусственно созданных сетчатых структурах, другими словами, решётчатых (lattice) метаматериалов [21, 103, 114]. Как было сказано ранее современные технологии трёхмерной печати позволяют создавать решётчатые метаматериалы со сложной геометрией ячеек периодичности, что обеспечивает их уникальные механические свойства, такие как высокая удельная жёсткость и прочность [19, 117, 127, 177], высокая ударная прочность [107, 146, 176] и широкие запрещенные зоны в условиях распространения вибраций [69, 115, 126], контролируемое тепловое расширение [62, 158, 170], явное макроскопическое поведение, соответствующее моделям типа Коссера и типа Миндлина [49, 68, 70, 148] и другие. Проектирование ячеек периодичности в решётчатых структурах обычно определяет положение, размер и ориентацию стержней, чтобы обеспечить требуемую топологию и соответствующие макроскопические свойства, например с характерным поведением типа «stretch/bending-dominated» [57-58, 149], с квази-изотропными усреднёнными свойствами [36, 117], с заданным параметрами анизотропии [25-26] или с заданными функционально-градиентными свойствами [27-28].

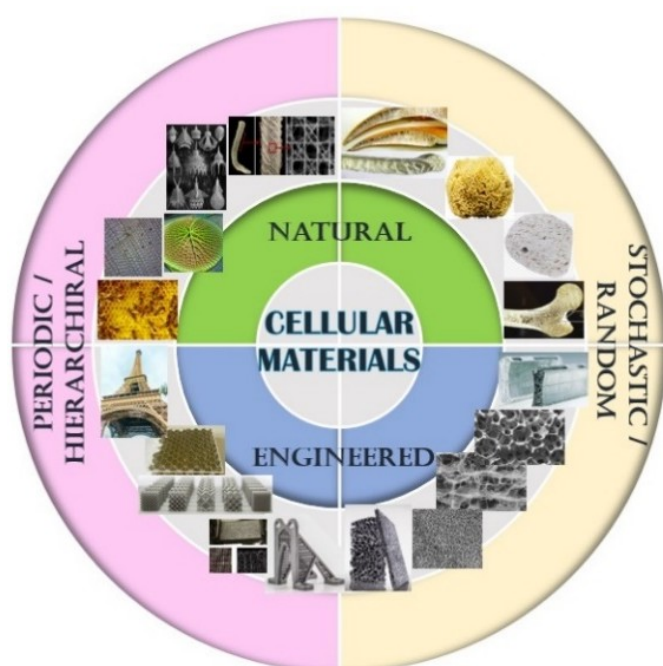


Рисунок 1.

Разнообразие материалов и конструкций с сетчатой/решётчатой структурой, встречающихся в природе или полученных в процессе технологического развития, благодаря которой становится возможным достижения уникальных свойств.

Предмет исследования. В данной диссертационной работе рассматривается класс сетчатых/решётчатых периодических метаматериалов (cellular periodic metamaterials) для механического применения (рис. 1). Одним из таких классов является семейство ауксетиков (auxetic metamaterials) – материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона. Другими словами, ауксетики способны расширяться в поперечных направлениях под действием одноосной растягивающей нагрузки и наоборот (рис. 2а). Свойства, присущие ауксетикам, встречаются редко в природе, но могут быть достигнуты путём искусственного создания геометрической структуры (см. рис. 2б) или путём изготовления их из различного сырья (пены, полимеры) [4, 97-98]. Также в настоящей работе рассматриваются пантографические метаматериалы (pantographic metamaterials), которые обладают специфической геометрической структурой в виде наборов из наклонных стержней, соединенными шарнирами или жесткими связями в узлах пересечения [173] (см. рис. 4), и уникальными механическими свойствами, такими как широкий диапазон упругих обратимых деформаций и нелокальное поведение [52, 100, 141]. Пионерами, предложившими создание и применение подобных материалов, а также способствующими развитию изучения ауксетиков и пантографических метаматериалов принято считать Roderic Lakes [98] и Francesco Dell’Isola [49] соответственно. Такие классы метаматериалов используются, в основном, для механических приложений [62, 65, 66]. В данной работе также рассматриваются плоские и трёхмерные сэндвич балки с сетчатым наполнителем (metamaterial-based lattice sandwich beam), положительно зарекомендовавшими себя в устройствах поглощающих энергию (energy absorbers) [20, 37, 75, 78, 146, 160, 179, 184].

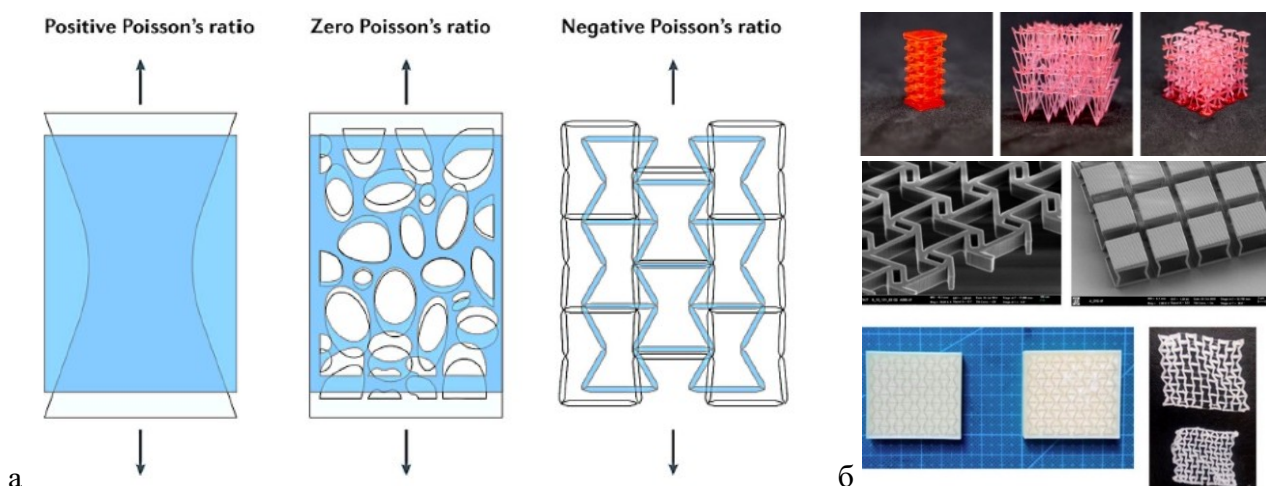


Рисунок 2. а) Схема принципа коэффициента Пуассона и эффект ауксетика [3];
б) пример ауксетиков с различной геометрией ячейки периодичности, полученных различными технологиями, в том числе аддитивными [187].

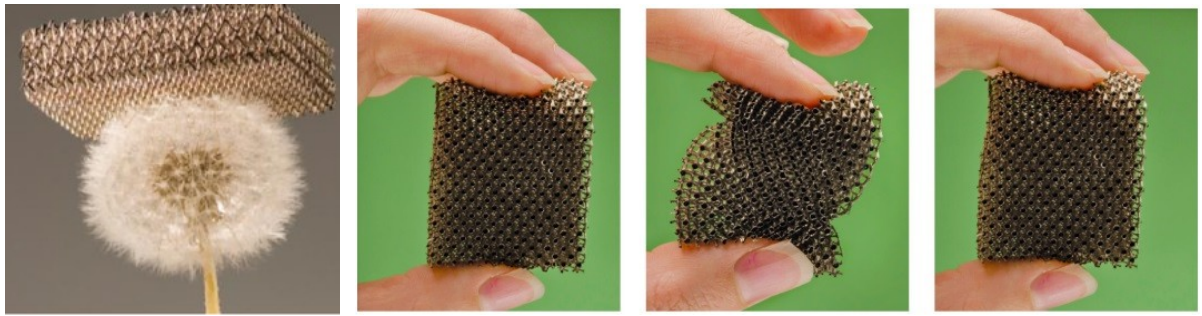


Рисунок 3. Пример «ультралёгких» механических метаматериалов с полыми образующими элементами [186].

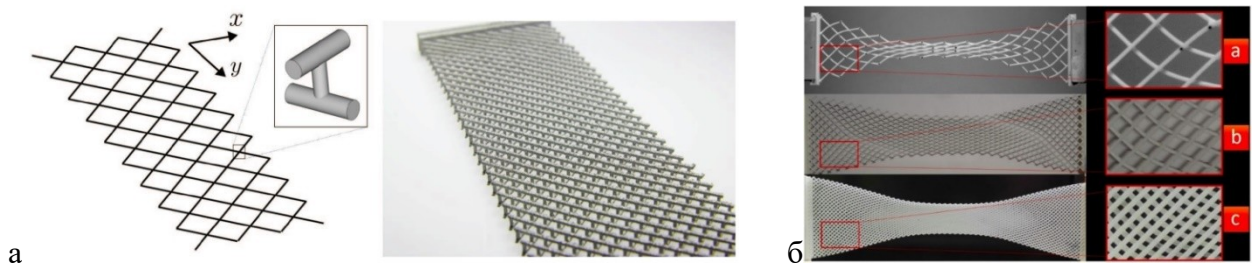


Рисунок 4. Пример: а) «жесткой» пантографической структуры [161]; б) характерное деформированное состояние [49].

Цель работы. Развитие теоретических подходов к описанию и прогнозу свойств механических метаматериалов, а также экспериментальная отработка и поиск оптимальной геометрии ячеек периодичности сетчатых метаматериалов с повышенными статическими и динамическими прочностными свойствами.

Задачами работы являются:

1. Исследование возможности применения моделей обобщённых континуумов для описания эффективных упругих характеристик механических метаматериалов на примере метаматериала-ауксетика со взаимопроникающей структурой и метаматериалов с сетчатой структурой. Идентификация неклассических масштабных параметров рассматриваемых классов метаматериалов.
2. Экспериментальное и численное исследование механических характеристик плоских сэндвич балок с заполнителями в виде пантографических метаматериалов. Исследование влияния типа связей между элементами, образующими структуру метаматериала, на динамические и статические свойства балок.
3. Разработка методики повышения ударной прочности сэндвич балок с трехмерными сетчатыми заполнителями за счет использования асимметричных ячеек периодичности и смещенных связей между образующими их элементами. Валидация

предложенного подхода на основе экспериментальных данных и численного моделирования.

Положения, выносимые на защиту:

1. Предложена геометрия метаматериала-ауксетика со взаимопроникающей структурой, эффективные механические свойства которой могут быть описаны в рамках микро-дилатационной теории упругости. Проведена идентификация всех неклассических параметров метаматериала.

2. Показано, что неклассические масштабные эффекты, реализующиеся при изгибе сетчатых балок с треугольной и ромбовидной структурой, могут быть описаны на основе моделей градиентной теории упругости, причем геометрия ячеек периодичности определяет тип реализующихся масштабных эффектов, связанных с длиной и толщиной балки.

3. Применение пантографических метаматериалов в качестве заполнителей для плоских сэндвич балок позволяет повысить их ударную прочность в 3-5 раз по сравнению со стандартными плоскими сетчатыми заполнителями. Уровень повышения ударной прочности определяется жёсткостью связей между стержневыми элементами, образующими структуру метаматериала. Использование наиболее жестких связей дополнительно позволяет обеспечить сохранение уровня статических упругих и прочностных характеристик метаматериала.

4. Предложенная методика модификации геометрии ячеек периодичности в трехмерных сетчатых заполнителях сэндвич балок позволяет повысить их ударную прочность в 1.5-3 раза. Повышение ударной прочности реализуется за счет снижения уровня триаксильности напряженного состояния в модифицированных асимметричных ячейках периодичности рассматриваемых метаматериалов.

Новизна:

1. Впервые проведена идентификация всех неклассических параметров микро-дилатационной теории упругости на примере сетчатого метаматериала-ауксетика.

2. Впервые показано, что треугольный/ромбовидный типы ячеек периодичности существенным образом влияют на характер неклассических масштабных

эффектов, реализующихся при изгибе балок с сетчатой структурой, что требует привлечения соответствующих моделей градиентной теории упругости.

3. Впервые предложен и реализован метод повышения ударной прочности сэндвич балок с сетчатыми заполнителями, основанный на использовании идеи пантографических метаматериалов и создании асимметричных связей между элементами, образующими ячейки периодичности. Повышение прочности достигается за счет изменения характера напряженно-деформированного состояния в ячейках периодичности и нелокального отклика метаматериала, масштабный параметр которого существенно превышает размер ячейки периодичности.

4. Показано, что для плоских сэндвич балок с сетчатыми заполнителями повышение ударной прочности в 3-5 раз при сохранении статических упругих и прочностных характеристик может быть достигнуто при использовании заполнителей пантографического типа с жёсткими связями. Показано, что для трехмерных сетчатых заполнителей наибольший эффект повышения ударной прочности может быть достигнут при использовании ячеек с базовой октаэдрической геометрией.

Методология и методы исследования:

Для решения задачи идентификации в моделях теории упругости с микро-дилатацией и в градиентной теории упругости привлекались аналитические методы построения решений для задач однородных и неоднородных деформаций, основанные на применении стандартных подходов теории дифференциальных уравнений и уравнений математической физики. Для детализированного численного моделирования деформации и разрушений фрагментов метаматериалов использовался метод конечных элементов в классической постановке с детальной прорисовкой геометрии ячеек периодичности. Для численного моделирования, в частности, привлекались ПК **Ansys Workbench** с решателями **LS-Dyna** и **Transient Structural**, а также **Femap/Nastran (MSC)** с решателем **Linear Static Analysis**.

В экспериментальной части работы проводилась процедура производства полимерных образцов метаматериалов методом 3D-печати технологиями SLS (оборудование **EOS INT P395**) и mSLA (оборудование **ANYCUBIC Photon Mono SE**). Стандартные испытания на трёхточечный изгиб, сжатие и ударную вязкость для явного определения основных механических характеристик метаматериалов проводились

на оборудовании **Instron 5969** с ПО **BlueHill 3** и маятниковым копром по Шарпи. Для оценки поля деформации в экспериментах использовался метод корреляции цифровых изображений (**Digital Image Correlation - DIC**), полученных с помощью камеры **Nikon D5500** с разрешением 24 мегапикселя. Для обработки таких изображений и оценки распределения деформаций Грина-Лагранжа использовалось ПО **Digital Image Correlation Engine (DICE)**.

Теоретическая значимость:

Предложены подходы, позволяющие идентифицировать неклассические параметры моделей обобщенных континуумов на примере описания эффективных упругих характеристик механических метаматериалов-ауксетиков и балок с сетчатой структурой.

На основе численного моделирования процессов динамического деформирования и разрушения сетчатых метаматериалов, дано обоснование возможности повышения их ударной прочности за счёт использования асимметричных ячеек периодичности.

Практическая значимость:

Предложена методика повышения ударной прочности сетчатых метаматериалов, которая не изменяет существенным образом их статические упруго-прочностные свойства и удельный вес. Методика может быть эффективно использована при создании перспективных облегченных противоударных защитных систем и энергопоглощающих материалов.

Личный вклад. Все представленные в диссертации результаты получены автором лично, либо при его непосредственном участии. В частности, разработаны методики идентификации материальных констант микро-дилатационной теории упругости и градиентной теории упругости за счет рассмотрения задач однородной и неоднородной деформации в работах [3*-5*]. Предложена и реализована методика создания смещенных связей в структуре плоских и трехмерных сетчатых метаматериалов, обеспечивающая повышение их ударной прочности [1*, 2*]. Участие соавторов в указанных работах определялось их вкладом в формулировки рассматриваемых задач, формулировку применяемых аналитических моделей и выбор численных методов, помощь в проведении экспериментальных исследований и обработке экспериментальных данных.

Достоверность и обоснованность научных положений и полученных результатов определяется привлечение строгих математических формулировок и апробированных

аналитических и численных методов решения задач механики сплошной среды, сравнением полученных решений с известными экспериментальными данными, численной валидацией приближенных аналитических решений для сетчатых структур с привлечением программных комплексов **Ansys Workbench** и **Femap/Nastan (MSC)** для моделирования метаматериалов с учетом детализированной геометрии ячеек периодичности, а также проведением экспериментальных испытаний с использованием известного и отлично зарекомендовавшего себя оборудования с соблюдением отечественных и международных стандартов проведения механических испытаний.

Публикации. Основные результаты настоящей диссертационного исследования изложены в 5 работах, индексируемых в Web of Science и/или Scopus, признанных ВАК РФ, и представлены следующим списком:

- 1*. Solyaev Y. O., **Ustenko A. D.** et al. Improved mechanical performance of quasi-cubic lattice metamaterials with asymmetric joints //Scientific Reports. – 2023. – Т. 13. – №. 1. – С. 14846 <https://doi.org/10.1038/s41598-023-41614-3>
- 2*. Solyaev Y., **Ustenko A.** et al. Static and dynamic response of sandwich beams with lattice and pantographic cores //Journal of Sandwich Structures & Materials. – 2022. – Т. 24. – №. 2. – С. 1076-1098 <https://doi.org/10.1177/10996362211033>
- 3*. Solyaev Y., Lurie S., **Ustenko A.** Apparent bending and tensile stiffness of lattice beams with triangular and diamond structure //Developments and Novel Approaches in Biomechanics and Metamaterials. – Cham : Springer International Publishing, 2020. – С. 431-442 https://doi.org/10.1007/978-3-030-50464-9_25
- 4*. Solyaev Y., Lurie S., **Ustenko A.** Numerical modeling of a composite auxetic metamaterials using micro-dilatation theory //Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2019. – Т. 31. – №. 4. – С. 1099-1107 <https://doi.org/10.1007/s00161-018-0730-y>
- 5*. Lurie S. A., Solyev Y. O., **Ustenko A. D.** et al. Continuum micro-dilatation modeling of auxetic metamaterials //International Journal of Solids and Structures. – 2018. – Т. 132. – С. 188-200 <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.09.022>

Апробация работы. Основные положения и результаты работы докладывались на следующих конференциях:

- 1**. [Влияние ассиметрии ячеек периодичности на статические и динамические свойства механических метаматериалов](#)
Устенко А.Д., Соляев Ю.О.

В книге: XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. сборник тезисов докладов: в 4 т. Министерство науки и высшего образования РФ; Российская академия наук; Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого. Санкт-Петербург, 2023, стр. 1022-1023.

- 2**. [Exceptional impact strength of sandwich beams with pantographic-type metamaterials in the core](#)
Ustenko A., Solyaev Y.
 Workshop of the IRP Coss&Vita Advances in ELAstoDYnamics, NonLinear mechanics and Stability of architected materials and structures, France, 18-19 November 2021, p. 36.
- 3**. **Феноменологическая континуальная модель метаматериала с нелокальными внутренними связями**
Устенко А.Д., Соляев Ю.О.
 В сборнике: Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 10-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, посвященной 100-летию со дня рождения академика И.Ф. Образцова. 2020. С. 212-214.
 DOI: [10.33113/conf.mkmk.ras.2020.212_214.32](https://doi.org/10.33113/conf.mkmk.ras.2020.212_214.32)
- 4**. [Apparent elastic properties of lattice beams second gradient surface elasticity homogenization](#)
Ustenko A., Solyaev Y., Lurie S.
 Workshop of the IConSom2019 International Conference on Nonlinear Solid Mechanics, June 2019, ROMA, Italy, MS-28, p. 313.
- 5**. [Вариант структуры механического метаматериала-ауксетика, демонстрирующего существенные нелокальные эффекты](#)
Устенко А.Д.
 В книге: Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник тезисов 9-й всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, посвященной 30-летию ИПРИМ РАН. 2019, стр. 99-100.
- 6**. [Исследование возможности применения микро-дилатационной теории упругости для моделирования метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона](#)
Устенко А.Д.
 В книге: XLIII ГАГАРИНСКИЕ ЧТЕНИЯ. Материалы Международной молодежной научной конференции. Секция "Механика и моделирование материалов и технологий". Москва, 2017. С. 79-80.

Структура и объём диссертации. Настоящая диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы. Объём работы составляет 112 страниц, включая 47 рисунков. Список литературы содержит 188 наименований.

В Главе 1 проводится идентификация параметров микро-дилатационной теории упругости для решётчатого метаматериала с отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетик). Рассмотрен ауксетик с наиболее простой взаимопроникающей (re-entrant) структурой, которая обладает кубической симметрией. Для такого метаматериала проведена гомогенизация, где эффективной средой является континуум с микро-

дилатацией. Определены эффективные упругие характеристики на основании сопоставления аналитических решений для задач одноосного растяжения, всестороннего сжатия и сдвига для микро-дилатационной теории с соответствующими результатами численного моделирования. Предложен алгоритм идентификации трёх дополнительных констант микро-дилатационной теории на основании рассмотрения задач об неоднородных деформациях. Показана эквивалентность связанных эффектов, возникающих при прямом моделировании структуры метаматериала в стержневой модели и при континуальном моделировании в рамках микро-дилатационной теории в широком диапазоне параметров. Показано, что для рассматриваемой структуры метаматериала масштабный параметр микро-дилатационной теории чуть более одной ячейки периодичности.

Глава 2 посвящена аналитическому и численному решению задач о чистом изгибе, консольном изгибе и растяжении сетчатых балок с ромбовидными и треугольными ячейками периодичности. Показана возможность описания реализующихся неклассических масштабных эффектов с использованием балочных моделей градиентной теории упругости, для которой проведена идентификация материальных констант рассматриваемых метаматериалов.

Главы 3 и 4 посвящены анализу поведения плоских и трёхмерных сетчатых сэндвич балок под воздействием ударной нагрузки и в квазистатическом режиме. Предложен метод, основанный на концепции проектирования пантографических метаматериалов [11, 21, 49, 52]. Классический пантографический метаматериал представляет собой структуру из наклонных стержней, расположенных в двух плоскостях (семействах) и соединённых небольшими шарнирами в узлах пересечения [173]. Масштабные параметры таких материалов, идентифицированных в рамках градиентной теории упругости, значительно превышают размер их ячейки периодичности [11, 21, 49], что эффективным образом используется для решения поставленных задач повышения ударной прочности. Предложенный подход, предполагающий создание асимметричных соединений между стержнями из соседних плоскостей (семейств) обобщен на трёхмерные структуры на уровне ячейки периодичности. Приводится обоснование изменения механизмов разрушения структуры метаматериала при реализации предложенного подхода. Показан рост ударопрочности в 3,5-5 раз для пантографических плоских сэндвич балок, а для рассмотренных трёхмерных сетчатых балок – в 1,5-3 раза при полном (практически) сохранении относительной плотности по сравнению с аналогичными стандартными структурами.

1. Ауксетики с эффектом микро-дилатации

Теория упругости с учётом микро-дилатации (theory of elastic materials with voids) является наиболее простым вариантом теории сред с микроструктурой Миндлина [121], предполагая, что тензор микродисторсии имеет сферический вид [33, 42]. Изначально микро-дилатационная теория упругости была предложена в работах [43, 116, 133].

Микро-дилатационная теория упругости учитывает связь между деформациями пористой среды и объёмным содержанием пористости, которое изменяется в процессе деформирования. Примером таких пористых сред могут быть пористая керамика, пористые полимеры, пена (foam), пеностекло, геоматериалы (porous rock), биологические материалы (археоциаты, пробковое дерево, трабекулярная кость) и т.д. [43, 116, 140].

В качестве обобщения классической теории упругости и частного случая среды с микроструктурой, в такой теории появляется микро-дилатация – дополнительная кинематическая переменная, физический смысл которой заключается в изменении объёмной доли матрицы среды [43]. В статических задачах с изотропными материалами в микро-дилатационной теории упругости присутствует пять материальных констант: две классических упругих характеристики (например, модуль Юнга и коэффициент Пуассона) и три неклассических характеристики: β – модуль связанности, ξ – параметр жёсткости микроструктуры и α – параметр нелокальных взаимодействий (иногда называемый коэффициентом диффузии, следуя аналогии, которая возникает между математической формулировкой дополнительного уравнения баланса для поля пористости и классического уравнения диффузии) [28, 43, 108, 109, 140, 155, 156].

В последнее время все больше внимания уделяется проблеме идентификации дополнительных параметров микро-дилатационной теории [28, 88-84, 99, 109, 140]. В работе [140] была представлена наглядная трактовка дополнительных материальных констант микро-дилатационной теории и предложены методики идентификации модулей связанности и жёсткости пор на основе анализа экспериментальных данных и решений задачи о полом цилиндра под внутренним давлением и задачи о сферической поре. В работе [28] проведено сопоставление численных решений различных плоских задач в рамках микро-дилатационной теории для сплошной среды и соответствующих задач в классической теории упругости для среды, содержащей круглые поры. Показано, что из сопоставления этих решений можно определить β , а также α . Обсуждение физического смысла дополнительных параметров микро-дилатационной теории, и её сопоставление с другими неклассическими моделями теории упругости проводилось в работе [99]. Методика идентификации параметров теории на основании испытаний пористых балок

различной толщины обсуждалась в работе [109]. Здесь на основании численных методов была показана перспектива применения испытаний на изгиб (чистый, трёхточечный и т.д.) для однозначного определения всех дополнительных параметров модели.

К настоящему времени известно не много экспериментальных работ, направленных на идентификацию материальных констант теории упругости с учётом микро-дилатации. Только в работах [88-84] была осуществлена успешная попытка идентификации параметра связанности N для цемента. В свою очередь, R. Lakes и соавторы [97-98, 144] показали неприменимость микро-дилатационной теории упругости для изотропных полимерных пен ауксетиков из-за наличия масштабных эффектов для таких материалов как при изгибе, так и при кручении. Потому как в рамках микро-дилатационной теории, ввиду отсутствия связи между микро-дилатацией и сдвиговыми деформациями, не могут возникать масштабные эффекты при кручении изотропных материалов.

В данной Главе 1 проводится исследование возможности применения микро-дилатационной теории упругости для континуального моделирования сетчатых метаматериалов-ауксетиков (структур с отрицательным коэффициентом Пуассона) со взаимопроникающей (re-entrant) структурой. В настоящее время известно большое количество вариантов структур метаматериалов-ауксетиков, которые исследуются экспериментально и теоретически. Применение таких метаматериалов может быть самым различным [147, 181, 184], например, в качестве устройств, поглощающих энергию (energy absorbers), в медицине, в сенсорах и т.д.

Применение континуальных теорий для моделирования метаматериалов является обоснованным в том случае, если ячейка периодичности этих материалов мала по сравнению с характерным макроскопическим размером образца материала. В этом случае применение континуальных феноменологических моделей является удобным и оправданным для сокращения объёмов вычислений. Для применения континуального подхода необходимо проводить процедуру гомогенизации и определения эффективных характеристик рассматриваемой структуры метаматериала. Широко применяется микрополярная гомогенизация для описания различных классов метаматериалов [18]. Применение градиентной теории упругости для гомогенизации и континуального моделирования пористых и тканевых конструкций (textile structures) проводилось в работе [73]. Значительное развитие получили модели для описания распространения волн в акустических метаматериалах [47, 115]. Предложены модели для континуального описания метаматериалов, образованных почти нерастяжимыми волокнами [53, 55]. Обсуждение вопросов проектирования новых метаматериалов на основе различных вариантов континуальных теорий представлено в обзорных работах [52, 53].

Известно, что обсуждение отрицательных эффектов Пуассона, возникающих в задачах микро-дилатационной теории упругости, проводилось ранее в некоторых работах [29, 38-40, 51]. Существенное влияние микро-дилатации на эффект Пуассона, по-видимому, впервые было отмечено в работе [51]. В работе [41] было отмечено, что формальная запись соотношений микро-дилатационной теории упругости допускает возможность описания ауксетиков. В недавней работе [29] показана прямая связь между значениями параметра связанности и поведением материала с микро-дилатацией, как ауксетика (при том, что в исходной матрице среды коэффициент Пуассона может быть положительным). Было получено аналитическое выражение для значения параметра связанности, при превышении которого материал с микро-дилатацией проявляет себя, как ауксетик: $N_{\max} = \lambda / k = 3\nu / (1 + \nu)$ (λ – параметр Ламе, k – объёмный модуль, ν – коэффициент Пуассона).

Далее рассматривается пример метаматериала-ауксетика (auxetic metamaterial), соответствующий теории с учётом микро-дилатации в широком диапазоне параметров, в том числе при достаточно высоких значениях параметра связанности. Такая структура с континуальной точки зрения при любых параметрах связанности проявляет себя, как ауксетик. Это объясняется тем, что исходный коэффициент Пуассона этого материала (в отсутствие эффектов микро-дилатации) равен нулю и, следовательно, $N_{\max} = 0$. Поэтому даже незначительные эффекты микро-дилатации приводят к возникновению отрицательного коэффициента Пуассона. В рассмотренном примере метаматериала для широкого диапазона параметров не возникает влияния масштабных и связанных эффектов жёсткости на сдвиг. Таким образом, рассматриваемый метаматериал-ауксетик при определённых геометрических размерах ячейки удовлетворяет одному из наиболее строгих критериев, предъявляемых среде с микро-дилатацией. Также она удобна тем, что обладает кубической симметрией, что существенно упрощает вычисления.

В качестве базовой геометрии ячеек периодичности была выбрана стержневая модель с достаточно простой структурой, которая обладает кубической симметрией. Показана прямая взаимосвязь геометрических и упругих параметров в ячейке периодичности и констант теории с учётом микро-дилатации. Предлагается алгоритм идентификации всех дополнительных констант микро-дилатационной теории (β – модуль связанности, ξ – жёсткость микроструктуры и α – параметр нелокальных взаимодействий) на основании рассмотрения задач об однородных и неоднородных деформациях.

1.1. Теория упругости с учётом микро-дилатации

Рассматривается формулировка линейной статической задачи микро-дилатационной теории упругости [43]. Кинематическими переменными в этой теории являются компоненты вектора перемещений u_i и ϕ скалярная функция микро-дилатации, которая определяет изменение объёмного содержания матрицы материала. Плотность энергии деформаций среды с микро-дилатацией в случае кубической симметрии можно записать в следующем виде [43, 140]:

$$U = \frac{1}{2} \left(C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + 2\beta \phi \theta + \xi \phi^2 + \alpha \phi_{,k} \phi_{,k} \right), \quad (1.1)$$

где C_{ijkl} – тензор модулей упругости; $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ – тензор малых деформаций; компоненты вектора перемещений – u_i ; $\theta = \varepsilon_{ii}$ – дилатация; α, β, ξ – дополнительные материальные константы теории, учитывающие микро-дилатацию. По повторяющимся индексам предполагается суммирование, запятая перед индексом обозначает производную.

Ограничения на допустимые значения материальных констант теории следуют из требования положительной определённости энергии деформаций (1.1). Для среды с кубической симметрией эти соотношения могут быть записаны в следующем виде [43, 131, 140]:

$$\begin{aligned} \mu_1 = C_{1212} > 0, \quad \mu_2 = \frac{C_{1111} - C_{1122}}{2} > 0 \\ k = \frac{C_{1111} + 2C_{1122}}{3} > 0 \\ \xi > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta^2 < k\xi \end{aligned} \quad (1.2)$$

Отличие этих неравенств от случая изотропной среды возникает только в отношении классических констант упругости, которых для среды с кубической симметрией оказывается три: два модуля сдвига μ_1, μ_2 и объёмный модуль k . Ограничения на значения неклассических констант сохраняются аналогичными, как в случае изотропного материала [43, 140].

В направлении главных осей симметрии материала имеет место следующая связь между классическими константами жёсткости и инженерными характеристиками [131]:

$$E = \frac{9k\mu_2}{\mu_2 + 3k}, \quad \nu = \frac{3k - 2\mu_2}{2\mu_2 + 6k}$$

Таким образом: $\mu_2 = E / [2(1 + \nu)]$. Индекс у первого модуля сдвига будем опускать, полагая $\mu = \mu_1$.

Вводится параметр связанности $N = \beta^2 / (k\xi)$ и, соответственно, из (1.2) следует, что $N \in [0, 1)$. При $N = 0$ имеет место случай классической теории упругости, при $N \rightarrow 1$ реализуются максимальные эффекты связанности [109, 140].

Постановка задачи теории упругости с учётом микро-дилатации может быть получена на основе вариационного подхода [108, 133, 140].

Определяющие соотношения вводятся в следующем виде:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \beta \phi \delta_{ij} \quad (1.3)$$

$$h = \alpha \phi_{,i} \quad (1.4)$$

$$-g = \xi \phi + \beta \varepsilon_{kk} \quad (1.5)$$

Уравнения равновесия записываются в виде:

$$\sigma_{ij,j} + p_i = 0, \quad x_i \in V \quad (1.6)$$

$$h_{k,k} + g = 0, \quad x_i \in V \quad (1.7)$$

Граничные условия представляются в виде:

$$\sigma_{ij} n_j = P_i, \quad x_i \in S_\sigma \quad (1.8)$$

$$h_k n_k = \alpha \phi_{,i} n_i = 0, \quad x_i \in S_h \quad (1.9)$$

$$u_i = u_i^0, \quad x_i \in S_u \quad (1.10)$$

$$\phi_i = \phi_i^0, \quad x_i \in S_\phi \quad (1.11)$$

здесь S_σ , S_h , S_u , S_ϕ – поверхности, на которых заданы классические и неклассические напряжения, перемещения и микро-дилатация. Физический смысл неклассических напряжений (1.6) и (1.7) можно найти в следующих работах [83, 116, 140].

1.2. Эффективные свойства материала с микро-дилатацией

Решение задачи для однородных деформаций было получено в [43]. Если в среде присутствуют однородные деформации ε_{kl}^0 , то напряжения и функцию микро-дилатации можно найти в следующем виде:

$$\sigma_{ij} = \left(C_{ijkl} - \frac{\beta^2}{\xi} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \varepsilon_{kl}^0 \quad (1.12)$$

$$\phi = -\frac{\beta}{\xi} \varepsilon_{kk}^0 \quad (1.13)$$

На основании выражения (1.14) можно ввести эффективные модули упругости среды с микро-дилатацией при однородном деформировании, как это было сделано в [99, 108-109]. С учётом введенного обозначения для параметра связанности N , получим:

$$C_{ijkl}^* = C_{ijkl} - \frac{\beta^2}{\xi} \delta_{ij} \delta_{kl} = C_{ijkl} - N k \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (1.14)$$

Значения эффективного объёмного модуля, модуля сдвига, модуля Юнга и коэффициента Пуассона могут быть найдены из (1.14) на основе стандартных соотношений между инженерными характеристиками и константами жёсткости в следующем виде:

$$K^* = K(1 - N) \quad (1.15)$$

$$\mu^* = \mu \quad (1.16)$$

$$E^* = E \frac{1 - N}{1 - 2\left(1 + \nu\right) \frac{N}{3}} \quad (1.17)$$

$$\nu^* = \frac{\nu - \left(1 + \nu\right) \frac{N}{3}}{1 - 2\left(1 + \nu\right) \frac{N}{3}} \quad (1.18)$$

В случае, если коэффициент Пуассона среды равен нулю, то есть: $\nu = 0$ (что реализуется для рассматриваемого далее метаматериала) последние два выражения упрощаются:

$$E^* = E \frac{1 - N}{1 - 2N/3}, \quad \nu^* = \frac{-N}{3 - 2N} \quad (1.19)$$

Из (1.15), (1.17) - (1.19) следует, что при увеличении параметра N от 0 до 1 (при увеличении эффектов связанности) жёсткость среды на растяжение и всестороннее сжатие снижается от исходных значений до нуля, коэффициент Пуассона снижается до -1, а модуль сдвига остается неизменным. Фактически, наличие такой зависимости свойств среды (с

исходным нулевым коэффициентом Пуассона) от эффектов связанности является критерием возможности применения к ней микро-дилатационной теории упругости.

Заметим также, что между эффективными характеристиками жёсткости (1.15), (1.17) - (1.19) выполняется стандартное соотношение, которое имеет место и для материалов с кубической симметрией:

$$k^* = \frac{E^*}{3(1 - 2\nu^*)} \quad (1.20)$$

1.3. Структура метаматериала-ауксетика

Рассмотрим метаматериал-ауксетик (auxetic metamaterial), который представляет собой решётчатую структуру с ячейкой периодичности в виде типичной трёхмерной звезды с изломленными (взаимопроникающими, re-entrant) стержнями с тремя плоскостями симметрии (рис. 1.2а). Если рассматривать такой метаматериал с континуальной точки зрения, то можно показать, что он относится к кубической системе и характеризуется тремя константами жёсткости C_{111} , C_{112} , C_{1212} . Структура метаматериала и геометрия ячейки периодичности полностью определяются тремя параметрами: a , b , c (рис. 1.2б). Параметр c определяет размер кубической ячейки метаматериала. Если $a < b$ то структура является звездой с изломленными стержнями (re-entrant structure) и в ней проявляется эффект ауксетиков (отрицательный коэффициент Пуассона). То есть в такой структуре, например, при одноосном растяжении возникают положительные поперечные деформации. Трёхмерный фрагмент метаматериала, состоящий из $4 \times 4 \times 15$ ячеек, представлен далее.

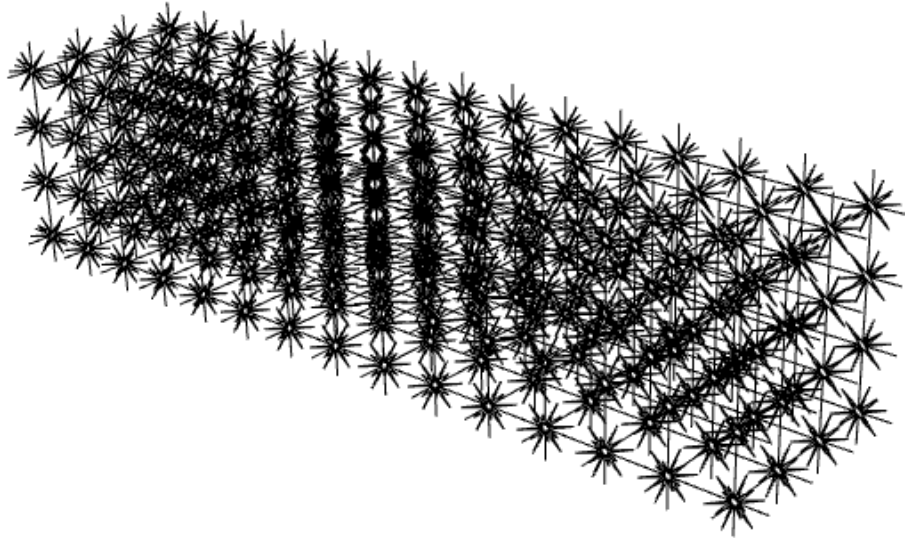


Рисунок 1.1. Пример балки рассматриваемого метаматериала-ауксетика, состоящего из $4 \times 4 \times 15$ единичных ячеек с геометрическими размерами: $b/a = 5$, $c/a = 10$.

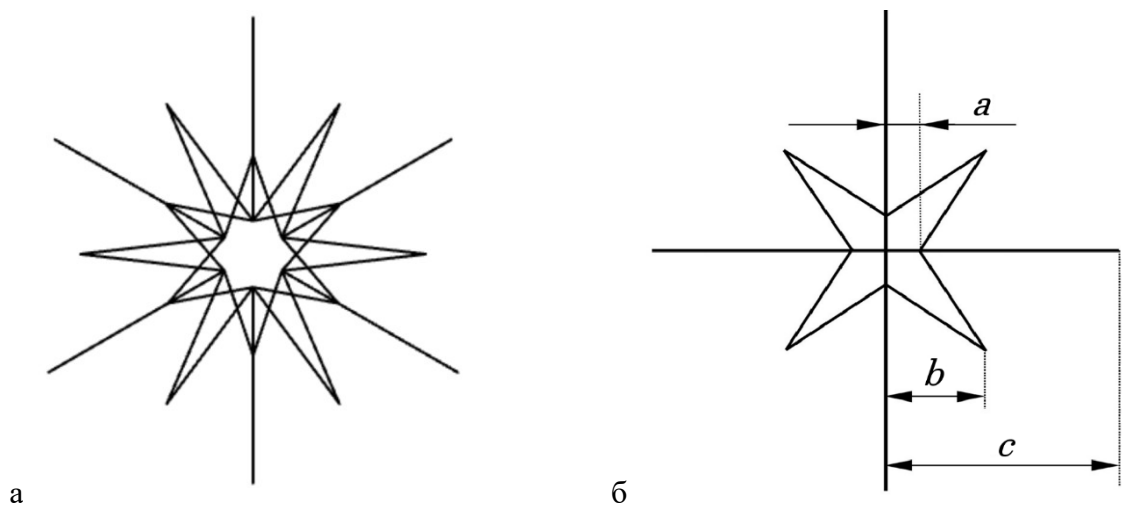


Рисунок 1.2. Ячейка периодичности в виде структуры со взаимопроникающими стержнями с определением геометрических параметров:
а) в изометрии; б) вид сбоку.

1.4. Эффективные характеристики метаматериала

Эффективные (кажущиеся) упругие характеристики метаматериала-ауксетика определяются на основании конечно-элементного моделирования (см. раздел 1.8). Для этого рассматриваются балочные модели фрагментов материала, к которым прикладываются нагрузки и определяются изменения их размеров. Конечно-элементное

(КЭ) моделирование проводилось в системах **Femap/Nastran (MSC)** в линейной упругой постановке. При моделировании используются балочные элементы соответствующие модели типа Тимошенко (рис. 1.3). Рисунок иллюстрирует конечно-элементную сетку для одной ячейки (рис. 1.3а) и небольшого фрагмента ауксетика (рис. 1.3б).

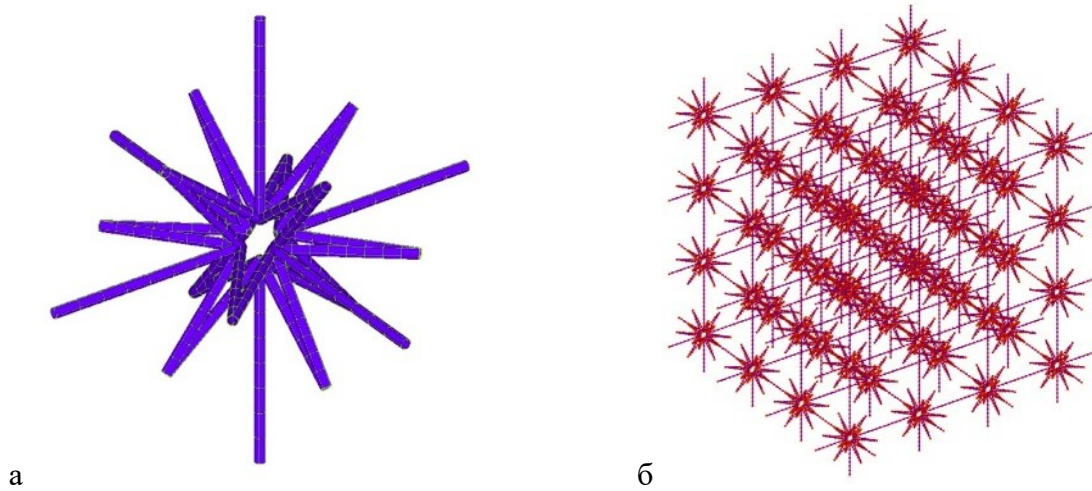


Рисунок 1.3. а) Конечно-элементное разбиение стержневой модели ячейки периодичности; б) Фрагмент рассматриваемого метаматериала.

Эффективные объёмный модуль, модуль Юнга и коэффициент Пуассона могут определяться при моделировании фрагментов рассматриваемого метаматериала, состоящих из одной ячейки периодичности. Это возможно, так как масштабных эффектов для этих характеристик не возникает. Для проверки определялись все эти характеристики несмотря на то, что между ними имеет место соотношение (1.20).

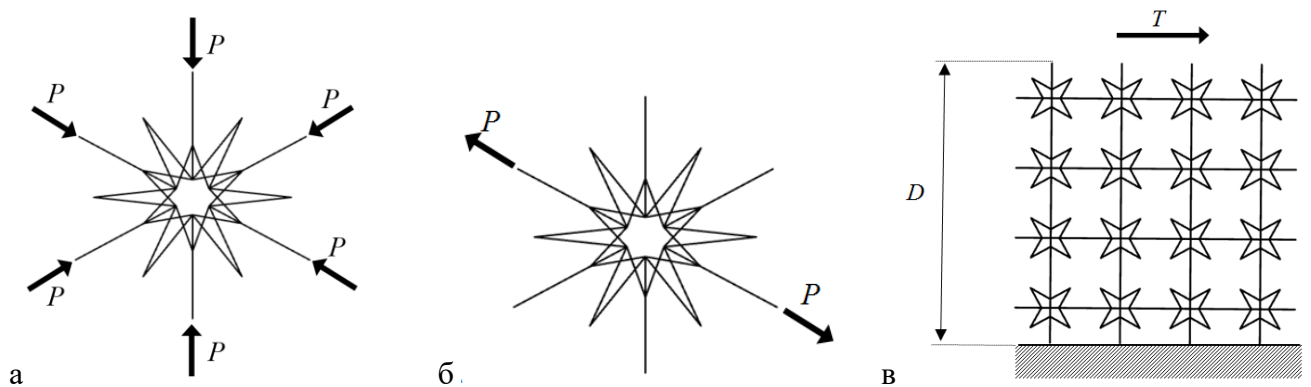


Рисунок 1.4. а) Схемы нагружения стержневых моделей метаматериала при трёхосном сжатии ячейки; б) При одноосном растяжении ячейки; в) При простом сдвиге небольшого фрагмента из нескольких ячеек (вид сбоку).

Эффективный объёмный модуль определяется из численного решения задачи всестороннего сжатия (рис. 1.4а) по формуле:

$$k^* = \frac{\sigma}{\theta} = \frac{P}{12cu}, \quad (1.21)$$

здесь P – нагрузка, приложенная со всех сторон к свободным концам балки; перемещения свободного конца одного из стержней (где приложена нагрузка) – u ; напряжения всестороннего сжатия и деформации изменения объёма в эквивалентной сплошной среде, соответственно, $\sigma = P / 4c^2$ и $\theta = 3u / c$.

Эффективный модуль Юнга и коэффициент Пуассона определяются из численного решения задачи одноосного растяжения ячейки (рис. 1.4б) по формуле:

$$E^* = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{P}{4cu} \quad (1.22)$$

$$\nu^* = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{v}{u} \quad (1.23)$$

здесь P – растягивающее усилие; u – перемещения конца балки, к которому приложена нагрузка; v – перемещения свободного конца одного из стержней, ориентированных перпендикулярного к направлению растяжения; $\sigma = P / 4c^2$ – напряжения в эквивалентной сплошной среде; $\varepsilon_1 = u / c$, $\varepsilon_2 = v / c$ – деформации эквивалентной сплошной среды в продольном и поперечном направлении, относительно направления растяжения, соответственно.

Модуль сдвига определяется из задачи простого сдвига кубического фрагмента метаматериала (рис. 1.4в). Для проверки необходимо рассмотреть фрагменты различного размера, так как независимость модуля сдвига от размеров фрагмента является критерием применимости микро-дилатационной теории. Рассматривались фрагменты кубической формы с размером грани D . Во фрагменте содержалось целое количество ячеек. Сдвигающая нагрузка T распределялась равномерно по всем стержням, выходящим на верхнюю поверхность фрагмента. Модуль сдвига определялся по формуле:

$$\mu^* = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{T}{Dv}, \quad (1.24)$$

здесь v – смещения в касательном направлении верхней грани фрагмента (свободных концов соответствующих стержней); $\tau = T / D^2$ и $\gamma = v / D$ – соответственно, сдвиговые напряжения и деформации в эквивалентной сплошной среде.

1.5. Геометрическая интерпретация микро-дилатации внутри ячейки периодичности

Будем рассматривать метаматериал, в котором ячейки состоят из двух типов стержней (рис. 1.5). Стержни, образующие взаимопроникающую структуру (re-entrant, красные линии) выполнены из материала с модулем Юнга E_1 и имеют площадь поперечного сечения S_1 . Остальные стержни (чёрные линии - рис. 1.5), выполнены из материала с модулем Юнга E_0 и имеют площадь поперечного сечения S_0 . Введем характеристики жёсткости $A_1 = E_1 S_1$, $A_0 = E_0 S_0$ и их отношение: $\bar{A} = A_1 / A_0$.

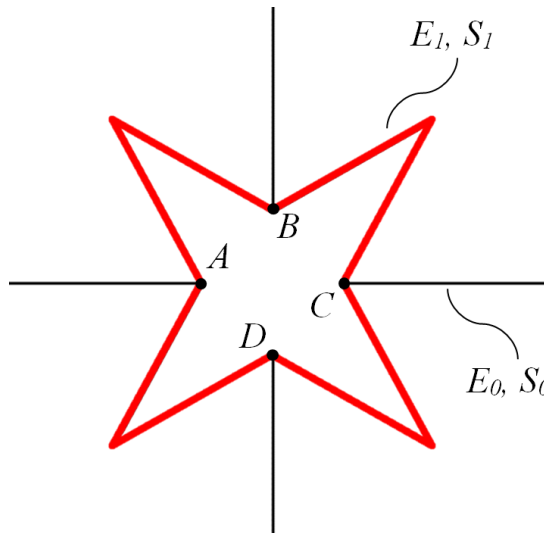


Рисунок 1.5. Ячейка периодичности со стержневой взаимопроникающей структурой.

Физический смысл микро-дилатации для рассматриваемого метаматериала – это изменение размеров его ячеек за счёт деформаций взаимопроникающей стержневой структуры. Если эта деформация отсутствует, и взаимопроникающие стержни являются абсолютно жёсткими ($\bar{A} \rightarrow \infty$), то микро-дилатация в среде отсутствует. Этот случай соответствует варианту континуальной микро-дилатационной модели, в которой нет эффектов связанности ($N = 0$). Изменяя соотношение жёсткости $\bar{A}$ в стержневой модели, мы, фактически, изменяем параметр связанности N в соответствующей континуальной микро-дилатационной модели.

Моделируя фрагменты с абсолютно жёсткими взаимопроникающими структурами, мы находим характеристики метаматериала без эффектов микро-дилатации, то есть

параметры k , E , ν , μ . В этом случае в рассматриваемой стержневой модели будем иметь $\nu = 0$, модуль сдвига легко определить численно аналогично (1.24), а модуль Юнга и объёмный модуль можно найти по аналитической формуле:

$$E = 3k = E_0 \frac{S_0}{4c(c-a)} \quad (1.25)$$

Если $\bar{A} < \infty$, то взаимопроникающие структуры деформируются. В этом случае, используя результаты моделирования (см. раздел 1.8), можно непосредственно определить величину микро-дилатации в ячейках метаматериала. Для этого необходимо вычислить относительные изменения их внутренних размеров в процессе деформации, определенной по результатам численного моделирования. В случае малых деформаций величина микро-дилатации в плоской ячейке, представленной на рис. 1.5, будет определяться суммой относительных изменений длин отрезков AC & BD :

$$\phi = \frac{d_{AC} - d'_{AC}}{d_{AC}} + \frac{d_{BD} - d'_{BD}}{d_{BD}}, \quad (1.26)$$

где d_{AC} , d_{BD} - длины отрезков AC и BD до деформирования; d'_{AC} , d'_{BD} - длины этих отрезков после деформирования.

Заметим, что выражение (1.26) записано таким образом, что при сжатии в ячейке возникает положительная микро-дилатация и отрицательная – при растяжении, что соответствует её физическому смыслу [43, 140]. В трёхмерном случае в выражении (1.26) необходимо добавить третье слагаемое, связанное с деформациями в третьем направлении.

1.6. Эффективные упругие характеристики метаматериала-ауксетика при неоднородных деформациях

Эффективные свойства метаматериала под воздействием неоднородных деформаций определяются путём рассмотрения деформаций балок разной длины с поперечными размерами 4×4 ячеек (рис. 1.6).

Сначала, рассматривается задача неоднородной одноосной деформации балки с нулевой микро-дилатацией на одном из концов, см. рис. 1.6а. Здесь же предполагается заданным условие закрепления (нулевые перемещения свободных концов ячеек периодичности). Чтобы обеспечить нулевую микро-дилатацию на этом конце балки, предполагается, что взаимопроникающие (re-entrant) стержни внутри ячеек периодичности,

формирующих этот конец, имеют бесконечную жёсткость ($\bar{A} \rightarrow \infty$). Этот метод соответствует подходу, описанному в разделе 1.7. Другой конец балки растягивается по направлению оси балки. Поперечные деформации боковых поверхностей балки не допускаются для обеспечения одноосной деформации. Эффективная характеристика жёсткости определяется по результатам численного моделирования следующим образом:

$$C^* = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{PL}{4c^2u}, \quad (1.27)$$

здесь $\sigma_1 = P / 4c^2$ – напряжение; $\varepsilon_1 = u / L$ – деформации в осевом направлении; L – длина балки, состоящей целого числа ячеек периодичности, без учёта первого ряда (ячейки с нулевой микро-дилатацией).

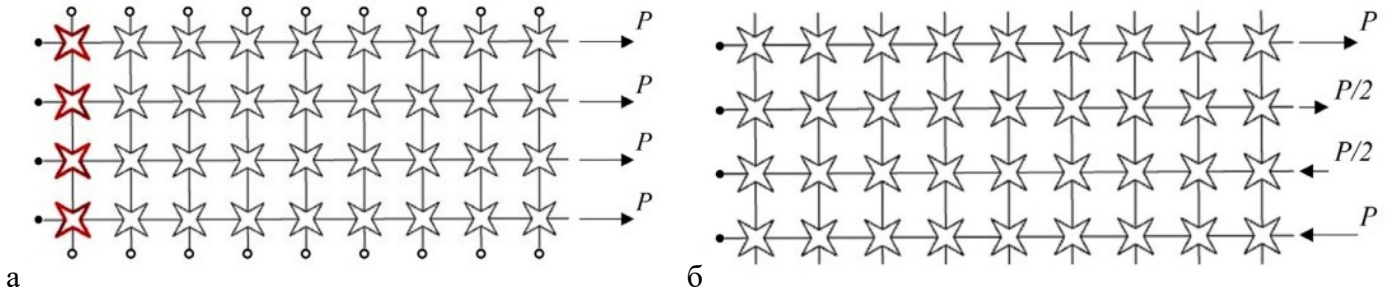


Рисунок 1.6. Боковой вид балки рассматриваемого метаматериала-ауксетика при неоднородном одноосной деформации (а); при чистом изгибе (б).

Здесь: чёрные точки обозначают узлы с нулевым горизонтальным смещением; белые точки – узлы с нулевым вертикальным смещением. Красные стержневые элементы обладают бесконечной жёсткостью.

Далее, рассматривается задача чистого изгиба балки (рис. 1.6б). На одном конце запрещены горизонтальные смещения, а на другом конце задана линейно изменяющаяся по толщине балки нагрузка, эквивалентная заданному изгибающему моменту M . Эффективный изгибный модуль по результатам численного расчета определяется следующим образом:

$$E_f^* = \frac{ML^2}{2Iw}, \quad (1.28)$$

здесь $I = bh^3 / 12 = 1024c^4 / 3$ – момент инерции у эквивалентно непрерывной балки;

w – вертикальный прогиб в узлах, к которым приложена нагрузка $\frac{P}{2}$.

1.7. Алгоритм идентификации параметров микро-дилатационной теории упругости

Предлагается следующий алгоритм идентификации параметров теории микро-дилатационной теории упругости для рассматриваемого метаматериала-ауксетика:

1. Сперва, численно решается задача простого сдвига небольшого фрагмента метаматериала. Делается сверка, что эффективный модуль сдвига независим от варьирования отношения жёсткости стержней $\bar{A}$ (при изменении эффектов связанности) и от изменения размеров представительных фрагментов. Этот факт является критерием применимости микро-дилатационной теории, как эффективной среды для рассматриваемого материала (1.24). В результате этих расчётов, определяется модуль сдвига.
2. Определяется модуль Юнга E и объёмный модуль k материала в отсутствие эффектов микро-дилатации по формуле (1.25) на основании результатов численного моделирования процессов растяжения и всестороннего сжатия ячеек периодичности метаматериала, с заданной бесконечной жесткостью внутренней взаимопроникающей структуры ($\bar{A} \rightarrow \infty$).
3. Численно решается задача всестороннего сжатия для ячейки метаматериала при различной (конечной) жёсткости стержней $\bar{A}$. Определяются значения эффективного объёмного модуля k^* метаматериала. Также вычисляются значения объёмной деформации θ (см. (1.21)) и функции микро-дилатации в ячейке метаматериала ϕ (см. (1.26)) при различных значениях $\bar{A}$.
4. На основании соотношения (1.15) определяем значения параметра связанности $N(\bar{A}) = 1 - k^*(\bar{A}) / k$. Таким образом, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между параметрами ячейки в стержневой модели ($\bar{A}$) и параметром связанности в континуальной теории (N) для рассматриваемой структуры.
5. Определяются материальные константы β и ξ среды с микро-дилатацией при различных значениях $\bar{A}$ с использованием соотношения $\phi = -\beta \varepsilon_{kk}^0 / \xi$ (см. (1.13)) и определения параметра связанности $N = \beta^2 / (k\xi)$. Разрешая эти соотношения относительно β и ξ ,

вычисляются выражения для их определения через объёмный модуль и отношение величины дилатации ячейки к микро-дилатации внутри неё:

$$\beta = -(k - k^*) \frac{\theta}{\phi} \quad (1.29)$$

$$\xi = (k - k^*) \frac{\theta^2}{\phi^2} \quad (1.30)$$

Стоит заметить, что отношение $\frac{\theta}{\phi}$ из выражений (1.29) и (1.30) были определены на третьем

шаге текущего алгоритма при различных значениях $\bar{A}$. Знание параметра связанности N недостаточно для определения этих констант. Необходимо указать точную структуру материала и иметь количественные оценки деформаций его микроструктуры (микро-дилатации) под нагрузкой. Другими словами, одновременная идентификация этих двух параметров β и ξ только на основе макроскопических наблюдений, по-видимому, невозможна, в отличие от N . Предложенный подход в разделе 1.3 для микро-дилатации в ячейках метаматериала позволяет измерить её на основе численного конечно-элементного решения для балочной модели метаматериала и использовать эти результаты далее.

6. Определяются эффективные упругие характеристики, такие как модуль Юнга и коэффициент Пуассона метаматериала при различных значениях $\bar{A}$ из сопоставления результатов численного моделирования для балочной модели метаматериала и аналитических оценок для эффективной среды с микро-дилатацией (1.22) и (1.23). Сверяется, что получаемые пересчётом зависимости этих характеристик от $N(\bar{A})$ соответствуют теоретическим зависимостям (1.17) и (1.18). Таким образом, в предложенном алгоритме соответствие между эффективным объёмным модулем в непрерывной и решётчатых моделях всегда выполняется, поскольку условие их равенства использовалось для определения N . Соответствие решений для эффективного модуля Юнга и коэффициента Пуассона может выполняться в случае подходящей структуры метаматериала, либо не выполняться, если рассматриваемая структура не соответствует микро-дилатационной теории упругости (а требует, например, привлечения более сложных моделей обобщенных континуумов). Чтобы выполнить такое требование, необходимо, чтобы при больших значениях параметра связности структура метаматериала демонстрировала сильные эффекты ауксетика и его коэффициент Пуассона стремился к -1 (как это происходит в континуальной модели).

7. На последнем шаге, определяется материальная констант α , отвечающая за размерный эффект в микро-дилатационной теории упругости. Этот материальный параметр определяется из задачи неоднородной одноосной деформации, решение которой в микродилатационной теории упругости дает следующее значение эффективной константы

жёсткости при растяжении [43, 108]: $C^* = \frac{C \left(1 - \frac{N}{3}\right)}{1 - \frac{N \cdot \tanh \bar{L}}{3\bar{L}}}$, где $\bar{L} = L / I$ – относительная длина

фрагмента, нормированная на масштабный параметр материала $I = \sqrt{\alpha / (\xi - \beta^2 / C)}$.

Численные решения строятся для балок различной длины $\bar{L}$, а их эффективная жёсткость находится с использованием соотношения (1.27). В этом случае, используются ранее определенные значения параметра связанности N для конкретной геометрии ячейки метаматериала, а масштабный параметр I определяется подбором. Далее, последняя из неизвестных характеристик материала α находится по выражению: $\alpha = I^2 (\xi - \beta^2 / E)$.

Соответствие между континуальными и балочными моделями метаматериала также проверяется для найденного масштабного параметра I в задаче чистого изгиба с использованием сопоставления значений изгибного модуля упругости, полученных в численном моделировании (1.28) и аналитического решения для модуля упругости при

изгибе балки в микро-дилатационной теории упругости [99, 108]: $E_r^* = \frac{E(1 - 2J)}{1 - J}$, здесь

$J = N \frac{1 - \frac{3(H - \tanh \bar{H})}{\bar{H}^3}}{3 - N}$, где $\bar{H} = \frac{H}{I}$ и учтено, что для рассматриваемой сетчатой структуры

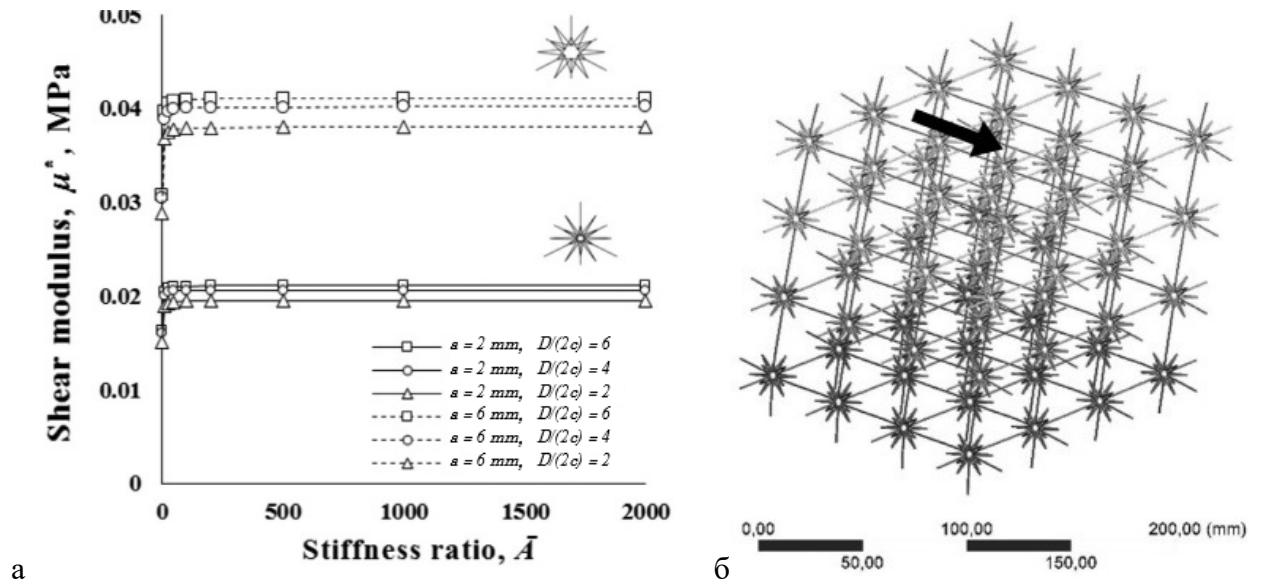
выполняется $\nu = 0$.

1.8. Результаты моделирования

Для примера рассматриваются два варианта структуры метаматериала с геометрическими параметрами $a = 2$ мм или 6 мм; $b = 10$ мм; $c = 22$ мм. Диаметр всех стержней равен 1 мм. Модуль Юнга горизонтальных и вертикальных стержней считается равным $E_0 = 200$ ГПа, а модуль Юнга изломленных (re-entrant) стержней варьируется в пределах $E_0 \leq E_1 \leq 2000E_0$ (верхний предел гипотетический и используется для идентификации материальных констант метаматериала в отсутствие эффектов микро-дилатации, с практической точки зрения эти эффекты могут быть также исключены путем

увеличения поперечных сечений балок, образующих взаимо-проникающую структуру). Соответственно параметр отношения жёсткостей изменяется в диапазоне $1 \leq \bar{A} \leq 2000$.

Следуя алгоритму, изложенному в разделе 1.7, сперва определяется модуль сдвига метаматериала при различной жёсткости ($1 \leq \bar{A} \leq 2000$) и при различных размерах представительных фрагментов. Полученные зависимости представлены на рис. 1.7а.



а

б

Рисунок 1.7. Зависимость эффективного модуля сдвига метаматериала от параметра относительной жёсткости, найденная на основании численного решения задачи простого сдвига для фрагментов различного размера.

Здесь: под выражением $D/(2c) = [6, 4, 2]$ подразумевается количество ячеек в метаматериале-ауксетике в численном моделировании сдвига.

Видно, что постоянное значение модуля сдвига реализуется при достаточно высоких значениях $\bar{A}$, то есть, когда жёсткость взаимопроникающей структуры высока, то есть $\bar{A} \geq 10$. Если же модуль сдвига начинает значительно снижаться, то модель с микро-дилатацией оказывается неприменимой. Влияние размерного эффекта оказывается незначительным уже при размерах фрагмента $4 \times 4 \times 4$ ячейки. Внутренний размер ячейки a влияет на абсолютное значение модуля сдвига, которое у рассматриваемой структуры оказывается очень низким. На рисунке 1.7б показан пример для фрагмента метаматериала в состоянии простого сдвига при действии нагрузки в 100 Ньютонов без масштабирования деформаций. Заметим, что известны и более сложные структуры метаматериалов с более высокой жёсткостью на сдвиг [147], но для примера реализации предложенного алгоритма

идентификации параметров рассматриваемая структура является одной из наиболее простых.

Далее определяются модуль Юнга и объёмный модуль метаматериала в отсутствие эффектов микро-дилатации. На основании формулы (1.25) получается, что при внутреннем размере ячейки $a = 2$ мм имеем жёсткость $E = 3k = 93.7$ МПа и $E = 3k = 117.1$ МПа при $a = 6$ мм.

Далее на основании численного решения задачи всестороннего сжатия определяется зависимость объёмного модуля метаматериала $k^*(\bar{A})$. Одновременно определяется отношение дилатации ячеек в метаматериале к микро-дилатации θ/ϕ при заданном уровне сжимающей нагрузки. Полученные зависимости представлены на рисунке 1.8. Видно, что значения эффективного объёмного модуля стремятся к предельным характеристикам, найденным для структуры без микро-дилатации, при достаточно высокой жёсткости внутренней взаимопроникающей структуры.

Зависимость параметра связанности от отношения жёсткостей взаимопроникающей структуры представлена на рисунке 1.9 в полулогарифмических координатах. Эта зависимость определена на основе соотношения $N = 1 - k^*/k$ и найденных значений объёмного модуля. Видно, что при высокой жёсткости взаимопроникающей структуры - связанности нет ($N \rightarrow 0$). В случае податливой взаимопроникающей структуры (ge-entrant), когда $\bar{A} < 100$, реализуются максимальные эффекты связанности и в пределе параметр связанности материала характеризуется значением $N \rightarrow 1$. Также при увеличении внутреннего размера a взаимопроникающей структуры происходит снижение параметра связанности, что вполне предсказуемо, так как в этом случае, ячейка периодичности более напоминает квадратную форму нежели взаимопроникающую структуру.

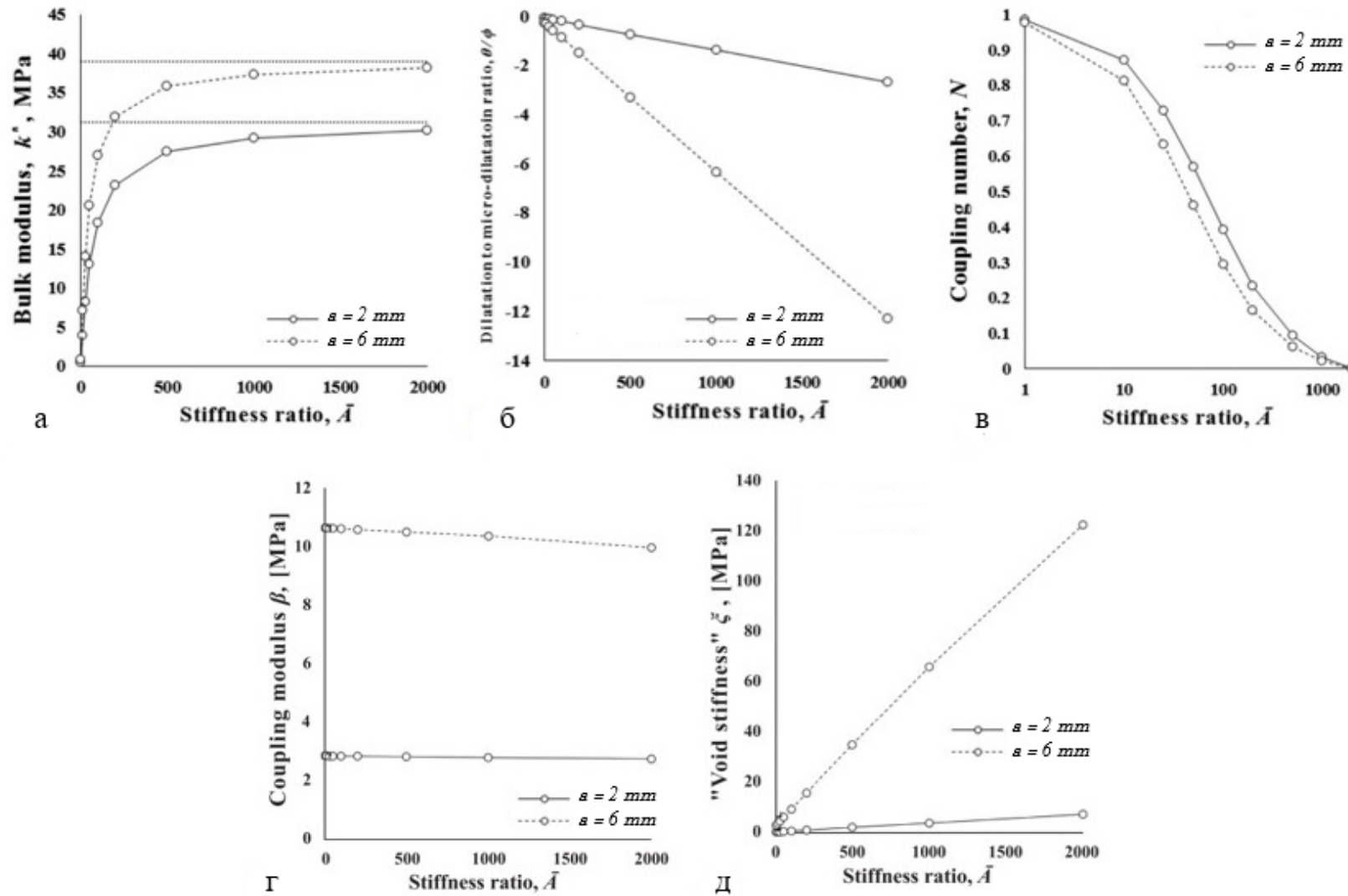


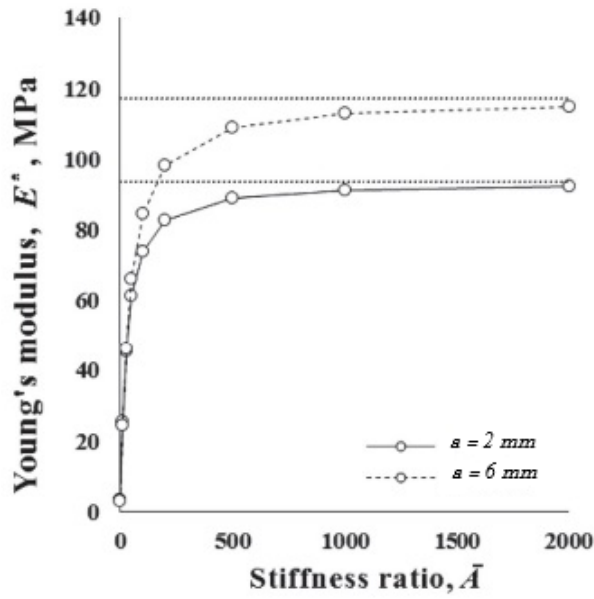
Рисунок 1.8. Зависимости характеристик от жёсткости взаимопроникающей структуры $\bar{A}$: а) объёмный модуль k^* . Здесь точечные прямые соответствуют аналитическому решению; б) отношения дилатации к микро-дилатации θ/ϕ ; в) параметр связанности

$$N(\bar{A}) = 1 - k^* / k; \text{ г) модуль связанности } \beta; \text{ д) модуль собственной жёсткости микроструктуры } \xi.$$

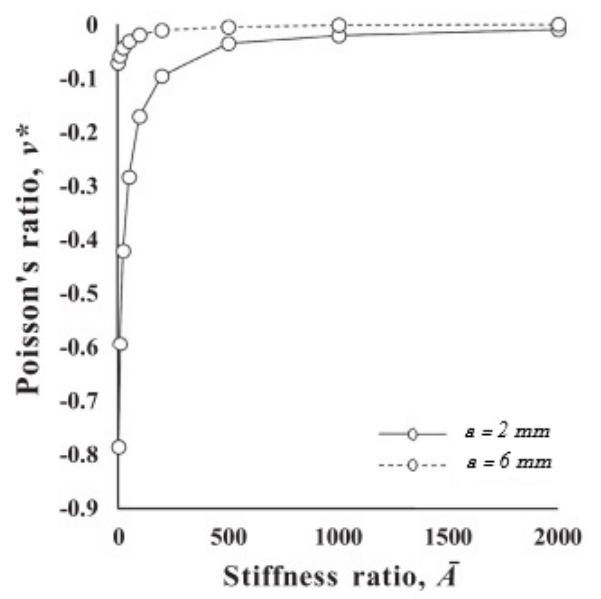
На основании полученных данных $N(\bar{A})$ (см. рис. 1.8в) и $k^*(\bar{A})$, $\theta(\bar{A})/\phi(\bar{A})$ (см. рис. 1.8‘а-б’), вкупе с уравнениями (1.29) и (1.30), определяются модуль связанности β модуль жёсткости микроструктуры ξ . Эти результаты представлены на рисунке 1.8‘г-д’. Здесь видно, что изменение жёсткости взаимопроникающей структуры практически не влияет на модуль связанности, который, в то же время, значительно меняется при изменении геометрии ячейки (внутреннего размера a). Модуль жёсткости микроструктуры практически линейно пропорционален отношению $\bar{A}$, что соответствует его физическому смыслу.

Далее на основании численного моделирования определяем зависимость эффективных модуля Юнга E^* и коэффициента Пуассона ν^* метаматериала от соотношения жёсткостей $\bar{A}$ (рис. 1.9). При этом установлено, что ячейки с большим внутренним размером $a = 6$ мм (пунктирные линии, см. рис. 1.9) обладают большей жёсткостью, но эффекты снижения коэффициента Пуассона проявляются в них в меньшей степени.

Зная зависимость $N(\bar{A})$ (рис. 1.8в), мы можем пересчитать и построить зависимость всех найденных эффективных характеристик жёсткости μ^* , k^* , E^* , ν^* от параметра связанности N . Полученный результат сопоставляется с теоретическими зависимостями (1.15)-(1.18), которые должны выполняться в микро-дилатационной теории упругости. Это сопоставление представлено на рисунке 1.10. Здесь маркерами обозначаются численные результаты, найденные с использованием балочных модели фрагментов метаматериала, а сплошные линии – теоретические зависимости (1.15)-(1.18), построенные с использованием найденных значений μ , k , E . Видно, что хорошая согласованность между континуальной и балочной моделями реализуется для ячейки с малым внутренним размером $a = 2$ мм в достаточно широком диапазоне значений параметра связанности до $N \approx 0.85$. Для ячейки, где внутренний размер $a = 6$ мм, изменение эффективных характеристик, в особенности коэффициента Пуассона, не согласуется с микро-дилатационной теорией. Поэтому для такой структуры эта модель не применима.



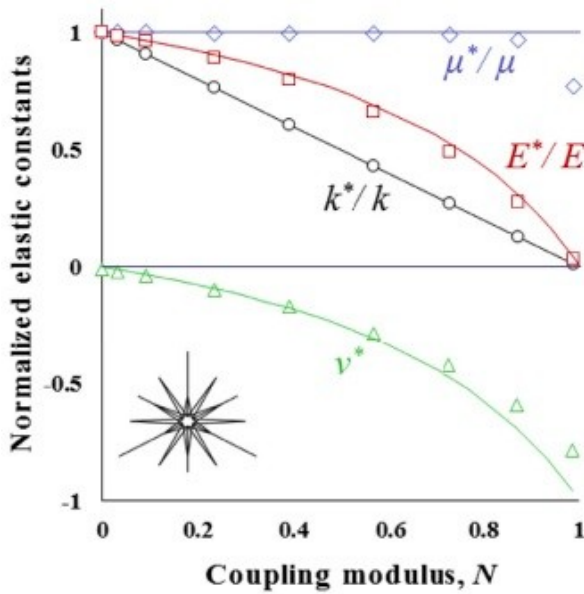
а



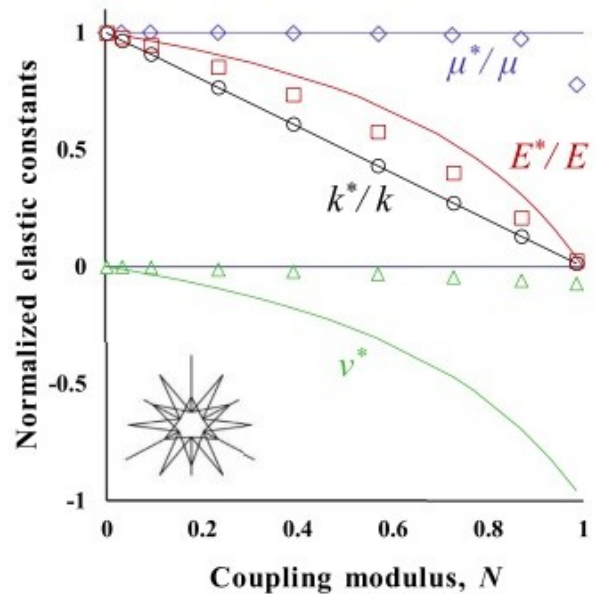
б

Рисунок 1.9. Зависимость эффективного модуля Юнга (а) и коэффициента Пуассона (б) от отношения жёсткостей $\bar{A}$.

Здесь: пунктиром показаны значения E^* , найденные аналитически при $\bar{A} \rightarrow \infty$.



а



б

Рисунок 1.10. Зависимость эффективных упругих констант метаматериала от параметра связанности N .

Здесь: маркеры – результаты численного моделирования балочных моделей;
сплошные линии – аналитическое решение континуальной
микро-дилатационной теории, где внутренний размер: а) $a = 2$ мм; б) $a = 6$ мм.

Оставшийся параметр нелокальных взаимодействий модели α , отвечающий за масштабные эффекты или связанных с ним масштабный параметра l , идентифицируются для метаматериала-ауксетика с геометрическим параметром $a = 2$ мм. На рисунке 1.12а представлено сопоставление численного и аналитического решений (см. раздел 1.7 п.7) одноосного неоднородного деформированного состояния балочных моделей метаматериала различной длины. Показано, что лучшее соответствие достигается при масштабном параметре длины равном $l = 1.4c$. Это значение масштабного параметра позволяет описать зависимость жёсткости балки от размерных эффектов при различных значениях параметра связанности N .

В то же время найденный масштабный параметр позволяет описывать с удовлетворительной точностью и зависимость изгибного модуля балки от параметра связанности при чистом изгибе. Сравнение соответствующих аналитического (см. раздел 1.7 п.7) и численного (1.28) решений показано на рисунке 1.12б. Стоит обратить внимание, что в задаче чистого изгиба масштабные эффекты незначительны, если масштабный параметр длины мал $l \rightarrow 0$. Вероятно, этот факт, отражает «схожесть» деформированных состояний при изгибе для разных моделей среды. Фактически, в задаче чистого изгиба масштабный параметр близок к нулю. Как видно из рисунка 1.12б, лучшее описание численных результатов при изгибе получается, если $l = 0.1c$. Но в то же время для этого значения l есть сильное отклонение аналитического решения от численного моделирования одноосной деформации. Поэтому выбор масштабного параметра метаматериала должен проводиться на основе анализа нескольких задач неоднородных деформаций. Деформированный вид балочных моделей метаматериала, реализующийся в рассматриваемых задачах неоднородных деформаций показаны на рисунке 1.11.

Наконец, параметр нелокальных взаимодействий определяется с использованием соотношения $\alpha = l^2 (\xi - \beta^2 / E)$, а также с учётом найденного значения масштабного параметра l и других параметров при различных значениях соотношений жёсткостей $\bar{A}$ (см. рис. 1.8). Результат представлен на рисунке 1.13. Оказывается, что зависимость $\alpha(\bar{A})$ близка к линейной, аналогично зависимости модуля жёсткости микроструктуры (рис. 1.8д).

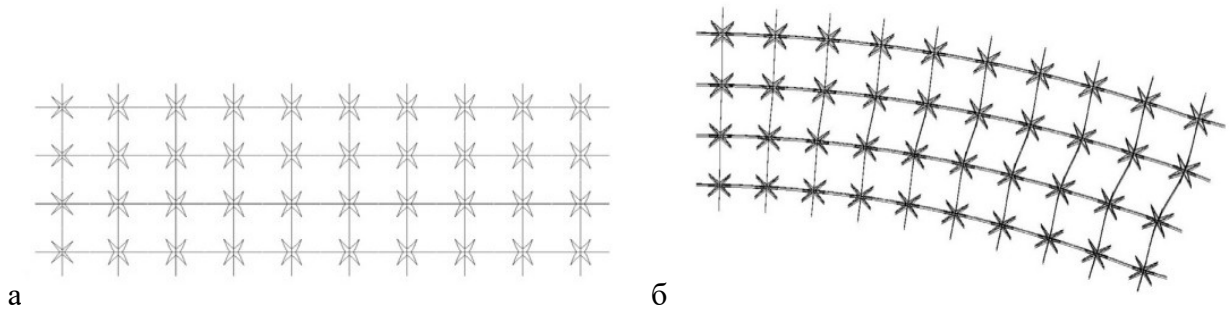


Рисунок 1.11. Вид сбоку деформированных состояний решётчатой балки метаматериала при: а) неоднородной одноосной деформации; б) чистом изгибе $N = 0.727$ ($\bar{A} = 25$).

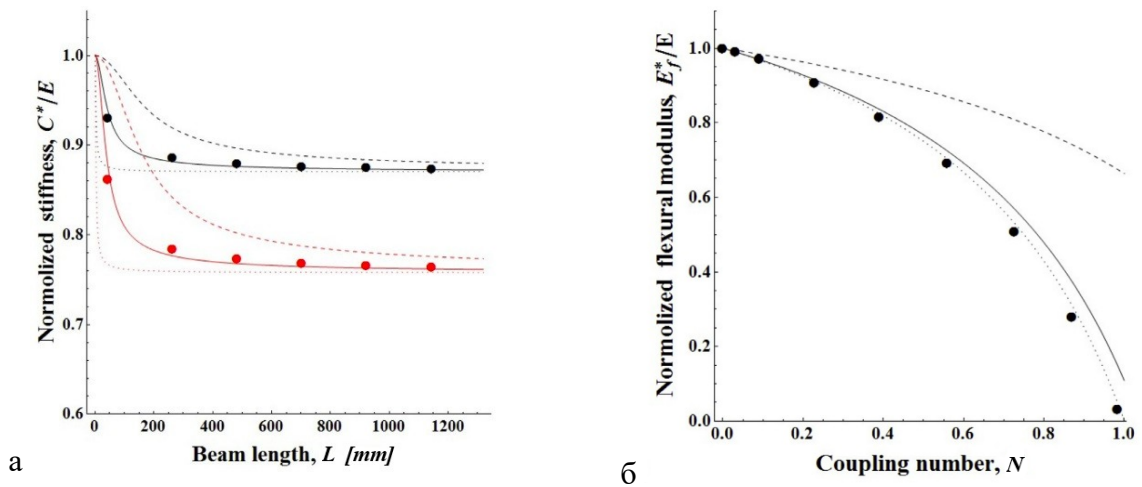


Рисунок 1.12. Сравнение аналитического решения в микро-дилатационной теории с численным решением рассматриваемой решётчатой балки при неоднородных деформациях: а) одноосное растяжение; б) чистый изгиб. Здесь: сплошные линии: $I = 1.4c$; пунктирные линии: $I = 5c$; точечные линии: $I = 0.1c$; чёрные линии (рис. слева) соответствуют структуре при $N = 0.39$ ($\bar{A} = 100$); красные линии соответствуют структуре при $N = 0.727$ ($\bar{A} = 25$).

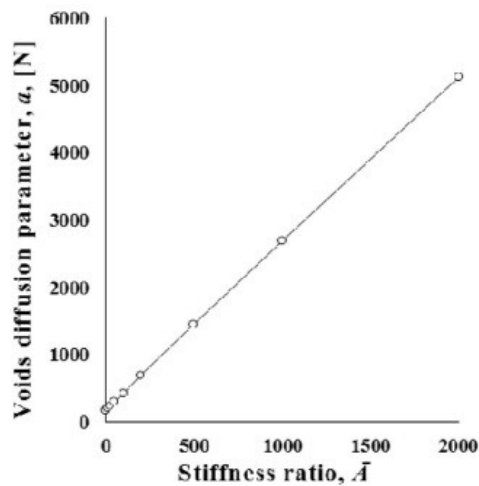


Рисунок 1.13. Зависимость параметра нелокальных взаимодействий α от отношения жёсткостей $\bar{A}$ для метаматериала с внутренним размером ячейки $a = 2$ мм.

Таким образом, показано, что рассматриваемые сетчатые метаматериалы-ауксетики могут моделироваться с применением континуальной микро-дилатационной теории упругости в достаточно широком диапазоне параметров. Более того, континуальная теория может быть применена для оптимизации структуры и эффективных свойств метаматериалов. Например, при заданном значении модуля сдвига можно контролировать и оптимизировать значение объёмного модуля, изгибного модуля, модуля Юнга и коэффициента Пуассона, изменяя только геометрические параметры ячейки метаматериала. Следует отметить, что в таких задачах оптимизации будут присутствовать как стандартные свойства континуальной среды, так и характеристики, значительно зависящие от микроструктуры метаматериала. Например, в континуальной теории будут меняться только модуль жёсткости микроструктуры ξ и параметр нелокальных взаимодействий α , если структура ячейки периодичности фиксирована, и только жёсткость самой взаимопроникающей структуры изменяется путём смены материала или размеров поперечных сечений стержней. Как следствие, будут меняться эффективные упругие свойства метаматериала k^* , E^* , ν^* , E_f^* и т. д., которые можно рассматривать как целевые функции. К постоянным (неизменяемым) характеристикам рассматриваемой структуры относятся модуль Юнга E , объёмный модуль k , модуль сдвига μ и параметр масштаба l . Также можно отметить, что если микро-дилатация внутри ячейки периодичности метаматериала не представляет интереса, тогда модулем собственной жёсткости микроструктуры ξ можно пренебречь, и использовать только параметр связанности N . Параметр связанности N определяет микро-дилатационные эффекты на уровне макроскопической деформации среды и определяет изменение относительной жёсткости взаимопроникающей структуры от очень низких значений ($N \rightarrow 1$) до очень больших значений ($N = 0$).

1.9. Выводы

Микро-дилатационная теория упругости применима для описания свойств и кинематики сетчатого метаматериала-ауксетика при ограничениях, накладываемых на упругие и геометрические параметры его ячейки периодичности. На примере описания этого метаматериала, фактически впервые осуществлена идентификация всех неклассических параметров микро-дилатационной теории. Предложен алгоритм (см. раздел

1.7) идентификации материальных констант среды с микро-дилатацией на основе численного моделирования сетчатых метаматериалов. Показано, что физический смысл микро-дилатации, в данном случае, заключается в изменении внутреннего размера ячеек периодичности в результате наличия гибких взаимопроникающих связей в структуре ячейки ауксетика.

Процедура предложенного алгоритма состоит в следующем. Сначала проверяется, что модуль сдвига метаматериала не зависит от масштабных эффектов и эффектов связанности. Это необходимые критерии применимости микро-дилатационной теории. Далее, параметр связанности находится из соотношения (1.17), в предположении равенства объёмного модуля в континуальной и в балочной моделях метаматериала. С использованием этих данных и известного значения микро-дилатации в ячейке периодичности под действием объёмной сжимающей нагрузки, определяются модули связанности и модули жёсткости микроструктуры. Затем находятся эффективный модуль Юнга и коэффициент Пуассона, и проверяется, что их зависимость от масштабного параметра соответствует микро-дилатационной теории. Это соответствие возможно, если эффективный коэффициент Пуассона стремится к $\nu^* \rightarrow -1$ при росте эффектов связанности в метаматериале. На последнем этапе, определяется масштабный параметр метаматериала из рассмотрения задач с неоднородной деформации. Здесь рассматривались две различные задачи неоднородных деформаций. После определения масштабного параметра производится простой пересчёт для определения параметра нелокальных взаимодействий.

В результате применения этого алгоритма все материальные константы теории определены для метаматериала с кубической симметрией. Показано, что модуль жёсткости микроструктуры и параметр нелокальных взаимодействий линейно пропорциональны относительной жёсткости взаимопроникающей структуры в ячейке периодичности метаматериала. Модуль связности значительно зависит от геометрических параметров ячеек. Также установлено, что жёсткость микроструктуры ξ и модуль связанности β не превышают 10–30% от объёмного модуля метаматериала в отсутствие эффектов микро-дилатации. Параметр α варьируется от нуля (при максимальных эффектах связанности) до значений в 5000–6000 (МПа*мм² = Н) при минимальных эффектах связанности, для которых эффективные свойства метаматериала близки к предельным значениям. Показано, что для идентификации ξ и β недостаточно знание о макроскопических деформациях среды. Необходимо учитывать изменение самой микро-дилатации ϕ в среде в процессе

деформирования. Геометрическая интерпретация микро-дилатации в ячейке периодичности метаматериала, рассмотренная в разделе 1.5, позволяет решить проблему идентификации этих параметров. Масштабный параметр длины l для рассматриваемого ауксетика является малым и сопоставим с размером ячейки периодичности метаматериала. Этот параметр не зависит от геометрических характеристик и жесткостей стержней в ячейке взаимопроникающей структуры, то есть он является независимой характеристикой среды аналогично параметру связанности.

Наконец, следует отметить, что не каждый тип метаматериала-ауксетика может быть описан микро-дилатационной теорией. Необходима инвариантность сдвиговых эффектов от микро-дилатации. Другими словами, микроструктура, приводящая к отрицательному коэффициенту Пуассона, не должна влиять на эффективный модуль сдвига материала. В рассматриваемом случае это условие было выполнено в довольно широком (но не во всём) диапазоне параметров модели. Более общие варианты реализующих масштабных и связанных эффектов могут требовать привлечения более сложных моделей обобщённых континуумов, учитывающих, в частности, влияние микро-деформаций на эффективный модуль сдвига рассматриваемой структуры.

2. Балки с сетчатой структурой

Разработка новых структурных метаматериалов с нетривиальным механическим поведением является сложной задачей, имеющей применение в авиационной и гражданской строительной отрасли. Такие метаматериалы отличаются относительно малым весом (lightweight structures) и способностью сопротивляться повреждениям (damage resistant) [21]. Они также находят применение в современных материалах для робототехники [122], а также в демпфирующих устройствах и оборудовании для поглощения шума [47, 184] и т.д.

При рассмотрении специальных метаматериалов с внутренними нелокальными структурными связями, справедливо использовать неклассическую модель, отличную от модели континуума Коши, которая не позволяет учесть, к примеру, размерные эффекты или хиральности, и не обеспечивает подробное описание таких структур для всех диапазонов параметров материала и особенностей их микроструктуры. Множество работ, посвященных изучению таких структур. Например, случайные сети из волокон — это один из неклассических материалов, которые существуют в природе и проявляют сильные размерные эффекты [150]. Механическое поведение таких материалов описывалось градиентной теорией упругости и среда со стесненным вращением [24-25]. Другим примером являются пены-аусетики (auxetic foams) и гранулированные системы (granular systems), которые могут быть описаны с помощью микрополярного континуума [46, 144]. Метод трёхмерной печати недавно использовался для создания неанізотропних микрополярных структур из малых металлических ячеек с эффектами хиральности [68]. Решётчатый метаматериал – аусетик (auxetic lattice metamaterial) с эффектами микродилатации подробно рассмотрен в Главе 1 [5*]. А также широко известные пантографические метаматериалы – один из классов материалов с искусственно созданной структурой. Их отличает неклассическое поведение, например, большие упругие деформации и высокая стойкость к повреждениям. Такие материалы могут быть описаны градиентной теорией упругости [31, 48-49, 63, 173].

Текущая часть настоящей диссертации посвящена изучению и определению кажущихся упругих характеристик протяженных и узких фрагментов сетчатых метаматериалов, состоящих из треугольных или ромбовидных ячеек периодичности. С макроскопической точки зрения такие метаматериалы можно представить балкой типа Эйлера-Бернулли для оценки деформаций под действием сосредоточенных или распределенных нагрузок и моментов. Примечательно, что подобные структуры

рассматривались в ряде работ. Для анализа сэндвич структур (sandwich structures), сетчатых балок (lattice beams), структур с решётчатым заполнителем (truss beams) и т.д. использовались различные модели обобщённого континуума [12, 89, 91, 143]. В таких работах применялись среды со стеснённым вращением, микрополярные и градиентные теории.

Далее будут рассмотрены два варианта теории градиентной балки Эйлера–Бернулли для описания эффективных (кажущихся) упругих характеристик рассматриваемых структур. Первый из них – так называемая модель градиентных балок с «одноосным напряженным состоянием», предложенная в работе [134]. Другая формулировка градиентных балок с «общим напряженным состоянием» была предложена позже в [94]. Исследования [82, 110-111, 129] посвящены изучению корректности этих теорий и их сопоставлению. Основные различия между этими теориями проявляются в задачах изгиба, где в формулировке теории с "общим напряженным состоянием" возникает неклассическая зависимость изгибной жёсткости от толщины балки. Однако в [110] было показано, что этот эффект не возникает в полуобратных трёхмерных решениях для задачи чистого изгиба. Корректная вариационная формулировка для теории градиентной балки с "одноосным напряженным состоянием" была предложена позднее в [111].

2.1. Геометрия балок с сетчатой структурой

Рассматривались протяженные и узкие фрагмента метаматериала, состоящего из повторяющихся ячеек периодичности ромбовидной и треугольной формы (рисунок 2.1). Рассматривались элементарные ячейки размером $d = 40$ мм. В таких ячейках в качестве элементов их образующих, были выбраны стержни круглого сечения с диаметром в 1 мм. Угол между стержнями/элементами в элементарных ромбических ячейках – 90° , а повернуты они на 45° таким образом, что реализованная структура обладала ортотропией с главными направлениями вдоль и перпендикулярно оси балки. Основное отличие между ромбовидными и треугольными элементарными ячейками заключается в присутствии горизонтальных связей в последних (см. рис. 2.1б). В результате границы балки с ромбическими элементарными ячейками формируются вершинами, являющимися пересечениями ближайших стержней, в то время как для балки с треугольными элементарными ячейками верхние и нижние границы включают горизонтальными стержни. Это различие в структуре ячейки является основной причиной различного механического

поведения и размерных эффектов для подобных метаматериалов, что будет показано далее в разделе 2.5.

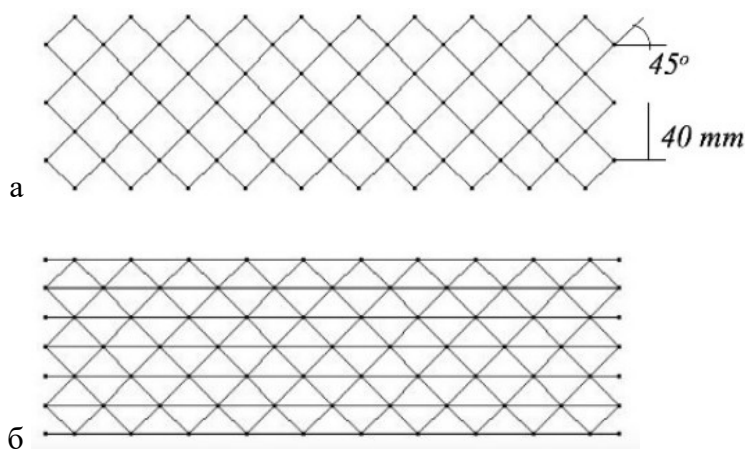


Рисунок 2.1. Сетчатая балка с ромбовидной и треугольной геометрией.

2.2. Численное моделирование

Упругое поведение рассматриваемых структур было исследовано с помощью численного моделирования в системе **Femap/Nastran**. В численном анализе были использованы балочные элементы (типа 'bar'), соответствующие модели Эйлера-Бернулли. Таким образом, в численных расчетах учитывается геометрия сетчатого метаматериала в целом и поведение каждого отдельного структурного элемента. Для определения упругого поведения материала задавались модуль Юнга $E = 2.5 \text{ ГПа}$ и коэффициент Пуассона $\nu = 0.35$. Стержни соединяются друг с другом в узлах жёстко, то есть с непрерывностью соответствующих смещений и силовых факторов.

Граничные условия, используемые в численном моделировании, показаны на рисунке 2.2а-г. Иллюстрации приведены только для балок с ромбовидной формой ячеек (ГУ для балок с треугольной структурой идентичны). Представленные условия являются стандартными. Однако на рисунке 2.2г показаны неклассические типы ограничений, обеспечивающие нулевые перемещения первых нескольких ячеек сетчатых балок (внизу слева). Длина этой области ограничения балки обозначается как x_0 . Такой тип граничных условий приводит к неоднородным деформациям модели даже при одноосном растяжении. В данном случае, оценка кажущейся жёсткости, основанная на выражениях (2.1), учитывает размерный эффект. Однако, как показано далее (раздел 2.4), этот тип ограничений (см. рис. 2.2г) связан с дополнительными граничными условиями, которые возникают в градиентной ТУ для градиентов перемещений в направлении нормали к поверхности

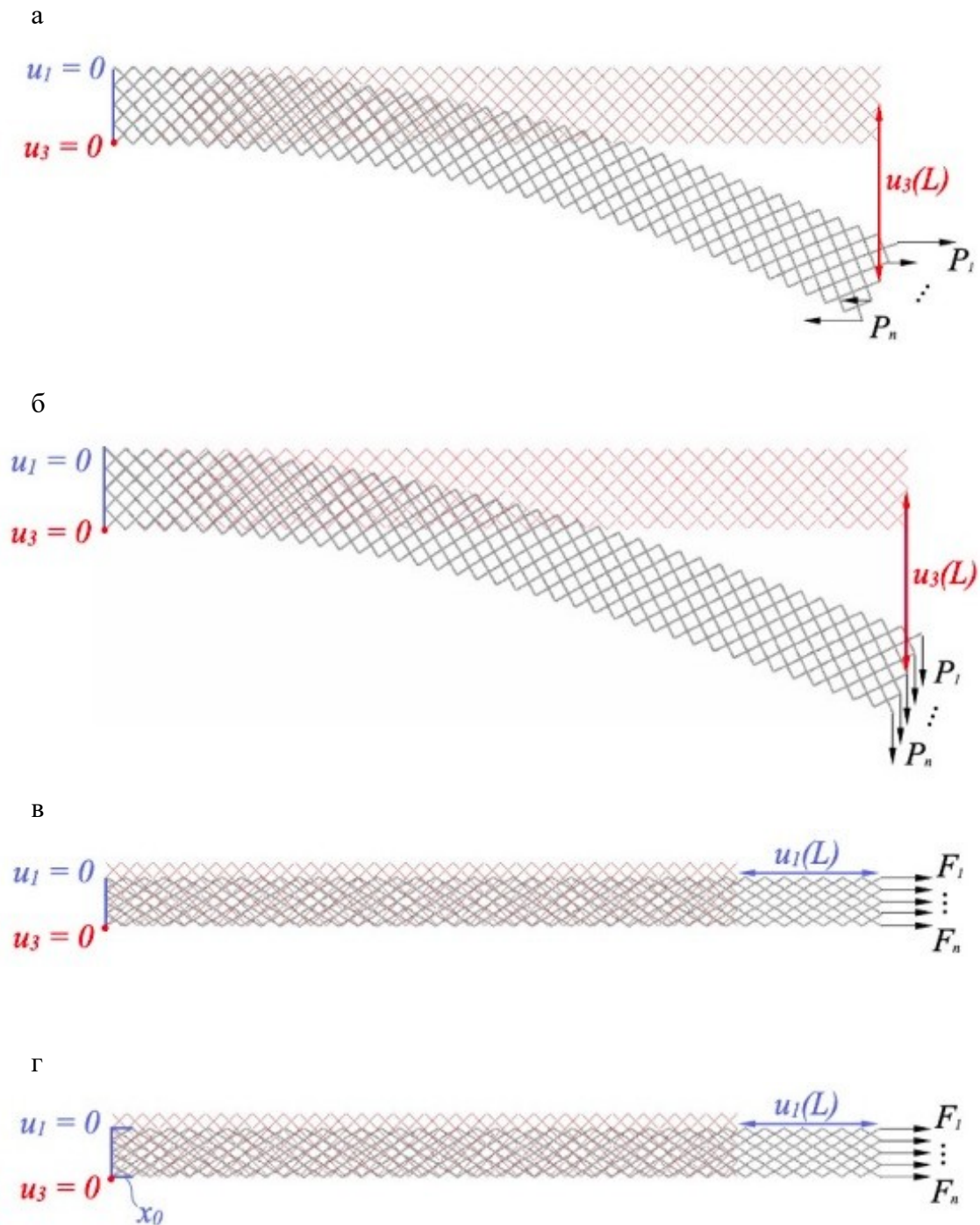


Рисунок 2.2. Граничные условия, задаваемые в численном моделировании для задачи:

а) чистого изгиба (момент $M = \sum_{i=1}^n z_i P_i$); б) консольного изгиба (перерезывающая сила $P = \sum_{i=1}^n P_i$);

в) растяжения (суммарное осевое усилие $F = \sum_{i=1}^n F_i$); г) неоднородное растяжение.

Здесь: z_i – расстояние между узлам (где приложена нагрузка) и нейтральной линией метабалки;

x_0 – длина области, где заданы дополнительные условия защемления балки (рис. г).

2.3. Идентификация параметров градиентной теории упругости для балок с сетчатой структурой

Кажущиеся упругие характеристики сетчатого метаматериала определяются с помощью подхода, аналогичного предложенного в первом разделе диссертации. Из численного решения определяются перемещения конечно-элементной модели при заданной нагрузке и применяется классическое решение для оценки её эффективных (кажущихся) упругих свойств. Данный подход подразумевает сравнения перемещений на конце фрагмента метаматериала и соответствующие ему перемещения классической балки с теми же геометрическими параметрами и граничными условиями. Исходя из этого сравнения определяется значение модуля Юнга классической (сплошной) балки с такими же перемещениями, как у решётчатого метаматериала. В общем, кажущаяся (упругая) характеристика зависит от граничных условий и размеров модели. Поэтому найденное значение модуля Юнга называется «кажущимся» (apparent) для решётчатой балки, поскольку оно является не только материальной характеристикой, но и структурной.

Такой подход удобен и может быть использован для анализа экспериментальных данных у нестандартных материалов [144], и он также используется в механике композиционных материалов, например, когда кажущаяся межслоевая прочность на сдвиг оценивается из эксперимента на сдвиг короткой балки согласно ASTM D2344. Таким образом, из эксперимента на чистый изгиб, консольный изгиб и одноосное растяжение, определяются соответствующие кажущиеся модули упругости решётчатой балки, используя следующие известные решения:

$$E_{PB} = \frac{ML^2}{2Iu_3(L)}, \quad E_{CB} = \frac{PL^3}{3Iu_3(L)}, \quad E_T = \frac{NL}{Au_1(L)} \quad (2.1)$$

где M - полный изгибающий момент, приложенный к концу балки в испытании на чистый изгиб (рис. 2.2а); P - полная изгибающая сила, приложенная к концу консольной балки (рис. 2.2б); $N = F$ - полное растягивающее усилие, приложенное к концу балки (рис. 2.2г); L - длина решетчатой балки (lattice beam); $I = bh^3 / 12$ и $A = bh$ - момент инерции и площадь сечения решетчатой балки, толщина которой равна h , а ширина - b ;

u_1, u_3 - перемещения конца балки, определяемые из численного моделирования.

2.4. Градиентные балочные теории

В градиентной теории упругости плотность энергии деформации зависит не только от деформации, но и от первого градиента деформации [14, 110]: $U = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}^{cauchy} \varepsilon_{ij} + \mu_{ijk} \varepsilon_{ij,k} \right)$

Также вводятся определяющие соотношения для классических напряжений, моментных (градиентных, т.е. высшего порядка) и тензора полных напряжений, соответственно:

$$\sigma_{ij}^{cauchy} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \mu_{ijk} = C_{ijklmn} \varepsilon_{mn,k}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{cauchy} - \mu_{ijk,k} \quad (2.2)$$

где C_{ijkl} – тензор модулей упругости; C_{ijklmn} – тензор модулей упругости шестого ранга;

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$ – тензор малых деформаций.

Так называемая модель «одноосного напряженного состояния» (uniaxial stress state), разработанная в работе [134], корректность которой подтверждается в [110-111], подразумевает, что влияние градиента деформации в поперечном направлении для тонкой балки незначительно, тогда плотность энергии деформации записывается по формуле:

$U = \frac{1}{2} \left(\sigma_{11}^{cauchy} \varepsilon_{11} + \mu_{111} \varepsilon_{11,1} \right)$. Тогда как для модели «общего напряженного состояния»

(general stress state) плотность энергии деформации для градиентной балки записывается в

виде [94]: $U = \frac{1}{2} \left(\sigma_{11}^{cauchy} \varepsilon_{11} + \mu_{111} \varepsilon_{11,1} + \mu_{113} \varepsilon_{11,3} \right)$.

Рассматривается балка длиной L с прямоугольным сечением $h \times b$.

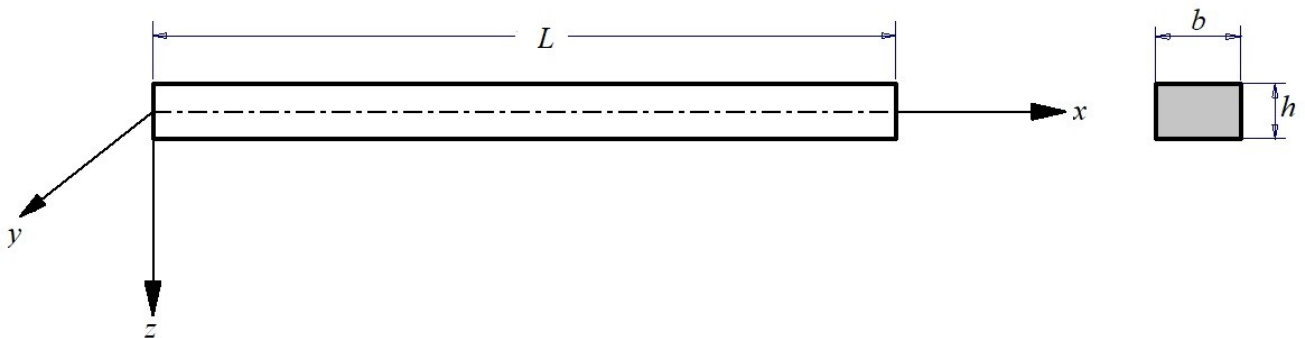


Рисунок 2.3. Балка с прямоугольным сечением.

Уравнения равновесия градиентной модели могут быть представлены в следующей виде, согласно [14, 111, 134]:

$$M'' - M_h''' + q = 0, \quad N' - N_h'' + f = 0, \quad x \in (0, L) \quad (2.3)$$

где $M_h = -I^2 EI w'''$ - градиентный изгибающий момент; $N = EA u'$ - осевое усилие;

$N_h = I^2 EA u''$ - градиентное осевое усилие (одинаково определяется для обеих моделей);

E - модуль Юнга; I - масштабный параметр; $u = u_1(x)$, $w = u_3(x)$ - осевые смещения и

прогибы; $I = bh^3 / 12$, $A = bh$ - момент инерции и площадь сечения решетчатой балки;

q, f - распределенные перерезывающая и продольная нагрузки. Согласно модели

«одноосного напряженного состояния» [134]: $M = -EI w''$. Однако, с другой стороны,

согласно модели «общего напряженного состояния» [94]: $M = -E(I + I^2 A) w''$.

Таким образом теории отличаются тем, что имеют различные определения для изгибающего момента. Примечательно, что другие силовые факторы одинаково определены в обеих теориях.

Граничные условия записываются в следующем виде:

$$\begin{array}{lll} N - N_h' = N_0 & \vee & u = u_0 \\ N_h = N_{h_0} & \vee & u' = \varepsilon_0 \\ x = 0, L: & M - M_h' = M_0 & \vee & w' = \theta_0 \\ \hline & M' - M_h'' = Q_0 & \vee & w = w_0 \\ & M_h = M_{h_0} & \vee & w'' = \kappa_0 \end{array} \quad (2.4)$$

где $N_0, u_0, N_{h_0}, \varepsilon_0, M_0, \theta_0, w_0, M_{h_0}, \kappa_0$ - осевая нагрузка, осевое смещение, продольное

градиентное усилие, осевая деформация, изгибающий момент, угол поворота, перерезывающее усилие, прогиб, градиентный момент и кривизна, задаваемые на концах балки в градиентной теории упругости.

Рассмотрим решение для задачи растяжения и изгиба в рамках модели (2.3)-(2.4). Постановка задачи чистого изгиба можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 & M'' - M_h''' = 0 \\
 x = 0, L: & \quad M - M_h' = M_0 \quad \Rightarrow \quad M \equiv M_0, \quad M_h \equiv 0 \\
 & \quad M' - M_h'' = 0 \\
 & \quad M_h = 0
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Таким образом, для модели «одноосного напряженного состояния» получаются, что кажущийся модуль упругости при чистом изгибе – постоянный и оценивается как модуль Юнга из одноосного растяжения $E_{PB} = E_T$. Для модели «общего напряженного состояния» возникает зависимость от масштабного параметра при чистом изгибе:

$$E_{PB} = E_T \left(1 + \frac{I^2 A}{I} \right) = E_T \left(1 + 12 \frac{I^2}{h^2} \right).$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Уравнения для} \quad x \in (0, L) \quad M'' - M_h''' = 0 \\
 & \text{консольно-закреплённой} \\
 & \text{балки при чистом изгибе} \quad \underline{x = 0}: \quad w = 0, \quad w' = 0, \quad w'' = 0 \\
 & \text{принимают следующую} \\
 & \text{форму:} \quad \underline{x = L}: \quad M - M_h' = 0, \quad M' - M_h'' = P, \quad M_h = 0
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Решение этой задачи может быть получено аналитически. Таким образом, оценка кажущегося модуля упругости для консольно-закреплённой балки согласно модели:

- «одноосного напряженного состояния» основана на соотношении [110]:

$$E_{CB} = E_T \frac{\bar{L}^3 \cosh \bar{L}}{\bar{L} (3 + \bar{L}^2) \cosh \bar{L} + 3 (1 - \bar{L}^2) \sinh \bar{L} - 6 \bar{L}} \tag{2.7}$$

- «общего напряженного состояния»:

$$E_{CB} = E_T \frac{\hat{L}^3 \sqrt{1 + 12 \frac{I^2}{h^2}} \cosh \hat{L}}{\hat{L} (3 + \hat{L}^2) \cosh \hat{L} + 3 (1 - \hat{L}^2) \sinh \hat{L} - 6 \hat{L}}, \tag{2.8}$$

где $\bar{L} = L / l$ – приведённая длина, а также $\hat{L} = \bar{L} \sqrt{1 + 12 \frac{I^2}{h^2}}$.

Из полученных решений (2.7), (2.8) можно видеть, что для модели «общего напряженного состояния», неклассическое изгибное поведение градиентной балки значительно зависит от её толщины (строго говоря, от отношения толщины и масштабного параметра длины h/l). И напротив, для модели «одноосного напряженного состояния» неклассические эффекты определяются приведённой длиной балки L/l , как следствие влияния граничных условий).

Также можно найти решения для задач одноосного растяжения, которые совпадают в обеих рассматриваемых градиентных моделях. Для определения модуля Юнга E'_T можно применить континуальный подход:

$$\begin{aligned}
 x \in (0, L) \quad & N' - N_h'' = 0 \\
 \underline{x=0}: \quad & u = 0, \quad N_h = 0 \quad \Rightarrow \quad N \equiv N, \quad N_h \equiv 0, \\
 \underline{x=L}: \quad & N - N_h' = F, \quad N_h = 0
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

что означает независимость кажущегося модуля упругости от размерного эффекта при однородном растяжении.

Неоднородность одноосных деформаций можно реализовать, если задать ограничения деформации на закрепленном конце балки (соответствующее обобщенное граничное условие доступное в градиентных балочных теориях):

$$\begin{aligned}
 x \in (0, L) \quad & N' - N_h'' = 0 \\
 \underline{x=0}: \quad & u = 0, \quad u' = 0 \quad \Rightarrow \quad N = F \left(1 - \frac{\cosh(\bar{L} - \bar{x})}{\cosh \bar{L}} \right) \\
 \underline{x=L}: \quad & N - N_h' = F, \quad N_h = 0 \quad N_h = lF \frac{\sinh(\bar{L} - \bar{x})}{\cosh \bar{L}}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

В этом случае находится следующее аналитическое решение для кажущегося модуля упругости балки, учитывающее влияние размерных эффектов, связанных с длиной балки:

$$E'_T = E_T \frac{\bar{L}}{\bar{L} - \tanh \bar{L}} \tag{2.11}$$

2.5. Описание размерных эффектов в задачах деформации сетчатых балок и идентификация масштабных параметров градиентной ТУ

Данный раздел посвящается сопоставлению механического поведения сетчатой балки (см. раздел 2.3) и соответствующих континуальных градиентных балочных моделей (см. раздел 2.4). Сравнивая кажущиеся упругие характеристики, определяемые из численных решений для рассматриваемых балок (2.1) и аналитических решений для градиентных балок Эйлера-Бернулли (2.7), (2.8), (2.11), можно определить материальные параметры (масштабный параметр и модуль упругости) последней. Таким образом, осуществляется гомогенизация сетчатых структур для эффективной непрерывной среды, описываемой однопараметрической градиентной моделью по Айфантису.

Прежде всего рассматривается поведение консольно-закреплённой сетчатой балки. На рисунке 2.4 представлены зависимости эффективного изгибного модуля E_{CB} от размеров балки для двух типов элементарных ячеек. Здесь маркеры соответствуют результатам численного моделирования, а линии соответствуют решениям градиентной балки, которые были построены путём подбора масштабного параметра l . Значения кажущихся жёсткостей нормированы по модулю Юнга E_T , который был получен из моделирования одноосного растяжения при однородных деформациях (рис. 2.2в). Для балки с ромбовидной формой ячеек - $E_T = 8$ МПа, а для треугольных ячеек - $E_T = 62$ МПа.

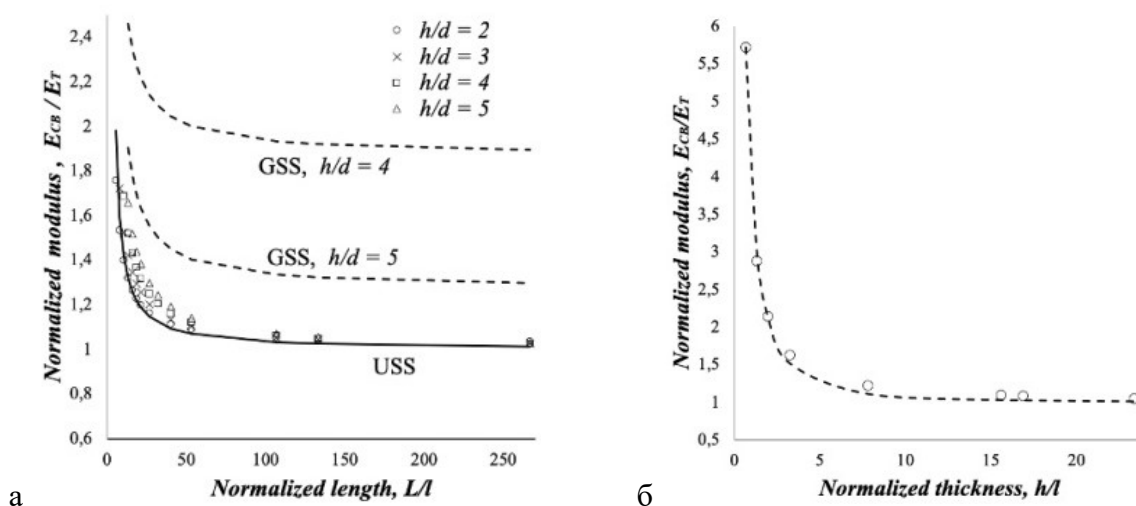


Рисунок 2.4. Кажущаяся жёсткость консольной балки с ромбовидной (а) и треугольной (б) элементарной ячейкой.

Здесь: маркеры – КЭ решение; линии – аналитические решения градиентной ТУ.

Здесь: сплошные линии – модель «одноосного напряженного состояния»;
пунктирные линии – модель «общего напряженного состояния».

На рисунке 2.4а представлены результаты для балок с ромбовидными ячейками. Видно, что эффективные свойства структуры с такой геометрией соответствуют модели «одноосного напряженного состояния»: кажущийся модуль консольной балки E_{CB} существенно зависит от длины балки и практически не зависит от её толщины (2.7). Масштабный параметр определён для этой структуры и равен $l = 15$ мм. Это значение было получено для тонких балок с двумя ячейками вдоль толщины. Для более широких балок возникают некоторые отклонения между численными и подобранным аналитическим решением модели «одноосного напряженного состояния» согласно подходу в [134], когда отношение длины к ширине меньше 10 (короткая балка), при которых теория Эйлера-Бернулли может быть уже не применима. Тем не менее, очевидно, что модель «общего напряженного состояния» не может быть применена для описания упругих свойств балок с ромбовидной структурой, потому что она прогнозирует сильную зависимость кажущейся жёсткости от толщины h балки в том числе для балок большого удлинения (см. рис. 2.4а - пунктирные линии), что не возникает при численном моделировании с подобной геометрией.

Для балок с треугольными элементарными ячейками результаты схожи с выводами, представленными в [91]. Такие структуры подчиняются модели «общего напряженного состояния», и их эффективные упругие характеристики существенно зависят от толщины балки. Эта зависимость показана на рисунке 2.4б. Определенное значение масштабного параметра для таких структур составляет $l = 31$ мм.

При чистом изгибе (см. рис. 2.2а) обнаружено, что для балки с ромбовидной ячейкой кажущаяся жёсткость E_{PB} не зависит от размеров и равна значению E_T , однако для треугольных ячеек характеристика E_{PB} взаимосвязана с толщиной и определяется как для E_{CB} .

В последнюю очередь рассматривается поведение балок с различными элементарными ячейками при неоднородной одноосной деформации (см. рис. 2.2г). Определённые значения модуля упругости E'_T для таких граничных условий представлены на рисунке 2.5. Видно, что размерные эффекты для обеих структур – подобны: жёсткость E'_T растёт с уменьшением длины балки. В ромбических ячейках (рис. 2.5а) реализуются отклонения между численным решением для широких балок и соответствующим аналитическим приближением (2.11). Это следствие рассматриваемой упрощенной теории

балок, которая не применима к коротким балкам. Для треугольных ячеек можно наблюдать точное совпадение между численными и аналитическими решениями (см. рис. 2.5б).

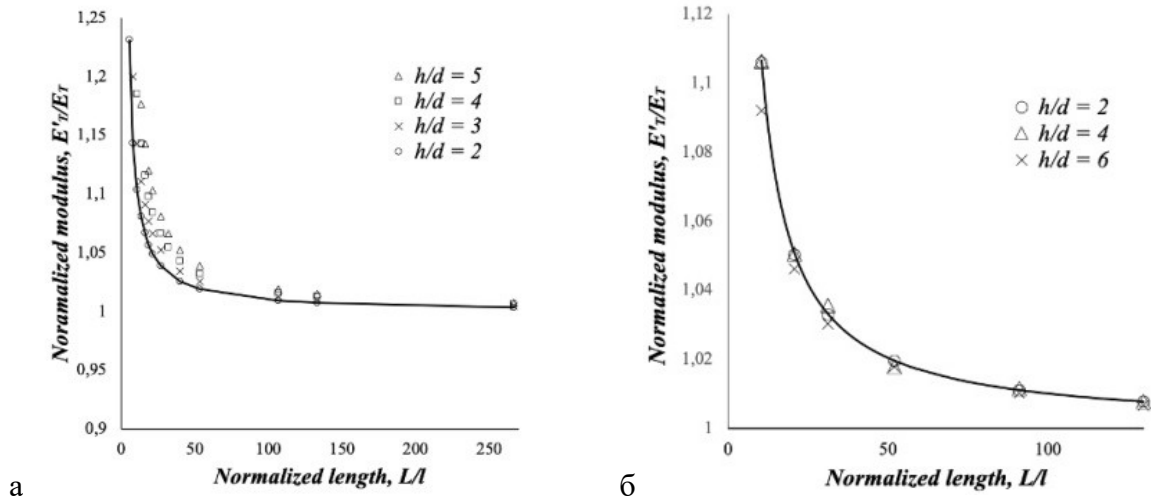


Рисунок 2.5. Кажущаяся жёсткость сетчатой балки с ромбовидной (а) и треугольной (б) элементарной ячейкой согласно задаче неоднородного одноосного растяжения.

Здесь: точки – КЭ решение; линии – аналитическое решение из градиентной ТУ.

Отдельно стоит обратить внимание, что масштабный параметр l , используемый в аналитических решениях для одноосного растяжения (2.11), был таким же, как и для задач изгиба. А также важным моментом является оценка размера области x_0 , которая необходима для задания ограничений по перемещениям в КЭ расчёте для реализации неоднородных деформаций (см. рис. 2.2г). Как оказалось, что достигнутая согласованность численных результатов и аналитических выкладок применяемых балочных теорий возможна, когда значение x_0 равно масштабному параметру l , определенному в задачах изгиба. Другими словами, физический смысл дополнительных граничных условий для деформаций градиентной балки ($x=0$: $u'=0$ из граничных условий в (2.10))

заключается в том, что в реальной конструкции размер закреплённой области на границе имеет тот же порядок, что масштабный параметр длины.

2.6. Выводы

Рассмотрена возможность применения двух различных формулировок балочных моделей градиентной теории упругости для балок с сетчатой структурой. Одна из применяемых моделей – модель «одноосного напряженного состояния», другая – «общего напряженного состояния». Согласно аналитическим решениям, полученным для задач изгиба (чистого и консольного), а также неоднородного одноосного растяжения, было проведена численная валидация и идентификация параметров однопараметрической градиентной теории. Показано, что предложенная геометрия балок с геометрией ячеек в виде ромбов демонстрирует масштабные эффекты, характерные балочной модели с «одноосным напряженным состоянием». Этот результат получен впервые. Ранее аналогичные эффекты были установлены только для сетчатых балок с треугольными ячейками периодичности, которые, напротив, демонстрируют масштабные эффекты соответствующие модели с «общим напряженным состоянием». Идентифицированные значения масштабных параметров для рассмотренных вариантов геометрии сетчатых балок не превышают размера ячейки.

3. Трёхслойные балки с заполнителями из нелокальных метаматериалов

Данная Главе 3 будет посвящена трёхслойным балкам, которые широко известны также как сэндвич балки (sandwich beams). Такие структуры состоят из несущих слоёв (верхний/нижний) и заполнителя между ними. Как было ранее отмечено, основной особенностью таких структур является их сравнительный малый вес, и в тоже время такие конструкции обладают высокой удельной жёсткостью и прочностью, и могут использоваться во многих функциональных приложениях, что подтверждается исследованиями [26, 65, 76, 105, 172].

В данном разделе диссертации исследуются статические и динамические характеристики плоских сэндвич балок с сетчатым заполнителем (sandwich beams with lattice core), где вводятся различные типы соединений между элементами/стержнями заполнителя. В Главе 2 рассматривались плоские сетчатые балки, поэтому здесь было решено включить в качестве заполнителя сэндвич балки подобную структуру, а также ввести дополнительные связи между элементами заполнителя. Идея рассматриваемых далее вариантов геометрии заполнителей основана на применении так называемых пантографических метаматериалов. Это структуры, которые, как было показано, демонстрируют существенные нелокальные эффекты в механическом поведении, а их эффективные свойства могут быть описаны в рамках градиентной теории упругости [14, 52]. Идентифицированные значения масштабных параметров для таких метаматериалов значительно превышают размер их ячейки периодичности, что говорит об их потенциале применения в качестве энергопоглощающих материалов. В отличие от рассмотренных в первых двух главах вариантах геометрии метаматериалов, в которых найденные значения масштабных параметров не превышают размеров одной-двух ячеек периодичности, в пантографических метаматериалах значения масштабного параметра могут быть сопоставимы с размером образца за счет присутствия протяженных связей, объединяющих все ячейки периодичности в данном сечении структуры и обеспечивающих нелокальное поведение материала [14, 52].

Заметим, что существует известная аналогия между масштабными параметрами, вводимыми в моделях обобщённых континуумов и в механике разрушения [9, 188]. Поэтому при качественном анализе и выборе метаматериалов для приложений, связанных с ударной прочностью и/или трещиностойкостью, целесообразно выбирать структуры, в которых масштабные параметры велики. Такие структуры будут обладать более высокой

эффективной вязкостью разрушения, то есть энергетические затраты на образование единицы новой поверхности в них будут высоки. Следуя именно этой идее, далее были выбраны и сопоставлены варианты метаматериалов с высокими характерными значениями масштабных параметров – метаматериалы пантографического типа. Как будет показано в данной главе, в условиях динамического нагружения они демонстрируют значительное превосходство по сравнению со стандартными плоскими сетчатыми заполнителями (теоретически рассмотренными в [Главе 2](#)).

3.1. Материал, геометрия и изготовление

Трёхслойные балки были изготовлены с помощью аддитивных технологий (3D-печать), а именно селективного лазерного спекания (SLS) на оборудовании **EOS INT P395** (Германия), в качестве материала был выбран порошок - полиамид 12 (*Polyamide 12*). Полученный материал, называемый *PA2200* (согласно классификации **EOS**), является вариацией нейлонового полимера с добавлением белого пигмента. Такой материал и его аналоги широко применяются аэрокосмической и транспортной промышленности, в системах хранения и др. [153, 168]. *PA2200* обычно имеет пористость около 10% для стандартных режимов печати, рекомендованных производителем оборудования.

Напечатанные образцы были длиной 140 мм и высотой 45 мм. Ширина несущих слоёв составляла 15 мм, а толщина - 3 мм. Предлагаются четыре варианта решётчатых заполнителей (рис. 3.1). Все заполнители представляют собой наклонные (под углом в 45°) стержни квадратного сечения размерами 4×4 мм. Варианты первых трёх связей стержней в заполнителе относятся к пантографическим структурам (см. рис. 3.2). Такие заполнители состоят из двух стержневых семейств, лежащих в двух параллельных плоскостях. Стержни одного семейства имеют одинаковый угол наклона в $\pm 45^\circ$, соответственно. Расстояние (зазор) между стержнями из разных семейств составляло 0,6 мм. Это минимальное значение зазора, которое гарантирует отсутствие эффектов переплавления во время 3D-печати. Стержни из разных семейств соединялись друг с другом в узлах пересечениях.

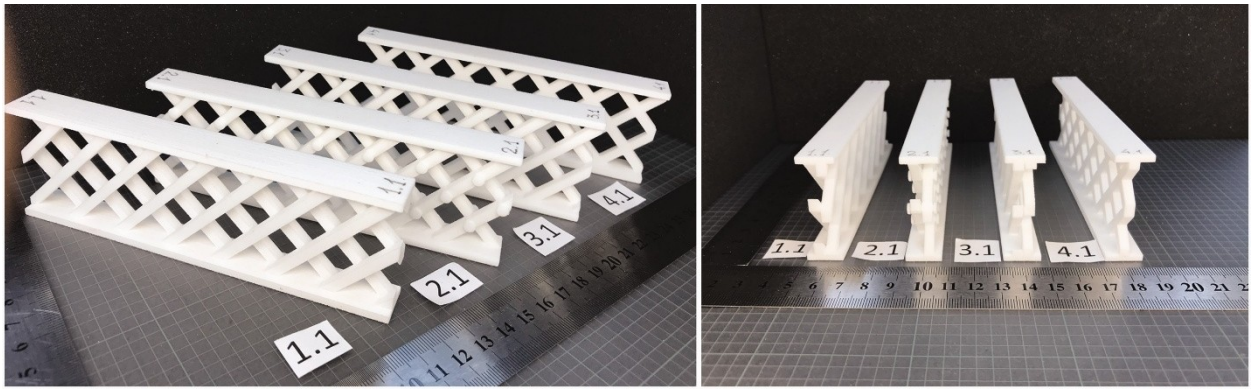


Рисунок 3.1. Напечатанные сэндвич балки из PA2200.



Рисунок 3.2. Варианты связей заполнителя. Слева направо: жёсткое соединение, шарнирное соединение, отсутствие связей, стандартная решётка (идеальное пересечение).

3.2. Варианты связей заполнителя

Вводится понятие связи заполнителя между стрижнями из разных наборов. Примеры связей, используемые в решётчатых заполнителях, представлены на рисунке 3.2. Связь для *Variant 1* представляет собой небольшое жёсткое соединение (short stiff connector), которое объединяет стрижни из разных семейств. Такая связь обеспечивает передачу результирующих сил, изгибающих моментов и крутящего момента между соединенными стержнями. Связь для *Variant 2* представляет собой шарнирное соединение в зонах пересечения стрижней (т.е. вводится дополнительная степень свободы на взаимный поворот пересекающихся стержней). Именно такой вариант заполнителя является классической пантографической структурой [19]. Диаметр отверстий петель - 3.2 мм, диаметр шарниров - 2 мм, длина шарниров - 9.8 мм. Все элементы такого заполнителя печатались одновременно с другими деталями (то есть трёхслойный образец с неотделимыми соединениями - шарнирами). Следующий тип пантографического заполнителя - *Variant 3*, предполагающий любое отсутствие связей между стержнями из соседних семейств. Такие стержни крепятся только к несущим слоям. *Variant 4* — это стандартная решётка из наклонных пересекающихся стержней,

лежащих в одной плоскости. Такие стержни непрерывно соединяются друг с другом, образуя идеальное пересечение в узлах.

Примечательно, что для пантографических вариантов заполнителя (*Variants 1-3*) наблюдается некоторая структурная анизотропия из-за несимметричного расположения стержней в заполнителе относительно сагиттальной плоскости. Как следствие, для таких типов заполнителя в процессе нагружения в одной плоскости возникают выходящие из плоскости деформации и скручивание. Здесь сохранена анизотропия, поскольку в одно- и двухслойных структурах её невозможно избежать. Для разработки симметричных структур следует создавать больше слоёв/листов (по крайней мере, четыре-) с симметричным расположением балок (соответствующая структура может быть обозначена как $[\pm 45^\circ]_s$ в общепринятых обозначениях механики композитов [169]). В таких типах заполнителей возникнет дополнительный параметр - расстояние между слоями, которое может оказать дополнительное влияние на удельные свойства балок. Такие более сложные структуры в текущей части диссертации не рассматриваются.

Представленный ранее рисунок 3.1 иллюстрирует напечатанные образцы сэндвич балок. Для экспериментальных испытаний было напечатано семь однотипных образцов каждого варианта заполнителя (всего 28 образцов). Технология SLS выполнялась с использованием стандартных режимов, рекомендованных производителем оборудования. Сэндвич балки были ориентированы в горизонтальной плоскости рабочей камеры таким образом, чтобы направление построения было ориентировано вдоль нормали к длине и высоте балок. Такая ориентация наиболее предпочтительна, поскольку в горизонтальной плоскости материал PA2200 обладает изотропными свойствами, а также высокой жёсткостью и прочностью. Некоторое снижение механических свойств осуществляется в направлении построения, но это не важно для рассматриваемых типов образцов и схем испытаний, поэтому не учитывалось в расчетах. Визуально, после изготовления образцов искажений геометрии или явных дефектов в них обнаружено не было.

Напечатанные образцы имеют практически одинаковую массу, хотя масса *Variant 4* немного ниже остальных. А именно, рассматриваемые сэндвич балки имели следующие массы: $M_1 = 25(\pm 0.15)$ гр; $M_2 = 25.4(\pm 0.55)$ гр; $M_3 = 24.6(\pm 0.58)$ гр; $M_4 = 23.3(\pm 0.36)$ гр.

Также удельная погонная масса составляла: $m_1 = 173$ гр/м; $m_2 = 175$ гр/м; $m_3 = 170$ гр/м; $m_4 = 160$ гр/м. Как видно, вариация по удельной массе образца различного типа заполнителя не превышает 4%. Также как было выше упомянуто (см. раздел 3.1), для правомерности сравнения сэндвич балок между собой - все образцы были геометрически идентичными (одинаковые внешние размеры, толщина несущих слоёв, угол наклона и размеры поперечного сечения стержней, одинаковое количество ячеек). Геометрическое различие относилось только к рассматриваемым вариантам связей между семействами стержней в заполнителе (в двух параллельных плоскостях – *Variants 1-3*, или в одной плоскости – *Variant 4*).

3.3. Экспериментальные испытания

Экспериментальные испытания проводились по трёхточечной схеме. Данная схема широко применяется для испытаний сэндвич структур в статических и динамических режимах нагружения. Более того, схема трёхточечного изгиба подразумевает действие сосредоточенной нагрузки, что очень важно для проверки сетчатых заполнителей, которые не обеспечивают сплошную поддержку несущих слоёв. Расстояние между опорами в статических и динамических испытаниях составляло 40 мм, таким образом, чтобы отношение расстояния между опорами к толщине было 0.9. Основные задачи испытаний – определение жесткости и прочности балок в условиях поперечного смятия от действия локализованной нагрузки.

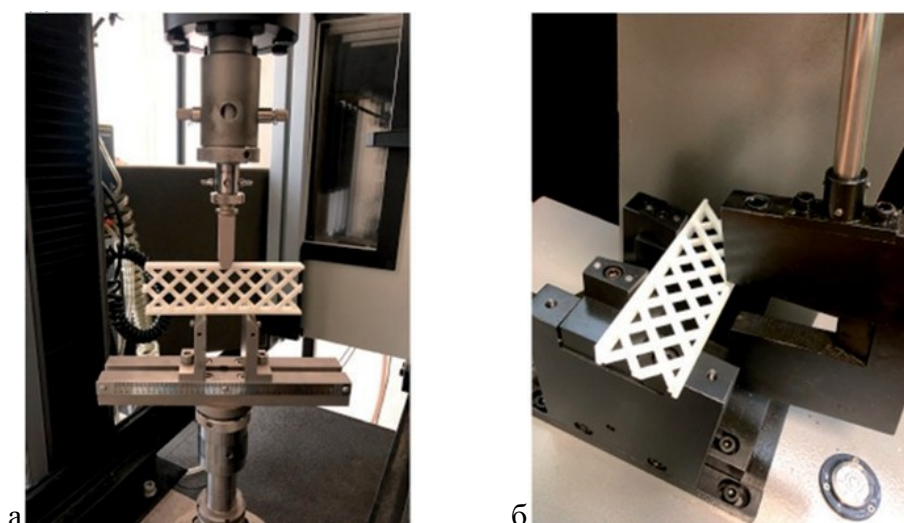


Рисунок 3.3. Иллюстрации: а) трёхточечного изгиба; б) ударных испытаний по Шарпи. Здесь: слева - представлено оборудование **Instron 5969**.

В испытаниях образцы располагались симметрично на опорах и нагружались по центру. Радиусы опор составляли 5 мм (нижние) и 2 мм (верхняя, центральная). Скорость перемещения траверсы в испытаниях составляла 1 мм/мин. Прогибы образцов измерялись по перемещениям траверсы. Статические изгибные испытания выполнялись в соответствии с международным стандартом ASTM D 790. Кривые нагрузка/прогиб регистрировались до падения нагрузки на 60% или же до полного сжатия (смятия) заполнителя. Также для более содержательной картины, деформации образцов были дополнительно оценены с помощью метода корреляции цифровых изображений (**Digital Image Correlation - DIC**). Чёрно-белый узор был создан на поверхности образцов с помощью красок-спреев. Изображения боковой поверхности образцов получались с помощью камеры **Nikon D5500** с разрешением 24 мегапикселя. Для обработки таких изображений и оценки распределения деформаций Грина-Лагранжа использовалось ПО **Digital Image Correlation Engine (DICE)**.

Динамические испытания проводились на оборудовании для оценки ударной вязкости по Шарпи (ASTM D 6110, рис. 3.3б). Образцы располагались горизонтально на опорах испытательной машины и подвергались удару молота. Начальная энергия удара E_0 определялась путём поднятия молота до определённого угла (на определённую высоту). Было проведено по шесть испытаний образцов одного и того же типа, увеличивая энергию удара в диапазоне от 5.4 до 20 Дж. Значение поглощенной энергии E было оценено с помощью формулы $E = E_0 - E_1$, где E_1 — это оставшаяся энергия в молоте после удара. Эта энергия E_1 определялась по стандартной технике для испытаний по Шарпи через высоту подъёма маятника после удара. Ударная прочность образцов с различными типами заполнителя оценивалась как значение E после удара при наименьшей начальной энергии E_0 , в котором этот тип образцов был разрушен.

Для оценки режимов разрушения рассматриваемых образцов использовалась высокоскоростная камера **VideoSprint (Videoscan, РФ)** с частотой съёмки 1000 кадров/секунду с разрешением 1280×500 пикселей.

3.4. Численное моделирование удара

Экспериментальные результаты динамических испытаний сэндвич балок с различными типами заполнителя сравнивались с конечно-элементным (КЭ)

моделированием. Численное моделирование испытаний на удар проводилось с помощью явного динамического решателя **Ansys LS-Dyna**. Рассматривался временной период от начала контакта между молотом и образцом до полного разрушения последнего. Этот период времени составлял около 0.015.....0.025 секунд для образцов с различными типами заполнителя, что соответствует экспериментальным результатам (продолжительность разрушения образцов была оценена с помощью высокоскоростной камеры **VideoSprint**). При моделировании сэндвич балок использовались стандартные тетраэдральные конечные элементы (тип TET13, 4-узловой явный динамический элемент), рекомендованные **Ansys**. Размер конечных элементов составлял 1 мм. Суммарное число узлов приблизительно составило $6 \cdot 10^4$, а элементов – $3 \cdot 10^5$. Коэффициент hourglass составлял 0.1. Эффекты демпфирования не учитывались.

Для задания упругопластического поведения материала *PA2200* использовались следующие значения параметров: модуль Юнга $E_{Young} = 1.3$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.35$, предел текучести $\sigma_{yield} = 50$ МПа и касательный модуль $E_{tan} = 100$ МПа. Примечательно, что эти свойства близки, но ниже, чем у стандартного материала *Nylon* из библиотеки **Ansys**. Нейлон имеет схожий состав с *PA2200*, однако он является сплошным (без пористости) высокопрочным материалом, используемым, например, в волокнистых композитах. Жёсткое поведение задавалось для стальных опор и молота/ударника, так как их модули упругости и предел текучести значительно выше, чем у *PA2200*. Опоры и молот моделировались только внешними поверхностями, непосредственно контактирующими с образцами (рис. 3.4). Для задания полной массы молота $M_{pendulum}$ была присоединена точечная масса к поверхностной КЭ модели ударника.

В качестве граничных условий использовались ограничения на смещения опор и задавалась скорость молота V_o в перпендикулярном направлении к поверхности несущего слоя. Значение этой скорости было рассчитано в соответствии с условиями экспериментальных испытаний по формуле:

$$V_o = \sqrt{\frac{2E_o}{M_{pendulum}}} \quad (3.1)$$

Остаточная энергия была рассчитана по остаточной скорости (кинетической энергии) молота после удара. Ударная прочность образцов в расчетах была оценена как

значение E_0 , при котором образец разрушался, а оставшаяся энергия молота не превышала значения $0.1E_0$ (в численных решениях возникают некоторые отклонения результатов из-за накопления ошибок округления, так что значение ударной прочности может быть найдено только с некоторым приближением).

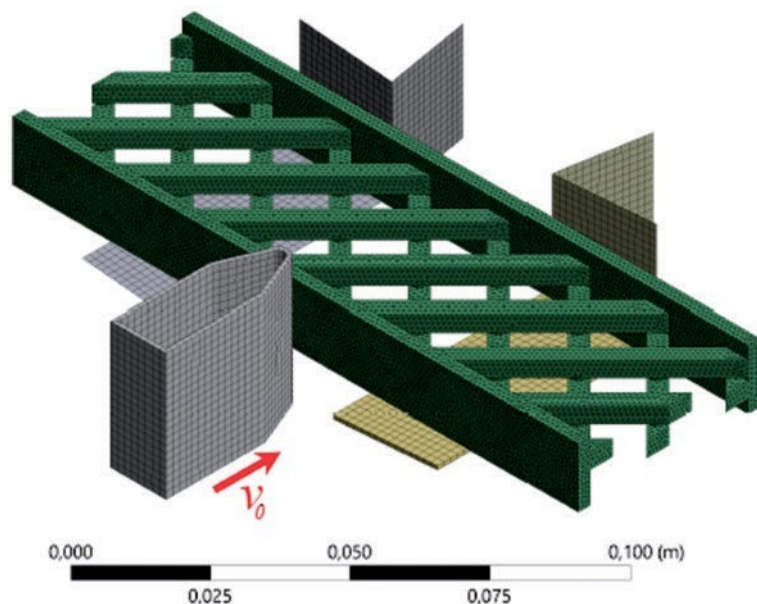


Рисунок 3.4. Конечно-элементное сеточное разбиение модели в расчетах на удар.

Одной из основных задач численного моделирования стало определение подходящего критерия разрушения для *PA2200*, который позволил бы описать наблюдаемые в эксперименте явления. Из предварительных расчётов стало ясно, что стандартные критерии, такие как максимальные пластические деформации, критерий максимального напряжения сдвига или критерий максимальных главных напряжений/деформаций, не позволяют описать полученные экспериментальные результаты по прочности на удар и по изменению механизмов разрушения образцов при динамической нагрузке. Все эти критерии предсказывают наивысшую ударную прочность для *Variant 4* среди прочих, что противоречит экспериментальным динамическим испытаниям, в которых этот вариант был самым слабым при ударе (см. раздел 3.6). Тот же результат был получен при использовании критерия Джонсона-Кука, учитывающего скорости деформации. Наконец, было обнаружено, что релевантные результаты можно получить, используя так называемый критерий, формулируемый относительно положительной гидростатической составляющей поля напряжений (Maximum Tensile Pressure - MTP), связанной с первым инвариантом тензора напряжений. Следует отметить,

что этот критерий рекомендуется библиотекой **Ansys** для материала типа *Nylon*, которым и является рассматриваемый материал. Можно также отметить работы [74, 104], где критерий для первого инварианта тензора деформации (связанный с давлением при условиях малых деформаций) использовался для анализа разрушения полимерных материалов.

Стандартное значение критерия МТР для конструкционного нейлона в **Ansys** достаточно высокое (1 ГПа). В данном случае, *PA2200* - гораздо более слабый материал, полученный с помощью 3D-печати и содержащий пористость. Подобранный значение выбранного критерия разрушения составляло около 52 МПа. Это значение позволило корректно описать ударную прочность, а также наблюдаемые в испытаниях механизмы разрушения.

Статические испытания не были численно моделированы и исследованы, поскольку их результаты достаточно очевидны и могут быть интерпретированы на основе интуитивно понятных аргументов. Из квазистатических испытаний была выявлена наивысшая жёсткость и статическая прочность для образца с заполнителем из стандартной плоской структуры (*Variant 4*). Этот тип образцов имеет полностью симметричную структуру. Из механики композиционных материалов известно, что по сравнению с другими возможными анизотропными структурами симметричные структуры (например, композиционные материалы с симметричной укладкой слоёв) имеют наивысшую эффективную/кажущуюся жёсткость и прочность. Здесь реализуются схожие эффекты, но на макроуровне структурной анизотропии. Плоские пантографические заполнители (*Variants 1-3*) имеют некоторые дополнительные деформации в направлениях, перпендикулярных плоскости слоев заполнителя, что приводит к снижению их жёсткости и несущей способности в статических испытаниях. Результаты статических испытаний рассматриваются более детально для каждого типа заполнителя в разделе 3.5.

3.5. Результаты статических испытаний

На рисунке 3.5 представлены зависимости нагрузки от перемещения в ходе статических испытаний. Видно, что максимальная несущая способность, жёсткость и полная энергия деформации (площадь под кривой нагрузка-перемещение) соответствуют *Variant 4* - заполнителю со стандартной решёткой (красная кривая на рис. 3.5а). Как и ожидалось, *Variant 1* имеет максимальные статические характеристики среди пантографических вариантов заполнителя (синяя кривая на рис. 3.5а). Для этого варианта использовались жёсткие соединители (см. раздел 3.2). Шарнирное соединение в *Variant 2*

(см. рис. 3.2) обеспечивает наименьшую жёсткость и наименьшую статическую прочность среди прочих. В процессе нагружения такого образца возникает много повреждений в зоне шарниров, что приводит к падению несущей способности, как видно на рисунке 3.5а (жёлтая кривая). Для образца с заполнителем *Variant 3* получена кривая с большими нелинейными деформациями, где первый максимум нагрузки связан с местной потерей устойчивости стержней, а второй максимум связан с общим смятием заполнителя.

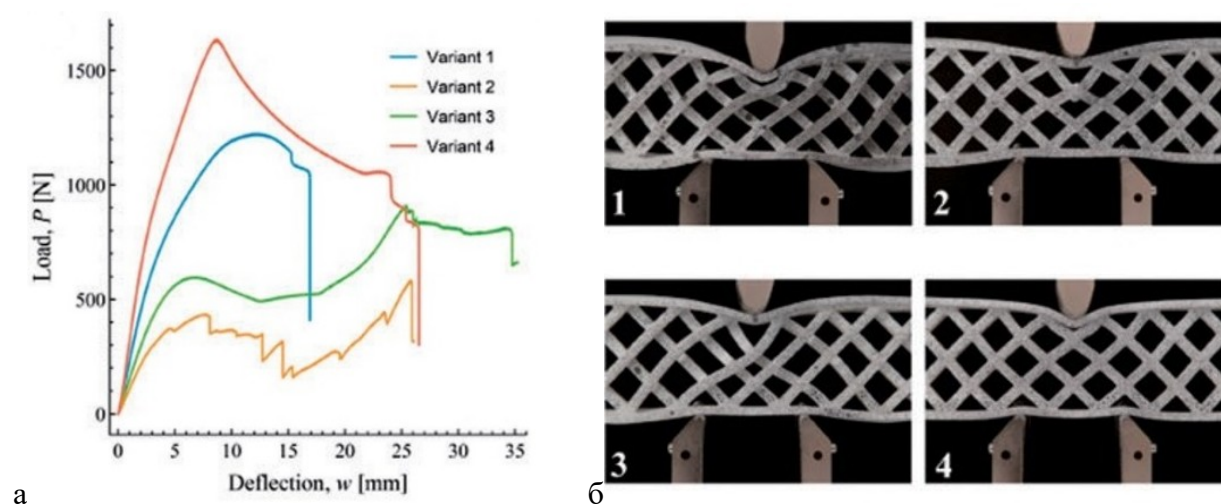


Рисунок 3.5. а) кривые нагрузка-перемещение из экспериментов на трёхточечный изгиб для образцов с различными типами связи; б) деформированное состояние образцов с различными вариантами заполнителя (*Variants 1-4*) при первом максимуме нагрузки.

На рисунке 3.5б представлено деформированное состояние сэндвич балок с различными типами заполнителя при максимальном уровне нагрузки. Для заполнителей *Variants 2-3* — это первый максимум при прогибе в 7 мм (см. рис. 3.5а). На изображении 3.5б можно наблюдать различные режимы разрушения для образцов с заполнителем разного типа. Для *Variant 1* максимальный уровень нагрузки возникает, когда развиваются интенсивные пластические деформации в несущих слоях и заполнителе сэндвич балки. В заполнителе с шарнирами (*Variant 2*) возникают первые заметные повреждения в срединном шарнире, расположенном под центральной опорой. Местная потеря устойчивости стержней заполнителя наблюдается для *Variant 3*. Для *Variant 4* наблюдается существенно иной механизм разрушения, связанный с потерей устойчивости стержней в направлении «из плоскости» образца. Такое разрушение не является катастрофическим, и

образец претерпевает большие нелинейные деформации без мгновенной потери устойчивости в процессе дальнейшего нагружения.

Сравнивая изображения деформированного состояния образцов с различными типами заполнителя, на рисунке 3.5б видно, что у пантографических вариантов заполнителя (*Variants 1-3*) количество деформируемых элементов значительно выше, чем у заполнителя со стандартной решёткой (*Variant 4*). Именно такого рода эффекты обозначаются как «делокализация» нагрузки или «нелокальное поведение» материала под нагрузкой. Чтобы корректно интерпретировать такие эффекты, деформации образцов были дополнительно оценены с помощью анализа корреляции цифровых изображений (**Digital Image Correlation - DIC**) при малом прогибе $w = 2$ мм (см. рис. 3.6). Именно такой уровень нагрузки соответствует глобальному линейному поведению рассматриваемых сэндвич балок (см. рис. 3.5а).

На рисунке 3.6 представлено распределение плотности энергии деформации, полученное из **DIC** анализа по измеренным деформациям образцов. Плотность энергии деформации оценивалась по формуле:

$$U = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \quad (3.2)$$

где C_{ijkl} - тензор упругих модулей *PA2200*, а ε_{ij} - компоненты тензора деформации, полученные из анализа **DIC**. На рисунке 3.6 показано приведенные значения U относительно максимального значения $U_{\max}$ для образца конкретного типа заполнителя. Абсолютные значения плотностей энергий деформаций существенно различаются среди рассматриваемых типов заполнителя, так как их жёсткости отличаются в 3 раза (см. рис. 3.5а).

На изображении ниже распределение плотности энергии деформации окрашено в три основных цвета, соответствующие определенной интенсивности. Красный цвет соответствует высокой концентрации энергии деформации и интенсивным деформациям. Красный цвет возникает в пересечениях стержней заполнителя для *Variants 1, 2* и *4* (рис. 3.6'а-б, г'). Для *Variant 4* хорошо видна локальная концентрация энергии деформации в узлах пересечений стержней. Также наблюдаются тонкие красные полосы вдоль поверхностей стержней в заполнителях, которые могут возникать значительные деформации из-за их изгиба. Такие же эффекты от изгиба наблюдаются и для пантографических вариантов заполнителя (*Variants 1-3*), и красный цвет охватывает практически всю поверхность стержней от верхнего до нижнего несущего слоя. Для *Variant*

4 такой уровень интенсивности деформаций возникает, в основном, под центральной опорой (верхняя центральная часть образца). В свою очередь, белый и синий цвета соответствуют среднему и низкому уровню плотности энергии деформации соответственно. На рисунке 3.5а-в видно, что для пантографических вариантов заполнителя возникает гораздо более равномерное распределение этих цветов по заполнителю. Для *Variant 4* энергия деформации, в основном, концентрируется под центральной опорой и между опорами (см. рис. 3.5г). В то время как, для *Variants 1-3* наблюдается увеличение уровня энергии деформации за пределами опор.

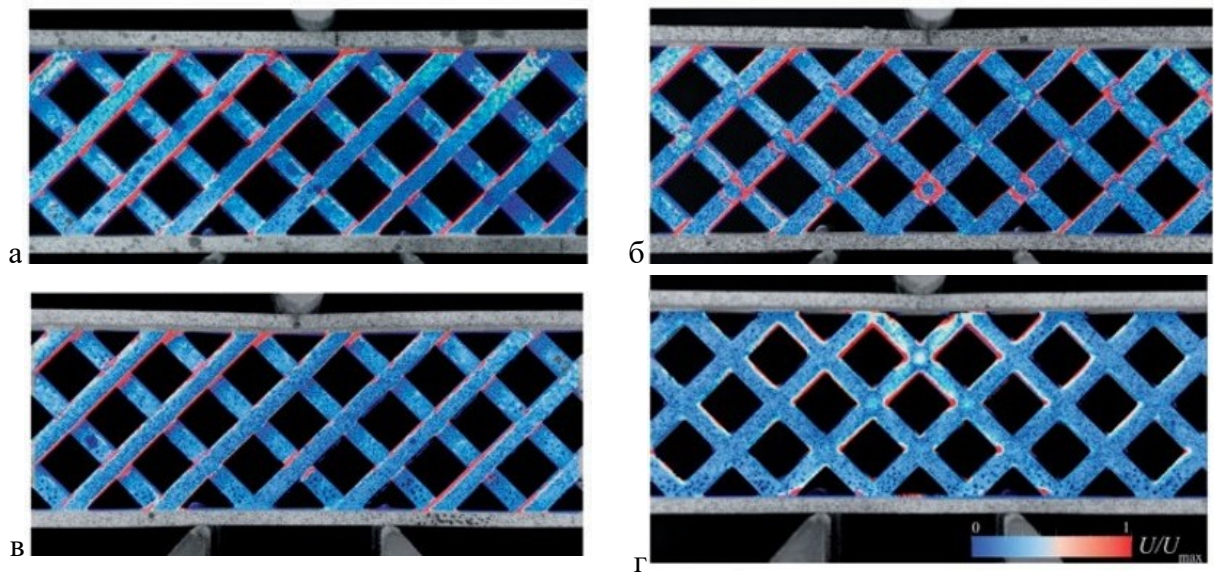


Рисунок 3.6. Распределение относительной плотности энергии деформации согласно анализу **DIC**. Уровень нагрузки соответствует прогибу $w = 2$ мм. Варианты заполнителя: а) *Variant 1*; б) *Variant 2*; в) *Variant 3*; г) *Variant 4*.

Можно сделать следующее заключение, что для пантографических вариантов заполнителя (*Variants 1-3*) наблюдается некоторый эффект делокализации деформированного состояния в сравнении с заполнителем из стандартной решётки (*Variant 4*). Здесь термин «делокализация» означает распределение плотности энергии деформации по большому числу элементов, работающих, в основном, на изгиб, так что их деформации распространяются далеко от точек приложения внешних нагрузок. Уместным будет отнести пантографические варианты заполнителя (*Variants 1-3*) к классу структур «bending-dominated» (Прим.: Условное разделение материалов и структур по характеру разрушения и механическому поведению под действием нагрузок; В международной литр-ре термины: «bending-dominated» с преимущественной работой на изгиб и «stretch-dominated» с

преимущественной работой на растяжение-сжатие» [17, 57]). Такой тип структур отличается более высокой ударной вязкостью и высокой эффективностью в динамических приложениях [13, 15, 40]. Как было выявлено, статические характеристики у *Variants 1-3* проигрывают *Variant 4*. Однако для последнего наблюдаются существенные эффекты концентрации деформаций. Такая концентрация не оказывает значительного влияния в статических испытаниях, поскольку материал *PA2200* достаточно пластичен. Однако, как показано далее в разделе 3.4, эта концентрация приводит к существенному снижению прочности в условиях действия ударных нагрузок.

3.6. Результаты динамических испытаний

Данный раздел посвящен оценке результатов динамических испытаний и валидации численного моделирования испытаний на удар. На графиках 3.7 представлены полученные динамические характеристики для рассматриваемых сэндвич балок. Рисунок 3.7а иллюстрирует значения ударной прочности из эксперимента (ASTM D 6110) и КЭ моделирования (*Ansys*, решатель *LS-Dyna*). Наименее прочным оказывается тип заполнителя – *Variant 4*. В экспериментах образцы с жёсткими соединениями в заполнителе (*Variant 1*) имели наивысшую ударную прочность. Тогда как численное моделирование показало динамически перспективный вариант соединений – полное его отсутствие (*Variant 3*). Возникшее противоречие между экспериментом на удар и его КЭ моделировании может быть следствием неточности в определении свойств материала, поскольку свойства *PA2200* при высоких скоростях деформации на данный момент не полностью доступны. Тем не менее, в рамках абсолютных значений, *Variants 1* и *3* имеют практически одинаковую ударную прочность ($\pm 7\%$). Как эксперименты, так и численное моделирование предсказали, что среди пантографических вариантов заполнителя наименьшая ударная прочность принадлежит структуре с шарнирами (*Variant 2*).

Рисунок 3.7б демонстрирует полные данные динамических испытаний для диапазона энергии удара $E = 5.4 - 20$ Дж. Здесь показаны найденные значения поглощенной энергии E для различных типов сэндвич балок, испытанные с разной начальной энергией E_0 . Пунктирная линия является биссектрисой графика, и показывает возможный максимальный уровень поглощенной энергии (образец не может поглотить больше энергии, чем изначально было в ударнике). На графике 3.7б первая точка на цветных кривых соответствует первому полному разрушению образца определенного типа.

Например, такая точка для *Variant 4* возникает при самом низком уровне энергии, потому что эти образцы ломались даже при $E = 5$ Дж. Образцы пантографических вариантов заполнителя ломались при уровне энергии $E_0 > 12$ Дж. Для *Variants 1* и *3* первый разлом (разрушение) происходил с полным поглощением энергии удара - молот останавливался на нижней (конечной) позиции, в то время как эти образцы ломались пополам. При дальнейшем увеличении энергии удара значение E менялось для *Variants 1-3*. Было обнаружено снижение эффективности поглощения энергии удара для *Variants 1* и *2*, что может быть обусловлено, например, влиянием эффектов скорости деформации. Однако, для *Variant 3* происходит увеличение значения E . Из наблюдений высокоскоростной камеры **VideoSprint** было отмечено, что в таком типе заполнителя возникают сильные эффекты, связанные с трением между разрушенными элементами образца, опорами и молотом. После удара молота элементы разрушенного заполнителя разлетались и застревали между опорами. В результате, уровень поглощенной энергии для *Variant 3* был близким к максимально возможному (т.е. $E \approx E_0$). Образец в качестве заполнителя, содержащий стандартную решётку (*Variant 4*), показал незначительное влияние увеличения энергии удара E_0 на уровень поглощённой энергии, и она составила около $E = 2 \dots 3$ Дж.

На рисунке 3.8 показаны снимки сэндвич балок после испытаний на удар. Можно наблюдать некоторые различия, возникающие в механизмах разрушения этих образцов. Примечательно, что для *Variant 1* (жёсткие связи) характерна практически идентичная область повреждения элементов заполнителя для различных значений энергии удара. В то время как для *Variant 2* и *3* поврежденная область становится больше с увеличением энергии удара. Интересной особенностью у *Variant 2* является большое количество расколовшихся элементов заполнителя, даже в случае полного поглощения энергии удара (см. *Variant 2* для $E_0 = 9.4$ Дж на рис. 3.8). Основные различия в характере разрушения наблюдаются у образцов со стандартной решёткой в заполнителе (*Variant 4*). У таких образцов реализуется маленькая область повреждения и одна сквозная трещина вдоль заполнителя. В ходе испытаний на удар по Шарпи эти образцы имели самую низкую эффективность поглощения энергии (см. рис. 3.7), и, как видно на снимках 3.8, их механизм/режим разрушения имеет характер хрупкого раскола. Для образцов с пантографическими вариантами заполнителя (*Variants 1-3*) таких эффектов не наблюдается, а именно их разрушение сопровождается большим количеством разрушенных элементов стержней по всему объёму образца.

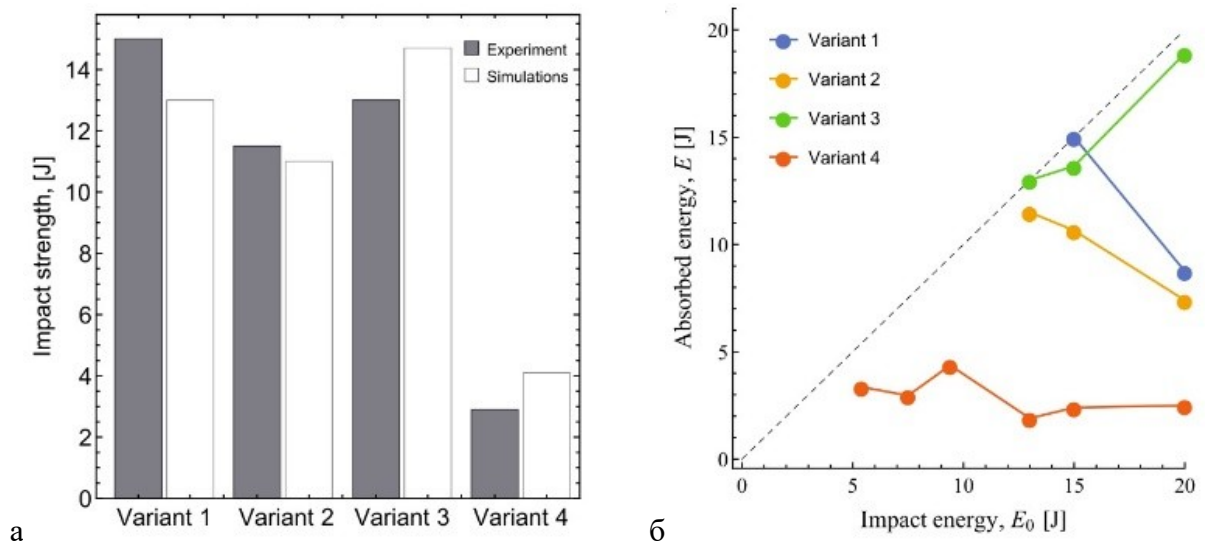


Рисунок 3.7. а) сравнение результатов из эксперимента на удар и численного моделирования; б) количество поглощенной энергии, полученное из динамических испытаний для образцов с различными вариантами заполнителя.

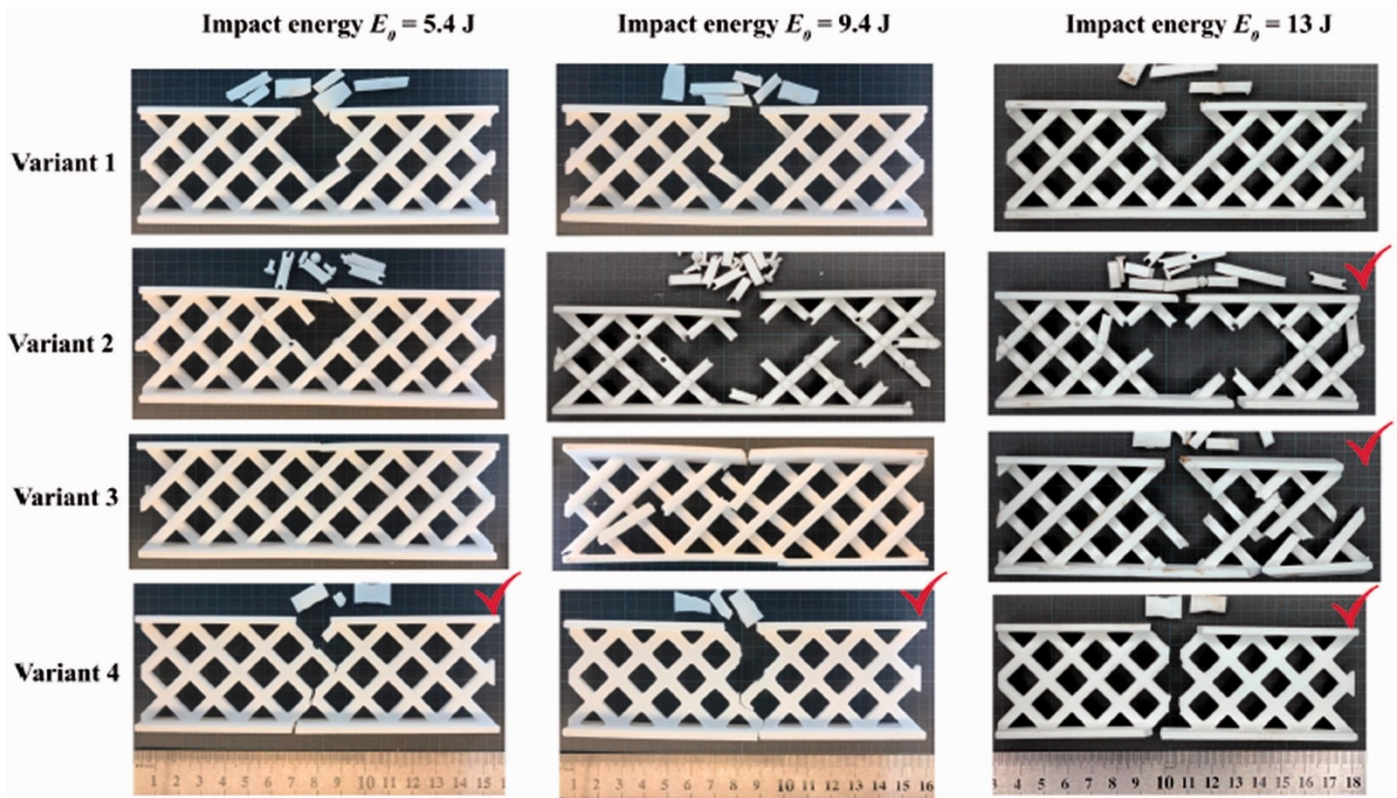


Рисунок 3.8. Состояние разрушенных образцов с различными типами заполнителя после удара по Шарпи (полностью разрушенные образцы – насквозь – помечены маркером).

Дополнительные и более наглядные иллюстрации процессов разрушения различных образцов при динамической нагрузке представлены на рисунках 3.9-3.10. Здесь показаны изображения, полученное с помощью высокоскоростной камеры **VideoSprint** и соответствующие результаты численного моделирования для энергии удара $E_0 = 9.4$ Дж.

В проведенных испытаниях, которые показаны на рисунках 3.9-3.10, пантографические варианты заполнителя (*Variants 1-3*) не были полностью сломаны. Однако можно наблюдать явные отличия, возникающие в таких типах заполнителя под воздействием удара. Заполнитель *Variant 1* частично разрушается с остановкой молота на моменте $t = 15$ мс (рис. 3.9а). Заполнитель с шарнирами (*Variant 2*) накапливает большое количество повреждений и в определенный момент времени разрушается на несколько больших и маленьких частей. Эти части отлетают от образца в противоположном направлении движения молота (рис. 3.9б). Заполнитель *Variant 3* подвергается большим деформациям с изгибом и разрывом элементов стержней в нем самом (рис. 3.9в). Однако повреждения в этом образце находятся вне опор и сломанные стержни складываются друг на друга внутри заполнителя, тем самым останавливая молот. Наконец, для сэндвич балки с заполнителем типа *Variant 4* имеется очень быстрое разрушение, такое что через $t = 3$ мс появляется сквозная трещина в заполнителе, и далее образец раскалывается на две части (рис. 3.9г). Следует отметить, что трещина в этом образце распространяется впереди законцовки молота, то есть образец разрушается быстрее, чем движется ударник. Дополнительные изображения такого же хрупкого разрушения представлены на рисунке 3.10. Здесь показано разрушение образца с заполнителем *Variant 4* при испытании с энергией удара $E_0 = 5.4$ Дж. Видно, что даже в случае наименьшей рассматриваемой энергии удара этот вариант ломается в течение первых $t = 3 - 4$ мс после контакта с молотом.

На рисунках 3.9-3.10 можно заметить сходство между экспериментальными наблюдениями и численным моделированием процессов разрушения различных вариантов заполнителя. Подобная качественная согласованность (в том числе соответствие ударной прочности на рис. 3.7а) была достигнута благодаря корректно подобранному критерию разрушения. За счет использования критерия Maximum Tensile Pressure (см. раздел 3.4) в численном моделировании удара, было подтверждено возникновение хрупкого разрушения для заполнителя *Variant 4* и относительно пластичное разрушение с большими деформациями для *Variants 1-3*. И напротив,

используя другие стандартные критерии (максимальные пластические деформации, максимальные главные напряжения и т. д.), получались некорректные механизмы разрушения, например, с разрушением образца непосредственно под законцовкой молота без распространения трещины для *Variant 4*. Небольшие вариации в свойствах материала *PA2200* (модуль Юнга, предел текучести, предельные деформации и т. д.) не привели к повышению точности описания экспериментальных результатов. Также было проверено, что эффект влияния скорости деформаций не может быть использован для объяснения полученных результатов испытаний с разной энергией удара.

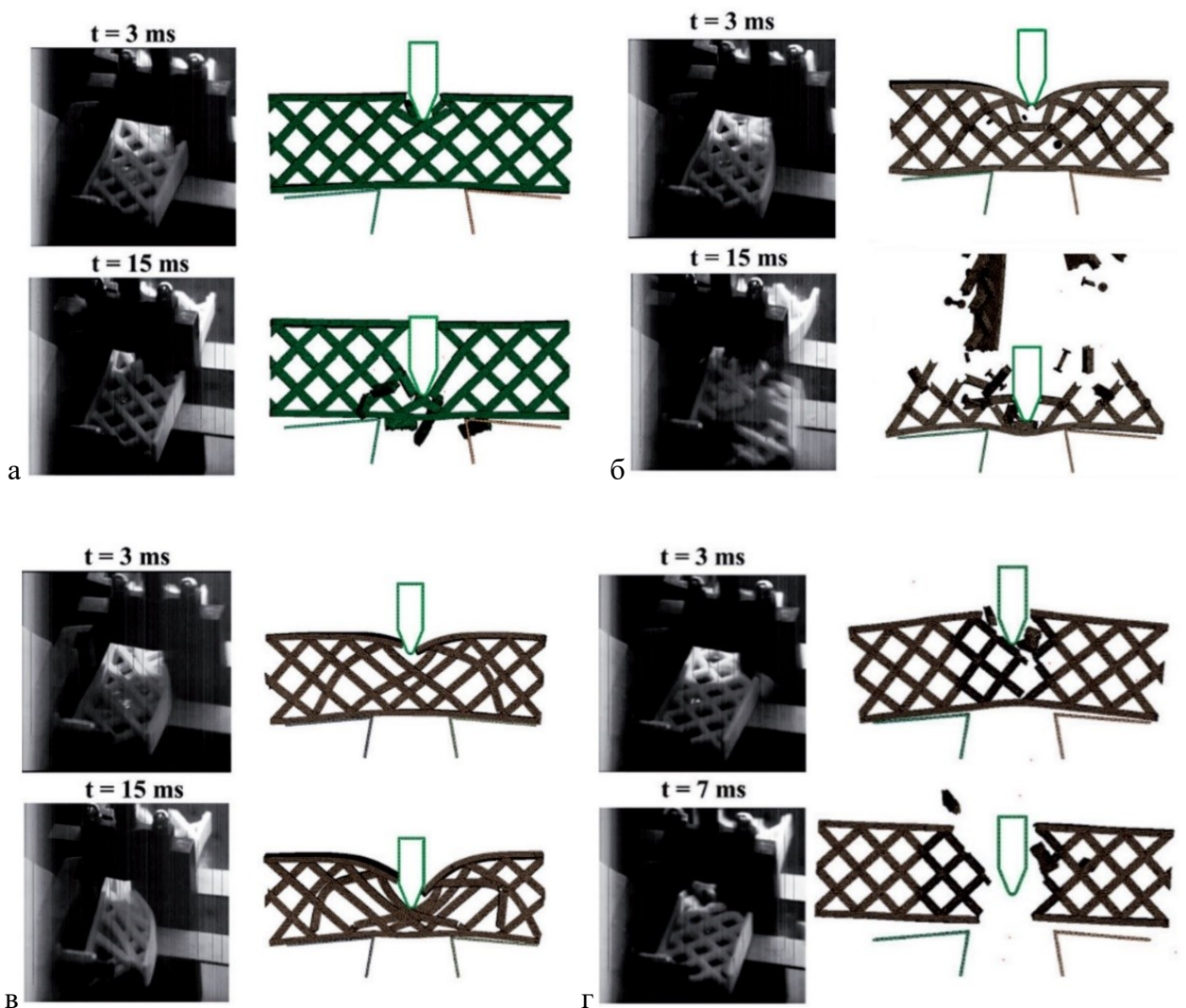


Рисунок 3.9. Образцы с заполнителями *Variants 1 – 4* (рис. ‘а-г’, соответственно) в процессе динамического испытания. Слева - снимки, полученные с помощью высокоскоростной камеры **VideoSprint**. Справа - результат численного моделирования **LS-Dyna**. Энергия удара $E_0 = 9.4$ Дж.

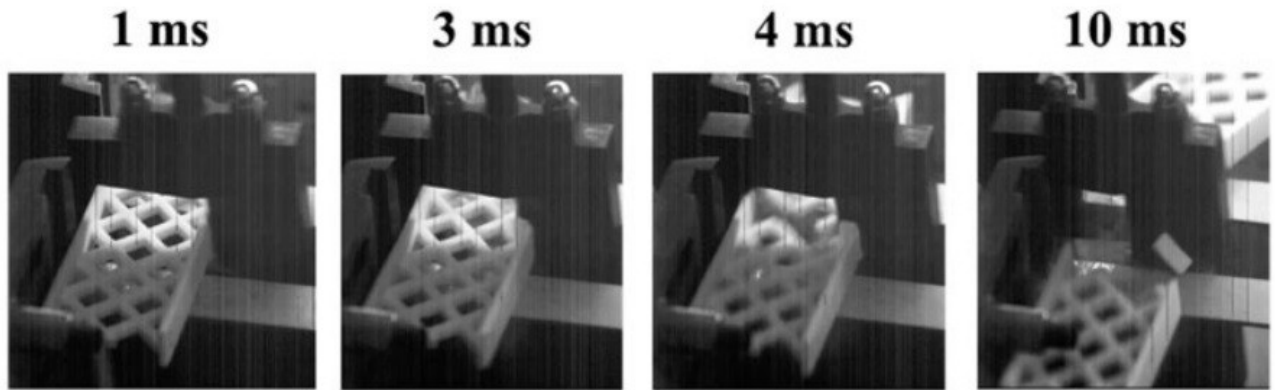


Рисунок 3.10. Фрагменты видео с записью испытания на удар по Шарпи образца с заполнителем *Variant 4*. Энергия удара $E_0 = 5.4$ Дж.

Обоснованием высокой ударной прочности для пантографических вариантов заполнителя могут быть связано с изменением характера концентрации напряжений и, в частности, с изменением уровня триаксиальности напряженного состояния в различных типах заполнителей.

Обоснованием низкой ударной прочности для *Variant 4*, может быть возникающая концентрация напряжений внутри такого заполнителя со стандартной решёткой, из-за наличия большого количества внутренних острых углов в пересекающихся стержнях (см. рис. 3.6). В то время, как для пантографических типов заполнителя (*Variants 1-3*) острые углы существуют только в местах стыковки элементов/стержней заполнителя и несущими слоями. Таким образом, для заполнителей таких типов соединений материал испытывает меньшую концентрацию напряжений, а значит стержни могут интенсивнее деформироваться без разрушения.

В проведенных расчетах использовались методы упрощенного моделирования процессов разрушения без привлечения моделей механики разрушения. Тем не менее, значения ударной прочности образцов и механизмы их разрушения были оценены корректно. Далее описывается поведения сэндвич балок с точки зрения их НДС, а критерии механики разрушения не привлекаются. В частности, представляется логичным рассмотреть траксиальность реализующегося НДС, поскольку выбранный критерий разрушения МТР связан с первым инвариантом тензора напряжений $J_I = \sigma_{ii}$. Триаксиальность напряжений прямо пропорциональна первому инварианту. Коэффициент триаксиальности определяется как отношение среднего гидростатического давления к эквивалентному напряжению по фон Мизеса:

$$\beta = \frac{J_I}{\sigma_{eqv}} \quad (3.3)$$

Распределение β в образцах с различными типами заполнения было численно оценено и продемонстрировано на рисунке 3.11. На графике 3.11а показано максимальные значения β совокупно по всем конечным элементам моделей различных образцов в разные моменты времени. Видно, что *Variant 4* обладает высокой триаксиальностью (до $\beta = 10$) в начале нагружения. Для пантографических типов заполнителя значения $\beta \leq 5$, и его максимум достигается позже (через 6–10 мс, когда могут возникать интенсивные деформации в элементах заполнителя). На рисунке 3.11б показано местоположение максимума коэффициента триаксиальности напряжений. На этом рисунке даны половины КЭ моделей в момент времени $t = 0.1$ мс, когда в элементах заполнителя могут возникать интенсивные пластические деформации. Траектория движения молота показана пунктиром. Для *Variants 1-3* максимумы β ниже, и они находятся далеко от траектории движения ударника. В то же время, для *Variant 4* триаксиальность напряжений выше, и локализуется она вблизи траектории движения ударника на острых углах пересечения стержней заполнителя.

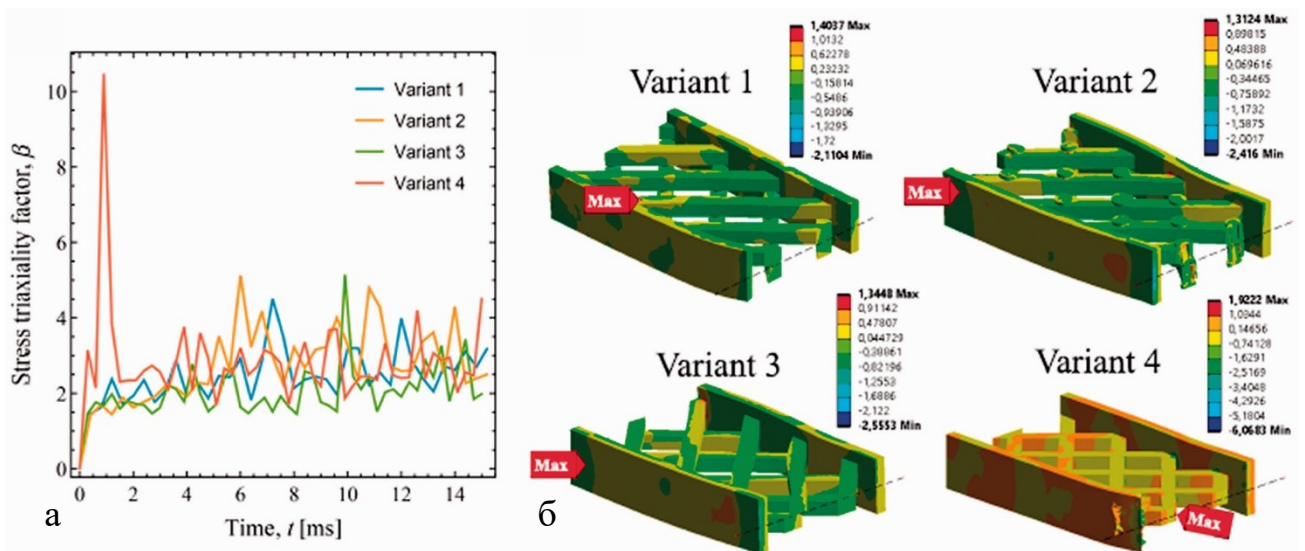


Рисунок 3.11. Значения коэффициента триаксиальности напряжений β оценены численно для различных типов образцов. Здесь: а) зависимость максимального значения β от времени; б) распределение триаксиальности β (изображено на половине модели образцов, также пунктиром показано направление движения молота).

Таким образом, различие ударной прочности может быть связано с изменением характера напряженного состояния материала от высокой концентрации напряжений и высокого коэффициента триаксиальности (*Variant 4*) к интенсивным пластическим деформациям и деформациям изменения формы с низкой триаксиальностью (*Variants 1-3*). В отличие от этого, при статических испытаниях уровень триаксиальности напряжений не столь важен для пластичных материалов [123], и несущая способность заполнителя, в основном, определяется общей и местной потерей устойчивости и эффективной жёсткостью, которая выше в заполнителе со стандартной решёткой (*Variant 4*).

В дополнение, можно сравнить рассматриваемые структуры с точки зрения возникающих инерционных сил и реакций в опорах и молота/ударника. То есть можно выделить наиболее жёсткие (податливые) структуры, обеспечивающие быструю (продолжительную) остановку ударника. Такой подход необходим в ситуациях, когда безопасность, защита и целостность, в основном, требуется обеспечить для ударника или, наоборот, для опор.

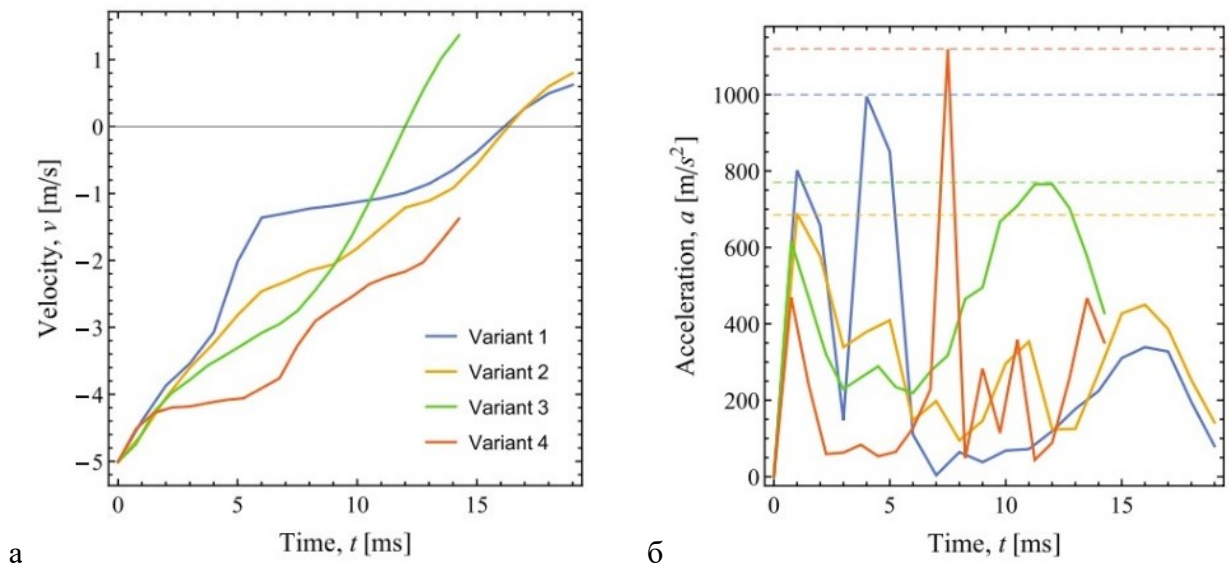


Рисунок 3.12. Зависимости скорости (а) и ускорения (б) ударника от времени в ходе эксперимента для образцов с различным типами заполнителя (пунктирные линии соответствуют максимальным значениям). Энергия удара $E_0 = 9.4$ Дж.

На графиках 3.12 представлены изменения скорости и ускорения ударника, полученные из численного моделирования. Результаты представлены для значения энергии удара $E_0 = 9.4$ Дж, при котором не произошло разрушения пантографических типов

заполнителя (см. рис. 3.8-3.10). Видно, что различные варианты заполнителей обеспечивают разную динамику замедления ударника. Особенно следует отметить, что наименьшее ускорение ударника (и, соответственно, наименьшие инерционные силы) реализуется с образцом *Variant 2* (жёлтая кривая на рис. 3.12б). У такой сэндвич балки с шарнирами в заполнителе, происходит снижение общей (эффективной) жёсткости в процессе удара. Такое постепенное ослабление структуры и небольшое ускорение могут быть преимуществом в случае, когда ударник должен быть остановлен в наиболее безопасном режиме. Быстрая остановка ударника реализуется с образцом *Variant 3* (зелёная линия на рис. 3.12а). Наибольшие инерционные силы возникают с *Variants 1* и *4*, которые имеют наивысшую жёсткость (см. рис. 3.5а). Для таких вариантов разница в ускорениях на 30 – 40% больше по сравнению с *Variant 2* (синяя и красная линии на рис. 3.12б).

3.7. Выводы

Данная Глава 3 была посвящена анализу влияния различных вариантов связей, применяемых в сетчатых заполнителях плоских сэндвич балок, подвергаемых квазистатическим и динамическим нагрузкам. Были предложены и рассмотрены следующие варианты заполнителей, отличающимися по типу связи между стержнями/элементами, образующими сетчатый заполнитель (см. рис. 3.2): *Variant 1* – жёсткое соединение; *Variant 2* – шарнирное соединение; *Variant 3* – отсутствие соединений; *Variant 4* – непрерывное соединение (стандартная плоская решётка). Именно сэндвич балки с заполнителями *Variants 1-3* могут быть отнесены к так называемым пантографическим механическим метаматериалам с различной жёсткостью соединений между элементами решётчатого заполнителя.

Было обнаружено, для пантографические варианты заполнителя (*Variants 1-3*) можно отнести к классу структур «bending-dominated», элементы которых работают преимущественно на изгиб [17]. Важной особенностью таких вариантов метаматериалов является делокализация напряженного состояния и увеличение объёма элементов в заполнителе, участвующих в процессах поглощения энергии. В динамических испытаниях *Variants 1-3* показали более высокий уровень деформаций и больший размер области разрушения. Ударная прочность для таких сэндвич балок получилась выше в 3-5 раз по сравнению со стандартными плоскими структурами за счёт снижения концентрации напряжений и триаксильности напряженного состояния в пантографических вариантах заполнителя. Однако, в статических испытаниях, такие сэндвич балки

продемонстрировали меньшую жесткость и прочность в сравнении со стандартной плоской решёткой в качестве заполнителя (*Variant 4*).

Можно выделить следующие основные особенности рассматриваемых сетчатых заполнителей:

- *Variant 1* (жёсткое соединение). Наивысшая ударная прочность среди прочих вариантов связей. Наивысшая статическая жёсткость и несущая способность среди пантографических вариантов заполнителя.
- *Variant 2* (шарнирное соединение). Высокая ударная прочность. Наименьшие инерционные силы, возникающие при торможении молота.
- *Variant 3* (отсутствие связей/соединений). Высокая ударная прочность. Быстрая остановка молота. В статических испытаниях наибольшая полная энергии деформации до разрушения среди пантографических вариантов заполнителя.
- *Variant 4* (непрерывное соединение/стандартная решётка). Лучшие статические жесткостные и прочностные свойства.

4. Сетчатые метаматериалы с асимметрией ячеек периодичности

В данной главе речь пойдет метаматериалах, обладающих сетчатой трехмерной структурой ячеек периодичности. В большинстве случаев, сетчатые метаматериалы состоят из совершенно симметричных ячеек периодичности [58, 62, 114]. Элементы в этих элементарных ячейках соединены прямыми и гладкими элементами. Данная Глава 4 посвящена исследованию ячеек периодичности, отклоняющихся от своей идеальной первоначальной структуры, путём внедрения асимметрии в соединениях. Эта асимметрия достигается посредством введения смещений между пересекающимися стрижнями в стандартных элементарных ячейках. В частности, рассматриваются четыре широко используемых трёхмерные структуры BCC , BCT , FCC и OCT , которые видоизменяются с использованием метода смещения связей (см. раздел 4.1). Экспериментальные испытания и численное моделирование показывают, что предложенный метод проектирования улучшает динамический отклик таких структур, сохраняя их плотность и статические свойства. Предложенный подход, фактически, обобщает идею применения пантографических метаматериалов в заполнителях сэндвич балок, который рассматривался в предыдущей главе. Было установлено, что наилучшие статические и ударные свойства реализуются в заполнителях со жесткими смещенными связями. Рассматриваемые далее структуры соответствуют этой идее, но реализованы уже для трехмерной геометрии ячеек периодичности.

Стоит обратить внимание, что рассматриваемые структуры можно отнести к классу структур «bending-dominated» (см. раздел 3.5), если брать во внимание значения индекса Максвелла, традиционно вводимых для сетчатых метаматериалов. Для рассматриваемых структуры индекс Максвелла составляет: $M_{BCC} = M_{BCT} = -13$; $M_{FCC} = -9$; $M_{OCT} = -2$. Эти значения могут быть получены из стандартного соотношения критерия Максвелла: $M = p - 3n + 6$. Здесь p - количество стрижней, n - количество узлов в ячейке периодичности [101, 114] (отрицательные значения индексов Максвелла $M < 0$ для решётчатых ячеек периодичности обычно указывают, что элементы/стержни ячейки работают преимущественно на изгиб, будучи нагруженным [57]). (Прим.: Критерий Максвелла (*Maxwell's criterion*), также известный как критерий устойчивости Максвелла (*Maxwell's Stability Criterion*) или взаимно-перекрёстная теорема Максвелла, является принципом, применяемым в строительной механике для определения устойчивости нагруженной конструкции. В основном, критерий Максвелла предоставляет

математическое условие, которое обеспечивает устойчивость и равновесие конструкции под воздействием внешних нагрузок. Это важное понятие в структурном анализе и проектировании для обеспечения безопасности и целостности различных инженерных систем, таких как здания, мосты и механические компоненты [17]). Путём введения небольших смещений (меньше диаметра стержня), исходные индексы Максвелла сохраняются, то есть не меняется поведение конструкции, свойственное для «bending-dominated» структур. Что является важным моментом, поскольку поведение, свойственное «bending-dominated», превосходит поведение «stretch-dominated», в условиях динамического нагружения [17, 57]. Кроме того, было рассмотрено влияние больших относительных смещений связей, чтобы оценить поведение структур со значительной асимметрией и меньшим числом соединений (узлов) n внутри элементарных ячеек.

Далее рассматриваемые структуры разделяются на идеальные (стандартные) и модифицированные (асимметричные). Идеальные/стандартные структуры представляют собой классическую архитектуру в ячейке периодичности. Модифицированные/асимметричные аналоги подразумевают использование рассматриваемого подхода в местах пересечения элементов/стержней ячеек периодичности. Полученные модифицированные структуры могут быть определены как квази-кубические, согласно работе [37], где подобная структура BCC была получена с использованием методики трёхмерной печати на наномасштабном уровне. В работе [37] структуры характеризовались сдвинутыми, стохастическими и асимметричными соединениями между стержнями, возникающие в результате несовершенств в процессе производства. Однако было отмечено, что эти несовершенства не оказывали значительного влияния на эффективные механические свойства полученных метаматериалов.

Также уместно отметить два недавно предложенных подхода асимметризации ячеек периодичности в механических метаматериалах. Во-первых, следует упомянуть недавнюю работу [119], где была предложена геометрия ячеек, являющаяся хиральной, с асимметрично расположенными стержнями. Однако суть метода смещения связей (см. раздел 4.1) отличается от вышеупомянутого подхода [119] тем, что рассматриваются значительно меньшие смещения между стержнями в ячейках, сохраняя при этом их количество. Более того, метод, предложенный в настоящей работе (см. далее раздел 4.1), позволяет проектировать ячейки периодичности с относительно толстыми стержнями по отношению к размеру ячейки, что приводит к большей статической жёсткости и прочности. Напротив, элементарные ячейки в работе [119] состоят из множества тонких стержней, образующих гиперболические поверхности. Во-вторых, в работе [124] была предложена

концепция асимметричных переплетенных элементов в ячейках заполнителя с улучшенными свойствами поглощения энергии. В этом исследовании были созданы податливые структуры путём выборочного разъединения узлов/соединений в «bending-dominated» сетчатых метаматериалах. Таким образом стержни в ячейках напоминают зигзаги. Напротив метод смещения связей подразумевает сохранение цилиндрической формы стержней, что обеспечивает более высокие статические характеристики при одновременном улучшении ударной прочности.

Задача оптимизации геометрии соединений в решётчатых метаматериалах также рассматривалась в некоторых работах, где исследовалась проблема концентрации напряжений в пересечениях стержней заполнителя. Некоторые подходы включали использование скруглений и других сглаженных геометрий [16, 135, 179], в то время как другие исследовали воспроизводили стержни переменной толщины в ячейка метаматериалов [19, 178].

Таким образом, предложенный метод смещения связей для получения асимметричных структур является новым и ранее не рассматривался в проектировании решётчатых метаматериалов. Хотя подобные конструкции с асимметричными сварными или болтовыми соединениями широко используются, например, в гражданском строительстве [102]. Кроме того, существуют множество природных материалов и тканей, состоящих из волокон, скрепленных друг с другом в пересечениях, что приводит к их исключительной прочности при ударных нагрузках [59, 106, 125].

4.1. Метод смещения связей

Рисунок 4.1 иллюстрирует идею реализации асимметричных соединений между элементами/стержнями в сетчатой структуре метаматериалов. Предлагается внести взаимное смещение между соединёнными стержнями. Смещение определяется как перемещение осей стержней в направлении, перпендикулярном плоскости, образованной этими осями. Таким образом, на рисунке 4.1 оси a_1 и a_2 цилиндрических стержней, ориентированных вдоль глобальных осей x и y , соответственно, сдвинуты в направлении глобальной оси z . Абсолютное смещение (то есть расстояния между осями a_1 и a_2) определяется как s_a . Относительное смещение определяется как отношение его абсолютного значения s_a к диаметру стержней d . В дальнейшем для упрощения

терминологии, под термином «смещение» понимается именно относительное смещение, обозначающее как параметр $s = s_a / d$.

Пример модифицированной структуры (то есть структуры с асимметричным соединением) представлен на рисунке 4.1б. Здесь изображена структура с «кубической гранецентрированной симметрией» (такая структура традиционно обозначается *FCC*) с различными относительными смещениями между стержнями. В структуре *FCC* набор из пар пересекающихся стержней с противоположных сторон (зеленые/синие и красные/жёлтые стержни на рисунке 4.1б), где реализованы смещения в направлении, перпендикулярном соответствующим плоскостям, образованным их осями. Можно заметить, что модифицированная структура становится асимметричной. Степень асимметрии можно связать со значением смещения s . В случае, когда $s = 0$, имеется стандартную структуру *FCC* с идеальной кубической симметрией и идеальным пересечением стержней. В случаях, когда $s \neq 0$ получается модифицированная/асимметричная структура со смещёнными стержнями и асимметричными связями между ними (без связей/соединений при больших значениях s).

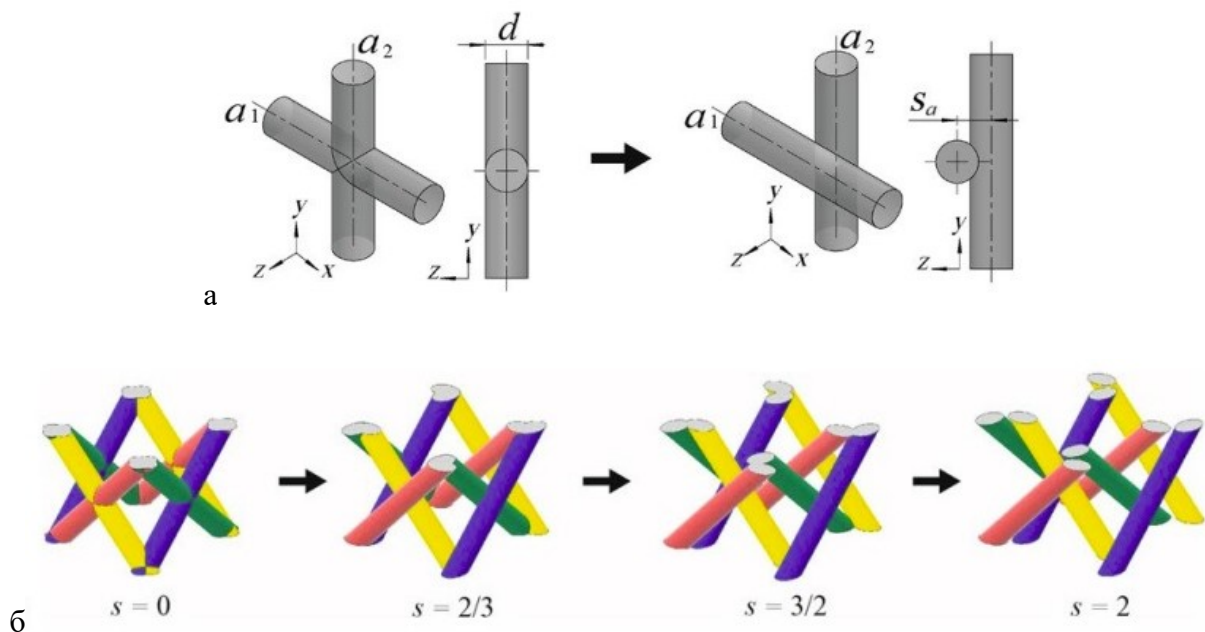


Рисунок 4.1. Иллюстрация идеи создания асимметричных связей между стержнями в ячейках периодичности метаматериала: а) вместо идеального пересечения стержней (слева) применяется взаимное смещение стержней вдоль направления оси z (справа) на расстояние s_a ; б) пример модифицированной структуры типа *FCC*.

С интуитивной точки зрения может показаться, что при значениях $s \geq 1$, стрежни потеряют соединение. Однако такое предположение не совсем верно, поскольку в трёхмерных структурах связи между стрежнями из разных наборов могут сохраняться даже при значениях s , превышающих 1. Это видно на рисунке 4.1б, где связь между парами стрежней, принадлежащими выбранным наборам (зеленый/синий и красный/жёлтый), теряется при $s = 3/2$, но связи между стрежнями из разных наборов (зеленый/красный, зеленый/жёлтый, синий/красный, синий/жёлтый) остаются. Поэтому в этой работе рассматриваются широкий диапазон смещений $s = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 3/2 & 2 \end{bmatrix}$.

Применяя раннее упомянутый критерий Максвелла ($M_{FCC} = -9$) с учётом введённой асимметрии на примере структуры FCC , получаются эквивалентные значения индексов по Максвеллу для $s = 0$ и $s = 2/3$ (небольшая асимметрия), и меньшие значения индексов по Максвеллу (большая степень «bending-dominated» поведения [57]) для $s = 3/2$ и $s = 2$ (значительная асимметрия). В предельном случае ($s = 2$) структура полностью «свободна» (т.е. не содержит внутренних пересечений между стержнями внутри элементарной ячейки). Здесь стержни заполнителя соединяются только с несущими слоями.

4.2. Выбор геометрии ячеек периодичности

Были рассмотрены следующие распространённые структуры: FCC , BCC , BCT и OCT . Их геометрия (архитектура) представлена на рисунке 4.2. Данный рисунок иллюстрирует ячейки периодичности (элементарные ячейки) для рассматриваемых структур без смещения связей и при введении асимметрии. Стоит обратить внимание, что рисунок 4.1б, не даёт определения ячейки периодичности для FCC , а лишь наглядно иллюстрирует сущность метода смещения связей.

Объёмноцентрированная решётка BCC , а также BCT имеют различия в ориентации стрежней в кубической элементарной ячейке (стержни соединяют противоположные углы в BCC и противоположные рёбра в BCT) [20]. Структура OCT (октаэдрическая) содержит наклонные элементы/стержни, как и у BCT , а также дополнительную горизонтальную раму сверху и снизу элементарной ячейки. Все элементы ячейки периодичности представляют собой цилиндрические стержни.

В рассматриваемых ячейках периодичности выбирались наборы из стержней (на рис. 4.2 - выделены цветом: зелёным/голубым и красным/жёлтым) и применялся метод смещения этих стержней. Модифицированные структуры (то есть со смещёнными элементами) становятся ассиметричными. Более того, из рисунка 4.2 видно, их геометрическая особенность: структуры со смещением становятся хиральными. Такая хиральность вызывает взаимосвязь между кручением и растяжением/сжатием вдоль вертикальной оси элементарной ячейки [119]. В дальнейших экспериментах, эта вертикальная ось (ось скручивания) была ориентирована вдоль направления приложения нагрузок как в статических, так и в динамических испытаниях.

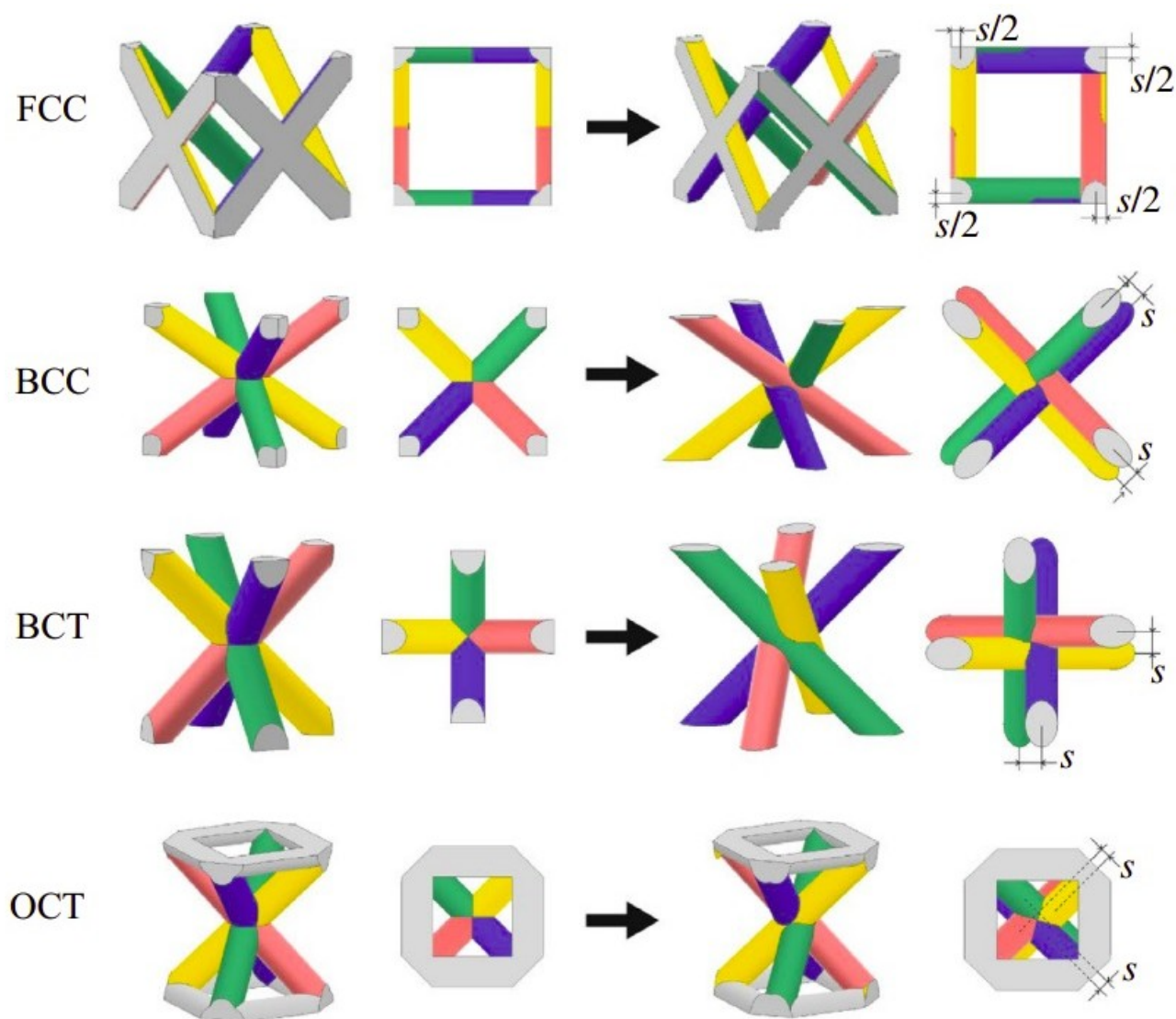


Рисунок 4.2. Геометрия элементарных ячеек структур *BCC*, *BCT*, *FCC* и *OCT*. Слева – стандартные ячейки, справа – модифицированные ассиметричные ячейки со смещёнными элементами.

4.3. Изготовление

Трёхслойные сэндвич балки (см. рис. 4.3) с сетчатым наполнителем, выполненным из четырех различных типов элементарных ячеек, изображенных на рисунке 4.2, были изготовлены с использованием аддитивной технологии (3D-печать) - стереолитографии (mSLA/LCD) [22]. В качестве оборудования был выбран 3D-принтер **ANYCUBIC Photon Mono SE**, в качестве материала использовалась фоточувствительная смола (производитель **Shenzhen Anycubic Technology Co**, Китай). Фоточувствительная смола представляет собой жидкий фотополимер, состоящий из смеси олигомеров, мономеров и фотоинициаторов [145]. Все образцы печатались без поддержек и ориентировались горизонтально (нижний несущий слой располагался на платформе). Разрешение печати составляло порядка 50 мкм. Процесс производства образцов с помощью mSLA технологии завершался спиртовой промывкой, за которой следовала промывка водой, а затем они сушились с помощью воздушного шланга для удаления неспёкшейся смолы.

Материал (твёрдый фотополимер) напечатанных сплошных образцов имел следующие физические и механические характеристики: плотность $\rho_s = 0.9 \text{ г/см}^3$, модуль Юнга $E_s = 1.27 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu_s = 0.35$, предельная деформация 8.1%, предел текучести при сжатии $\sigma_s = 33 \text{ МПа}$, удельная энергия деформации до разрушения (энергия разрушения) $U_s = 33.1 \text{ кДж/м}^3$ и ударопрочность $a_s = 2.5 \text{ Дж}$.

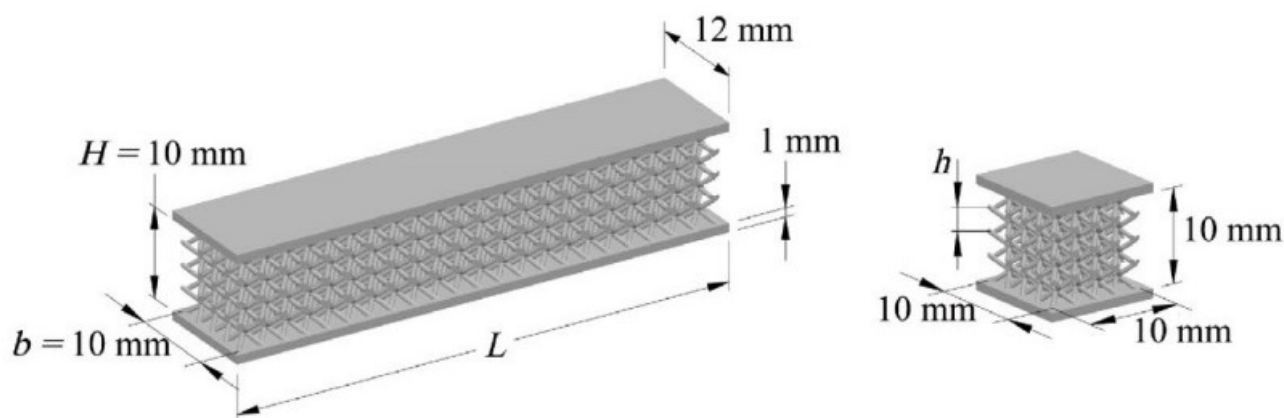


Рисунок 4.3. Примеры моделей образцов для ударных и изгибных испытаний (слева) и для испытаний на сжатие (справа). Здесь число ячеек периодичности по высоте наполнителя $N = 4$, то есть относительный размер элементарной ячейки составляет $h / H = 0.25$.

Для реализации статических экспериментов на сжатие были напечатаны кубические образцы. Прямоугольные образцы использовались для статических изгибных и ударных экспериментов. Геометрические размеры представлены на рисунке 4.3. Толщина несущих слоев для всех образцов составила 1 мм. Толщина и ширина сетчатого заполнителя в образцах для сжатия составили $H = b = 10$ мм. Общая толщина и общая ширина для всех образцов составляли 12 мм. Длина прямоугольных образцов была $L = 50 \dots 60$ мм. Определенные значения длины L были выбраны таким образом, чтобы обеспечить целое число ячеек, размещенных вдоль длины образца. А именно, в образцах с наибольшими ячейками ($N = 1$): длина была максимальной ($L = 60$ мм), таким образом чтобы заполнитель состоял из шести полных ячеек (размерами $10 \times 10 \times 10$ мм). В других образцах длина составляла $L = 55$ мм.

Данная Глава 4 посвящена не только исследованию влияния смещений стержней внутри элементарной ячейки на механические характеристики выбранных метаматериалов, но также исследуется влияние размера ячеек периодичности. Размер ячеек h выбирался таким образом, чтобы обеспечить разное количество ячеек $N = \left[1 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \right]$, размещенных вдоль высоты H сетчатого заполнителя (см. рис. 4.3). Тогда, относительный

размер ячейки обозначается как $h / H = 1 / N = \left[0.125 \quad 0.167 \quad 0.25 \quad 0.5 \quad 1 \right]$. Итого

было рассмотрено 80 различных вариантов/типов сетчатых заполнителей: четыре различных структуры (BCC , BCT , FCC и OCT), каждая из которых с пятью относительными размерами ячеек и четырьмя вариантами относительных смещений внутри элементарной ячейки s .

Снимок, демонстрирующий все типы сэндвич балок с различными заполнителями, напечатанных для изгибных и ударных испытаний, представлен на рисунке 4.4. Здесь изображены разные типы заполнителей с идеальными и асимметричными структурами в соответствии с предложенным подходом (см. раздел 4.1). Также представленные образцы отсортированы по относительному размеру ячейки. Заметим, что образцы с $h / H = 1$ ($N = 1$) имеют большой продольный размер ($L = 60$ мм) для обеспечения целого числа ячеек вдоль длины образца. Образцы с такими крупными ячейками хорошо иллюстрируют идею модификации структур, и как следствие хиральность геометрии ячеек.

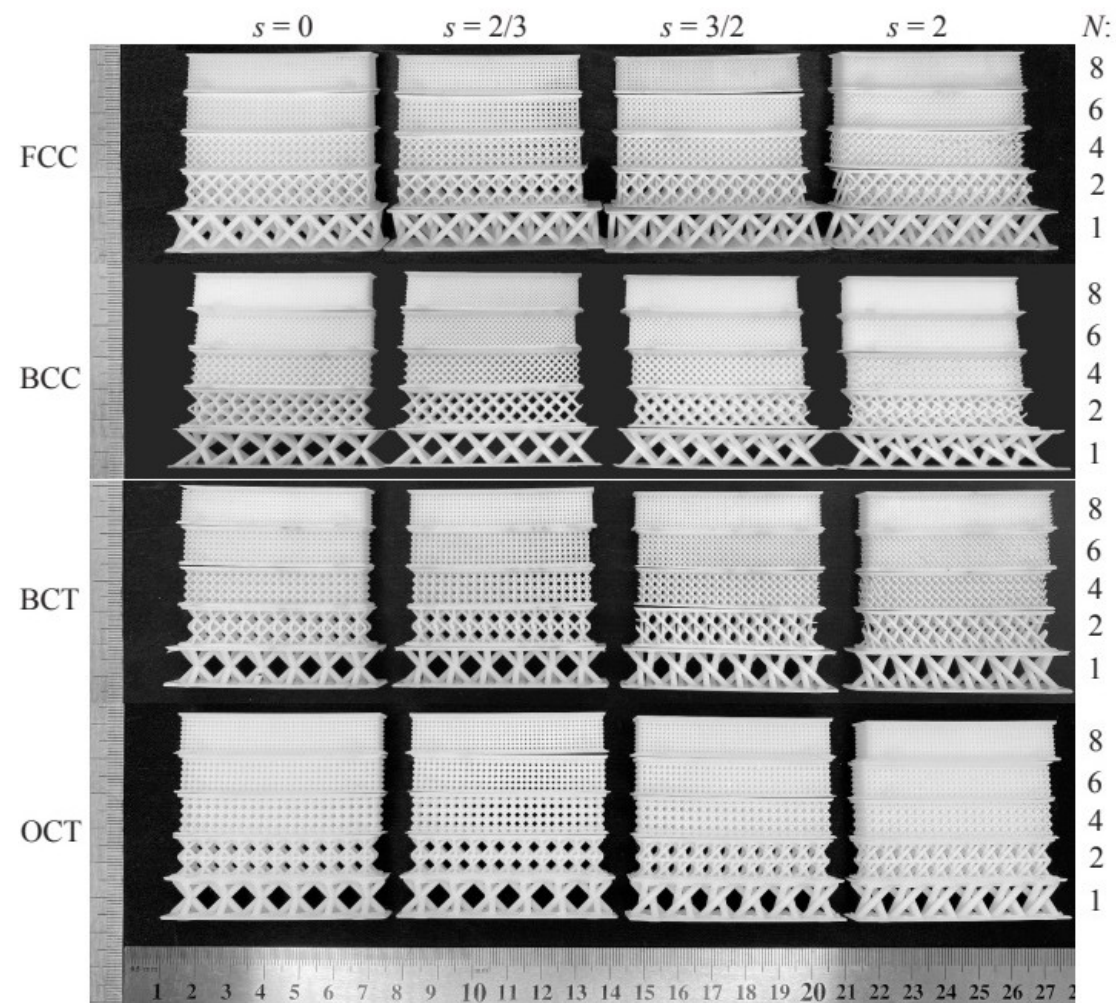


Рисунок 4.4. Изображение с 80 образцами с заполнителями вида *BCC*, *BCT*, *FCC* и *OCT* с различными относительными смещениями и числом ячеек вдоль высоты образца.

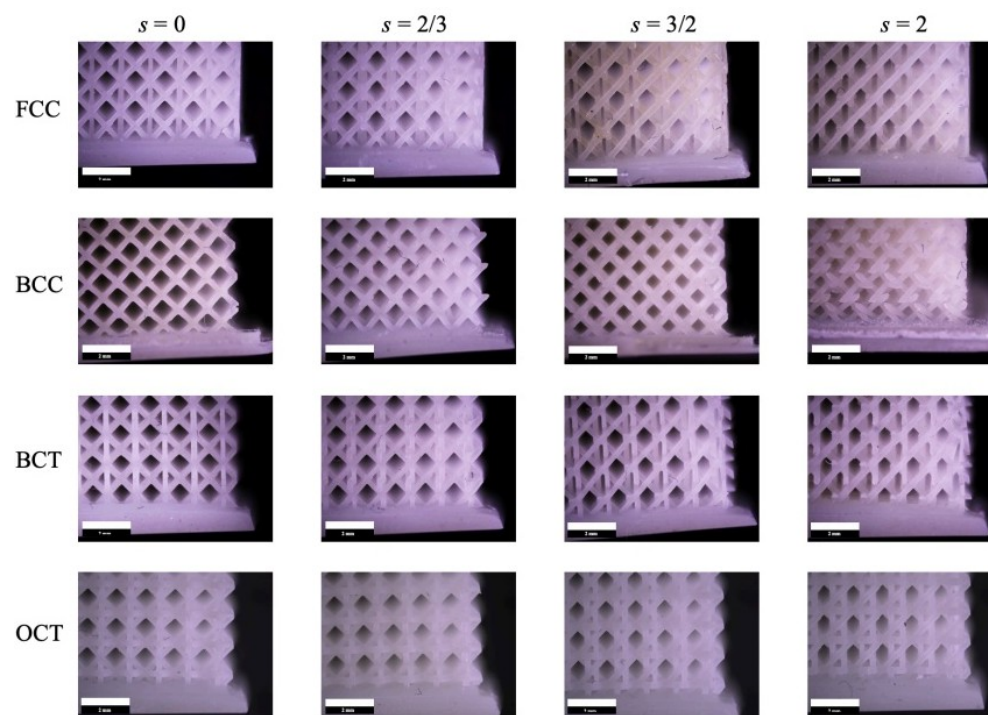


Рисунок 4.5. Микрофотография образцов с наименьшим размером ячейки $h/H = 0.125$ с различными относительными смещениями.

Здесь: масштабная шкала имеет размер в 2 мм.

4.4. Оценка относительной плотности

Объёмная доля, занимаемая стержнями в элементарных ячейках метаматериалов выбиралась с учётом минимально возможного размера ячейки и минимального диаметра стержня, который можно было воспроизвести посредством рассматриваемой технологии 3D-печати (mSLA) без дефектов. Также выбранная объёмная доля заполнения не должна была быть слишком большой, чтобы обеспечить возможность эффективной очистки внутреннего пространства заполнителя после изготовления образцов (см. раздел 4.3). Таким образом, минимальный размер ячеек составил $h = 1.125$ мм ($N = 8$), а минимальный диаметр стержней, который можно было напечатать с необходимой точностью, составил $d = 1.125$ мм.

Учитывая указанные требования и возможности с минимальным допустимым размером ячейки и диаметром стержней, получаются следующие нормированные (относительные) плотности для идеальных/стандартных структур ($s = 0$): $\rho / \rho_s = 0.146$ (FCC, BCT); $\rho / \rho_s = 0.178$ (BCC); $\rho / \rho_s = 0.204$ (OCT). Как видно, нормирование выполнялось относительно плотности сплошного материала (фотополимера). Данные физических и механических характеристик сплошного образца из фотополимера были упомянуты выше в разделе 4.3. Остальные заполнители с более крупными ячейками $h / H = \begin{bmatrix} 0.1667 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ содержали такую же объёмную долю твердой фазы, то есть ячейки просто масштабировались с соответствующими коэффициентами, определяющими изменение их линейных размеров. Диаметры стержней были одинаковыми для различных структур с одинаковым размером ячейки, обеспечивая одинаковое качество напечатанных образцов.

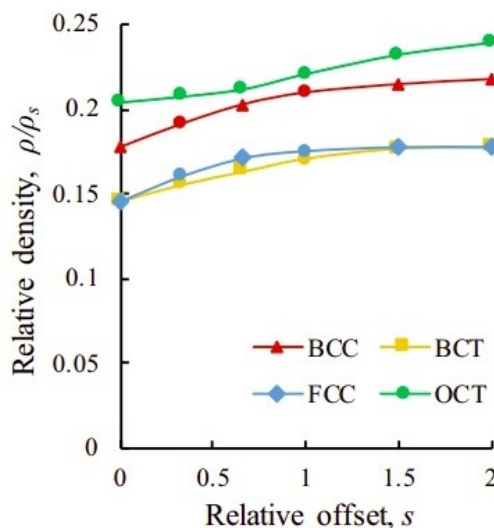


Рисунок 4.6.
Зависимость относительной плотности от относительного смещения стержней в элементарных ячейках структур BCC, BCT, FCC и OCT.

В модифицированных структурах ($s > 0$) диаметр стержней d и размер ячейки h были такими же, как у соответствующих им идеальных. Однако из-за влияния смещений стержней относительные плотности модифицированных структур незначительно изменились. Зависимость относительных (нормированных) плотностей рассматриваемых структур (FCC , OCT , BCT , BCC) от относительных смещений представлена на рисунке 4.6. Можно видеть, что изменение относительной плотности структур с наименьшим смещением из рассматриваемых ($s = 2/3$) не превышает 1–2% по сравнению со стандартной геометрией ячеек. Для наибольшего смещения ($s = 2$) плотность структур увеличивается не более чем на 3%.

4.5. Методы экспериментальных исследований

Для определения ударопрочности и кажущихся упругих характеристик были проведены квазистатические и ударные испытания образцов на изгиб по трёхточечной схеме. Также для определения кажущегося предела текучести и плотности энергии деформации (площадь под кривой напряжение-деформации) проводились испытания на сжатие для кубических образцов (см. рис. 4.3). Все экспериментальные испытания проводились при комнатной температуре ($22 \pm 1^\circ\text{C}$).

Для определения ударопрочности были проведены динамические испытания по Шарпи (ASTM D6110). Образцы располагались горизонтально на опорах испытательной машины и подвергались удару молота. Задавалась одинаковая для всех образцов начальная энергия $E_0 = 7.5$ Дж, где начальная скорость молота была $V_0 = 2.125$ м/с. Кажущееся значение ударопрочности a рассчитывалось как количество поглощённой энергии после удара к площади поперечного сечения заполнителя ($10 \times 10 \text{ мм}^2$):

$$a = \frac{E_0 - E_1}{bH}, \quad (4.1)$$

где E_1 – оставшаяся энергия в молоте после удара, определённая по стандартной методике испытаний по Шарпи.

Статические испытания проводились с использованием универсального испытательного оборудования **Instron 5969** (см. рис. 4.7). Скорость перемещения траверсы во всех квазистатических испытаниях составляла 1 мм/мин. В изгибных испытаниях образцы располагались на опорах симметрично и нагружались по центру. Радиусы законцовки молота и опор составляли 5 мм и 2 мм, соответственно. Прогибы образцов в

испытаниях ни изгиб оценивались по перемещениям траверсы. Изгибные испытания проводились в соответствии с ASTM D790. Кажущийся изгибный модуль определялся по следующей формуле:

$$E = \frac{PL_0^3}{4wb(H + 2h_s)^3}, \quad (4.2)$$

здесь P – значение приложенной силы, определённое на линейно-упругом участке, что соответствует прогибам не больше $w = 1$ мм.



Рисунок 4.7. Испытательное оборудование **Instron 5969** для проведения испытаний на сжатие (ASTM E9) и трёхточечный изгиб (ASTM D790).

Испытания на сжатие проводились с использованием плоских плит (ASTM E9). Кривые нагрузка/прогибы регистрировались до сжимающей деформаций в 50% или до разрушения образца (если предельные деформации были меньше 50%). Деформации оценивались как относительное изменение высоты образца под действием сжатия через перемещение траверсы. Кажущийся предел текучести оценивался по кривой инженерных напряжений/деформаций, в приближении 0.2% остаточных деформаций. Значение инженерного напряжения высчитывалось как отношение нагрузки к исходной площади поперечного сечения заполнителя $A = Hb$. Удельная энергия деформации до разрушения

или, по-другому, энергия разрушения (энергия, которую необходимо затратить для разрушения единицы объёма рассматриваемой структуры) U определялась как площадь под кривой напряжения-деформации.

4.6. Методы численного моделирования экспериментов

Было реализовано численное моделирование удара по Шарпи методом конечных элементов, прибегая к явному динамическому решателю **Ansys LS-Dyna**. Чтобы уменьшить количество степеней свободы, опоры и наконечник молота, контактирующие с образцом, моделировались поверхностными элементами. Полная масса молота достигалась путём присоединения точечной массы к КЭ модели наконечника. Молоту и стальным опорам назначалось абсолютно жёсткое поведение из-за их высоких упругих и прочностных характеристиках по сравнению с полимерными образцами. Свойства материала образцов (твёрдый фотополимер) были заданы на основе известных экспериментальных данных (см. раздел 4.3). Задавалось упругопластическое поведение материала, где касательный модуль был определен как $E_s/12$, что позволило корректно аппроксимировать диаграмму напряжения-деформации рассматриваемого материала (см. рис. 4.13). В качестве критерия разрушения был выбран критерий относительно положительных значений первого инварианта тензора напряжений (то есть относительно гидростатической части тензора напряжений, соответствующей всестороннему растяжению, Maximum Tensile Pressure - МТР) [60, 104], в котором предельное значение для гидростатической компоненты тензора напряжений составляло 53 МПа. Данный критерий рекомендуется библиотекой **Ansys** для различных полимерных материалов, и в предыдущей Главе 3 для этого критерия была показана хорошая согласованность расчетов с экспериментальными данными. В динамических численных расчётах образцы были замоделированы стандартными линейными тетраэдральными элементами типа TET13, рекомендуемые **Ansys**. Размер конечных элементов задавался как треть от диаметра стержней ($d/3$), что обеспечивало достаточно точные и быстрые результаты по сравнению с меньшими конечными элементами. Коэффициент «hourglass» по умолчанию был равен 0.1. Коэффициент трения составлял 0.2. Перемещение наконечника ударника разрешалось только в направлении движения молота. Использовались фиксированные условия закрепления для опор. Продолжительность расчетов на удар составляла $t = 8$ мс. За это время ударник контактировал с образцом, разрушал его и двигался дальше со сниженной постоянной скоростью V_1 . Начальная скорость $V_0 = 2.125$ м/с определялась на основе известных

экспериментальных значений энергии удара и массы молота. Поглощённая энергия, прогнозируемая на основе численного моделирования, вычислялась по формуле:

$$\Delta E = \frac{m(V_0^2 - V_1^2)}{2} \quad (4.3)$$

Численное моделирование эксперимента на сжатие проводилось с использованием модуля **Ansys Transient Structural** с учётом геометрической нелинейности в квазистатическом приближении. В численных расчётах были применены стандартные линейные тетраэдральные элементы типа TET10, а также гексагональные типа HEX20. Численно решалась контактная задача для абсолютно жёстких плит и образцов с коэффициентом трения 0.2. Модель пластичности с упрочнением использовалась, как описано выше для моделирования удара. Расчёты проводились до момента, при котором среднее значение деформации составляло $\varepsilon = 0.15$, определенное как относительное перемещение плит к изначальной высоте образца (см. рис. 4.11б-в). Таким образом, численное моделирование для испытаний на сжатие было реализовано в упругопластической постановке, и в этих расчётах был оценён коэффициент триаксиальности напряжений (stress state triaxiality factor), вычисленный как отношение гидростатического давления (напряжения) $\sigma_h = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) / 3$ к эквивалентному напряжению фон Мизеса σ_{eqv} .

4.7. Результаты испытаний

Характеристики ударопрочности и изгибного модуля для различных структур (*FCC*, *BCC*, *BCT*, *OCT*) были определены при проведении ударных испытаний по Шарпи и квазистатических экспериментов на изгиб по трёхточечной схеме (см. раздел 4.5), соответственно. Кажущиеся значения пределов текучести и энергии разрушения определялось из испытаний на сжатие.

Зависимость нормированной ударной прочности от размера ячейки периодичности и относительных смещений для различных структур представлена в графическом виде на рисунке 4.8. Нормирование характеристик выполнено относительно ударной прочности сплошного материала $a_s = 2.5$ Дж. Различные механические характеристики сплошного образца из фотополимера были указаны в разделе 4.3. На каждой из четырех диаграмм представлены осреднённые значения, полученные из экспериментальных данных. Разброс относительно среднего значения ударопрочности не превышал $\pm 20\%$. В то же время, в

модифицированных структурах, где ударопрочность была наибольшей, разброс был наименьшим.

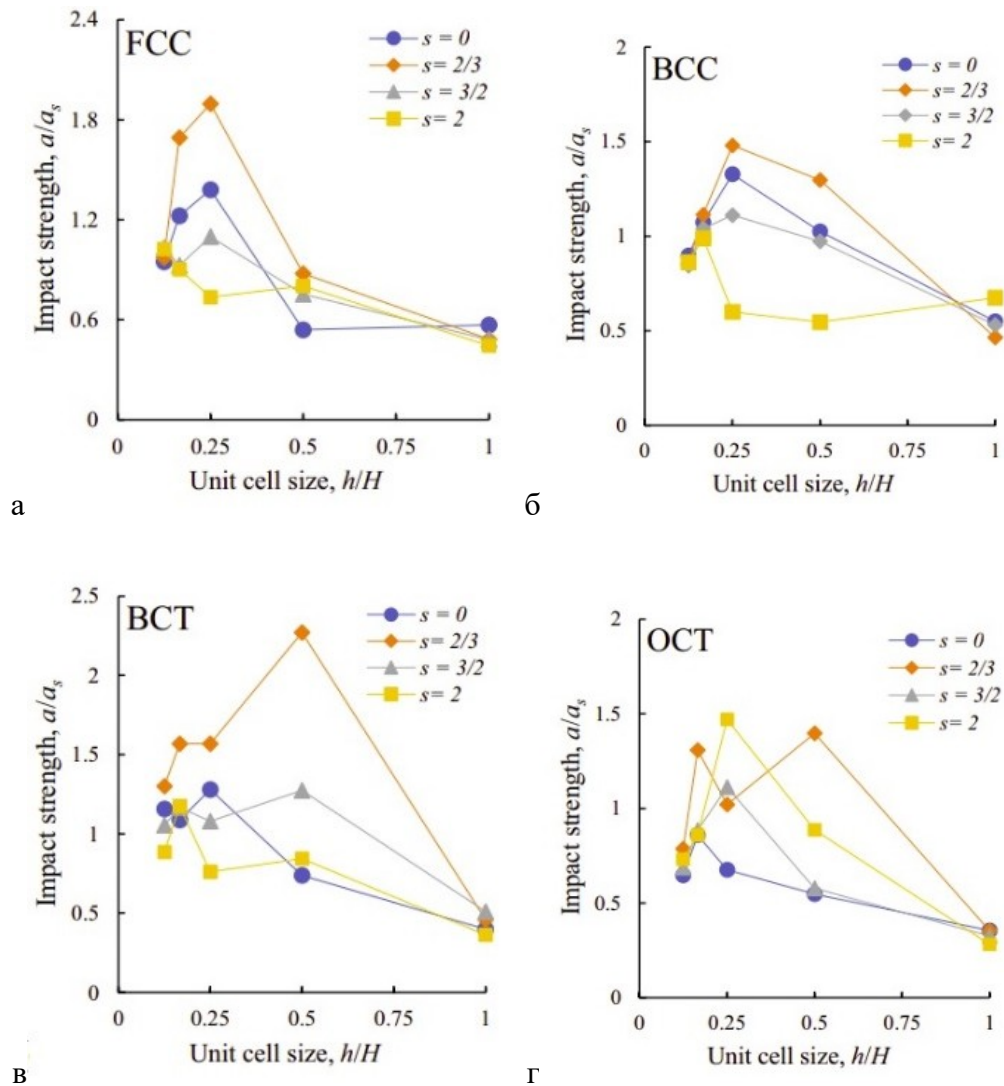


Рисунок 4.8. Зависимости нормированной ударной прочности от размера ячейки периодичности и различных относительных смещений в различных метаматериалах.

На графиках выше видно, что наиболее значительное увеличение ударопрочности достигается для относительного смещения $s = 2/3$ (оранжевые кривые) и для размеров ячеек периодичности $h/H = \left[0.125 \quad \dots \quad 0.5 \right]$. Примечательно, что такой размер элементарной ячейки близок к радиусу скругления наконечника (законцовки) ударника, используемого в динамических испытаниях по Шарпи (3.2 мм). Для больших ($h/H = 1$) и меньших ($h/H = 0.125$) ячеек периодичности ударопрочность и эффект от смещения связей снижаются. Это можно объяснить ослаблением заполнителя, содержащего слишком

тонкие элементы/стрержни, или же в случае наибольшей элементарной ячейки - большим расстоянием между элементами/стержнями в заполнителе, а следовательно, плохой (недостаточной) поддержкой несущих слоёв элементами заполнителя.

В модифицированных структурах *FCC* и *BCC* ударопрочность оказалась больше в 1,2-1,5 раза по сравнению с идеальными/стандартными их аналогами (см. рис. 4.8а, б). Более значительные эффекты продемонстрировали структуры *BCT* и *OCT*, ударопрочность которых увеличивается в 2–3 раза (см. рис. 4.8в, г). Кроме того, такие структуры обладают высокой ударной прочностью и при больших значениях смещениях $s = \begin{bmatrix} 3/2 & 2 \end{bmatrix}$. Следует

отметить, что структуры *BCT* и *OCT* схожи: *OCT* является вариантом *BCT* с дополнительной горизонтальной рамой (см. рис. 4.2). Поэтому конструктивные последствия от смещения связей наиболее проявлены в структурах типа *BCT*, имеющие центральный узел (в отличие от *FCC*) и стержни, ориентированные более близко к направлению удара (45° в *BCT* вместо 55° в *BCC*).

Примеры разрушенных образцов после динамических испытаний по Шарпи для всех рассматриваемых структур представлены на рисунке 4.9 ниже. Здесь точками помечены наилучшие (зеленые точки) и вторые лучшие (синие точки) варианты образцов в соответствии с полученными экспериментальными результатами.

Зависимости кажущихся изгибного модуля (young's modulus), предела текучести (yield strength) и энергии разрушения (toughness) от размера ячейки периодичности (unit cell size) и относительных смещений, установленные в квазистатических испытаниях, представлены в виде графиков на рисунке 4.10. Статические свойства модифицированных структур со смещениями ($s > 0$) в большинстве случаев сравнимы с идеальными вариантами геометрии ($s = 0$). Более того, в некоторых случаях асимметричные варианты структур проявляют лучшие свойства (см. изгибный модуль *BCC* и *OCT*, энергия разрушения у *BCT* и *OCT* на рис. 4.10). Наибольшие элементарные ячейки ($h/H = 1$) демонстрируют лучшие статические свойства во всех рассматриваемых случаях, в то время как для меньших ячеек статическая прочность и жёсткость снижаются. Уменьшение прочности может быть обусловлено влиянием абсолютных значений диаметров стержней при квазистатических деформациях. В рассматриваемых структурах, относящиеся к классу «bending-dominated», разрушение, в основном, связано с местной потерей устойчивости стержней, поэтому их диаметр играет решающую роль. Размерные эффекты изгибного модуля незначительны до $h/H = 0.25$ (см. рис. 4.10 сверху), тогда как дефекты и

несовершенная форма напечатанных образцов для меньших элементарных ячеек могут играть существенную роль в снижении их жёсткости.

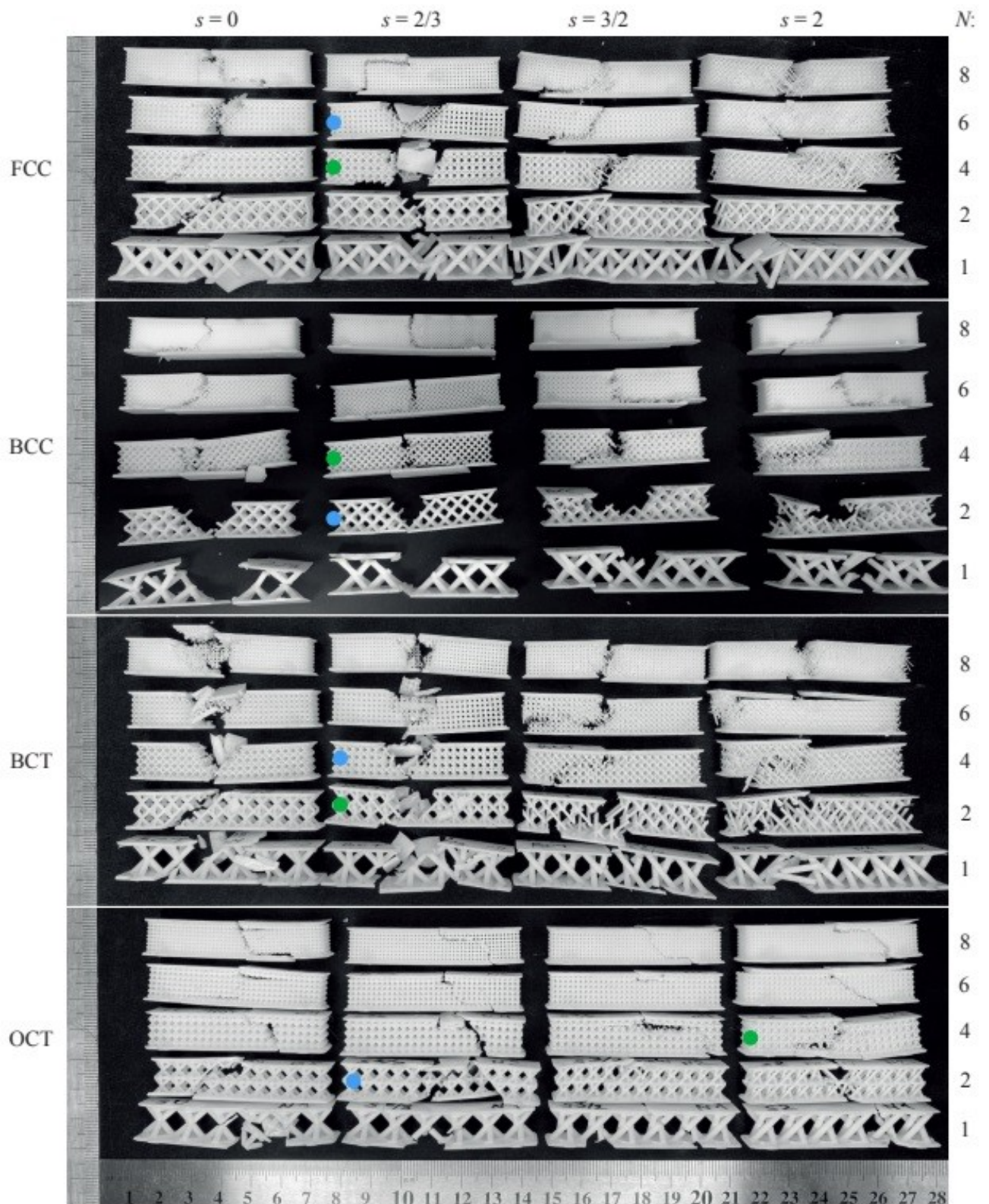


Рисунок 4.9. Изображение с 80 образцами с заполнителями вида *BCC*, *BCT*, *FCC* и *OCT* после ударных испытаний по Шарпи. Наилучшие образцы отмечены маркерами: зеленый – максимальная ударопрочность, синий – второй результат ударопрочности по величине.

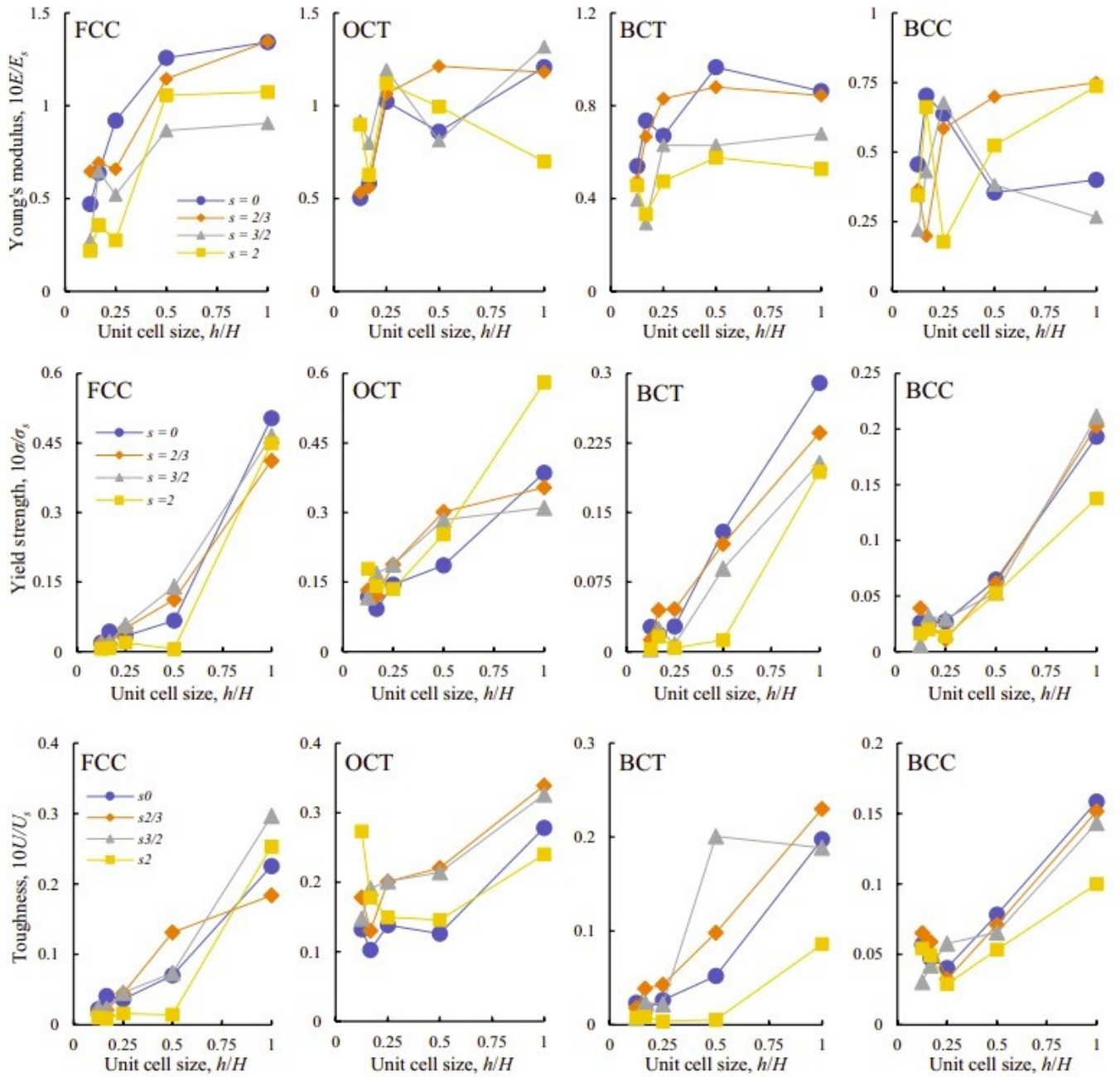


Рисунок 4.10. Зависимости относительного изгибного модуля (вверху); относительного предела текучести (посередине) и энергии разрушения (внизу) различных типов структур (*FCC*, *OCT*, *BCT* и *BCC*) в ячейке периодичности заполнителя метаматериала от размера ячейки периодичности h/H и относительных смещений s .

Здесь соответствующие нормировочные свойства сплошного материала:

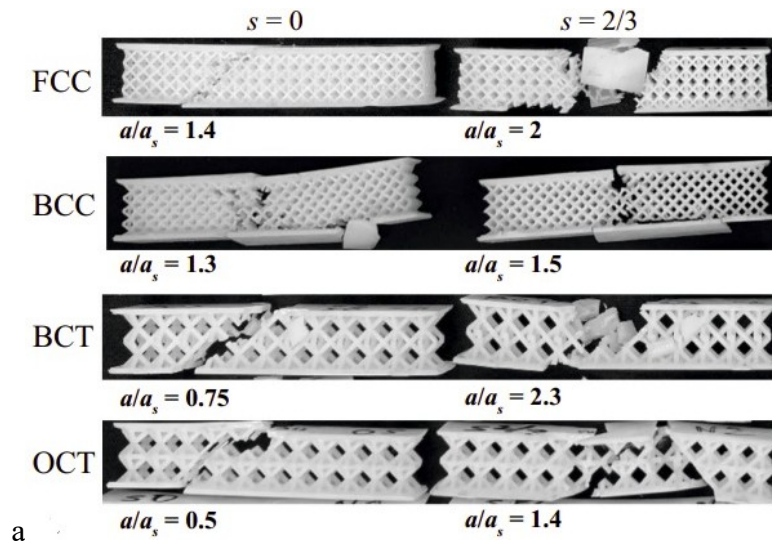
$$E_s = 1.27 \text{ ГПа}$$

$$\sigma_s = 33 \text{ МПа}$$

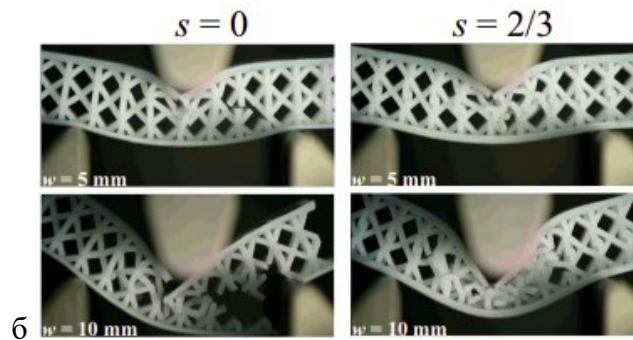
$$U_s = 33.1 \text{ кДж/м}^3$$

Сравнение между разрушенными образцами с идеальным ($s = 0$) и асимметричным ($s = 2/3$) заполнителями приведено на рисунке 4.11а. Здесь представлены структуры с максимальной ударопрочностью, т.е. *FCC* и *BCC* с количеством ячеек $N = 4$, а также *BCT* и *OCT* с количеством ячеек $N = 2$. На рисунке 4.11а видно, что в идеальных структурах *FCC*, *BCT* и *OCT* трещина распространяется от центра верхнего несущего слоя (место удара) по диагонали к нижнему несущему слою (место опоры). Напротив, в соответствующих модифицированных структурах образуется большая зона повреждения в центре образца (место удара) с отсутствием явного направления распространения трещины. Таким образом, можно сделать вывод, что асимметричные соединения играют решающую роль в изменении как механизмов разрушения, так и паттернов трещин. В структурах с идеальными структурами *FCC*, *BCT*, *OCT* однозначно наблюдаются одиночные сквозные трещины, что свидетельствует о "квази-хрупком" разрушении. В отличие от этого, в структурах с асимметричными соединениями наблюдаются большие нелинейные деформации и накопление повреждений, что приводит к характерному «квази-пластичному» разрушению образца. Ситуация отличается для структуры *BCC*, у которой изменение ударопрочности между идеальными и модифицированными образцами не сильное (приблизительно 15%, см. рисунок 4.11а). В этих образцах механизмы разрушения также не сильно отличаются, поэтому можно заключить, что *BCC* является довольно перспективной в своей идеальной разновидности ($s = 0$), или что оптимальное смещение s не было найдено среди рассмотренных вариантов.

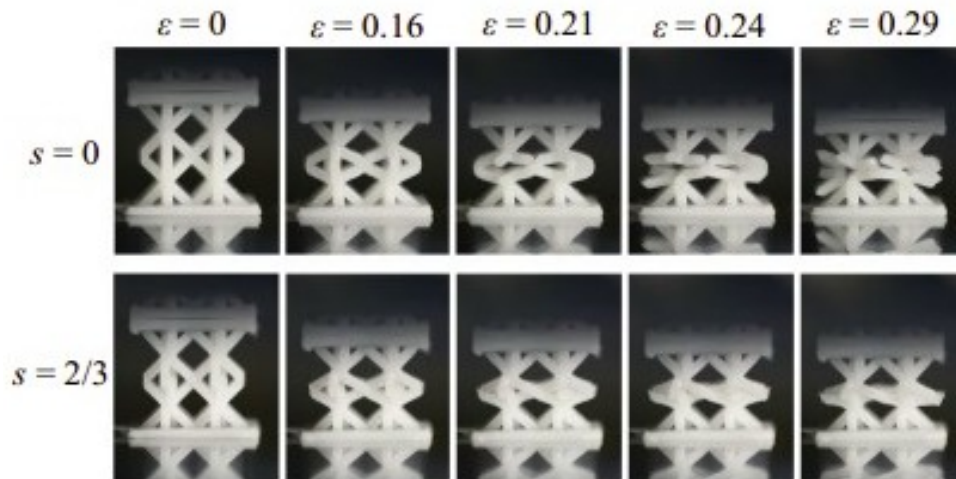
Отличия в механизмах разрушения также можно наблюдать при квазистатических изгибных и сжимающих испытаниях. На рисунке 4.11б (слева) можно видеть наклонную сквозную трещину, возникающую в идеальной структуре *BCT* при изгибе. Эта трещина появляется внутри заполнителя, затем распространяется и разрушает нижний несущий слой, в конечном итоге приводя к полному разрушению образца. Напротив, в модифицированном заполнителе с *BCT* структурой наблюдается интенсивное повреждение и смятие элементов ячеек без распространения трещин (рисунок 4.11а, справа). На фотографиях с испытаниями на сжатие образцов с *BCT* структурой можно наблюдать изменение характера разрушения на уровне отдельной элементарной ячейки (рисунок 4.11в). В стандартной структуре соединения между стержнями (т.е. узлы) разрушаются до полного сжатия элементарной ячейки. Напротив, модифицированная элементарная ячейка ($s = 2/3$) деформируется до полного сжатия без наблюдаемого разрушения соединений стержней. Аналогичные результаты были получены для структур *OCT* и *FCC*, и менее наглядно для *BCC* структуры, где изменение ударопрочности было менее выражено.



а



б



в

Рисунок 4.11. Снимки: а) разрушенных образцов после испытаний на удар. Здесь: средние значения относительной ударопрочности указаны под фотографиями. Оказалось, что наилучший из рассмотренных вариантов – структура *BCT*. Именно она выбрана для дальнейшей оценки механизма разрушения в режиме квазистатики).

Изображения деформаций при квазистатическом нагружении: б) при трёхточечном изгибе при различных уровнях прогиба; в) при сжатии при различных уровнях деформации ε .

4.8. Анализ изменения удельных характеристик метаматериала

Ранее на рисунке 4.6 было показано, что относительная плотность модифицированных структур несколько больше, чем у стандартных. Чтобы сравнить и проанализировать механические свойства рассматриваемых структур и показать влияние предложенных асимметричных соединений, автор прибегнул к диаграммам Эшби (Ashby plots) на рисунке 4.12 (*Прим.: Диаграммы Эшби позволяют визуально представить области, в которых определённые свойства могут быть достигнуты, и сравнить различные материалы или структуры в контексте этих свойств. Они могут быть полезными инструментами для инженеров и исследователей при выборе подходящих материалов или оптимизации свойств материалов с учётом конкретных требований и ограничений* [17].) На диаграммах Эшби (Ashby plots) продемонстрированы диапазоны удельных механических характеристик, которые можно достичь в стандартных и в модифицированных структурах метаматериалов с различным размером ячеек $h/H = 1/N = \left[0.1667 \quad \dots \quad 0.5 \right]$. Здесь под термином «удельные» подразумеваются относительные свойства, нормированные относительно характеристик сплошного образца ($\bar{a} = a/a_s$; $\bar{U} = U/U_s$ и т.д.) и приведённые к относительной плотности ($\bar{\rho} = \rho/\rho_s$) структур. Средние экспериментальные значения обозначены маркерами: маркеры без заливки для идеальных и сплошные маркеры для модифицированных структур. На диаграммах (рис. 4.12) показаны результаты только для *FCC*, *BCT* и *OCT* структур. Результаты для *BCC* структуры не представлены, чтобы сделать диаграммы визуально более понятными, так как удельные свойства *BCC* изменились не сильно, и лишь их абсолютные значения улучшились (см. рис. 4.8б, 4.10).

Важно знать, что лучший материал с наивысшими удельными свойствами стремится к верхней правой области на диаграммах Эшби (см. рис. 4.12). В верхнем ряду (рис. 4.12а, б) сравниваются удельное поглощение энергии при ударе (specific impact strength) и статическая удельная жёсткость (specific young modulus) и удельная прочность (specific yield strength), в нижнем ряду (рис. 4.12в, г) сравнение проводится для удельной энергии разрушения (specific toughness) в квазистатике. Можно видеть, что наиболее эффективная структура, демонстрирующая улучшение как динамических, так и статических удельных свойств, это *OCT* структура. Остальные структуры (*FCC*, *BCT*) показывают возможность значительного повышения удельной ударопрочности (до 3 раз), при некотором снижении статических свойств. Предел текучести и энергия разрушения (плотность энергии

деформации) также могут быть увеличены для *FCC* структуры при размере ячейки $h/H = 0.5$ (см. рис. 4.12г).

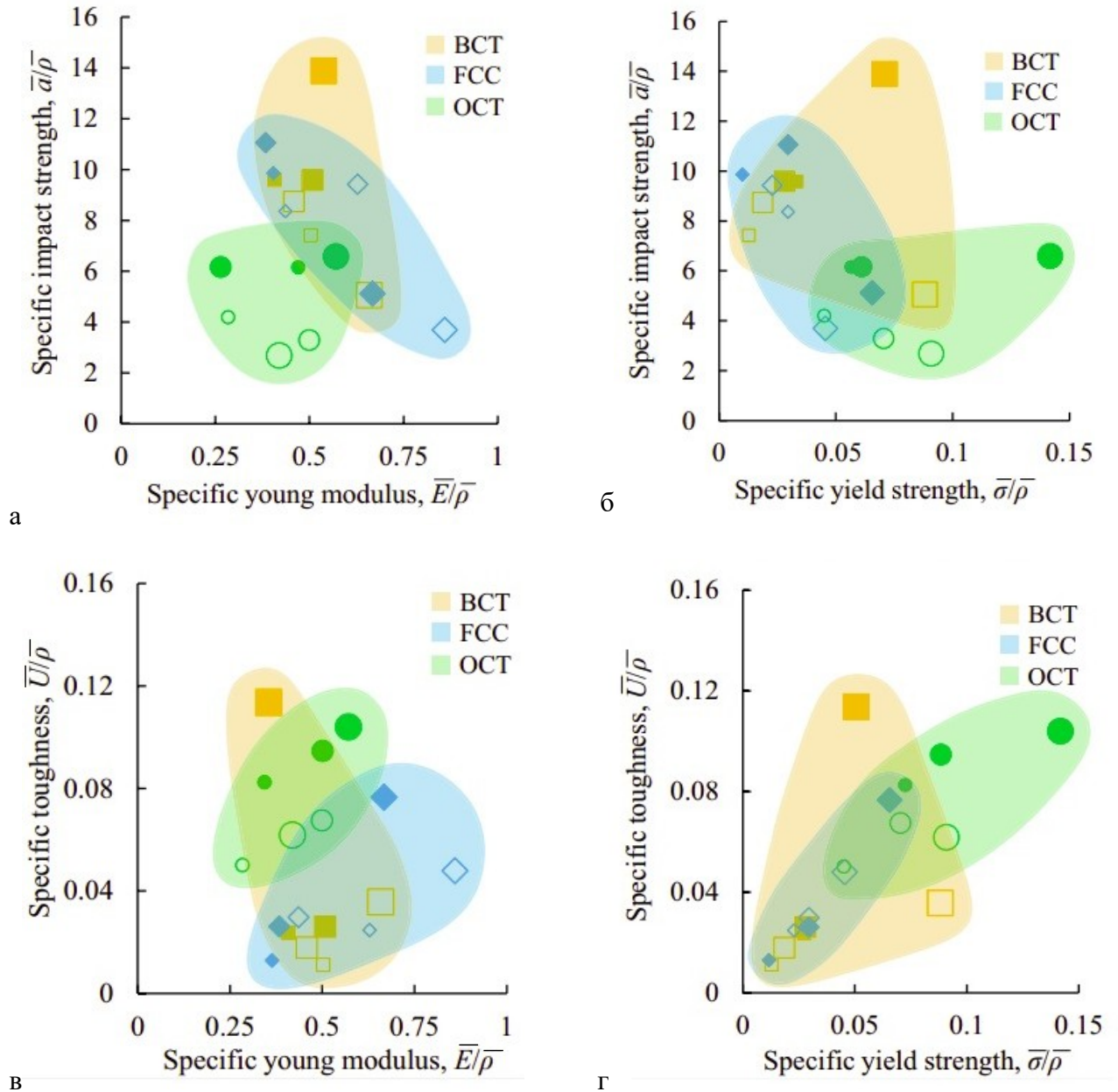


Рисунок 4.12. Диаграммы Эшби с анализом и сравнением свойств идеальных и модифицированных структур.

Окрашенные области перекрывают диапазон свойств, которые могут быть достигнуты, применяя метод смещения связей для *BCT*, *FCC* и *OCT* структур (с учётом разброса экспериментальных данных). Маркеры без заливки обозначают средние характеристики стандартных вариантов. Закрашенные маркеры обозначают свойства модифицированных вариантов структур. Размер маркера указывает на размер ячейки периодичности (маленький - $h/H = 0.1667$, средний - $h/H = 0.25$, большой - $h/H = 0.5$).

4.9. Результаты численного моделирования

При реализации численного моделирования также были получены доказательства изменения механизмов разрушения в идеальных и асимметричных структурах. На рисунке 4.13а-е представлены результаты конечно-элементного моделирования процесса удара и сжатия образцов со структурой *ВСТ* в заполнителе, где относительный размер ячеек $h/H = 0.5$ и относительными смещениями $s = 0$ и $s = 2/3$. Именно структуре *ВСТ* из всех рассмотренных свойственно наиболее значительное увеличение ударопрочности (см. рис. 4.8в). Важно отметить, что время разрушения для идеальных и модифицированных образцов изменилось примерно в два раза. Стандартная структура полностью была разрушена в первые 3.5 мс после удара (рисунок 4.13а). Трещина, ориентированная вдоль наклонных стержней заполнителя, возникла на третьей миллисекунде. Затем эта трещина быстро распространилась на несущий слой в местах подкрепления образцов и полностью разрушала их. В противоположность этому, в модифицированной асимметричной структуре можно наблюдать большие нелинейные деформации и глубокие вмятины в образце под законцовкой ударника в течение времени 6.5 мс (рис. 4.13б). Во время этого процесса возникает множество разломленных стержней и смятых ячеек в заполнителе. Образец полностью был разрушен при $t = 7.2$ мс, когда нижний несущий слой разломался из-за интенсивного растягивающего напряжения.

Зависимости скорости ударника и максимальных эквивалентных деформаций от времени в конечно-элементной модели образцов представлены на рисунке 4.13в. Можно видеть, что после достижения упомянутых моментов времени скорость молота принимает постоянное значение (синие линии на рис. 4.13в). В результате молот продолжает двигаться вперед далее без замедления, что означает, что образец полностью разрушен и больше не оказывает сопротивления молоту. Максимальные эквивалентные деформации принимают более высокие значения (до 0.13) в модифицированных структурах с непрерывным увеличением вплоть до разрушения (сплошная оранжевая кривая на рис. 4.13в), в то время как падение эквивалентных деформаций в идеальной структуре происходит уже при значении $t = 2$ мс, когда стержни заполнителя подвергаются локальному разрушению. Следует отметить, что этот эффект может быть связан с изменением триаксиальности напряженного состояния, когда сдвиговая деформация оказывается малой в пересечениях (связях) стержней заполнителя в идеальной структуре, а более опасное напряжение, соответствующее всестороннему растяжению, становится интенсивным, что приводит к возникновению разрывов перегруженных связей стержней [1*, 2*]. Этот эффект аналогичен

наблюдавшемуся в плоских структурах в Главе 3, однако в данном случае он уже реализуется в структуре трехмерных ячеек метаматериала.

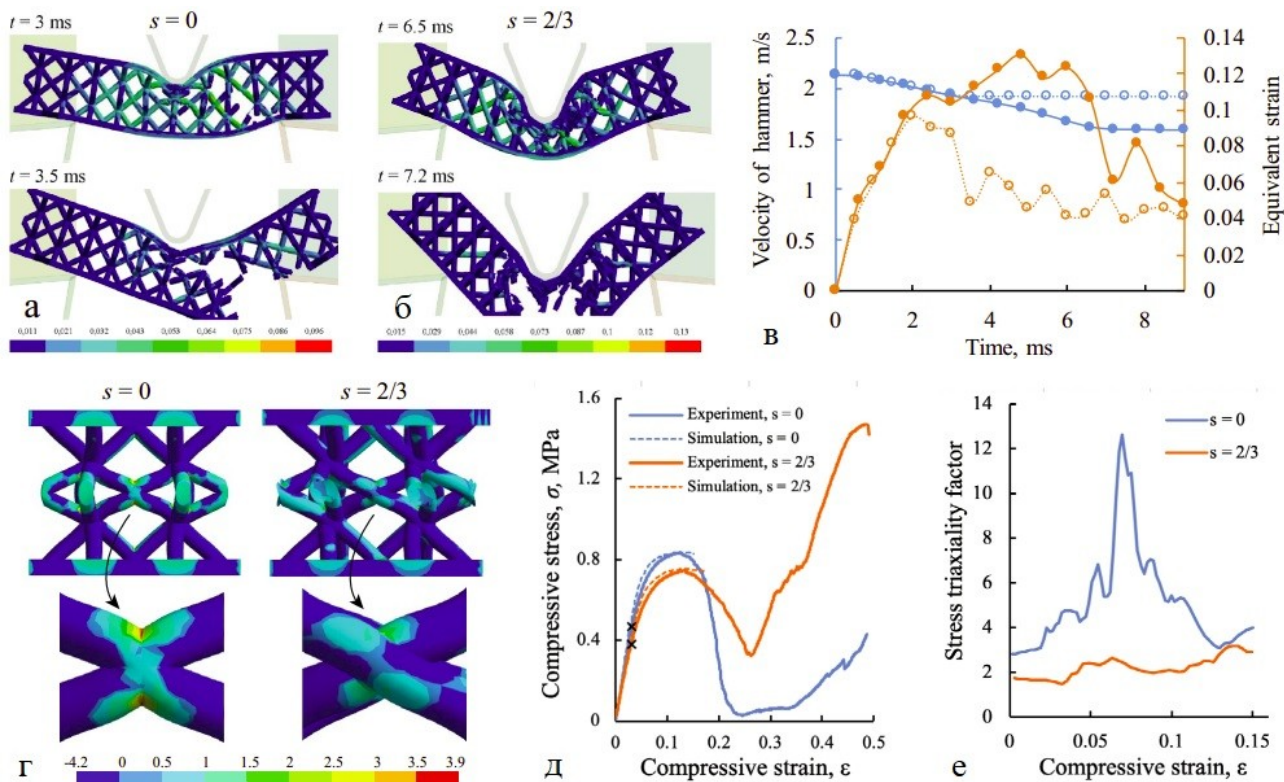


Рисунок 4.13. Результаты численного моделирования образца с BCT структурой:

- а-б) Деформаций в испытании на удар;
- в) Временной зависимостям скоростей и эквивалентных деформаций (здесь пунктирные линии соответствуют смещению $s = 0$, сплошные - $s = 2/3$);
- г) Распределения коэффициента триаксальности напряжений при средней деформации сжатия $\epsilon = 0.15$;
- д) Диаграммы напряжение-деформация при сжатии (маркеры-кресты обозначают момент возникновения пластических деформаций);
- е) Зависимость максимальных значений коэффициента триаксальности напряжений от деформации сжатия.

На основе оценки изменения скорости ударника в результатах численного моделирования (рис. 4.13а, б) было установлено, что поглощение энергии в идеальной структуре составляет $\Delta E = 1.37$ Дж, а в модифицированной структуре $\Delta E = 3.35$ Дж. Результат для стандартной структуры хорошо согласуется с испытанием на удар по Шарпи (см. рис. 4.8в). Результат для модифицированной решётки не добирает до значений экспериментальных данных по ударопрочности. Это можно объяснить несколькими

факторами, которые связаны с неопределенностью в свойства материала, разбросом экспериментальных данных и влиянием трения между разломленными элементами образца и ударника. Кроме того, важную роль в поведении полимерного материала может играть скорость деформаций при ударе. Эти эффекты явно не учитываются в рассматриваемой численной модели, поэтому значение предельного напряжения в используемом критерии разрушения следует рассматривать только как идентифицированный параметр при заданных скоростях удара. Тем не менее, положительный эффект и изменение механизма разрушения, связанные с асимметричными соединениями в рассматриваемых структурах, подтверждаются численным моделированием.

Дополнительно, были проведены квазистатическое численное моделирование для более глубокого рассмотрения упругопластического поведения образцов с *BCT* структурой при сжатии. Результаты представлены на рисунках 4.13г-е. На рисунке 4.12д показано, что применяемая КЭ модель достаточно точно описывает деформации образцов при значениях сжимающей деформации $\varepsilon = 0.15$. При таком уровне сжатия наблюдался дефект в центральном соединении стержней в идеальной структуре *BCT* (рис. 4.12г, слева). Следует отметить, что в расчетах также наблюдались наибольшие значения коэффициента триаксиальности напряжений именно в этом месте (рис. 4.13е, синяя кривая). Это означает, что разрушение соединения между стержнями ячейки имеет квази-хрупкий характер, в отличие от модифицированных асимметричных соединений, где коэффициент триаксиальности напряжений ниже в 1,5 раза (рис. 4.13е, оранжевая кривая). Результаты расчетов на рисунке 4.12г представлены для последнего шага при $\varepsilon = 0.15$. После этого момента наблюдалось снижение уровня напряжений на экспериментальных (сплошных) кривых на рисунке 4.12д. В идеальной/стандартной структуре *BCT* такой спад связан с разрушением связей, тогда как в модифицированной структуре спад связан с закручиванием стержней и большими неупругими деформациями соединений. В результате, после полного сжатия центральной ячейки, модифицированная структура получает более высокую остаточную жёсткость и статическую прочность, а также более высокий уровень энергии разрушения (рис. 4.12д).

Особенно следует отметить, что на макроуровне максимальный коэффициент триаксиальности напряжений в идеальной структуре может быть в 6 раз больше, чем в модифицированной (рис. 4.13е). Этот максимум достигается примерно в момент начала образования пластических деформаций (отмеченной на графиках на рис. 4.13д), когда влияние концентрации напряжений в связях/соединениях становится наиболее значительным. На микроуровне высокое значение гидростатического давления

(напряжения) σ_h приводит к образованию микроразрывов и микротрещин в микроструктуре полимерного материала [166], что делает связи/соединения (пересечения) между стержнями наиболее слабым звеном в элементарной ячейке.

4.10. Выводы

Анализируя полученные результаты, следует сказать, что предложенный метод смещения связей между элементами/стержнями в ячейках периодичности для рассматриваемых структур *FCC*, *BCC*, *BCT* и *OCT* позволяет увеличить абсолютные и удельные значения динамических свойств образцов в 1,5-3 раза без существенного снижения, а в некоторых случаях даже с некоторым улучшением их статических характеристик. В отличие от известного метода асимметризации [119] и метода разделения связей [124], предложенный метод позволяет сохранить или даже несколько увеличить статические жёсткость и прочность по сравнению с идеальными вариантами структуры метаматериалов. К такому результату приводит применение небольших относительных смещений (менее диаметра стержня) в элементарных ячейках, что обеспечивает практически неизменный удельный вес образцов по сравнению со стандартными структурами.

Обоснование полученного улучшения может быть связано с изменением механизмов разрушения в структурах с асимметричными связями. В предыдущей Главе 3 было показано, что использование асимметричных соединений в плоских сетчатых заполнителях приводит к снижению концентрации напряжений и уменьшению триаксильности напряжений в рассмотренных соединениях между стержнями. Пластические деформации становятся более интенсивными с возрастанием значений девиаторных напряжений, связанных с кручением и поворотами в асимметричных соединениях (*Variants 1-3*), вместо растяжения и изгиба в стандартной решётке (*Variant 4*). В текущей Главе 4 наблюдается схожесть и для асимметричных трёхмерных структур. Большие неупругие деформации модифицированных трёхмерных элементарных ячеек обеспечивают возможность увеличения энергии поглощения и изменения механизма разрушения от «квази-хрупкого» со сквозной трещиной до «квази-пластичного» с интенсивным смятием и энергозатратным прогрессирующим разрушением элементарных ячеек.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации представлены результаты теоретического и экспериментального исследования механических метаматериалов из классов ауксетиков и сетчатых структур. Предложены варианты определения эффективных характеристик этих метаматериалов в рамках методов осреднения, предполагающих, что эффективная среда соответствует моделям обобщённых континуумов. Установлено, что для стандартных метаматериалов, состоящих из периодических ячеек, масштабные параметры оказываются сопоставимыми по своим значениям с размером ячейки периодичности, что снижает перспективы их применения в качестве энергопоглощающих структур, для которых желательным является существенное нелокальное поведение материала, обеспечивающее большие энергозатраты при разрушении. Поэтому для проведения экспериментов среди известных метаматериалов выбран вариант пантографических метаматериалов, для которого характерны большие значения масштабных параметров, идентифицированных в рамках решения задач осреднения с эффективной средой, соответствующей градиентной теории упругости. Следуя концепции пантографических метаматериалов, предложена методика создания плоских и трехмерных сетчатых структур со смещенными связями, в которых при больших нагрузках соединения между стержнями (даже жесткие) в ячейке периодичности играют роль (пластических) шарниров, что обеспечивает значительную делокализацию напряженного состояния и значительный рост ударной прочности материала, что подтверждается проведенными экспериментальными исследованиями и численным моделированием.

Основные результаты по главам диссертации следующие:

В Главе 1 были рассмотрен метаматериал-ауксетик с взаимопроникающей структурой с кубической симметрией. Проведена идентификация микро-дилатационных упругих постоянных и масштабного параметра для решётчатого метаматериала с отрицательным коэффициентом Пуассона. Впервые предложен алгоритм идентификации всех параметров теории с учётом микро-дилатации. Показана связь материальных характеристик с геометрическими и упругими параметрами элементарной ячейки метаматериала. В частности, модуль жёсткости микроструктуры и параметр нелокальных взаимодействий линейно зависят от жёсткости взаимопроникающей структуры в элементарной ячейке, а модуль связанности значительно зависит лишь от архитектуры элементарной ячейки. Этот результат получен с использованием аналитического решения в рамках микро-дилатационной теории континуальной среды и конечно-элементного

моделирования одноосного растяжения, всестороннего сжатия и простого сдвига балочных моделей решётчатого метаматериала. Задачи неоднородного одноосного деформирования балки и чистого изгиба балки были использованы для определения параметра нелокальных взаимодействий.

В Главе 2 исследовались кажущиеся упругие характеристики сетчатых метабалок, состоящих из ромбических и треугольных элементарных ячеек. Механическое поведение в линейной зоне таких структур может быть описано неклассической теорией балок Эйлера-Бернулли, разработанной в рамках градиентной теории упругости. Исследованы масштабные эффекты для рассматриваемых балок при чистом изгибе, консольном изгибе и при неоднородном одноосном растяжении на основании численного моделирования. Впервые показано, что масштабные эффекты для балок с ромбовидной структурой ячеек периодичности соответствует градиентной балочной теории с «одноосным напряженным состоянием», однако масштабные параметры рассматриваемых структур оказываются невелики и сопоставимы с размером ячеек периодичности.

В Главах 3 и 4 предложена методика создания нового класса механических сетчатых метаматериалов с асимметричными ячейками периодичности и смещенными связями. Показано, что для стандартных плоских и трехмерных структур сетчатых заполнителей возможно повысить ударную прочность путем использования идеи пантографических метаматериалов, для которых характеры большие значения масштабных параметров и значительные эффекты делокализации напряженно-деформированного состояния. Предложены варианты геометрии сетчатых заполнителей, в которых ударная прочность повышается в 3-5 раз (для плоских структур) и в 1.5-3 раза (для трёхмерных структур) без значительного снижения статических свойств. Показано, что предложенная концепция создания асимметричных ячеек периодичности обеспечивает снижение коэффициента триаксиальности их напряженного состояния, что обеспечивает повышение живучести рассматриваемых изделий при ударе и изменение механизмов разрушения от квази-хрупкого к квази-пластичному.

Разработанные методы и полученные теоретические и экспериментальные результаты могут быть использованы в дальнейшем для выбора оптимальной геометрии сетчатых метаматериалов при изготовлении ударопоглощающих материалов и многофункциональных защитных противоударных конструкций.

Список литературы

1. Седов Л.И. (1970) Механика сплошной среды. М.: Наука, Том 1
2. Седов Л.И. (1973) Механика сплошной среды. М.: Наука, Том 2
3. Bertoldi K., Vitelli V., Christensen J. & Hecke M. (2017) Flexible mechanical metamaterials. *Nature Reviews Materials* 2:17066 [doi:10.1038/natrevmats.2017.66](https://doi.org/10.1038/natrevmats.2017.66)
4. Fleck N.A., Muller G.M., Ashby M.F., Hutchinson J.W. (1994) Strain gradient plasticity: Theory and experiment. *Acta metall. mater.* Vol.: 42(2), pp. 475-487
[https://doi.org/10.1016/0956-7151\(94\)90502-9](https://doi.org/10.1016/0956-7151(94)90502-9)
5. Voigt W. (1887) Theoretische studien über die elasticitätsverhältnisse der krystalle. *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 34, pp. 3-52 <https://eudml.org/doc/135896>
6. Cosserat E. et Cosserat F. (1909) Theories des corps deformables. A: *Hermann et fils*
7. Кунин И.А. (1975) Теория упругих тел с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. М.: Наука
8. Walser R. (2001) Electromagnetic metamaterials. *Complex Mediums II: Beyond Linear Isotropic Dielectrics* v:4467 <https://doi.org/10.1117/12.432921>
9. Askes H., Susmel L. (2015) Understanding cracked materials: is linear elastic fracture mechanics obsolete? *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 38 №2 pp. 154-160
<https://doi.org/10.1111/ffe.12183>
10. Abrate S, Epasto G, Kara E, et al. (2018) Computed tomography analysis of impact response of lightweight sandwich panels with micro lattice core. *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci* 232: 1348–1362 [DOI:10.1177/0954406218766383](https://doi.org/10.1177/0954406218766383)
11. Abdelaal, O., Hengsbach, F., Schaper, M. & Hoyer, K.-P. (2022) Lpbf manufactured functionally graded lattice structures obtained by graded density and hybrid poisson's ratio. *Materials* 15, 4072.
12. Abdoul-Anziz H, Seppecher P (2018) Strain gradient and generalized continua obtained by homogenizing frame lattices. *Mathematics and mechanics of complex systems* 6(3):213–250.
13. Abou-Ali AM, Al-Ketan O, Rowshan R, et al. (2019) Mechanical response of 3d printed bending-dominated ligament-based triply periodic cellular polymeric solids. *J Mater Eng Perform* 28: 2316–2326 [DOI:10.1007/s11665-019-03982-8](https://doi.org/10.1007/s11665-019-03982-8)
14. Alibert J-J, Seppecher P, Dell'Isola F (2003) Truss modular beams with deformation energy depending on higher displacement gradients. *Mathematics and Mechanics of Solids* 8(1):51–73
15. Amendola A, Carpentieri G, Feo L, et al. (2016) Bending dominated response of layered mechanical metamaterials alternating pentamode lattices and confinement plates. *Compos Struct* 157: 71–77 <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.07.031>
16. Arshad, A. B., Nazir, A. & Jeng, J.-Y. (2020) The effect of fillets and crossbars on mechanical properties of lattice structures fabricated using additive manufacturing. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 111, pp. 931–943 <https://doi.org/10.1007/s00170-020-06034-x>
17. Ashby MF. (2006) The properties of foams and lattices. *Philos Trans A Math Phys Eng Sci* 364: 15–30 <https://doi.org/10.1098/rsta.2005.1678>
18. Bacigalupo, A., Gambarotta, L. (2014) Homogenization of periodic hexa- and tetrachiral cellular solids. *Compos. Struct.* 116, 461–476 <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.05.033>

19. Bai, L., Yi, C., Chen, X., Sun, Y. & Zhang, J. **(2019)** Effective design of the graded strut of bcc lattice structure for improving mechanical properties. *Materials* 12, 2192.
20. Bai, L. *et al.* **(2021)** Improved mechanical properties and energy absorption of ti6al4v laser powder bed fusion lattice structures using curving lattice struts. *Mater. Des.* 211, 110140.
21. Barchiesi E, Spagnuolo M, Placidi L **(2019)** Mechanical metamaterials: a state of the art. *Mathematics and Mechanics of Solids* 24(1):212–234 [doi:10.1177/1081286517735695](https://doi.org/10.1177/1081286517735695)
22. Bártolo, P. J. **(2011)** Stereolithography: Materials, processes and applications. *Springer Science & Business Media* <https://doi.org/10.1007/978-0-387-92904-0>
23. Bauer, J., Kraus, J. A., Crook, C., Rimoli, J. J. & Valdevit, L. **(2021)** Tensegrity metamaterials: Toward failure-resistant engineering systems through delocalized deformation. *Adv. Mater.* 33, 2005647 <https://doi.org/10.1002/adma.202005647>
24. Berkache K, Deogekar S, Goda I, Picu R, Ganghoffer JF **(2017)** Construction of second gradient continuum models for random fibrous networks and analysis of size effects. *Composite Structures* 181, pp. 347–357 <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.08.078>
25. Berkache K, Deogekar S, Goda I, Picu RC, Ganghoffer JF **(2019)** Identification of equivalent couple-stress continuum models for planar random fibrous media. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 31(4):1035–1050 <https://doi.org/10.1007/s00161-018-0710-2>
26. Birman V and Kardomateas GA. **(2018)** Review of current trends in research and applications of sandwich structures. *Compos Part B: Eng* 142: 221–240.
27. Bîrsan, M., Altenbach, H. **(2011)** On the theory of porous elastic rods. *Int. J. Solids Struct.* 48 (6), 910–924 <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.11.022>
28. Bishay, P.L., Repka, M., Sladek, V., Sladek, J. **(2017)** On the characterization of porosity-related parameters in micro-dilatation theory. *Acta Mech.* 228, 1631–1644.
29. Bishay, P.L., *et.al.* **(2016)** Analysis of elastic media with voids using a mixed-collocation finite-element method. *J. Eng. Mech.* 4016119 [http://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001193](http://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001193)
30. Bhate, D., Penick, C. A., Ferry, L. A. & Lee, C. **(2019)** Classification and selection of cellular materials in mechanical design: Engineering and biomimetic approaches. *Designs* 3, 19.
31. Boutin C, Giorgio I, Placidi L, *et. al.* **(2017)** Linear pantographic sheets: asymptotic micro-macro models identification. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems* 5(2):127–162.
32. Brighenti, R., Spagnoli, A., Lanfranchi, M., Soncini, F. **(2016)** Nonlinear deformation behaviour of auxetic cellular materials with re-entrant lattice structure. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 39, 599–610 <https://doi.org/10.1111/ffe.12381>
33. Capriz, G., Podio-Guidugli, P. **(1981)** Materials with spherical structure. *Arch. Rational Mech. Anal.* 75, 269–279 <https://doi.org/10.1007/BF00250786>
34. Carlsson, L. A. & Kardomateas, G. A. **(2011)** Structural and failure mechanics of sandwich composites. *Springer Science & Business Media* vol.121.
35. Cerniauskas, G. & Alam, P. **(2023)** Compressive properties of parametrically optimised mechanical metamaterials based on 3d projections of 4d geometries. *Extreme Mech. Lett.* 61, 102019 <https://doi.org/10.1016/j.eml.2023.102019>
36. Chang, C. *et al.* **(2021)** Mechanical characteristics of superimposed 316l lattice structures under static and dynamic loading. *Adv. Eng. Mater.* 23, 2001536.

37. Cheng, H. *et al.* **(2023)** Mechanical metamaterials made of freestanding quasi-bcc nanolattices of gold and copper with ultra-high energy absorption capacity. *Nat. Commun.* 14, 1243.
38. Chirita, S. **(2004)** On some exponential decay estimates for porous elastic cylinders. *Arch. Mech.* 56, 233–246.
39. Ciarletta, M., Chirita, S., Passarella, F. **(2005)** Some results on the spatial behavior in linear porous elasticity. *Arch. Mech.* 57(1), 43–65.
40. Ciarletta, M., Iovane, G., Sumbatyan, M.A. **(2003)** On stress analysis for cracks in elastic materials with voids. *Int. J. Eng. Sci.* 41(20): 2447–2461 [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(03\)00236-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(03)00236-2)
41. Clough EC, Ensberg J, Eckel ZC, *et al.* **(2016)** Mechanical performance of hollow tetrahedral truss cores. *Int J Solids Struct.* 91: 115–126 <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.04.006>
42. Cowin, S.C. **(1984)** The stresses around a hole in a linear elastic material with voids. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 37, 441–465 <https://doi.org/10.1093/qjmam/37.3.441>
43. Cowin, S.C., Nunziato, J.W. **(1983)** Linear elastic materials with voids. *J. Elasticity* 13, 125–147.
44. Cowin, S.C., Puri, P. **(1983)** The classical pressure vessel problems for linear elastic materials with voids. *J. Elasticity* 13, 157–163 <https://doi.org/10.1007/BF00041232>
45. Daynes S, Feih S, Lu WF, *et al.* **(2017)** Optimization of functionally graded lattice structures using isostatic lines. *Mater Des* 127: 215–223 <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2017.04.082>
46. De Angelo M, Placidi L, Nejadi Sadeghi N, Misra A **(2020)** Non-standard Timoshenko beam model for chiral metamaterial: Identification of stiffness parameters. *Mechanics Research Communications* 103:103,462 <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2019.103462>
47. Del Vescovo, D., Giorgio, I., **(2014)** Dynamic problems for metamaterials: review of existing models and ideas for further research. *Int. J. Eng. Sci.* 80, 153–172.
48. Della Corte A, Giorgio I, Scerrato D, *et al.* **(2016)** Pantographic 2d sheets: Discussion of some numerical investigations and potential applications. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 80, pp. 200–208 <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.10.010>
49. Dell’Isola F, Seppecher P, Alibert JJ, Lekszycki T, Grygoruk R, Pawlikowski M, Steigmann D, Giorgio I, Andreus U, Turco E, *et al.* **(2019a)** Pantographic metamaterials: an example of mathematically driven design and of its technological challenges. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 31(4):851–884 [DOI:10.1007/s00161-018-0689-8](https://doi.org/10.1007/s00161-018-0689-8)
50. Dell’Isola F, Seppecher P, Spagnuolo M, *et al.* **(2019b)** Advances in pantographic structures: design, manufacturing, models, experiments and image analyses. *Continuum Mech Thermodyn* 31, pp. 1231–1282 <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00806-x>
51. Dell’Isola, F., Batra, R.C. **(1997)** Saint-Venant’s problem for porous linear elastic materials. *J. Elasticity* 47, 73–81 [DOI:10.1023/A:1007478322647](https://doi.org/10.1023/A:1007478322647)
52. Dell’Isola F, Giorgio I, Pawlikowski M, *et al.* **(2016)** Large deformations of planar extensible beams and pantographic lattices: heuristic homogenization, experimental and numerical examples of equilibrium. *Proc R Soc A* 472: 20150790 [DOI:10.1098/rspa.2015.0790](https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0790)
53. Dell’Isola, F., Lekszycki, T., Pawlikowski, M., Grygoruk, R., Greco, L. **(2015a)** Designing a light fabric metamaterial being highly macroscopically tough under directional extension: first experimental evidence. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* 66 (6), 3473–3498.

54. Dell’Isola, F., Ugo, A., Luca, P. **(2015b)** At the origins and in the vanguard of peridynamics, non-local and higher-gradient continuum mechanics: An underestimated and still topical contribution of Gabrio Piola. *Math. Mech. Solids* 20(8), pp. 887–928 <https://doi.org/10.48550/arXiv.1310.5599>
55. Dell’Isola, F., Steigmann, D. **(2015)** A two-dimensional gradient-elasticity theory for woven fabrics. *J. Elasticity* 118, pp. 113–125 <https://doi.org/10.1007/s10659-014-9478-1>
56. Dell’Isola, F., Steigmann, D., Della Corte, A. **(2016)** Synthesis of fibrous complex structures: designing microstructure to deliver targeted macroscale response. *Appl. Mech. Rev.* 67(6), <http://doi.org/10.1115/1.4032206>
57. Deshpande, V., Ashby, M. & Fleck, N. **(2001)** Foam topology: bending versus stretching dominated architectures. *Acta Mater.* 49, 1035–1040 [https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(00\)00379-7](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(00)00379-7)
58. Deshpande, V. S., Fleck, N. A. & Ashby, M. F. **(2001)** Effective properties of the octet-truss lattice material. *J. Mech. Phys. Solids* 49, 1747–1769 [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(01\)00010-2](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(01)00010-2)
59. Dolan, G. K. *et al.* **(2016)** Dip-and-drag lateral force spectroscopy for measuring adhesive forces between nanofibers. *Langmuir* 32, 13340–13348.
60. Dorogoy, A., Rittel, D. & Brill, A. **(2010)** A study of inclined impact in polymethylmethacrylate plates. *Int. J. Impact Eng.* 37(3), 285–294 <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2009.06.013>
61. Dragoni E. **(2013)** Optimal mechanical design of tetrahedral truss cores for sandwich constructions. *J Sandw Struct Mater.* 15: 464–484 <https://doi.org/10.1177/1099636213487364>
62. Du Plessis, A. *et al.* **(2022)** Properties and applications of additively manufactured metallic cellular materials: A review. *Prog. Mater Sci.* 125, 100918 <https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2021.100918>
63. Eremeyev VA, Dell’Isola F, Boutin C, Steigmann D **(2018)** Linear pantographic sheets: existence and uniqueness of weak solutions. *Journal of Elasticity* 132(2):175–196.
64. Essassi K, *et al.* **(2019)** Experimental and numerical analysis of the dynamic behavior of a bio-based sandwich with an auxetic core. *J Sandw Struct Mater* 109963621985154.
65. Feng Y, Qiu H, Gao Y, *et al.* **(2020)** Creative design for sandwich structures: a review. *Int J Adv Robotic Syst* 17: 172988142092132 <https://doi.org/10.1177/1729881420921327>
66. Feng LJ, Wu LZ and Yu GC **(2016)** An hourglass truss lattice structure and its mechanical performances. *Mater Des* 99: 581–591 <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2016.03.100>
67. Fernández, J.R., Masid, M. **(2017)** A porous thermoelastic problem with microtemperatures. *Jornal of Thermal Stresses* 40(2), pp. 145–166 <https://doi.org/10.1080/01495739.2016.1249038>
68. Frenzel T, Kadic M, Wegener M **(2017)** Three-dimensional mechanical metamaterials with a twist. *Science* 358(6366):1072–1074 DOI: [10.1126/science.aao4640](https://doi.org/10.1126/science.aao4640)
69. Gerard, N. J., Oudich, M. & Jing, Y. **(2019)** Omnidirectional elastic wave attenuation via an isotoxal-star-based auxetic micro-lattice. *arXiv preprint* <http://arxiv.org/abs/1912.08260>
70. Giorgio, I., Dell’Isola, F. & Misra, A. **(2020)** Chirality in 2d cosserat media related to stretch-micro-rotation coupling with links to granular micromechanics. *Int. J. Solids Struct.* 202, 28–38.
71. Giorgio I, Varano V, Dell’Isola F, *et al.* **(2021)** Two layers pantographs: a 2d continuum model accounting for the beams offset and relative rotations as averages in so (3) lie groups. *Int J Solids Struct* 216: 43–58.

72. Giorgio, I., Dell'Isola, F. & Steigmann, D. J. **(2023)** Second-grade elasticity of three-dimensional pantographic lattices: theory and numerical experiments. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 36, pp. 1–13 <https://doi.org/10.1007/s00161-023-01240-w>
73. Goda, I., Ganghoffer, J.F., **(2016)** Construction of first and second order grade anisotropic continuum media for 3D porous and textile composite structures. *Compos. Struct.* 141, 292–327.
74. Gosse J., Christensen S. Strain invariant failure criteria for polymers in composite materials. In: *19th AIAA applied aerodynamics conference*. Reston, AIAA, p. 1184.
75. Hammetter CI, Rinaldi RG and Zok FW **(2013)** Pyramidal lattice structures for high strength and energy absorption. *J Appl Mech* 80 [DOI:10.1115/1.4007865](https://doi.org/10.1115/1.4007865)
76. Han B, Zhang ZJ, Zhang QC, *et al.* **(2017)** Recent advances in hybrid lattice-cored sandwiches for enhanced multifunctional performance. *Extreme Mech Lett* 10: 58–69.
77. Hou S, Li T, Jia Z, *et al.* **(2018)** Mechanical properties of sandwich composites with 3d-printed auxetic and non-auxetic lattice cores under low velocity impact. *Mater Des.* 160: 1305–1321.
78. Hundley JM, Clough EC and Jacobsen AJ. **(2015)** The low velocity impact response of sandwich panels with lattice core reinforcement. *Int J Impact Eng.* 84: 64–77.
79. Iovane, G., Nasedkin, A.V., **(2009)** Finite element dynamic analysis of anisotropic elastic solids with voids. *Comput. Struct.* 87 (15-16), 981–989 <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2008.04.017>
80. Iovane, G., Nasedkin, A.V., **(2010)** Modal analysis of piezoelectric bodies with voids. II. Finite element simulation. *Appl. Math. Model.* 34(1), 47–59 <https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.03.027>
81. Iovane, G., Sumbatyan, M.A., **(2005)** On dynamic stress analysis for cracks in elastic materials with voids. *Int. J. Solids Struct.* 42, pp. 4880–4889 <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.01.020>
82. Jafari A, Shah-enayati SS, Atai AA **(2016)** Size dependency in vibration analysis of nano plates; one problem, different answers. *European Journal of Mechanics-A/Solids* 59:124–139
83. Jeong, J., Ramézani, H., Sardini, P. *et. al.* **(2015)** Porous media modeling and micro-structurally motivated material moduli determination via the micro-dilatation theory. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 224, 1805–1816 <https://doi.org/10.1140/epjst/e2015-02500-2>
84. Jeong, J., Sardini, P., Ramézani, H., Siitari-Kauppi, M., Steeb, H., **(2013)** Modeling of the induced chemo-mechanical stress through porous cement mortar subjected to CO₂: enhanced micro-dilatation theory and 14C-PMMA method. *Computational Materials Science* 69, pp. 466–480.
85. Kalamkarov, A.L. **(2014)** Asymptotic homogenization method and micromechanical models for composite materials and thin-walled composite structures. In: *Mathematical Methods and Models in Composites*. Imperial College Press, pp. 1–60 https://doi.org/10.1142/9781848167858_0001
86. Kalamkarov, A.L., Andrianov, I.V., Danishevs'kyi, V.V., **(2009)** Asymptotic homogenization of composite materials and structures. *Trans. ASME, Appl. Mech. Rev.* 62 030802-1–030802-20.
87. Kalamkarov, A.L., Georgiades, A.V., Rokkam, S., Veedu, V., Ghasemi-Nejhad, M. **(2006)** Analytical and numerical techniques to predict carbon nanotubes properties. *Int. J. Solids Struct.* 43, 6832–6854 <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.02.009>
88. Kalamkarov, A.L., Kolpakov, A.G., **(1997)** Analysis, Design and Optimization of Composite Structures. *John Wiley & Sons: Chichester, N.-Y.*
89. Karttunen AT, Reddy J, Romanoff J **(2019)** Two-scale constitutive modeling of a lattice core sandwich beam. *Composites Part B: Engineering* 160:66–75.

90. Karttunen AT, Reddy J, Romanoff J (2019) Two-scale micropolar plate model for web-core sandwich panels. *Int J Solids Struct* 170:82–94 <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.04.026>
91. Khakalo S, Balobanov V, Niiranen J (2018) Modelling size-dependent bending, buckling and vibrations of 2d triangular lattices by strain gradient elasticity models: applications to sandwich beams and auxetics. *International Journal of Engineering Science* 127:33–52.
92. Kochmann, D.M., Venturini, G.N. (2013) Homogenized mechanical properties of auxetic composite materials in finite-strain elasticity. *Smart Mat. Struct.* 22(8), 84004.
93. Kumar R., Rani L (2005) Deformation due to mechanical and thermal sources in generalized thermoelastic half-space with voids. *Journal of Thermal Stresses* 28(2), pp.123–145
94. Lazopoulos K, Lazopoulos A (2010) Bending and buckling of thin strain gradient elastic beams. *Euro J Mechanics-A/Solids* 29(5):837–843 <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2010.04.001>
95. Laudato M, Manzari L, Giorgio I, et. al. (2021) Dynamics of pantographic sheet around the clamping region: experimental and numerical analysis. *Math Mech Solids* 1081286521992646.
96. Laudato M, Manzari L, Barchiesi E, et al. (2018) First experimental observation of the dynamical behavior of a pantographic metamaterial. *Mech Res Commun* 94: 125–127.
97. Lakes, R.S. (1986) Experimental microelasticity of two porous solids. *International Journal of Solids & Structures* 22, pp.55–63 [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(86\)90103-4](https://doi.org/10.1016/0020-7683(86)90103-4)
98. Lakes, R.S. (1987) Foam structures with a negative Poisson's ratio. *Science* 235 (4792), 1038–1040 [DOI: 10.1126/science.235.4792.1038](https://doi.org/10.1126/science.235.4792.1038)
99. Lakes, R.S. (2016) Physical meaning of elastic constants in Cosserat, void, and microstretch elasticity. *J Mechanics of Materials and Structures* 11, 217–229 [DOI:10.2140/jomms.2016.11.217](https://doi.org/10.2140/jomms.2016.11.217)
100. Laudato, M., Manzari, L., Göransson, P., Giorgio, I. & Abali, B. E. (2022) Experimental analysis on metamaterials boundary layers by means of a pantographic structure under large deformations. *Mech. Res. Commun.* 125, 103990 [DOI:10.1016/j.mechrescom.2022.103990](https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2022.103990)
101. Leary, M. et al. (2018) Inconel 625 lattice structures manufactured by selective laser melting (SLM): Mechanical properties, deformation and failure modes. *Materials & Design* 157:179–199 <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2018.06.010>
102. Leonov, AV. et al. (2015) Laser scanning and 3d modeling of the Shukhov hyperboloid tower in Moscow. *J. Cult. Herit.* 16, 551–559 <https://doi.org/10.1016/j.culher.2014.09.014>
103. Li, H., Li, L., Zhong, H., Mo, H. & Gu, M. (2023) Hierarchical lattice: Design strategy and topology characterization. *Adv. Mech. Eng.* 15(6) <https://doi.org/10.1177/1687813223117962>
104. Li R, Kelly D, Ness R (2003) Application of a first invariant strain criterion for matrix failure in composite materials. *J Composite Materials* 37(22):1977–2000 [DOI:10.1177/0021998303036268](https://doi.org/10.1177/0021998303036268)
105. Li C, Shen HS and Wang H. (2020) Full-scale finite element modeling and nonlinear bending analysis of sandwich plates with functionally graded auxetic 3d lattice core. *J Sandwich Struct Mater* 1099636220924657 <https://doi.org/10.1177/1099636220924657>
106. Lin, S. & Gu, L. (2015) Influence of crosslink density and stiffness on mechanical properties of type i collagen gel. *Materials* 8, 551–560 <https://doi.org/10.3390/ma8020551>
107. Lomakin, E., Rabinskiy, L., Babaytsev, A. & Solyaev, Y. O. (2022) Optimal density of the lattice cores for impact-resistant structural elements produced by fdm technology. *Dokl. Phys.* 67, 249–252 <https://doi.org/10.1134/S1028335822080031>

108. Lurie, S.A., Kalamkarov, A.L. (2007) General theory of continuous media with conserved dislocations. *Int J. Solids Struct.* 44, 7468–7485 <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.04.019>
109. Lurie, S.A., Solyaev, Y.O., Volkov, A.V., Volkov-Bogorodskiy, D. (2017) Bending problems in the theory of elastic materials with voids and surface effects. *Math. Mech. Solids* 1081286517691570 <https://doi.org/10.1177/1081286517691570>
110. Lurie S, Solyaev Y (2018) Revisiting bending theories of elastic gradient beams. *International Journal of Engineering Science* 126, pp. 1–21 <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.01.002>
111. Lurie S, Solyaev Y (2019) On the formulation of elastic and electroelastic gradient beam theories. *Continuum Mech. Thermodyn.* 31, pp. 1601–1613 <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00781-3>
112. Lurie SA, Kalamkarov AL, Solyaev YO, Ustenko AD, Volkov AV (2018) Continuum micro-dilatation modeling of auxetic metamaterials. *International Journal of Solids and Structures* 132:188–200.
113. Ma, Z. *et al.* (2023) Compression and energy absorption properties of the truss-like lightweight materials based on symmetric groups. *Mater. Res. Express* 10, 016504.
114. Maconachie, T. *et al.* (2019) SLM lattice structures: Properties, performance, applications and challenges. *Materials & Design* 183, 108137 <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.108137>
115. Madeo, A., Nef, P., Ghiba, I.-D., Placidi, L. & Rosi, G. (2015) Wave propagation in relaxed micromorphic continua: modeling metamaterials with frequency band-gaps. *Continuum Mech. Thermodyn.* 27: 551–570 <https://doi.org/10.1007/s00161-013-0329-2>
116. Markov, K.Z. (1981) On the dilatation theory of elasticity. *ZAMM* 61, 349–358 <https://doi.org/10.1002/zamm.19810610802>
117. Mei, H. *et al.* (2019) Ultrahigh strength printed ceramic lattices. *J. Alloy. Compd.* 797, 786–796.
118. Meng L, Qiu X, Gao T, *et al.* (2020) An inverse approach to the accurate modelling of 3d-printed sandwich panels with lattice core using beams of variable cross-section. *Composite Structures* 247: 112363 <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112363>
119. Meng, L. *et al.* (2020) An emerging class of hyperbolic lattice exhibiting tunable elastic properties and impact absorption through chiral twisting. *Extreme Mech. Lett.* 40, 100869.
120. Mines R, Tsopanos S, Shen Y, *et al.* (2013) Drop weight impact behaviour of sandwich panels with metallic micro lattice cores. *Int J Impact Eng* 60: 120–132.
121. Mindlin, RD. (1964) Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* 16, 51–78.
122. Mirzaali M, Janbaz S, Strano M, Vergani L, Zadpoor AA (2018) Shape-matching soft mechanical metamaterials. *Scientific reports* 8(1):965 [DOI:10.1038/s41598-018-19381-3](https://doi.org/10.1038/s41598-018-19381-3)
123. Mirza M, Barton D, Church P (1996) The effect of stress triaxiality and strain-rate on the fracture characteristics of ductile metals. *J Mater Sci* 31: 453–461 [DOI:10.1007/BF01139164](https://doi.org/10.1007/BF01139164)
124. Mistry, Y. *et al.* (2023) Bio-inspired selective nodal decoupling for ultra-compliant interwoven lattices. *Communication Materials* 4, 35 [DOI:10.1038/s43246-023-00363-6](https://doi.org/10.1038/s43246-023-00363-6)
125. Murugan, R. *et al.* (2009) Skeletal regenerative nanobiomaterials. *Durnten-Zurich: Trans Tech Publications* 3–27.
126. Nejadi Sadeghi, N., Placidi, L., Romeo, M. & Misra, A. (2019) Frequency band gaps in dielectric granular metamaterials modulated by electric field. *Mech. Res. Commun.* 95, 96–103.
127. Niknam, H. & Akbarzadeh, A. (2020) Graded lattice structures: Simultaneous enhancement in stiffness and energy absorption. *Mater. Des.* 196 <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2020.109129>

128. Nicolaou, Z. G. & Motter, A. E. (2012) Mechanical metamaterials with negative compressibility transitions. *Nature Materials* 11, 608–613 <https://doi.org/10.1038/nmat3331>
129. Niiranen J, Balabanov V, Kiendl J, Hosseini S (2019) Variational formulations, model comparisons and numerical methods for euler–bernoulli micro-and nano-beam models. *Mathematics and Mechanics of Solids* 24(1):312–335 <https://doi.org/10.1177/1081286517739669>
130. Nordstrand T., Carlsson L. (1997) Evaluation of transverse shear stiffness of structural core sandwich plates. *Compos Struct* 37: 145–153 [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(97\)80007-4](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(97)80007-4)
131. Norris, A.N. (2006) Poisson’s ratio in cubic materials. *Proc. R. Soc. A* 462(2075), 3385–3405.
132. Nulty, A. (2022) A comparison of trueness and precision of 12 3d printers used in dentistry. *BDJ Open* 8, 14 [DOI: 10.1038/s41405-022-00108-6](https://doi.org/10.1038/s41405-022-00108-6)
133. Nunziato, J.W., S. Cowin, S.C. (1979) A nonlinear theory of elastic materials with voids. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 72, 175–201 <https://doi.org/10.1007/BF00249363>
134. Papargyri-Beskou S, Tsepoura K, Polyzos D, Beskos D (2003) Bending and stability analysis of gradient elastic beams. *International Journal of Solids and Structures* 40(2):385–400.
135. Park, K.-M. & Roh, Y.-S. (2023) Design optimization of additive manufactured edgeless simple cubic lattice structures under compression. *Materials* 16, 2870.
136. Placidi L, Andreus U and Giorgio I (2017) Identification of two-dimensional pantographic structure via a linear d4 orthotropic second gradient elastic model. *J Eng Math* 103: 1–21.
137. Pompei, A., Rigano, A., Sumbatyan, M.A. (2005) Contact problem for a rectangular punch on the porous elastic half-space. *J. Elasticity* 76, 1–19.
138. Popuzin, V., Pennisi, M. (2014) Fast numerical method for crack problem in the porous elastic material. *Meccanica* 49, 2169–2179 <https://doi.org/10.1007/s11012-014-9885-1>
139. Puri, P., Cowin, S.C., (1985) Plane waves in linear elastic materials with voids. *Journal of Elasticity* 15, 167–183 <https://doi.org/10.1007/BF00041991>
140. Ramézani, H., Steeb, H., Jeong, J. (2012) Analytical and numerical studies on Penalized Micro-Dilatation (PMD) theory: macro-micro link concept. *Eur. J. Mech - A/Solids* 34, 130–148.
141. Rahali, Y., Giorgio, I., Ganghofer, J. & Dell’Isola, F. (2015) Homogenization à la piola produces second gradient continuum models for linear pantographic lattices. *Int. J. Eng. Sci.* 97, 148–172.
142. Ren, X., Das, R., Tran, P., Ngo, T. D. & Xie, Y. M. (2018) Auxetic metamaterials and structures: a review. *Smart Mater. Struct.* 27, 023001 [DOI:10.1088/1361-665X/aaa61c](https://doi.org/10.1088/1361-665X/aaa61c)
143. Romanoff J, Reddy J (2014) Experimental validation of the modified couple stress timoshenko beam theory for web-core sandwich panels. *Composite Structures* 111:130–137 <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.11.029>
144. Rueger, Z., Lakes, R.S., (2016) Cosserat elasticity of negative Poisson’s ratio foam: experiment. *Smart Materials and Structures* 25 (5), 54004 [DOI 10.1088/0964-1726/25/5/054004](https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/5/054004)
145. *Safety data sheet. ANYCUBIC 3D Printing UV biomechitive Resin* (Shenzhen Anycubic Technology Co., Ltd, 16/06/2021).
146. Sarvestani, H. Y., Akbarzadeh, A., Mirbolghasemi, A. & Hermenean, K. (2018) 3d printed meta-sandwich structures: Failure mechanism, energy absorption and multi-hit capability. *Materials & Design* 160, 179–193 <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2018.08.061>

147. Saxena, K.K., Das, R., Calius, E.P. (2016) Three decades of auxetics research – materials with negative Poisson's ratio: a review. *Advanced Engineering Materials* vol.:18(11), pp. 1847–1870 <https://doi.org/10.1002/adem.201600053>
148. Shekarchizadeh, N. *et al.* (2021) Parameter identification of a second-gradient model for the description of pantographic structures in dynamic regime. *Z. Angew. Math. Phys.* 72, 190.
149. Shekarchizadeh, N., Abali, B. E., Barchiesi, E. & Bersani, A. M. (2021) Inverse analysis of metamaterials and parameter determination by means of an automatized optimization problem. *ZAMM-J. Appl. Math. Mech./Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 101.
150. Shahsavari A, Picu R (2013) Size effect on mechanical behavior of random fiber networks. *International Journal of Solids and Structures* 50 (20-21):3332–3338 <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.06.004>
151. Sharma, K., Kumar, P. (2013) Propagation of plane waves and fundamental solution in thermoviscoelastic medium with voids. *Journal of Thermal Stresses* 36(2), pp.94–111 <https://doi.org/10.1080/01495739.2012.720545>
152. Singh, B. (2011) On theory of generalized thermoelastic solids with voids and diffusion. *Eur. J. Mech. A* 30, 976–982 <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2011.06.007>
153. Singh JP, Pandey PM and Verma AK (2016) Fabrication of three-dimensional open porous regular structure of pa-2200 for enhanced strength of scaffold using selective laser sintering. *Rapid Prototyping Journal* 22: 752–765 <https://doi.org/10.1108/RPJ-11-2014-0148>
154. Sladek, V., Repka, M., Bishay, P.L. (2016) Static and dynamic behavior of porous elastic materials based on micro-dilatation theory: a numerical study using the MLPG method. *International Journal of Solids and Structures* 96, 126–135 <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.06.016>
155. Solyaev, Y.O., Lurie, S.A. (2014) Deformation of a thin layer that is bonded to a massive substrate in the theory of thermoelastic materials with voids. *Int. J. Nanomech. Sci. Technol.* 5, 33–49.
156. Solyaev, Y.O., Volkov, A.V., Lurie, S.A. (2016) Surface effects in the pure bending problem in the theory of elastic materials with voids. In: *Proc., 24th Int. Congr. Theor. Appl. Mech. (ICTAM 2016). Montreal, Canada*, p. 2554 <https://doi.org/10.1177/108128651769157>
157. Solyaev Y, Lurie S, Barchiesi E, Placidi L (2019a) On the dependence of standard and gradient elastic material constants on a field of defects. *Mathematics and Mechanics of Solids*, p. 1081286519861827 <https://doi.org/10.1177/1081286519861827>
158. Solyaev Y, Lurie S, Koshurina A, *et al.* (2019) On a combined thermal/mechanical performance of a foam-filled sandwich panels. *Int J Eng Sci* 134: 66–76.
159. Solyaev Y, Lurie S, Ustenko A (2019b) Numerical modeling of a composite auxetic metamaterials using micro-dilatation theory. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 31(4):1099–1107.
160. Song, J. *et al.* (2019) Octet-truss cellular materials for improved mechanical properties and specific energy absorption. *Mater. Des.* 173, 107773 <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.107773>
161. Stolz, M., Plappert, D., Gutmann, F. & Hiermaier, S. (2022) A 3d extension of pantographic geometries to obtain metamaterial with semi-auxetic properties. *Math. Mech. Solids* 27, 673–686.
162. Taghipoor H and Damghani Nouri M. (2020) Axial crushing and transverse bending responses of sandwich structures with lattice core. *J Sandw Struct Mater* 22: 572–598.
163. Taghipoor H and Damghani Nouri M. (2019) Experimental and numerical investigation of lattice core sandwich beams under low-velocity bending impact. *J Sandw Struct Mater* 21: 2154–2177.

164. Taghipoor H, Eyvazian A, Musharavati F, *et. al.* (2020) Experimental investigation of the three-point bending properties of sandwich beams with polyurethane foam-filled lattice cores. *Structures* 28: 424–432 <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2020.08.082>
165. Ullah I, Brandt M and Feih S. (2016) Failure and energy absorption characteristics of advanced 3d truss core structures. *Mater Des* 92: 937–948 <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2015.12.058>
166. Van Krevelen, D. & Te Nijenhuis, K. (2009) Chapter 13 - Mechanical properties of solid polymers. *Properties of Polymers (Fourth Edition)* 383–503 <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-054819-7.00013-3>
167. Vangelatos Z, Yildizdag ME, Giorgio I, *et. al.* (2021) Investigating the mechanical response of microscale pantographic structures fabricated by multiphoton lithography. *Extreme Mechanics Letters* 43: 101202 <https://doi.org/10.1016/j.eml.2021.101202>
168. Vesenjak M, Krstulovic-Opara L, Ren Z, *et. al.* (2010) Cell shape effect evaluation of polyamide cellular structures. *Polym Test* 29: 991–994
169. Vinson JR and Sierakowski RL (2006) The behavior of structures composed of composite materials, *Dordrecht, Springer* volume 105.
170. Wei, K. *et. al.* (2021) Additively manufactured bi-material metamaterial to program a wide range of thermal expansion. *Mater. Des.* 198, 109343.
171. Wu, W. *et. al.* (2018) Deformation mechanism of innovative 3d chiral metamaterials. *Sci. Rep.* 8, 12575 [DOI:10.1038/s41598-018-30737-7](https://doi.org/10.1038/s41598-018-30737-7)
172. Xiong J, Du Y, Mousanezhad D, *et. al.* (2019) Sandwich structures with prismatic and foam cores: a review. *Adv Eng Mater* 21: 1800036 <https://doi.org/10.1002/adem.201800036>
173. Yang H, Ganzosch G, Giorgio I, Abali BE (2018) Material characterization and computations of a polymeric metamaterial with a pantographic substructure. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 69(4):105 [DOI:10.1007/s00033-018-1000-3](https://doi.org/10.1007/s00033-018-1000-3)
174. Yuan W, Song H and Huang C. (2016) Failure maps and optimal design of metallic sandwich panels with truss cores subjected to thermal loading. *Int J Mech Sci.* 115-116: 56–67.
175. Yin S, Chen H, Wu Y, *et. al.* (2018) Introducing composite lattice core sandwich structure as an alternative proposal for engine hood. *Composite Structures* 201: 131–140 <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.06.038>
176. Zeng, Q., Duan, S., Zhao, Z., Wang, P. & Lei, H. (2023) Inverse design of energy-absorbing metamaterials by topology optimization. *Adv. Sci.* 10, 2204977.
177. Zhang, J., Huang, H., Liu, G., Zong, H. & Zhang, C. (2021) Stiffness and energy absorption of additive manufactured hybrid lattice structures. *Virtual Phys. Prototyp.* 16, 428–443.
178. Zhang, H., Wang, X., Shi, Z., Xue, J. & Han, F. (2021) Compressive and energy absorption properties of pyramidal lattice structures by various preparation methods. *Materials* 14:6484.
179. Zhao, M. *et al.* (2018) Improved mechanical properties and energy absorption of bcc lattice structures with triply periodic minimal surfaces fabricated by slm. *Materials* 11:2411.
180. Smith DR., Pendry JB., Wiltshire MCK. (2004) Metamaterials and negative refraction index. *Science* 305:5685, pp. 788-792 [DOI: 10.1126/science.1096796](https://doi.org/10.1126/science.1096796)
181. Y. Kim, K. H. Son, J. W. Lee (2021) Auxetic Structures for Tissue Engineering Scaffolds and Biomedical Devices. *Materials*, 14 <https://doi.org/10.3390/ma14226821>

182. Kadic M., Milton G., van Hecke M., Wegener M. **(2019)** 3D Metamaterials. *Nature Reviews Physics*, 1, pp. 198-210 [DOI:10.1038/s42254-018-0018-y](https://doi.org/10.1038/s42254-018-0018-y)
183. Veselago V.G. **(1968)** The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Sov. Phys. Usp.* 10 <http://dx.doi.org/10.1070/PU1968v010n04ABEH003699>
184. Tarcholan F. **(2021)** Sandwich structures for energy absorption applications: a review. *Materials*, 14 <https://doi.org/10.3390/ma14164731>
185. Fang, N., Xi, D., Xu, J., Ambati, M., Srituravanich, W., Sun, C., & Zhang, X. **(2006)** Ultrasonic metamaterials with negative modulus. *Nature Materials* 5(6), 452–456 [DOI:10.1038/nmat1644](https://doi.org/10.1038/nmat1644)
186. James Utama Surjadi *et. al.* **(2019)** Mechanical Metamaterials and Their Engineering Applications. *Adv. Eng. Mater.* <https://doi.org/10.1002/adem.201800864>
187. Lvov V., Senatov F., Skrybykina V. **(2022)** Auxetic Metamaterials for Biomedical Devices: Current Situation, Main Challenges, and Research Trends. *Materials* 15 [DOI:10.3390/ma15041439](https://doi.org/10.3390/ma15041439)
188. Vasiliev V., Lurie S., Solyaev Y. **(2021)** New approach to failure of pre-cracked brittle materials based on regularized solutions of strain gradient elasticity. *Engineering Fracture Mechanics* 258:108080 <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2021.108080>