

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

На правах рукописи



КИРИЛЛОВА ИРИНА ВАСИЛЬЕВНА

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ  
В ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени доктора  
физико-математических наук

Научный консультант:  
член-корр. РАН, д.ф.-м.н.,  
профессор Ломакин Е.В.

Саратов – 2025

# Оглавление

Введение .....	7
<b>Глава 1 Постановка задачи .....</b>	<b>33</b>
1.1 Уравнения линейной теории упругости .....	36
1.2 Классификация граничных условий при ударных воздействиях на торцы оболочек вращения .....	43
1.3 Характерные типы нестационарного НДС в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях .....	45
1.4 Асимптотическая теория двумерных тангенциальной и изгибной составляющих .....	54
1.5 Асимптотическая теория коротковолнового высокочастотного приближения .....	60
1.6 Асимптотическая теория параболического погранслоя .....	63
<b>Глава 2 Асимптотическая теория гиперболического погранслоя .....</b>	<b>66</b>
2.1 Постановка задачи .....	68
2.2 Асимптотический вывод уравнений гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения в оболочках вращения произвольного профиля .....	76
2.3 Асимптотический вывод уравнений гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны сдвига в оболочках вращения произвольного профиля .....	85
2.4 Механический смысл асимптотической теории гиперболического погранслоя .....	90
<b>Глава 3 Асимптотическая теория нестационарного НДС упругих оболочек вращения при торцевых ударных воздействиях продольного типа .....</b>	<b>92</b>

3.1	Схема расчленения нестационарного НДС оболочек вращения произвольного профиля при ударных воздействиях продольного типа . . . . .	94
3.2	Решение для тангенциальной составляющей Кирхгофа-Лява . . . . .	96
3.3	Разработка асимптотического решения для симметричного гиперболического погранслоя в оболочках вращения произвольного профиля в окрестности фронта волны расширения . . . . .	101
3.4	Разработка асимптотического решения для параболического погранслоя в оболочках вращения произвольного профиля . . . . .	110
3.5	Область согласования параболического погранслоя и двумерной тангенциальной составляющей . . . . .	113
3.6	Область согласования параболического погранслоя и симметричного коротковолнового высокочастотного приближения . . . . .	117
3.7	Область согласования симметричного гиперболического погранслоя и симметричного коротковолнового высокочастотного приближения . . . . .	123
3.8	Численный анализ нестационарного НДС сферических оболочек при торцевом ударном нагружении типа LT . . . . .	128
<b>Глава 4</b>	<b>Асимптотическая теория нестационарного НДС упругих оболочек вращения при торцевых ударных воздействиях изгибающего типа . . . . .</b>	<b>136</b>
4.1	Схема расчленения нестационарного НДС оболочек вращения произвольного профиля при ударных воздействиях изгибающего типа . . . . .	137

4.2	Решение для изгибной составляющей теории Кирхгофа-Лява .....	139
4.3	Построение асимптотического решения для антисимметричного гиперболического погранслоя в оболочках вращения произвольного профиля в окрестности фронта волн расширения .....	148
4.4	Область согласования изгибной составляющей теории Кирхгофа-Лява и антисимметричного коротковолнового высокочастотного приближения .....	154
4.5	Область согласования антисимметричного гиперболического погранслоя и антисимметричного коротковолнового высокочастотного приближения .....	160
4.6	Численный анализ нестационарного НДС сферических оболочек при торцевом ЛМ ударном нагружении .....	160
<b>Глава 5</b>	<b>Асимптотический вывод уравнений эллиптического погранслоя в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея для оболочек вращения произвольного профиля .....</b>	<b>164</b>
5.1	Уравнения нестационарного НДС в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея для полуплоскости с криволинейной границей .....	166
5.2	Асимптотический вывод уравнений эллиптического погранслоя в оболочках вращения произвольного профиля при ударных поверхностных нагрузках .....	173
5.3	Асимптотический вывод уравнений эллиптического погранслоя в оболочках вращения произвольного профиля при ударных торцевых нагрузках .....	194

<b>Глава 6</b>	<b>Асимптотическая теория нестационарного НДС упругих оболочек вращения при торцевых и поверхностных воздействиях нормального типа . . . . .</b>	<b>211</b>
6.1	Схема расчленения нестационарного НДС оболочек вращения произвольного профиля при ударных торцевых воздействиях нормального типа . . . . .	213
6.2	Решение для изгибной составляющей теории Кирхгофа-Лява . . . . .	214
6.3	Разработка асимптотического решения для эллиптического погранслоя в оболочках вращения произвольного профиля при ударном воздействии нормального типа на лицевые поверхности . . . . .	216
6.4	Численный анализ решения для эллиптического погранслоя в случае сферической оболочки при ударном воздействии на лицевые поверхности . . . . .	227
6.5	Разработка асимптотического решения для эллиптического погранслоя в оболочках вращения произвольного профиля при ударном торцевом воздействии нормального типа . . . . .	229
6.6	Численный анализ решения для эллиптического погранслоя в случае сферической оболочки при ударном торцевом воздействии . . . . .	236
6.7	Разработка асимптотического решения для гиперболического погранслоя в оболочках вращения произвольного профиля при ударном торцевом воздействии нормального типа . . . . .	238
6.8	Область согласования эллиптического погранслоя с антисимметричным коротковолновым высокочастотным приближением . . . . .	240

6.9	Область согласования гиперболического погранслоя и антисимметричного коротковолнового высокочастотного приближения . . . . .	242
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>245</b>
	<b>Основные обозначения . . . . .</b>	<b>249</b>
	<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>251</b>

## Введение

### **Актуальность темы исследования и степень её разработанности.**

В различных отраслях современной техники (ракетно-космическая, авиастроение, судостроение, строительная техника и многое другое) находят широкое применение оболочечные конструкции. При этом в условиях функционирования таких конструкций в случае высоких и сверхвысоких скоростей перемещения в воздушной и водных средах, а также при ударных внешних воздействиях различного типа актуальными являются задачи расчёта нестационарного напряжённо-деформированного состояния (НДС) тонких оболочек при ударных нагрузках. Задачи оптимального выбора формы, толщины, материала оболочечных конструкций предъявляют особые требования к анализу в них динамического НДС с учётом возникновения и распространения нестационарных волн.

Динамическая трёхмерная линейная теория упругости полностью описывает рассматриваемые процессы для случая малых деформаций. Однако сложность краевых задач этой теории для тонкостенных конструкций произвольной формы определяет известные трудности в описании качественных свойств нестационарных процессов, знание которых необходимо для постановки численных методов определения значений компонент НДС. Поэтому исследователи шли по пути разработки приближённых двумерных теорий; при этом применялись три основных метода: метод гипотез, метод степенных рядов и метод асимптотического интегрирования исходных трёхмерных уравнений теории упругости. Среди двумерных теорий самыми работающими теориями стали теория Кирхгофа-Лява и теория типа Тимошенко. Тем не менее ни одна из двумерных теорий не может полностью описать нестационарные волны в оболочках.

Так, теория Кирхгофа-Лява искажает скорость волны расширения, заменяя её скоростью двумерной волны растяжения-сжатия. При этом разрешающие уравнения этой теории перестают быть уравнениями гиперболического типа.

Попытки вернуть гиперболический тип разрешающих уравнений двумерной теории привели к построению теории типа Тимошенко. При этом к недостатку двумерной теории Кирхгофа-Лява по искажению скорости волны расширения здесь добавилась проблема появления ложного фронта волны сдвига. Эти принципиальные недостатки связаны с тем фактом, что двумерные теории воспринимают квазифронты, описываемые быстроизменяющимися компонентами НДС, как истинные фронты волн.

Если в статических задачах теории тонких оболочек применение двумерных теорий оправдано работой принципа Сен-Венана (когда трёхмерная теория должна применяться в случае торцевых воздействий только в малой, порядка толщины оболочки, окрестности торца), то в случае нестационарной динамики принцип Сен-Венана работает гораздо сложнее. Впервые его свойства были описаны в работах [145], [156], [157] и было доказано, что способ приложения ударной нагрузки на торец определяет НДС не только в его окрестности, но и в малых окрестностях передних фронтов волн.

Указанные выше свойства принципа Сен-Венана и свойства нестационарного НДС в окрестностях квазифронтов (фронт волны растяжения-сжатия по двумерной теории Кирхгофа-Лява и ложный фронт волны сдвига по теории типа Тимошенко), определяющие быструю изменчивость НДС в узких зонах фронтов и квазифронтов, показывают его существенную неоднородность в различных участках фазовой плоскости. Следовательно единую двумерную теорию, описывающую нестационарное НДС во всех участках фазовой плоскости, построить не предоставляется возможным, поэтому необходимо разбить фазовую плоскость на участки с однородной изменчивостью решения и строить приближенные теории для каждого такого участка. Такой метод является разновидностью метода сращиваемых разложений, когда полнота выбора составляющих НДС определяется доказательством наличия областей согласования асимптотик решения в соседних областях фазовой плоскости.

Представленный метод сращиваемых разложений впервые был описан в

монографиях [106], [191]. Приближённые теории выводились методом асимптотического интегрирования трёхмерных уравнений теории упругости. При этом были использованы идеи вывода асимптотически оптимальных уравнений при помощи аппарата показателей изменчивости НДС, введённого сначала в статике и подробно описанного в монографии [49].

Однако в процитированных исследованиях работа над построением полной асимптотической теории нестационарных процессов в тонких упругих оболочках была только начата: необходимо расширить рассмотрение всех случаев НДС в соответствии с классификацией типов торцевого и лицевого ударных воздействий, построить асимптотически оптимальные уравнения всех видов погранслоёв и осуществить построение асимптотических решений краевых задач для всех составляющих НДС оболочек вращения произвольного профиля.

Рассмотрим подробно состояние исследований по изучению нестационарных упругих волн в тонких оболочках. Начнём с общих вопросов.

Основы теории оболочек были заложены В.З. Власовым, А.Л. Гольденвейзером, А.И. Лурье и В.В. Новожиловым [30], [49], [131], [144]. По классификации из [1], [5] методы построения уравнений двумерных теорий оболочек и пластин условно делятся на аналитические, энергетические и асимптотические.

Основными аналитическими методами являются метод степенных рядов и метод разложения по специальным функциям. При методе степенных рядов компоненты НДС разлагаются в ряды по степеням нормальной координаты, а подстановка этих рядов в исходные уравнения трёхмерной теории упругости приводит к двумерным дифференциальным уравнениям для основных функций и рекуррентным соотношениям для коэффициентов разложений высокого порядка. В работах [70], [71], [72] Н.А. Кильчевским этим методом была построена общая статическая теория оболочек, а в монографии [73] была представлена уже динамическая теория оболочек. Метод разложения по специальным функциям от нормальной координаты был применён И.Н. Векуа [27], а также В.В. Новожиловым и Л.И. Слепяном [145] путём использования полиномов

Лежандра. Отметим также разнообразие применения алгоритма степенных рядов. В работах А.И. Лурье [130], [132] алгоритм степенных рядов был использован в форме символического метода, а в работе В.З. Власова [31] – в форме метода начальных функций. В динамике плит У.К. Нигул и М.Э. Кутсер [137], [124] также применили символический метод.

В случае энергетических методов компоненты НДС аппроксимируются конечными рядами по функциям от нормальной координаты. Для определения коэффициентов разложения используются при этом вариационные принципы теории упругости.

Отметим попытки исправления недостатков двумерных теорий Кирхгофа–Лява и её обобщений, связанных с гипотезой прямолинейной нормали. Так, С.П. Тимошенко [236] отказался от гипотезы прямолинейной нормали и вывел уравнения динамики балки, имеющие гиперболический тип. Метод степенных рядов использовался в дальнейшем для обобщения этой теории. Для цилиндрической оболочки это обобщение при условии представления перемещений функциями от нормальной координаты было выполнено Т. Лином и Г. Морганом [205] и Т. Германом и И. Мирским [186]. Метод одновременной аппроксимации и перемещений, и напряжений использовался аналогично в работах С.А. Амбарцумяна [7], Л.Я. Айнолы [1], [3], И-Юань Юй [241], И.Г. Тергулова [163], Д.В. Бабича [9].

Возможность применения асимптотических методов при исследовании НДС в тонких оболочках основывается на специфике их геометрии – малая толщина этих конструкций определяет в основных видах деформирования важное свойство: характерная длина рисунка деформации много больше этой толщины. Как показал А.Л. Гольденвейзер [35], [49], при замене переменных в масштабе характерной длины рисунка деформации уравнения трёхмерной теории упругости относятся к классу сингулярно возмущённых уравнений с малыми параметрами при старших производных по координатам срединной поверхности.

Основной вклад в создание и развитие асимптотической теории оболоч-

чек был внесён А.Л. Гольденвейзером. В монографии [49] им были обобщены исследования в области построения асимптотически приближённых статических теорий упругих изотропных оболочек [32], [34], [37], [38], [41], [42], [44], [45], [46], а также в области разработки аналитических решений краевых задач для различных составляющих НДС [33], [35], [36], [37], [39], [40]. Разработка принципиально нового инструмента асимптотического анализа точных трёхмерных уравнений теории упругости для тонких оболочек – показателей изменчивости НДС по пространственным координатам – позволила А.Л. Гольденвейзеру построить основной и дополнительный итерационные процессы, приводящие как к двумерным теориям оболочек, так и принципиально новым теориям плоского и антиплоского погранслоя. Построенные итерационные процессы позволили также определить форму зависимости асимптотической погрешности двумерных приближённых теорий оболочек от значений показателей изменчивости НДС.

Метод асимптотического интегрирования исходных трёхмерных уравнений теории упругости для вывода уравнений статической теории оболочек применялся также М. Джонсоном и Е. Рейсснером [187], А. Грином и П. Нагди [184]. Расчленение НДС на составляющие рассмотрено также в монографиях С.А. Амбарцумяна [7] и К.Ф. Черных [168], [169].

Особо следует отметить исследование А.Л. Гольденвейзером возможности использования двумерных теорий при различных типах торцевых нагрузок. Так, в работах [50] – [52] им был проведён асимптотический анализ влияния вида трёхмерных торцевых граничных условий на формирование двумерного НДС при удалении от торца, который позволил сформулировать условия работы принципа Сен-Венана для случая тонких оболочек и сформулировать также уточнённый, модифицированный этот принцип.

Применение асимптотических методов в динамических задачах теории оболочек было начато в направлении изучения колебаний. Общие вопросы использования здесь метода расчленения НДС на составляющие с различными показателями изменчивости и метода экспоненциальных представлений изло-

жены в работах А.Л. Гольденвейзера [43], [47], [48], В.В. Болотина [13] – [15], П.Е. Товстика [164] – [166], А.Л. Гольденвейзера, В.Б. Лидского, П.Е. Товстика [53].

Перейдём к рассмотрению применения асимптотических методов при исследовании задач о нестационарных процессах. Как уже было ранее описано, решения нестационарных задач тонких оболочек обладают неоднородной изменяемостью как по времени, так и по направлению распространения возмущений. Такие свойства решений нестационарных задач определяют невозможность использования асимптотических методов, разработанных для задач статики и стационарной динамики и требуют разработки принципиально новых подходов.

Впервые метод расчленения нестационарного НДС тонких оболочек был рассмотрен Н.А. Алумяэ [4] на примере круговой цилиндрической оболочки, в случае действия торцевой нагрузки, изменяющейся во времени по синусоидальному закону. Применялось преобразование Лапласа по времени, обращение изображений проводилось с помощью метода контурных интегралов. Асимптотическая оценка интегралов позволила представить окончательное решение с помощью безмоментной составляющей и краевых эффектов. Аналогичная концепция была представлена для кругоцилиндрической оболочки в работе Н.А. Алумяэ и Л. Поверуса [6], в случае ударного торцевого воздействия, задаваемого во времени функцией Хевисайда.

Применение двумерных приближённых теорий при анализе нестационарных волн в тонкостенных конструкциях является необходимым и естественным, поскольку, как отметил У.К. Нигул в [140], отдельный анализ элементарных волн, порождённых источником возмущений и лицевыми поверхностями, не даёт возможность оценить их суммарную аппроксимацию. Поэтому в его работах [140], [141], [217] на основе анализа решения задач для пластин и цилиндрических оболочек аналитическими и численными методами были изучены области применимости теории Кирхгофа-Лява и теории типа Тимошенко.

Как выше отмечалось, принципиально важным оказался вопрос о пони-

мании работы принципа Сен-Венана в нестационарной динамике тонкостенных конструкций. Работы В.В. Новожилова и Л.И. Слепьяна [145], [156], [157] позволили определить работу этого принципа в случае нестационарных волновых процессов в стержнях и пластинах: главная часть напряжений и деформаций, соответствующих ударным самоуравновешенным по сечению нагрузкам, локализуется вблизи волновых фронтов и того сечения, где приложено возмущение.

Такая трактовка принципа Сен-Венана полностью вписывается в следующую картину представления типов напряженного состояния, описанную У.К. Ни-гулом в цитируемых выше работах: для несамоуравновешенных на торце воздействий выделены три их основных типа: LT – продольное, тангенциального типа, LM – продольное, изгибающего типа и два вида нормального типа NW и NQ (нормальное, в перемещениях или в скоростях и нормальное, типа поперечной силы). Объединим последние два типа в одну группу и будем обозначать эту группу как NW. Этим автором выявлены также следующие типы напряжённых состояний: I – быстроизменяющееся волнового типа с малыми амплитудами перемещений и соизмеримыми с максимальными значениями амплитуд своих производных; II – состояния, описываемые приближёнными двумерными теориями; III – быстроизменяющиеся состояния, определяемые малостью амплитуд перемещений и напряжений; IV – квазистатические краевые эффекты Сен-Венана в малой окрестности торца.

При этом в указанных работах отмечается, что характер динамического НДС зависит от способа приложения нагрузки во времени. При плавных нагружениях напряженные состояния II и IV являются главными, и приближенные двумерные теории полностью соответствуют НДС. При ударных воздействиях, описываемых импульсными функциями, НДС определяется всеми рассматриваемыми видами состояний. Например, при LT воздействии состояние типа I локализовано в узких зонах в окрестности фронта волны расширения и квазифронта – фронта двумерной (безмоментной) волны растяжения-сжатия, а в основной части за квазифронтом работает напряжённое состояние II, где воз-

можно расчленение НДС на безмоментное и простые краевые эффекты. В случае воздействия LM в малой окрестности фронта волны расширения действует состояние типа I, за этой зоной действует состояние типа III (малоамплитудные осцилляции), а в приторцевой области имеет место состояние типа II (простой краевой эффект). В случае NW воздействий состояние типа I локализовано в узкой зоне – окрестности волны сдвига, в приторцевой области применима теория Кирхгофа-Лява (теория простого краевого эффекта), а теория типа Тимошенко имеет место за условным фронтом волны Рэлея.

Проанализируем рассмотренные ранее методы решения соответствующих краевых задач. Поскольку для тонких пластин и оболочек рассматривается суммарный вклад элементарных волн, то наибольшее распространение здесь получили как численные методы, так и аналитические методы с широким использованием интегральных преобразований: преобразования Лапласа по временной переменной, преобразования Фурье по пространственным координатам и др.

Среди численных методов У.К. Нигул и Н.Д. Векслер широко применяли метод конечных разностей. В работах [139], [140], [142], [216] этот метод был использован в совокупности с аналитическим выделением разрывных составляющих решений на базе точных трёхмерных уравнений теории упругости для пластин и цилиндрических оболочек. В работах [22], [25], [26], [140], указанный выше подход был применен к решению нестационарных задач для пластин, цилиндрических и сферических оболочек. Метод прифронтной асимптотики, основанный на применении интегрального преобразования Лапласа по временной переменной с последующим разложением изображений в ряд по отрицательным степеням параметра преобразования, применялся не только в вышеуказанных работах для выделения разрывных составляющих решения, но и для получения решений в окрестностях фронтов волн (включая начальный промежуток времени) в работах У.К. Нигула, Н.Д. Векслера, Д.В. Тарлаковского и др. [139], [23], [24], [182], [161], [162].

При аналитическом решении нестационарных задач для пластин и обо-

лочек, как было указано выше, использовались, как правило, интегральные преобразования Лапласа и Фурье. В случае обращения изображений широко применялись методы перевала и стационарной фазы для нахождения решений вдали от фронтов волн. При расчёте нестационарных волн в стержнях и пластинах эти методы показали свою эффективность в работах [185], [221], [208], [231], [138], [156]. При этом использовалось в пространстве изображений разложение по модам колебаний, определяемых корнями дисперсионных уравнений, в частности, уравнений Рэлея-Лэмба. Свойства корней этих дисперсионных уравнений подробно описаны в работах [3], [55].

Обращение изображений решения нестационарных задач в случае двумерных теорий для стержней, пластин и цилиндрических оболочек можно получить с помощью различных аналитических методов, описанных в книгах Л.И. Слепяна [156], [157]. Отметим также важный вывод, сделанный в работах У.К. Нигула [139] и Л.И. Слепяна [156], что точные аналитические решения можно получить только в случае теории Кирхгофа-Лява для плит и стержней. При этом решения определены через интегралы Френеля. В работе А.П. Малышева [133] проведено исследование распространения волн в цилиндрической оболочке при ударном торцевом воздействии по безмоментной теории методом интегрального преобразования Лапласа-Карсона. В случае теории типа Тимошенко для стержней, пластин и цилиндрических оболочек обращение изображений преобразования Лапласа выполнялось в работах [167], [180] интегрированием по берегам срезов комплексной плоскости параметра преобразования, а в работе [6] – методом численного обращения.

Кроме интегральных преобразований были разработаны и другие методы решения волновых задач как для двумерных теорий, так и для общей трёхмерной постановки. Так, вариационный метод применялся в работах Л.Я. Айнолы [2] и Л.Ю. Поверуса [148]. Метод, основанный на разложении решения в ряд Фурье на переменном интервале, связанным с областью существенных деформаций, разработан В.В. Новожиловым и Л.И. Слепяном [145], [155], [156]. Ме-

тод Фурье с разложением в ряд по собственным формам представлен в работах [64], [173], [235], [220]. Метод конечных интегральных преобразований использовался в работах Г.Л. Андерсона [174], [175] и Ю.Э. Сеницкого [151], [152]. Теория инвариантно-групповых решений дифференциальных уравнений в сочетании с асимптотическим анализом исходной системы уравнений теории типа Тимошенко для пластин и цилиндрических оболочек применён А.Д. Шамровским в работах [170], [171].

Анализ приведённых работ показал, что была создана база, позволяющая системно подойти к построению новой приближённой теории распространения нестационарных волн в тонких оболочках. Изучение численных расчётов таких задач для пластин и цилиндрических оболочек на базе точной трёхмерной теории упругости и известных двумерных теорий продемонстрировало ограниченные области применения таких приближённых теорий. При этом разработанный А.Л. Гольденвейзером асимптотический аппарат построения двумерной теории оболочек в статике определил возможность его модификации на случай нестационарных задач. Также можно отметить, что накопленный опыт применения интегральных преобразований в динамических задачах для простых геометрических объектов может быть основой для его обобщения при решениях принципиально более сложных задач для оболочек произвольной геометрии.

Построение в настоящей работе асимптотической теории нестационарных волн в оболочках основывается на применении модификации метода сращиваемых разложений, когда в различных участках фазовой плоскости используются различные приближённые теории с учётом доказательства полноты решения путём выделения областей согласования соседних составляющих, а сами приближённые теории выводятся методом асимптотического интегрирования из точных трёхмерных уравнений теории упругости при соответствующем подборе показателей изменчивости и динамичности. Впервые этот метод был применён Л.Ю. Коссовичем [102], [103] для оболочек на базе теории типа Тимошенко.

В работах [101], [104], [105] асимптотический подход, сформулированный в

рамках теории типа Тимошенко, был перенесён на общий случай трёхмерной теории упругости. В монографии [106] этот асимптотический подход был развит Л.Ю. Коссовичем для случаев ударных торцевых воздействий типа LT и LM. Описываемый подход заключался, прежде всего, в определении составляющих нестационарного НДС: безмоментной и моментной (изгибной) составляющих теории Кирхгофа-Лява, а также плоского и антиплоского динамического погранслоёв (быстроизменяющихся типов НДС с показателями изменяемости и динамичности, равными единице). Было показано, что сформулированные граничные и начальные условия для составляющих обеспечивают автоматическое совпадение двумерных решений и погранслоя в областях согласования.

Описанные выше положения асимптотической теории нестационарного НДС тонких оболочек позволили Л.Ю. Коссовичу [106] приступить к разработке асимптотических методов решения краевых задач для предложенных в данной работе составляющих НДС. Сначала были построены методы решения базовых задач для цилиндрических оболочек, иллюстрирующие его характерные типы и позволившие обобщить накопленный при этом опыт на решение краевых задач для общего случая оболочек вращения. При этом использовались такие методы, как интегральные преобразования Лапласа и Фурье, метод экспоненциального представления в пространстве преобразования Лапласа, различные методы прифронтальной асимптотики, разложение решений в ряды по специальным функциям, разложение изображений решения по модам и др.

Приведённые в [106] асимптотические методы составляют основу асимптотической теории нестационарного НДС тонких оболочек вращения при воздействиях типов LT и LM. Однако определились следующие направления развития этой теории. Первое направление связано с тем, что решения для динамического погранслоя оказались неоднородными по изменяемости и динамичности: в окрестности квазифронта (фронта двумерной волны растяжения-сжатия по двумерной теории Кирхгофа-Лява) показатели изменяемости и динамичности меньше единицы (но больше соответствующих значений для двумерной тео-

рии), а в малых окрестностях фронтов волн показатели изменчивости больше единицы. Такая неоднородность показателей изменчивости и динамичности для динамического погранслоя определила возможность дальнейшей модернизации рассматриваемой асимптотической теории: область применимости динамического погранслоя следует разбивать на участки с однородными значениями показателей изменчивости и динамичности и строить там новые асимптотически оптимальные теории. Второе направление связано с поведением фронтов волн расширения и сдвига динамического погранслоя – эти фронты имеют сложную форму и не задаются нормальными к срединной поверхности, как это имеет место для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны [83], [74], [75]. И, наконец, в рамках третьего направления следовало начать работы по построению асимптотической теории нестационарного НДС для случая торцевого воздействия типа NW. При этом следовало найти новые методы доказательства полноты новой схемы расчленения нестационарного НДС при всех типах воздействий.

Как указано в работе Л.Ю. Коссовича [109], модернизация рассмотренной асимптотической теории для случаев торцевых ударных воздействий типов LT и LM пошла по пути введения на базе динамического погранслоя таких составляющих, как погранслои параболического типа в окрестности квазифронта, коротковолновые высокочастотные приближения симметричного и антисимметричного по нормальной координате типов, а также гиперболические погранслои в окрестностях фронтов волн расширения и сдвига [189], [191], [111]. При этом уравнения параболического погранслоя впервые были выведены в работах Ю.Д. Каплунова [189], [191] с помощью уточнённой теории оболочек, а в работах [172], [10] методика вывода таких уравнений была отработана на базе точных трёхмерных уравнений теории упругости для случаев анизотропных и вязкоупругих оболочек. Уравнения же гиперболического погранслоя выводились в работах [191], [111] из трёхмерных уравнений теории упругости асимптотическим методом для случая оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны полностью аналогично вышеописанному методу получения асимптотически опти-

мальных уравнений динамического погранслоя в малых прифронтных окрестностях [83], [74], [75] и полностью с ними совпадают. Вывод безмоментной и изгибающей составляющих нестационарного НДС тонких оболочек был выполнен методом асимптотического интегрирования в работе [66]. Для осуществления работ по построению полной асимптотической теории нестационарного НДС произвольных оболочек вращения при воздействиях типов LT и LM следовало построить асимптотические уравнения гиперболического погранслоя в окрестностях фронта волны расширения для этого общего случая, доказать полноту новой схемы расчленения и разработать асимптотические методы решения краевых задач для гиперболических погранслоёв, что и представлено в данной диссертации [75], [200], [112], [122], [202], [114], [90], [76], [77], [80], [195], [198].

В рамках представленной выше модернизации схемы расчленения нестационарного НДС была также построена полная асимптотическая теория нестационарного НДС оболочек вращения при ударных воздействиях нормального типа NW. Начало было положено работой Ю.Д. Каплунова и Л.Ю. Коссовича [68], в которой сформулирована асимптотическая модель дальнего поля волны Рэлея в случае упругой полуплоскости. Эта модель характерна тем, что поведение объёмного и сдвигового потенциалов определяется их затуханием вглубь полуплоскости, задаваемым эллиптическими уравнениями, а граничные условия определяются гиперболическим уравнением, задающим распространение возмущения вдоль границ полуплоскости с конечной скоростью волны Рэлея. Эта задача определила, в последующих исследованиях, свойства решения в малой окрестности условного фронта волны Рэлея, названного эллиптическим погранслоем. Таким образом, при воздействии типа NW следует учитывать ещё одну компоненту схемы расчленения нестационарного НДС тонких пластин и оболочек – эллиптический погранслой.

В случае пластин при действии нагрузок типа NW как на лицевые поверхности, так и на торцы, описанный выше асимптотический подход, включающий вывод уравнений погранслоя, был реализован в работах Л.Ю. Коссо-

вича, А.Н. Кушеккалиева, Ковалёва В.А. и О.В. Таранова [118] – [120], [126]. В случае цилиндрической оболочки указанный подход описан в работах [125], [93] – [97], [29], [117], [160].

Вышеуказанные работы по асимптотическим методам при NW ударных воздействиях для пластин и цилиндрических оболочек показали возможность построения полной асимптотической теории такого нестационарного НДС для общего случая тонких оболочек. В данной диссертации представлена схема расчленения нестационарного НДС оболочек вращения произвольного профиля, обобщающая аналогичные схемы для пластин и цилиндрических оболочек при рассматриваемых воздействиях, использующая моментную составляющую по теории Кирхгофа-Лява, антисимметричную коротковолновую высокочастотную составляющую, эллиптический погранслой и антисимметричный гиперболический погранслой. Выведены асимптотически оптимальные уравнения эллиптического погранслоя. Доказана также полнота рассматриваемой схемы расчленения. Построены асимптотические методы решения краевых задач для составляющих. Все положения указанной теории опубликованы в работах [201], [85] – [89], [177], [196], [197], [12], [113] – [115], [78], [79].

Разработанные в представленной диссертации положения асимптотической теории нестационарного НДС тонких оболочек [82], [116], [91], [92], [195] на примере оболочек вращения нашли широкое применение в задачах о нестационарных волнах в различных видах оболочечных конструкций, выполненных из разных видов материалов и при действии различных типов нагрузок, имеющих как общетеоретическое, так и важное прикладное значение. Например, анализ волновых процессов в подкреплённых оболочках, проведённый с использованием анализа взаимодействия падающих, отражённых и прошедших волн в работах Л.Ю. Коссовича, И.В. Кирилловой, Ю.Д. Каплунова, М.В. Вильде и др. [99], [108], [199], [84], [67], [28], был использован при проектировании конструкций в ракетно-космической технике. Волны в оболочках вращения при неосесимметричных нагрузках рассматривались в [203]. Волны в оболочках из

вязкоупругих материалов рассматривались в работах [176], [10], [11], [8].

Продолжается изучение поверхностных волн в различных средах. Так, асимптотическая модель волн Гуляева-Блюштейна в пьезоэлектрическом полупространстве описана в работе [192]. Одномерное гиперболическое уравнение для описания волны Рэлея выведено в [69]. Асимптотические модели для волн различных типов приведены в главе из книги [193].

Следует отметить, что широкое применение пластин и оболочек в современных конструкциях вызывает необходимость расширения исследований НДС геометрически сложных тонкостенных тел, выполненных из различных материалов и взаимодействующих с окружающей средой. Так, влияние окружающей среды на динамическое НДС пластин и оболочек представлено в последнее время в работах [158], [65], [150], [229], [230]. Широкий спектр динамических задач для стержней, пластин и оболочек представлен в работах Г.И. Михасёва [134] – [136], [209] – [214].

Нестационарная динамика анизотропных оболочек представлена в [127] – [129], [207]. Оболочечные конструкции, выполненные из разных материалов, рассматривались в работах [135], [98], [233], [179], [204], [234], [188], [206], [239].

Новые асимптотические методы в динамике тонкостенных конструкций представлены в работах П.Е. Товстика, С.М. Бауэр и др. авторов [237], [238], [178], [230]. Асимптотические и численные методы использовались в работах А.О. Ватульяна и др. при исследовании цилиндрических и плоских волноводов [16] – [21], [240]. Волны Рэлея и Лява при отрицательном коэффициенте Пуассона изучались в работах Р.В. Гольдштейна, В.А. Городцова и Д.С. Лисовенко [54], [183]. Нестационарные волновые процессы в микроупругих, вязкоупругих, типа Коссера конструкциях с применением лучевого метода, изучались в работах Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой [222] – [228], [232], [149]. Нестационарная динамика тонких оболочек из разных материалов (композиционных, электромагнитоупругих) также представлена, с учётом контактного взаимодействия, в работах Д.В. Тарлаковского и др. [161], [162], [218], [146], [181], [215].

Отметим также цикл работ Димитриенко Ю.И. и др. по применению асимптотических методов при изучении НДС многослойных пластин и оболочек из различных (анизотропных, микрополярных) материалов [56] – [63].

**Цель и задачи исследования.** Целью настоящей диссертации является развитие асимптотической теории нестационарного напряжённо-деформированного состояния в оболочках вращения произвольного профиля при ударных нагрузках.

Для достижения цели работы решаются следующие задачи.

1. Применение метода сращиваемых разложений при исследовании НДС оболочек вращения произвольной формы с помощью составляющих с различными показателями изменчивости и динамичности при всех характерных типах ударных торцевых воздействий (продольного воздействия тангенциального типа, продольного воздействия изгибающего типа, нормального воздействия).
2. Вывод асимптотически оптимальных уравнений для составляющих нестационарного НДС: эллиптический погранслои при поверхностных и торцевых ударных воздействиях, гиперболические погранслои в окрестностях фронтов волн расширения и сдвига.
3. Доказательство полноты разработанной схемы расчленения нестационарного НДС путём определения асимптотик расположения в фазовой плоскости границ областей согласования соседних составляющих.
4. Разработка аналитических (асимптотических) методов решения краевых задач для эллиптического и гиперболического погранслоёв.

Схема расчленения нестационарного НДС на составляющие должна окончательно определить области применения классических двумерных теорий Кирхгофа-Лява и типа Тимошенко, реализовать моделирование работы принципа

Сен-Венана для случая нестационарных ударных воздействий на тонкостенные конструкции.

Вывод асимптотически оптимальных уравнений для составляющих рассматриваемого нестационарного НДС должен основываться на особенностях его поведения в различных областях фазовой плоскости. Так, погранслои в окрестностях волновых фронтов и квазифронтов имеют достаточно большую изменчивость и локализованы в узких прифронтных зонах, что должно приводить к построению вполне простых уравнений, описывающих поведение асимптотически главных напряжений, деформаций и перемещений, терпящих разрывы на фронтах и скачки на квазифронтах.

Полнота представления нестационарного НДС выделяемыми составляющими должна быть обеспечена наличием их областей согласования в фазовой плоскости. Расположение этих областей и совпадение с некоторой асимптотической погрешностью решений для соседних составляющих могут быть выявлены с помощью асимптотической оценки разрешающих уравнений.

Возможность разработки аналитических методов решения краевых задач для составляющих нестационарного НДС оболочек вращения произвольного профиля определяется двумя главными факторами. Первый фактор заключается в том, что аналитические точные решения рассматриваемых краевых задач могут быть построены с помощью интегральных преобразований (Лапласа по времени и Фурье по продольной координате) только для пластин и цилиндрических оболочек, когда разрешающие уравнения движения содержат постоянные коэффициенты. Согласно второму фактору, в рассматриваемом случае оболочек вращения радиусы кривизны имеют, как правило, меньшую изменчивость по сравнению с изменчивостью основных составляющих нестационарного НДС, что приводит к возможности использования при решении краевых задач различных асимптотических методов.

**Научная новизна.** Асимптотические методы, представленные в диссертации, позволили выстроить единую оптимальную систему приближённых тео-

рий, описывающих в совокупности нестационарное НДС тонких оболочек на примере оболочек вращения произвольного профиля. Помимо известных теорий Кирхгофа-Лява и теории параболического погранслоя в окрестности квазифронта двумерной волны растяжения-сжатия применяются разработанные в диссертации теории эллиптического погранслоя при поверхностных и торцевых ударных воздействиях, а также гиперболических погранслоёв в окрестностях фронтов волн расширения и сдвига. Сформулированы асимптотические оценки областей применимости составляющих нестационарного НДС в фазовой плоскости. Доказано совпадение решений для этих составляющих в областях согласования. Разработаны асимптотические методы решения краевых задач для эллиптического и гиперболического погранслоёв с учётом асимптотического представления геометрии передних волновых фронтов. Получены новые асимптотические решения динамических задач для цилиндрических оболочек.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Универсальность разработанных асимптотических методов определяет возможность распространить их на широкие классы оболочек произвольной геометрии, оболочек из материалов различного неупругого типа и оболочек, находящихся под действием нагрузок, сложно меняющихся по времени и координатам.

Разработанная эффективная аналитическая теория нестационарного НДС оболочек вращения применима для расчёта тонкостенных оболочечных конструкций в приборостроении, космической технике, авиастроении, судостроении, машиностроении и других отраслях промышленности при расчёте конструкций, работающих в условиях ударных и быстроизменяющихся во времени воздействий. Полученные при этом аналитические методы целесообразно использовать также для анализа НДС конструкций при его расчётах численными методами.

**Методология и методы исследования.** Диссертационное исследование посвящено изучению процесса распространения нестационарных волн в произвольных упругих оболочках вращения при ударных торцевых и поверхностных

нагрузках и построению с этой целью асимптотической теории, включающей расчленение НДС в фазовой плоскости на составляющие с различными показателями изменчивости и динамичности, вывод асимптотически приближённых уравнений для составляющих, доказательство полноты представления НДС этими составляющими и разработку методов аналитического решения краевых задач.

Представленная асимптотическая теория нестационарного НДС тонких оболочек вращения базируется на двух основных положениях. Первое положение определяет инструмент для вывода асимптотически оптимальных уравнений – понятия показателей изменчивости НДС по пространственным координатам и динамичности по времени. Второе положение определяет использование варианта метода сращиваемых разложений, когда в фазовой плоскости выделяются области применимости составляющих НДС, а полнота представления НДС определяется существованием областей согласования. Вывод асимптотически оптимальных уравнений для составляющих осуществляется методом асимптотического интегрирования трёхмерных уравнений теории упругости, причём для погранслоёв они выводятся из трёхмерных уравнений в специальных координатах, введённых в окрестностях волновых фронтов и квазифронтов.

При решении краевых задач в случае безмоментной составляющей НДС применяется метод прифронтальной асимптотики, так как изменчивость решения по продольной координате совпадает с изменчивостью геометрических параметров. Все остальные составляющие НДС являются быстроизменяющимися по продольной координате, что даёт возможность использовать при решении краевых задач асимптотический метод экспоненциальных представлений в пространстве интегрального преобразования Лапласа. Для обращения изображений в зависимости от краевой задачи используются разложения в ряд по модам колебаний, специальный метод прифронтальной асимптотики (разложение по отрицательным степеням преобразования Лапласа), разложение по положительным степеням параметра преобразования и др.

**Степень достоверности результатов работы** обеспечивается, прежде всего, правильно применяемыми методами асимптотического интегрирования исходных трёхмерных уравнений динамической теории упругости для получения асимптотически оптимальных уравнений составляющих НДС в различных областях фазовой плоскости в соответствии со значениями показателей изменчивости и динамичности. Доказательство корректности предложенных схем расчленения НДС в характерных случаях внешних воздействий реализуется путём выявления в фазовой плоскости областей согласования, где уравнения составляющих асимптотически совпадают. Разработанные асимптотические методы решения краевых задач основаны на их механических свойствах, базируются на точных решениях для цилиндрических оболочек, а численные расчёты на примере сферических оболочек показывают их эффективность.

**Содержание диссертации.** Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка использованных источников.

В первой главе дана постановка задач, рассматриваемых в диссертации. Приведены три принципиально разные типы нестационарного НДС оболочек вращения и проанализировано их поведение в различных участках фазовой плоскости с целью выявления областей применимости приближённых теорий. Также приведены известные асимптотически оптимальные уравнения краевых задач для безмоментной и моментной составляющих теории Кирхгофа-Лява, параболического погранслоя и коротковолновой высокочастотной составляющей.

Во второй главе представлена асимптотическая теория гиперболического погранслоя, имеющего место в малых окрестностях фронтов волн расширения и сдвига. В рассматриваемом общем случае оболочек вращения волновые фронты имеют сложную форму, зависящую от кривизны срединной поверхности. Проведена асимптотическая аппроксимация фронтовых поверхностей, при которой они формируются повернутыми нормальными к срединной поверхности. Построены асимптотически оптимальные уравнения гиперболического погранслоя на

основе перехода в трёхмерных уравнениях теории упругости к характеристическим координатам, учитывающим отклонение от истинных фронтов с последующим асимптотическим интегрированием этих уравнений. Получено для каждого вида гиперболического погранслоя разрешающее гиперболическое дифференциальное уравнение второго порядка относительно асимптотически главного перемещения: продольного перемещения для погранслоёв в окрестности фронта волны расширения и нормального перемещения для погранслоя в окрестности фронта волны сдвига. Определён механический смысл гиперболических погранслоёв, реализующих принцип Сен-Венана в динамике тонкостенных конструкций.

В третьей главе представлена асимптотическая теория построения нестационарного НДС оболочек вращения произвольного профиля при ударных продольных воздействиях тангенциального типа. Используются в разных областях фазовой плоскости такие составляющие, как безмоментная составляющая теории Кирхгофа-Лява, параболический погранслой в окрестности квазифронта (фронта двумерной волны растяжения-сжатия), коротковолновая высокочастотная составляющая и симметричный по нормальной координате гиперболический погранслой в окрестности фронта волны расширения. Определены границы областей согласования и доказано совпадение асимптотик уравнений в этих областях, как участков переходных значений показателей изменчивости и динамичности. Доказано существование, таким образом, области согласования безмоментной составляющей Кирхгофа-Лява и параболического погранслоя, параболического погранслоя и коротковолновой высокочастотной составляющей, коротковолновой высокочастотной составляющей и гиперболического погранслоя. Представлены методы решений краевых задач для основных составляющих. Для безмоментной составляющей решение строится с помощью метода прифронтной асимптотики. Решение для параболического погранслоя ищется с помощью метода экспоненциальных представлений в пространстве интегрального преобразования Лапласа по временной переменной с определе-

нием оригинала решения через функцию Эйри. Решение для гиперболического погранслоя также ищется в преобразованиях Лапласа, изображение представляется, с помощью базового решения для цилиндрической оболочки, в виде разложения по модам колебаний, где моды определяются экспоненциальным представлением. Численный анализ решений на примере нестационарного НДС сферической оболочки показал высокую эффективность разработанных методов.

В четвёртой главе представлена полная картина построения волнового НДС оболочек вращения при ударных продольных воздействиях изгибающего типа. Используются следующие составляющие: изгибная составляющая теории Кирхгофа-Лява, коротковолновая высокочастотная составляющая и антисимметричный по нормальной координате гиперболический погранслои в окрестности фронта волны расширения. Доказано существование области согласования изгибной составляющей и коротковолновой высокочастотной составляющей, коротковолновой высокочастотной составляющей и гиперболического погранслоя. Как и в предыдущей главе, представлены методы решений краевых задач для основных составляющих. Решение для изгибной составляющей ищется с помощью метода экспоненциальных представлений изображений по Лапласу, разложения изображений по отрицательным степеням параметра преобразования и степеням малого параметра тонкостенности, в результате чего оригиналы решений выражаются через специальные функции, связанные с интегралами Френеля. Решение для гиперболического погранслоя в рассматриваемом антисимметричном случае ищется по методике, разработанной в предыдущей главе для погранслоя симметричного типа. Как и в предыдущей главе, численный пример для сферической оболочки показал высокую эффективность разработанных методов решения краевых задач для составляющих НДС.

В пятой главе представлена асимптотическая теория эллиптического погранслоя, имеющего место в малой окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея. Здесь сначала рассматривается нестационарное НДС в малой

окрестности этого условного фронта для полуплоскости с криволинейной границей. Такая задача является модельной для построения эллиптического погранслоя в рассматриваемых оболочках вращения при ударных поверхностных и торцевых нагрузках. В случае поверхностных нагрузок для вывода асимптотически оптимальных уравнений погранслоя используется символический метод Лурье и вариант асимптотического интегрирования в характеристических координатах, учитывающих отклонение от условного фронта волны Рэлея. Построенные разрешающие уравнения относительно объёмного и сдвигового потенциалов Ламе являются уравнениями эллиптического типа в пространственных координатах, а граничные условия определяются гиперболическим уравнением относительно объёмного потенциала. В случае торцевого ударного воздействия, после выделения частного решения, удовлетворяющего только торцевому граничному условию, задача сводится к эквивалентной задаче для бесконечной оболочки с ударным воздействием на лицевые поверхности, обусловленным выделенным частным решением. Разрешающие уравнения для этой эквивалентной задачи строятся также асимптотическим методом в характеристических координатах подобно предыдущему случаю.

В шестой главе представлена полная асимптотическая модель нестационарного НДС оболочек вращения при ударных поверхностных и торцевых воздействиях нормального типа. Используются следующие компоненты нестационарного НДС: квазистатический погранслой типа Сен-Венана, изгибная составляющая теории Кирхгофа-Лява, низкоамплитудная антисимметричная коротковолновая высокочастотная составляющая, эллиптический погранслой (в окрестности условного фронта волны Рэлея) и антисимметричный гиперболический погранслой в окрестности фронта волны сдвига. Методы решения краевых задач для изгибной составляющей и гиперболического погранслоя строятся по тем же принципам, что и в случае воздействия типа LM. Решение для эллиптического погранслоя в случае ударного лицевого воздействия и в случае эквивалентной задачи при ударном торцевом воздействии строятся по одной и той

же схеме: сначала определяются решения для потенциальных функций на лицевых поверхностях, удовлетворяющие гиперболическим уравнениям, а затем они используются для построения решений уже в теле оболочки, удовлетворяющих уравнениям эллиптического типа. При этом используются метод экспоненциального представления в пространстве изображений по Лапласу, с учётом свойств решений базовых задач для цилиндрической оболочки, определяемых с помощью двукратных интегральных преобразований Лапласа и Фурье. Также, как и в случаях нагрузок типов LT и LM, доказано существование областей согласования изгибной и коротковолновой высокочастотной составляющих, эллиптического погранслоя и коротковолновой высокочастотной составляющей, коротковолновой высокочастотной составляющей и гиперболического погранслоя.

В заключении диссертации сформулированы основные выводы.

**Положения, выносимые на защиту.**

- Схемы расчленения нестационарного НДС тонких упругих оболочек вращения произвольного профиля при ударных торцевых воздействиях типов LT, LM, NW, использующие следующие составляющие: безмоментная и моментная по теории Кирхгофа-Лява, квазистатический погранслой типа Сен-Венана, симметричная и антисимметричная коротковолновые высокочастотные малоамплитудные, параболический погранслой (в окрестности фронта волны растяжения-сжатия по двумерной теории), эллиптический погранслой (в окрестности условного фронта волны Рэлея), а также симметричный и антисимметричный гиперболические погранслои в окрестностях фронтов волн расширения и сдвига.
- Асимптотическая теория гиперболического погранслоя в малых окрестностях фронтов волн расширения и сдвига с учётом асимптотического моделирования их геометрии.
- Асимптотическая теория эллиптического погранслоя в малой окрестности

условного фронта поверхностной волны Рэлея при лицевых и торцевых ударных воздействиях с учётом затухания данного вида НДС при удалении от лицевых поверхностей.

- Асимптотические методы решения краевых задач для основных составляющих нестационарного НДС.
- Доказательство полноты представленных схем расчленения нестационарного НДС через асимптотическое совпадение соседних (в фазовой плоскости) составляющих в областях их согласования и определение асимптотических границ этих областей.

**Апробация работы.** Основные результаты исследований, выполненных в диссертации, доложены на российских и международных научных конференциях, съездах, школах и семинарах: XIX и XVIII Всероссийская школа «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (Ростов-на-Дону, 2025, 2024), Семинар кафедры математической теории упругости и биомеханики СГУ (Саратов, 2025), Семинар по механике сплошной среды им. Л.А. Галина ИПМехРАН (Москва, 2025), X Поляховские чтения (Санкт-Петербург, 2024), Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2023, 2019), XIII, XII и XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Санкт-Петербург, 2023; Уфа, 2019; Казань, 2015), 5th International Conference on Topical Problems of Continuum Mechanics with a Special Session in Honor of Alexander Manzirov's 60th Birthday (Armenia, 2017), XVIII Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2016), Twelfth International Conference on Computational Structures Technology (Italy, 2014), Topical Problems in Theoretical and Applied Mechanics (India, 2013), VI сессия Научного совета РАН по механике (Барнаул, 2012), Ninth International Conference on Computational Structures Technology

(Greece, 2008), Eleventh International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing (Malta, 2007).

**Публикации.** По теме диссертационного исследования опубликовано 35 печатных работ [12], [28], [67], [75] – [82], [84] – [92], [112] – [116], [122], [177], [195] – [202], из них 15 работ в научных изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора наук. Опубликованы главы в трёх монографиях [196] – [198].

**Структура и объём диссертации.** Диссертационная работа изложена на 283 страницах машинописного текста, содержит 28 рисунков, состоит из введения, 6 глав, заключения, списка основных обозначений, списка литературы, содержащего 241 источник.

# Глава 1

## Постановка задачи

Первая глава посвящена общей постановке задач, рассматриваемых в диссертации. Эта постановка является теоретической базой для подробно описанного во Введении завершения работы над полной асимптотической теорией нестационарного НДС в тонкостенных конструкциях на примере тонких оболочек вращения. Описываются постановки краевых задач по трёхмерной теории упругости, приводящие к трём принципиально разным типам нестационарного НДС оболочек вращения. Проводится анализ НДС в различных участках фазовой плоскости, путём выделения областей применимости различных приближенных теорий. Приведённые здесь положения, представленные в монографиях [106], [191], диссертациях [107], [74] и статьях [112], [201], [66], [68] дали основу для разработки полной асимптотической теории нестационарного НДС в оболочках вращения произвольного профиля при ударных нагрузках всех типов: LT, LM, NW. Применяемые в диссертации асимптотические методы основаны на использовании аппарата показателей изменчивости, введенного в [52].

В настоящей главе также приведены асимптотически оптимальные уравнения безмоментной и моментной составляющих теории Кирхгофа-Лява, впервые опубликованные в статье [66] и кандидатской диссертации автора [74], а также параболического погранслоя впервые представленного в статье [189] и монографии [191].

Приведём общие сведения, необходимые для понимания свойств рассматриваемых физических процессов и их аналитического моделирования. В случае ударных воздействий на торец вид нестационарного НДС определяется типом граничного ударного воздействия. В работе [217] приведена классификация граничных условий, определяющих разные виды нестационарного НДС: выделены ударные воздействия типа LT (продольное, тангенциального типа, при котором

на торце отлично от нуля только продольное усилие), LM (продольное, изгибающего типа, при котором отличен от нуля на торце только изгибающий момент) и NW (нормальный тип воздействия, при котором отлична от нуля на торце только перерезывающая сила). В зависимости от типа воздействия возникают в решениях для напряжений и деформаций разрывы на передних фронтах волн: в случаях нагрузок LT и LM разрывы имеются на фронте волны расширения, а в случае нагрузки NW разрыв переносится волной сдвига.

В момент ударного воздействия на торец оболочки формируется первичная волна, инициированная непосредственно торцевой поверхностью. Первичные волны, взаимодействуя с лицевыми поверхностями, инициируют отраженные от них волны, которые, в свою очередь, отражаются от противоположных поверхностей, и число таких волн растёт со временем, образуя пакеты, инициированные торцевой поверхностью и сформированные совокупностью всех элементарных волн. Отметим, что свойства волновых пакетов не определяются непосредственно свойствами отдельных элементарных волн, что и характеризует сложность изучения совокупного волнового НДС для тонкостенных оболочек. Отметим также, что в общем случае оболочек вращения, в отличие от случая оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны, волновой фронт уже не формируется только первичной волной и изменяет свою плоскую форму. В следующей главе, главе 2, проводится асимптотическое построение этих прифронтных поверхностей.

Рассмотренные особенности формирования пакета нестационарных волн в тонких оболочках обуславливают, в частности, невозможность его полного описания с помощью двумерных теорий (Кирхгофа-Лява, типа Тимошенко и др.), как это разработано в задачах статики и стационарной динамики. Проявляется это в наличии быстрой изменчивости решения в прифронтных зонах волн расширения и сдвига, а также в зонах действия квазифронтных, ложно воспринимаемых двумерными теориями как дополнительные волновые фронты. Следовательно, в отличие от статических задач, в нестационарных задачах

НДС существенно неоднородно по пространственным координатам и времени в различных участках фазовой плоскости, приводя в них к различным значениям показателей изменяемости по пространственным координатам и показателя динамичности по времени.

Указанные свойства неоднородности рассматриваемого НДС по координатам и времени определили необходимость выделять в фазовой плоскости области с однородными значениями показателей изменяемости и динамичности и строить в каждой из них свою приближённую теорию. При этом выбор значений этих показателей позволил, в соответствии с физическими свойствами в каждой области, построить для неё соответствующую асимптотическую теорию. Полнота выбора составляющих НДС для его построения во всей фазовой плоскости определяется доказательством наличия областей согласования асимптотик решения в соседних областях.

Приведённая концепция формирования рассматриваемого НДС полностью соответствует принципу Сен-Венана в динамике тонкостенных конструкций, изложенному в работах [145], [156], [157], когда в нестационарной динамике таких конструкций способ приложения ударной нагрузки на торец определяет НДС не только в его окрестности (что имеет место в статике и стационарной динамике), но и в малых окрестностях передних фронтов волн.

В данной главе рассматриваются такие компоненты нестационарного НДС, как безмоментная и моментная составляющие теории Кирхгофа-Лява, параболический попераслой и коротковолновая высокочастотная составляющая. Как уже было ранее указано асимптотически оптимальные уравнения для этих компонент построены в работах [66], [74], [189], [191]. В последующих главах описаны разработанные автором для общего случая оболочек вращения асимптотически оптимальные уравнения гиперболического и эллиптического погранслоёв.

Как было отмечено во Введении, концепция расчленения нестационарного НДС, разработанная в [106], [107], впоследствии была уточнена и частично представлена в [191], [74]. Следовательно, понадобилось доработать схемы рас-

членения для воздействий типов LT и LM, и полностью разработать такую схему для воздействий типа NW. Аналогично, потребовалось развить имеющиеся доказательства полноты представленной схемы расчленения, систематизируя и дорабатывая её для воздействий типов LT и LM, и заново строя её для воздействий типа NW.

Аналогичная ситуация имеет место и в разработке аналитических методов решения задач для всех составляющих рассматриваемого нестационарного НДС. Если асимптотические методы решения задач для безмоментной и моментной составляющих в общем случае оболочек вращения были полностью разработаны в [106], то для остальных составляющих асимптотические методы были разработаны либо частично (например, только для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны), либо не разработаны вовсе (как в случае уравнений гиперболического типа с учётом сложной формы переднего волнового фронта, так и в случае эллиптического погранслоя).

## 1.1 Уравнения линейной теории упругости

Рассмотрим упругую оболочку произвольного профиля. Введем ортогональную систему координат, представленную в векторной форме:

$$\bar{P}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \bar{M}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \bar{n}, \quad (1.1.1)$$

где  $\bar{M}(\alpha_1, \alpha_2)$  – радиус-вектор срединной поверхности оболочки,  $\alpha_1, \alpha_2$  – параметры линий кривизны на срединной поверхности  $\alpha_3 = 0$ ;  $\bar{n}$  – единичный вектор нормали к срединной поверхности,  $\alpha_3$  – расстояние от срединной поверхности по нормали.

Трёхмерные уравнения теории упругости в координатах  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  запишутся в следующей форме [49].

Уравнения движения:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (H_i H_3 \sigma_{ii}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j} (H_i H_3 \sigma_{ij}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_i H_j \sigma_{i3}) - \\
& - H_3 \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} \sigma_{jj} - H_j \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_i} \sigma_{33} + H_3 \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} \sigma_{ji} + H_j \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} \sigma_{3i} - \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = 0, \\
& \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 H_2 \sigma_{33}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_3 H_2 \sigma_{31}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_3 H_1 \sigma_{32}) - \\
& - H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \sigma_{11} - H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \sigma_{22} + H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} \sigma_{13} + \\
& + H_1 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} \sigma_{23} - \rho \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = 0,
\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

уравнения связи между деформациями и перемещениями:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ii} &= \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} v_i + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3}, \\
\varepsilon_{33} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} v_1 + \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} v_2, \\
\varepsilon_{ij} &= \frac{H_i}{H_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \frac{v_i}{H_i} \right) + \frac{H_j}{H_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{v_j}{H_i} \right), \\
\varepsilon_{3i} &= \frac{H_3}{H_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{v_3}{H_3} \right) + \frac{H_i}{H_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{v_i}{H_i} \right),
\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

$$\kappa = \frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}}, \tag{1.1.4}$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1 + \nu)\rho}}.$$

где  $i \neq j = 1, 2$  и  $\sigma_{kl}$  — напряжения,  $\varepsilon_{kl}$  — деформации,  $v_k$  — перемещения,  $\rho$  — плотность материала оболочки,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент

Пуассона,  $R_i (i = 1, 2)$  – главные радиусы кривизны срединной поверхности,  $t$  – время,  $H_i$  – коэффициенты Ламе,  $\varkappa$  – отношение скорости волны сдвига  $c_2$  к скорости волны расширения  $c_1$ :

Коэффициенты Ламе  $H_i$  задаются для координат (1.1.1) формулами:

$$H_i = A_i \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_i}\right), \quad i = 1, 2, \quad H_3 = 1, \quad (1.1.5)$$

где  $A_i$  – коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности  $\Gamma$ , определяемой выражением  $A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2$  [49]. Производные от коэффициентов Ламе в уравнениях (1.1.2) – (1.1.3) определяются следующим образом [49]:

$$\frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right), \quad \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} = \frac{A_i}{R_i}. \quad (1.1.6)$$

Учитывая (1.1.5) – (1.1.6), запишем уравнения движения и уравнения закона Гука в форме [49]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H_i} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \sigma_{zi}}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} (\sigma_{ii} - \sigma_{jj}) + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} (\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) + \\ & + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i H_j}{\partial \alpha_3} \sigma_{zi} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} \sigma_{i3} - \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = 0, \\ & \frac{1}{H_i} \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial \sigma_{j3}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \alpha_3} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_3} \sigma_{ii} - \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_3} \sigma_{jj} + \\ & + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i H_j}{\partial \alpha_3} \sigma_{33} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} \sigma_{i3} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} \sigma_{j3} - \rho \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ii} &= \frac{E}{2(1+\nu)\mathfrak{a}^2} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} v_i + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_3} v_3 \right) + \frac{1}{H_i} \left( \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} v_3 + \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} v_j \right) \right], \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\mathfrak{a}^2} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} v_j + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} v_j + \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} v_3 + \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_3} v_3 \right) + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} \right], \\
\sigma_{3i} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_3} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} v_i \right), \\
\sigma_{ij} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{H_j} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_i} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} v_i - \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} v_j \right).
\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Рассмотрим теперь полубесконечную оболочку вращения (рисунок 1.1) с криволинейными координатами  $(\alpha, \theta, z)$ , где  $\alpha$  – длина дуги вдоль образующей,  $\theta$  – угол в окружном направлении,  $z$  – координата внешней нормали к срединной поверхности.

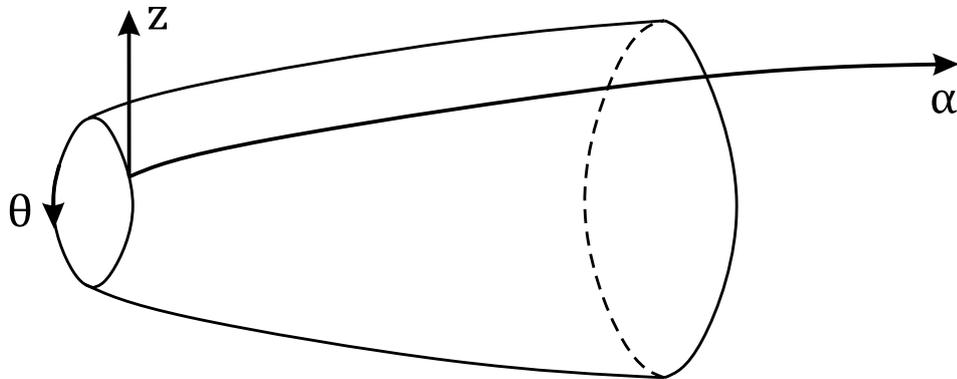


Рисунок 1.1 — Криволинейные координаты оболочки вращения

Перепишем уравнения (1.1.7) для оболочки вращения. Обозначим через

$B(\alpha)$  – расстояние от точки срединной поверхности до оси вращения. Коэффициенты Ламе заданной триортогональной системы координат задаются следующими соотношениями:

$$H_1 = 1 + \frac{z}{R_1}, H_2 = B \left( 1 + \frac{z}{R_2} \right). \quad (1.1.8)$$

Вместо коэффициента Ламе  $H_2$  введем его приведенное значение  $H_2^*$ :

$$H_2^* = 1 + \frac{z}{R_2} \quad (1.1.9)$$

и будем опускать в дальнейшем звездочку. Тогда уравнения (1.1.7), включающие уравнения движения и закон Гука, переписутся в виде:

$$\begin{aligned} & H_2 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \alpha} + \frac{H_1}{B} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} + H_1 H_2 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + \frac{B' H_1}{B} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \\ & + \left( 2 \frac{H_2}{R_1} + \frac{H_1}{R_2} \right) \sigma_{13} - \rho H_1 H_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0, \\ & H_2 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \alpha} + \frac{H_1}{B} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} + H_1 H_2 \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} + 2 \frac{B' H_1}{B} \sigma_{12} + \\ & + \left( \frac{H_2}{R_1} + 2 \frac{H_1}{R_2} \right) \sigma_{23} - \rho H_1 H_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} = 0, \\ & H_2 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \alpha} + \frac{H_1}{B} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \theta} + H_1 H_2 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} - \frac{H_2}{R_1} \sigma_{11} - \frac{H_1}{R_2} \sigma_{22} + \\ & + \left( \frac{H_1}{R_2} + \frac{H_2}{R_1} \right) \sigma_{33} - \frac{B' H_1}{B} \sigma_{13} - \rho H_1 H_2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \frac{k_2}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \left( \frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{1}{H_2 B} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \frac{B'}{H_2 B} v_1 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{k_2}{H_1 R_1} + \frac{k_1}{H_2 R_2} \right) v_3, \right. \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ k_1 \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) + k_2 \left( \frac{1}{H_2 B} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \frac{B'}{H_2 B} v_1 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{k_1}{H_1 R_1} + \frac{k_2}{H_2 R_2} \right) v_3, \right. \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ k_1 \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_2 B} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \frac{B'}{H_2 B} v_1 \right) + k_2 \frac{\partial v_3}{\partial z} + \right. \\
&\quad \left. + k_1 \left( \frac{1}{H_1 R_1} + \frac{1}{H_2 R_2} \right) v_3, \right. \\
\sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} - \frac{1}{H_1 R_1} v_1 \right), \\
\sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_2 B} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \frac{B'}{B H_2} v_2 \right), \\
\sigma_{23} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{1}{H_2 B} \frac{\partial v_3}{\partial \theta} - \frac{1}{H_2 R_2} v_2 \right),
\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

где  $k_1 = \nu/(1-2\nu)$ ,  $k_2 = (1-\nu)/(1-2\nu)$ .

Запишем также уравнения движения и закон Гука для цилиндрической оболочки с радиусом  $R$ :

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} + \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + \\
& \quad + \frac{1}{R} \sigma_{13} - \rho \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0, \\
& \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} + \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} + \\
& \quad + \frac{2}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \sigma_{23} - \rho \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} = 0, \\
& \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \theta} + \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} - \\
& \quad - \frac{1}{R} (\sigma_{22} - \sigma_{33}) - \rho \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = 0,
\end{aligned} \tag{1.1.12}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{1 + \nu} \left[ k_2 \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} + k_1 \left( \frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{1}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \right) + \frac{k_1}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1} v_3 \right], \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{1 + \nu} \left[ k_1 \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) + k_2 \frac{1}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \frac{k_2}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1} v_3 \right], \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{1 + \nu} \left[ k_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \right) + k_2 \frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{k_1}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1} v_3 \right], \\
\sigma_{13} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} \right],
\end{aligned} \tag{1.1.13}$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[ \frac{\partial v_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right],$$

$$\sigma_{23} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[ \frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{1}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1} \frac{\partial v_3}{\partial \theta} \right].$$

На примере этой оболочки удобно рассматривать модельные задачи распространения волн для всех классификационных случаев.

## 1.2 Классификация граничных условий при ударных воздействиях на торцы оболочек вращения

Пусть на торец оболочки в момент времени  $t = 0$  прикладывается ударная нагрузка. Рассматриваем три типа воздействия, а именно, продольное воздействие тангенциального типа, продольное воздействие изгибающего типа и нормальное воздействие. Все три воздействия соответствуют классификации У.К. Нигула [217]. В основе классификации лежат основные свойства нестационарного НДС в тонких оболочках, определяющие поведение напряжений и деформаций в окрестностях волновых фронтов и квазифронтов. При различных типах торцевых ударных воздействий скачки напряжений и деформаций возникают как в окрестности фронта волны расширения (симметричного или антисимметричного типов погранслоя), так и в окрестности фронта волны сдвига.

Рассмотрим торцевые нагрузки, при которых ударные воздействия имеют место в начальный момент времени и моделируются скачками соответствующих напряжений. В работе [106] указано, что при этом нагрузку на торце можно представить в виде суммы трёх составляющих: самоуравновешенной по нормальной координате, гладкой по времени несамоуравновешенной по нормальной координате и разрывной по времени несамоуравновешенной по нормальной координате. Первая составляющая вызывает быстроизменяющееся по продольной координате НДС, сосредоточенное только в малых окрестностях торца и фронтов волн (реализация принципа Сен-Венана в нестационарной динамике). Вторая составляющая порождает НДС, описываемое только двумерной теорией Кирхгофа-Лява (при показателе динамичности этой составляющей, равной или большем единице, такое НДС описывается только точной трёхмерной теорией упругости), корректируемое в малой окрестности торца квазистатическим погранслоем. Третья составляющая, представляемая разрывной функцией Хе-

весаида, определяет главную часть нестационарного НДС тонких оболочек и будет рассматриваться в настоящем исследовании.

В первом случае (LT – нагружение) мы имеем ненулевое значение продольного нормального усилия. Например, граничные условия:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= IH(t)f(\theta), \quad v_2 = v_3 = 0, \quad \alpha = 0, \\ f(\theta) &= \cos m\theta \quad \text{или} \quad f(\theta) = -\sin m\theta,\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

где  $H(t)$  – единичная функция Хевисайда,  $I$  – амплитуда, соответствуют этой нагрузке. Подробно основные свойства нестационарного НДС в оболочках вращения для всех указанных типов воздействия мы опишем в следующем параграфе, здесь только отметим, что в случае LT воздействия его ударный характер определяет особые свойства решения в прифронтной области волны расширения (симметричный тип погранслоя гиперболического) и в окрестности фронта волны растяжения-сжатия по двумерной теории Кирхгофа-Лява.

Во втором случае (LM – нагружение) мы имеем на торце ненулевой изгибающий момент. Приведём пример граничных условий такого типа:

$$\sigma_{11} = IzH(t)f(\theta), \quad v_2 = v_3 = 0, \quad \alpha = 0.\tag{1.2.2}$$

В этом случае особое свойство решения проявляется также в окрестности фронта волны расширения, но здесь мы имеем антисимметричный тип гиперболического погранслоя.

В третьем же случае (NW – нагружение) мы имеем на торце ненулевое значение перерезывающей силы. Пример таких граничных условий:

$$\sigma_{13} = IH(t)f(\theta), \quad v_1 = v_2 = 0, \quad \alpha = 0.\tag{1.2.3}$$

Здесь особое свойство решения проявляется как в окрестности фронта волны сдвига, так и в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея.

Отметим также, что если для первых двух типов воздействия обычно используется (и частично оправдано) двумерная теория Кирхгофа-Лява, то для третьего типа воздействия обычно пытаются использовать теорию типа Тимошенко.

Будем рассматривать только однородные начальные условия:

$$v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad t = 0 \quad (1.2.4)$$

и будем считать, что лицевые поверхности оболочки свободны от напряжений (исключением является случай поверхностной ударной нагрузки нормального типа, рассмотренный в Главе 5 и Главе 6):

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0, \quad z = \pm h. \quad (1.2.5)$$

Также предположим, что упругие волны не достигают второго края оболочки и ограничимся теми значениями времени, когда расстояние, пройденное передними фронтами волн, соизмеримо с характерным значением радиусов кривизны.

### 1.3 Характерные типы нестационарного НДС в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях

Рассмотрим характерные типы нестационарного НДС, соответствующие динамическим торцевым нагрузкам по классификации У.К. Нигула (1.2.1) – (1.2.3). В работах [217], [139], [140] – [142], [106], [191], [201] проведено сопоставление численных результатов, полученных для пластин и цилиндрических оболочек при решении конкретных задач методами конечных разностей, передела, стационарной фазы, прифронтной асимптотики и др., а также выполнен

анализ использования в различных областях фазовой плоскости приближенных теорий. Представленные там модельные задачи помогли выстроить общую асимптотическую теорию рассматриваемых волновых процессов в произвольных тонкостенных оболочках на примере оболочек вращения, основанную на анализе показателей изменяемости и динамичности в разных областях фазовой плоскости. Приведённые ниже общие положения описания рассматриваемых типов нестационарных НДС оболочек вращения различными асимптотическими теориями полностью доказываются в дальнейших главах диссертации. Разберем детально каждый из рассматриваемых случаев.

В случае воздействия ЛТ (граничное условие (1.2.1)) предлагаемая схема решения для продольного усилия  $T_1$  в оболочке вращения, как обобщение схемы решения, представленной в [106], [107], [74], [75], изображена на рисунке 1.2. Здесь красной жирной линией (линия 1) представлено решение по трёхмерной теории упругости и синей тонкой линией (линия 2) – по теории Кирхгофа-Лява; рассматривается осесимметричный случай НДС. Через  $c_3$  обозначена скорость волны растяжения-сжатия по двумерной теории Кирхгофа-Лява:

$$c_3 = \sqrt{\frac{E}{(1 - \nu^2)\rho}}. \quad (1.3.1)$$

При этом динамический погранслои представлен в виде трёх составляющих: гиперболический погранслои (область  $\mathcal{R}_1$ ), симметричная коротковолновая высокочастотная составляющая (область  $\mathcal{R}_2$ ), параболический погранслои (область  $\mathcal{R}_3$ ). Введение этих трёх составляющих, вместо «динамический погранслои в окрестности фронта волны расширения», «квазиплоская квазисимметричная составляющая» и «динамический погранслои в окрестности квазифронта» носит принципиальный характер: для вновь введённых погранслоёв асимптотически оптимальные уравнения построены сразу из трёхмерных уравнений теории упругости. Отметим, что введённые погранслои, вместе с двумерной безмоментной составляющей, определяют асимптотически главную часть искомого реше-

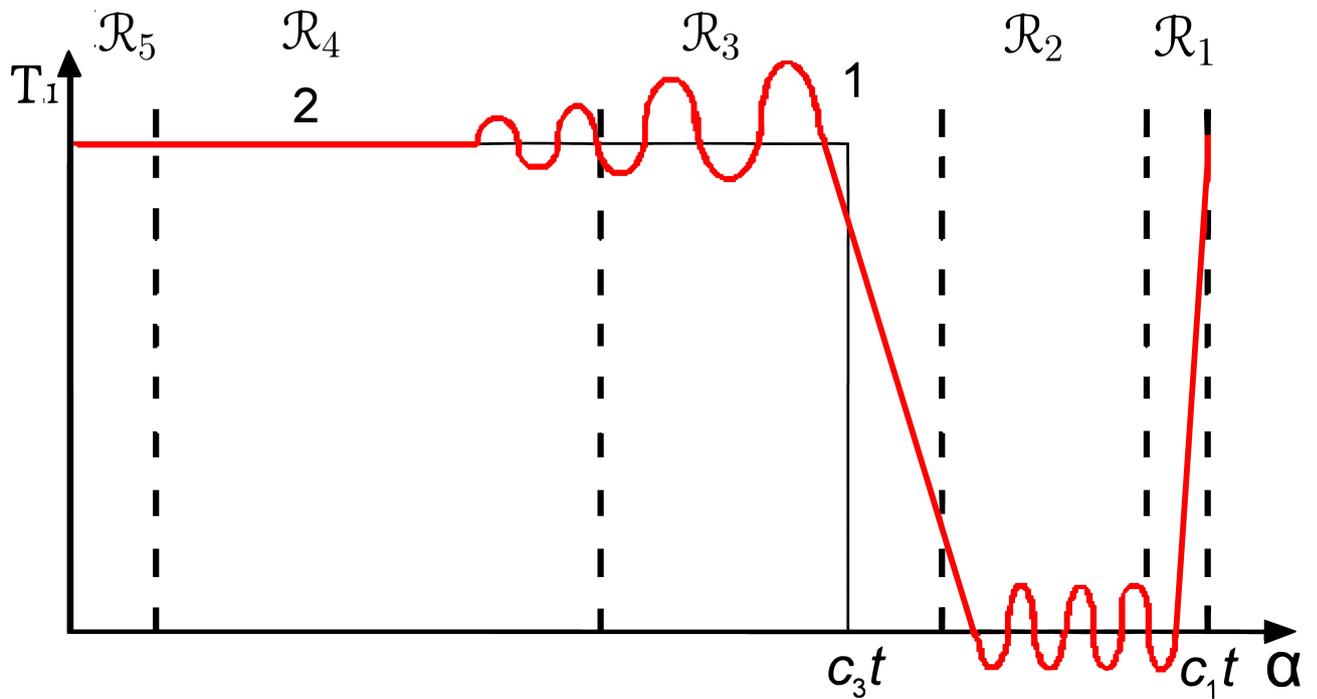


Рисунок 1.2 — Схема решения для продольного усилия  $T_1$ : красная линия – решение по трёхмерной теории упругости, черная линия – решение по теории Кирхгофа-Лява.

ния.

Анализ решения для  $T_1$  по трехмерной теории упругости, представленного жирной красной линией, на рисунке 1.2, позволяет сделать следующие выводы:

- основной разрыв решения, вызванный ударным характером нагрузки при воздействии типа ЛТ, переносится фронтом волны расширения со скоростью  $c_1$ ;
- вблизи фронта волны расширения в малой окрестности  $\mathcal{R}_1$ , как показывают расчеты, порядка толщины оболочки, образуется зона прифронтного решения, не описываемая никакими приближенными двумерными теориями;
- за прифронтной зоной образуется зона малоамплитудных осцилляций  $\mathcal{R}_2$ , не представляющая, в силу малости, никакого интереса для практических расчётов;
- в районе фронта волны растяжения-сжатия по двумерной теории Кирхгофа-

Лява образуется зона решения  $\mathcal{R}_3$ , в которой оно резко, но непрерывно возрастает; с этой точки зрения оно носит характер квазифронта и исправляет недостаток двумерной теории, заменяя «неправильный» двумерный фронт волны растяжения-сжатия квазифронтом;

- в зоне  $\mathcal{R}_4$  действует безмоментная составляющая теории Кирхгофа-Лява;
- в зоне  $\mathcal{R}_5$ , протяженностью порядка толщины оболочки, должен действовать квазистатический погранслой типа Сен-Венана.

Проведенный анализ решения позволяет сделать следующие выводы:

- рассмотренные свойства решения полностью соответствуют выводам, сделанным В.В. Новожиловым и Л.И. Слепяном в работах [145], [156], [157] относительно принципа Сен-Венана при изучении переходных волновых процессов в динамике стержней и пластин: основным положением является здесь то, что главная часть деформаций, соответствующих внезапно прикладываемым нагрузкам, локализуется вблизи волновых фронтов и того сечения, где приложено возмущение;
- абсолютно неправомерный, с точки зрения гиперболических уравнений трёхмерной теории упругости, двумерный фронт волны растяжения-сжатия выделяет ту часть деформированной конструкции, где сосредоточена энергетически главная часть нестационарного НДС. Тем самым подтверждается возможность использования безмоментной составляющей теории Кирхгофа-Лява для описания основной, с энергетической точки зрения, части нестационарного НДС в оболочках при нагрузках типа ЛТ;
- двумерная теория Кирхгофа-Лява, впрочем как и любая другая двумерная теория, не может, при всем вышеуказанном, описать нестационарное НДС во всех участках фазовой плоскости: области  $\mathcal{R}_3$ ,  $\mathcal{R}_2$ ,  $\mathcal{R}_1$  и  $\mathcal{R}_5$  требуют принципиально иных подходов описания, которые найдены с помощью

вывода асимптотически оптимальных уравнений из трёхмерных уравнений теории упругости.

В случае воздействия LM (граничное условие (1.2.2)) предлагаемая схема решения для изгибающего момента  $G_1$  (рассматривается осесимметричный случай НДС по трёхмерной теории упругости) в некоторый момент времени, который много больше времени пробега передним фронтом толщины оболочки, изображена на рисунке 1.3. Здесь, как и в случае воздействия LT, схема является обобщением схемы решения, представленной в [106], [107], [74], [75]. При этом динамический погранслои представлен уже в виде двух составляющих: антисимметричный гиперболический погранслои (область  $\mathcal{R}_1$ ) и антисимметричная коротковолновая высокочастотная составляющая (область  $\mathcal{R}_2$ ). Введение этих составляющих вместо «динамического погранслоя в окрестности фронта волны расширения» и «квазиплоской квазиантисимметричной составляющей» носит аналогичный принципиальный характер, а введённый погранслои вместе с двумерной изгибной составляющей определяют асимптотически главную часть искомого решения.

В этом случае, как и при воздействии LT, схема решения для  $G_1$ , представленная в [74], также получила своё дальнейшее развитие: «динамический погранслои» в окрестности фронта волны расширения стал называться «гиперболический погранслои» (теперь уже антисимметричного типа) – область  $\mathcal{R}_1$ ; «квазиплоская квазиантисимметричная составляющая» получила название «коротковолновая высокочастотная составляющая». Область  $\mathcal{R}_2$ , области  $\mathcal{R}_3$  и  $\mathcal{R}_4$  определяются, как и представлено в [74], изгибной составляющей теории Кирхгофа-Лява и наложением квазистатического погранслоя типа Сен-Венана на изгибную составляющую.

Анализ решения для  $G_1$  позволяет сделать следующие выводы:

- основной разрыв решения, вызванный ударным характером нагрузки при воздействии типа LM, переносится фронтом волны расширения со скоро-

стью  $c_1$ ;

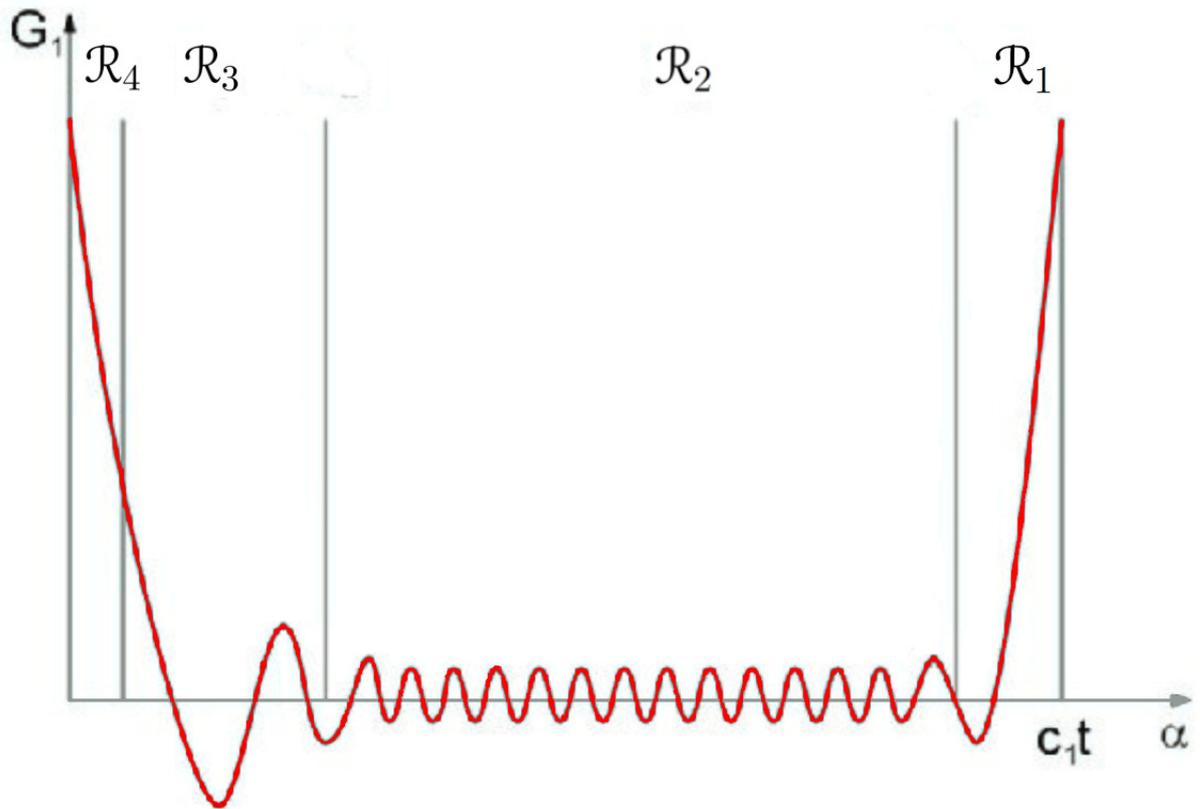


Рисунок 1.3 — Схема решения для изгибающего момента при воздействии типа LM

- вблизи фронта волны расширения, в малой окрестности  $\mathcal{R}_1$ , как показывают расчёты, размером порядка толщины оболочки, образуется зона прифронтového решения, не описываемая никакими приближенными двумерными теориями;
- за прифронтовой зоной, как и в случае воздействия типа LT, образуется зона малоамплитудных осцилляций  $\mathcal{R}_2$ , не представляющая никакого интереса для практических расчетов;
- в зоне  $\mathcal{R}_3$  решение полностью определяется теорией Кирхгофа-Лява, а именно, её моментной составляющей – динамическим простым краевым эффектом;

- в зоне  $\mathcal{R}_4$ , протяженностью порядка толщины оболочки, имеет место квазистатический погранслой типа Сен-Венана.

Из приведенных выводов следует:

- как и в предыдущем случае, рассмотренные свойства полностью соответствуют выводам, сделанным В.В. Новожиловым и Л.И. Слепяном относительно принципа Сен-Венана при изучении переходных волновых процессов в динамике стержней и пластин;
- подтверждается возможность использования параболических уравнений теории Кирхгофа-Лява для описания основной, с энергетической точки зрения, части нестационарного НДС в оболочках при моментных его типах: энергетически главная часть нестационарного НДС сосредоточена в области действия динамического простого краевого эффекта оболочки, описываемого моментной составляющей теории Кирхгофа-Лява.

Как и в случае воздействия ЛТ, теория Кирхгофа-Лява (равно как и другие двумерные теории) не может описать нестационарное НДС во всех участках фазовой плоскости: области  $\mathcal{R}_2$ ,  $\mathcal{R}_1$  и  $\mathcal{R}_4$  требуют принципиально иных подходов описания, которые найдены с помощью вывода асимптотически оптимальных уравнений из трёхмерных уравнений теории упругости.

Перейдем к последнему рассматриваемому случаю – случаю воздействия NW (граничное условие (1.2.3)). Схема решения по трёхмерной теории упругости для перерезывающей силы  $N_1$  в оболочке вращения в некоторый момент времени, много больший времени пробега передним фронтом волны толщины оболочки, изображена на рисунке 1.4, где  $c_R$  – скорость условного фронта поверхностных волн Рэлея. Впервые аналоги этой схемы были подробно описаны в работах [118], [119] для пластин и в работах [125], [94], [95] для цилиндрических оболочек. В рассматриваемой схеме применяются следующие асимптотические теории:  $\mathcal{R}_1$  – коротковолновая высокочастотная составляющая антисимметричного вида;  $\mathcal{R}_2$  – гиперболический погранслой в окрестности фронта волны

сдвига;  $\mathcal{R}_3$  – эллиптический погранслои в окрестности условного фронта по-  
 верхностных волн Рэлея;  $\mathcal{R}_4$  – изгибная составляющая теории Кирхгофа-Лява;  
 $\mathcal{R}_5$  – наложение изгибной составляющей и квазистатического погранслоя.

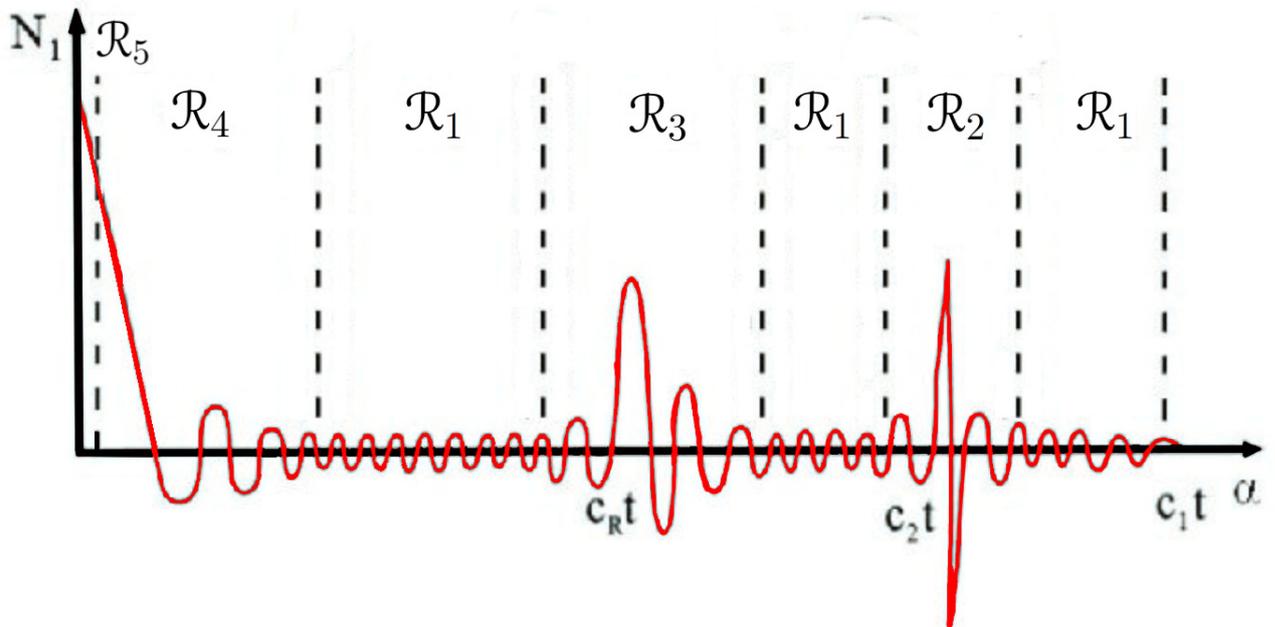


Рисунок 1.4 — Схема решения для перерезывающей силы при воздействии типа NW

Анализ решения для  $N_1$  по трёхмерной теории упругости, представленного на рисунке 1.4, позволяет сделать следующие выводы:

- основной разрыв решения, вызванный ударным характером нагрузки при воздействии типа NW, переносится фронтом волны сдвига со скоростью  $c_2$ ;
- вблизи фронта волны сдвига в малой окрестности  $\mathcal{R}_2$  размером порядка относительной толщины оболочки образуется зона прифронтного решения, не описываемая никакими двумерными приближенными теориями, включая различные модификации двумерной теории типа Тимошенко;
- в районе ложного (с точки зрения общей трёхмерной теории упругости) фронта волны сдвига по двумерной теории типа Тимошенко образуется зона решения  $\mathcal{R}_3$ , в которой оно резко, но непрерывно изменяется, носит ха-

рактёр квазифронта и исправляет недостаток двумерных теорий, заменяя «неправильный» двумерный фронт квазифронтом;

- в зоне  $\mathcal{R}_4$  решение полностью определяется двумерной теорией Кирхгофа-Лява, а именно, её моментной составляющей;
- в зоне  $\mathcal{R}_5$ , протяженностью порядка толщины оболочки, имеет место квазистатический погранслой типа Сен-Венана;
- в остальных областях  $\mathcal{R}_1$  образуются зоны малоамплитудных осцилляций, не предоставляющие никакого интереса для практических расчётов.

Из приведенных выводов следует:

- как и в предыдущих двух случаях, рассмотренные свойства полностью соответствуют выводам, сделанным В.В. Новожиловым и Л.И. Слепяном относительно принципа Сен-Венана при изучении переходных волновых процессов в динамике стержней и пластин;
- подтверждается, как и в предыдущих случаях, возможность использования параболических уравнений теории Кирхгофа-Лява для описания основной, с энергетической точки зрения, части нестационарного НДС: его энергетически главная часть сосредоточена в области действия динамического простого краевого эффекта оболочки, описываемого моментной составляющей теории Кирхгофа-Лява;
- никакая двумерная теория (включая и теории типа Тимошенко, формирующие ложный фронт сдвиговой волны, распространяющейся со скоростью условного фронта поверхностных волн Рэлея) не может описать нестационарное НДС во всех участках фазовой плоскости: области  $\mathcal{R}_3$ ,  $\mathcal{R}_2$ ,  $\mathcal{R}_1$  и  $\mathcal{R}_5$  требуют принципиально иных подходов описания, которые найдены с помощью вывода асимптотически оптимальных уравнений из трёхмерных уравнений теории упругости.

## 1.4 Асимптотическая теория двумерных тангенциальной и изгибной составляющих

Двумерные уравнения теории оболочек в случае статики были выведены асимптотическим методом А.Л. Гольденвейзером [49]. Случай динамического НДС отличается от статического гораздо более сложным анализом трёхмерных уравнений теории упругости, основанным на учёте не только изменяемости НДС по пространственным координатам, но и динамичности процесса по временной переменной. Отметим, что впервые анализ интегралов динамических уравнений линейной двумерной теории оболочек с учётом значений показателей изменяемости и динамичности был выполнен А. Л. Гольденвейзером в работе [48].

Разработка асимптотически оптимальных уравнений, описывающих динамическое НДС тонких оболочек необходима как в задачах колебаний, так и в задачах о нестационарных волнах. С этой целью потребовалось разработать методы асимптотического интегрирования точных уравнений трёхмерной динамики при различных соотношениях между показателями изменяемости и динамичности, приводящие к совершенно новым, по сравнению со статикой и стационарной динамикой, типам НДС. В [66] и диссертации [74] разработан метод асимптотического интегрирования с целью получения длинноволновых низкочастотных приближений, обобщающих соответствующие составляющие классической двумерной теории Кирхгофа-Лява. Выделены тангенциальные и изгибные типы НДС произвольных оболочек, соответственно при LT и LM воздействиях. Отличие указанного типа асимптотического интегрирования от случая, рассмотренного в статике [49], заключается в том, что здесь процессы асимптотического интегрирования строятся отдельно для двух указанных типов НДС, а затем на их базе записываются общие двумерные уравнения.

В предыдущем параграфе были сформулированы принципы применения

двумерных динамических составляющих для полного построения нестационарного НДС в тонкостенных конструкциях при ударных воздействиях. Отметим, что в случае осесимметричного НДС для безмоментной составляющей между показателем изменяемости по продольной координате  $q$  и показателем динамичности  $a$  выполняется соотношение  $q = a$ , а для изгибной составляющей соотношение между ними принимает вид  $q = (1 + a)/2$ .

Результаты работы [66] широко использовались в дальнейшем построении асимптотической теории динамики тонких оболочек [191]. Приведём уравнения тангенциальной (или безмоментной) и изгибной составляющих.

Асимптотика компонент НДС в случае безмоментной составляющей имеет следующий вид [66]:

$$\begin{aligned} v_i &= R\varepsilon^q(v_i^0 + \varepsilon v_i^1), \quad v_3 = R\varepsilon(v_3^0 + \varepsilon^{2q-1}v_3^1), \\ \sigma_{ij} &= E(\sigma_{ij}^0 + \varepsilon\sigma_{ij}^1), \quad \sigma_{i3} = E\varepsilon^{3-3q}(\sigma_{i3}^0 + \varepsilon^{2q-1}\sigma_{i3}^1), \\ \sigma_{33} &= E\varepsilon^{2-2q}(\sigma_{33}^0 + \varepsilon\sigma_{33}^1), \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

где малый параметр тонкостенности  $\varepsilon = h/R$ ,  $R$  – характерное значение радиусов кривизны срединной поверхности оболочки. В представлении (1.4.1) [66] считается, что все величины с индексами нуль и единица имеют один и тот же асимптотический порядок. Величины с индексами нуль задают НДС, симметричное относительно срединной поверхности оболочки, а величины с индексом единица – антисимметричное:  $\sigma_{ij}^0, \sigma_{33}^0, v_i^0, \sigma_{i3}^1, v_3^1$  – чётные функции по безразмерной нормальной координате  $\zeta = z/h$ , а  $\sigma_{i3}^0, v_3^0, \sigma_{ij}^1, \sigma_{33}^1, v_i^1$  – нечётные.

Асимптотическое интегрирование исходных трёхмерных уравнений теории упругости для рассматриваемой составляющей с учётом указанных значений показателей изменяемости и динамичности НДС определило в рамках асимптотической погрешности  $O(\varepsilon^{2-2q})$  (известной из [49] асимптотической погрешности уравнений теории оболочек) следующий полиномиальный по нормальной

координате  $\zeta$  вид рассматриваемых компонент:

$$v_i^0 = v_{i,0}^0, \quad v_3^1 = v_{3,0}^1, \quad \sigma_{i,j}^0 = \sigma_{ij,0}^{(0)}, \quad v_i^1 = v_{i,1}^1 \zeta, \quad v_3^0 = v_{3,1}^0 \zeta, \quad (1.4.2)$$

$$\sigma_{ij,1}^1 = \sigma_{ij,1}^1 \zeta, \quad \sigma_{i3}^1 = \sigma_{i3,0}^1 + \sigma_{i3,2}^1 \zeta^2, \quad \sigma_{33}^0 = \sigma_{33,0}^0 + \sigma_{33,2}^0 \zeta^2, \quad i, j = 1, 2,$$

где все входящие в (1.4.2) функции с запятой в нижнем индексе не зависят от нормальной координаты.

Обозначим продольные и сдвигающие усилия,  $T_i$  и  $S_{ij}$  соответственно, тангенциальные перемещения  $u_i$ , прогиб срединной поверхности –  $w$ , компоненты тангенциальной деформации  $\varepsilon_i, \omega$ . Введём безразмерные формы этих компонент НДС.

$$T_i = 2Eh\sigma_{ii,0}^0, \quad S_{ij} = 2Eh\sigma_{ij,0}^0, \quad (1.4.3)$$

$$u_i = R\varepsilon^q v_{i,0}^0, \quad w = R\varepsilon^{2q} v_{3,0}^1, \quad i, j = 1, 2.$$

Тогда двумерные уравнения для безмоментной составляющей могут быть записаны в виде [66]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_i} \frac{\partial T_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (T_i - T_j) + \\ & + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (S_{ij} + S_{ji}) - 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 2.$$

$$T_i = \frac{2Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_i + \nu\varepsilon_j), \quad S_{ij} = \frac{Eh}{1+\nu}w,$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{w}{R_i}, \quad (1.4.5)$$

$$\omega = \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2}{A_2} \right), \quad i = 1, 2.$$

Перейдём к случаю изгибной составляющей. Асимптотика компонент НДС определяется следующим образом [66]:

$$v_i = R\varepsilon \left( \varepsilon^{2q-1} v_i^0 + v_i^1 \right), \quad v_3 = R\varepsilon^q \left( \varepsilon v_3^0 + v_3^1 \right),$$

$$\sigma_{ij} = E\varepsilon^{1-q} \left( \varepsilon^{2q-1} \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1 \right), \quad \sigma_{i3} = E\varepsilon^{2-2q} \left( \varepsilon \sigma_{i3}^0 + \sigma_{i3}^1 \right), \quad (1.4.6)$$

$$\sigma_{33} = E\varepsilon^{3-3q} \left( \varepsilon^{2q-1} \sigma_{33}^0 + \sigma_{33}^1 \right), \quad i, j = 1, 2.$$

Здесь величины с индексами нуль и единица имеют тот же смысл, что и в (1.4.1). Закон изменения компонент из (1.4.6) задаётся соотношениями (1.4.2) и формулой:

$$\sigma_{33}^1 = \sigma_{33,1}^1 \zeta + \sigma_{33,3}^1 \zeta^3. \quad (1.4.7)$$

Аналогично (1.4.3) введём следующие безразмерные формы компонент НДС:

$$T_i = 2Eh\varepsilon^q \sigma_{ii,0}^0, \quad S_{ij} = 2Eh\varepsilon^q \sigma_{ij,0}^0, \quad G_i = -\frac{2}{3}Eh^2 \varepsilon^{1-q} \sigma_{ii,1}^1,$$

$$H_{ij} = \frac{2}{3}Eh^2 \varepsilon^{1-q} \sigma_{ij,1}^1, \quad N_i = -2Eh\varepsilon^{2-2q} \left( \sigma_{i3,0}^1 + \frac{1}{3} \sigma_{i3,2}^1 \right), \quad (1.4.8)$$

$$u_i = R\varepsilon^{2q} v_{i,0}^0, \quad w = R\varepsilon^q v_{3,0}^1, \quad i, j = 1, 2,$$

где  $G_i$  и  $H_{ij}$  – изгибающий и скручивающий моменты,  $N_i$  – перерезывающие усилия. Двумерные уравнения для изгибной составляющей имеют следующую форму [66]:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A_i} \frac{\partial T_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (T_i - T_j) + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (S_{ij} + S_{ji}) = 0, \\
\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} + \\
+ \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} N_1 + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} N_2 + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,
\end{aligned} \tag{1.4.9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A_i} \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_j} \frac{\partial H_{ij}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (G_i - G_j) - \\
- \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (H_{ij} + H_{ji}) - N_i = 0, \\
T_i = \frac{2Eh}{1 - \nu^2} (\varepsilon_i + \nu \varepsilon_j), \quad S_{ij} = \frac{Eh}{1 + \nu} w, \\
G_i = -\frac{2Eh^3}{3(1 - \nu^2)} (\varkappa_i + \nu \varkappa_j), \quad H_{ij} = \frac{2Eh^3}{3(1 + \nu)} \tau, \\
\varepsilon_i = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{w}{R_i}, \\
\omega = \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2}{A_2} \right), \\
\gamma_i = \frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i}, \quad \tau = -\frac{1}{A_j} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \gamma_j, \\
\varkappa_i = -\frac{1}{A_i} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \gamma_j.
\end{aligned} \tag{1.4.10}$$

Отметим, что, удерживая одновременно все члены, входящие в уравнения для безмоментной и изгибной составляющих, мы придём к полной системе двумерных уравнений динамической теории оболочек Кирхгофа-Лява.

Поскольку мы сосредоточимся на изучении осесимметричных нестационар-

ных волновых процессов в оболочках вращения, примем следующие допущения и обозначения:  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ ,  $S_{ij} = S$ ,  $H_{ij} = H$ ,  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = B$ . Тогда двумерные уравнения для безмоментной составляющей записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{B'}{B}(T_1 - T_2) - 2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_i + \nu\varepsilon_j), \\ \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{B'}{B}u + \frac{w}{R_2}. \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

Выпишем также двумерные уравнения для изгибной составляющей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{B'}{B}(T_1 - T_2) &= 0, \\ \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \frac{B'}{B}N_1 + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial \alpha} + \frac{B'}{B}(G_1 - G_2) - N_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_i + \nu\varepsilon_j), \quad G_i = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} (\varkappa_i + \nu\varkappa_j), \\ \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{B'}{B}u + \frac{w}{R_2}, \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

$$\varkappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad \varkappa_2 = -\frac{B'}{B} \frac{\partial w}{\partial \alpha}.$$

## 1.5 Асимптотическая теория коротковолнового высокочастотного приближения

В параграфе 1.3 рассмотрены характерные виды нестационарного НДС при всех типах классификации ударных торцевых воздействий (LT, LM, NW), и во всех них присутствуют области коротковолновых высокочастотных составляющих. Вывод асимптотически оптимальных уравнений этих составляющих описан в [106] и основан на предположении о значениях показателей изменяемости и динамичности нестационарного НДС, равных единице ( $q = a = 1$ ), что соответствует, в частности, размеру характерного рисунка деформации, имеющему порядок толщины оболочки.

Отметим, что впервые описание коротковолновых высокочастотных приближений было проведено в 1986 году в работе Л.Ю. Коссовича «Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек» [106] в рамках построения динамического погранслоя, который имеет место в некоторый начальный промежуток времени и в окрестностях фронтов волн размером порядка радиуса оболочки. Его решение должно удовлетворять всем начальным и граничным (для начального промежутка времени) условиям. Уравнения динамического погранслоя имеют асимптотически главную часть, которая совпадает с динамическими уравнениями плоской задачи теории упругости. Эти уравнения сохраняют силу при сколь угодно больших значениях показателей изменяемости и динамичности. Поэтому динамический погранслой должен включить в себя как рассматриваемые в [75] и настоящей диссертации коротковолновые высокочастотные составляющие, так и погранслои в окрестностях фронтов волн расширения, сдвига и квазифронтов.

Практически, вследствие малости напряжений и деформаций, рассматриваемые коротковолновые высокочастотные составляющие представляют малый интерес, но их учёт необходим для доказательства корректности применяемого

асимптотического метода расчленения нестационарного НДС на составляющие с различными показателями изменчивости и динамичности: требуется доказывать наличие областей согласования в фазовой плоскости решений для различных составляющих с целью выявления полноты применяемых составляющих. В случае воздействия типа ЛТ требуется доказывать наличие областей согласования симметричной коротковолновой высокочастотной составляющей с симметричным гиперболическим погранслоем в окрестности фронта волны расширения и с параболическим погранслоем в окрестности квазифронта двумерной волны растяжения-сжатия. В случае воздействия типа ЛМ – с антисимметричным гиперболическим погранслоем в окрестности фронта волны расширения и изгибающей составляющей по теории Кирхгофа-Лява. А в случае воздействия типа NW – с гиперболическим погранслоем в окрестности фронта волны сдвига, с эллиптическим погранслоем в окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея и с изгибающей составляющей по теории Кирхгофа-Лява.

В общем случае произвольной оболочки уравнения для асимптотически главной составляющей рассматриваемой компоненты запишутся в виде [106], [75], [191]:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_i} \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (\sigma_{ii} - \sigma_{jj}) + \\
& + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) - \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = 0, \\
& \frac{1}{A_i} \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \sigma_{j3}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \sigma_{i3} + \\
& + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \sigma_{j3} - \rho \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = 0,
\end{aligned} \tag{1.5.1}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ii} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} v_i \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} v_j \right], \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_j} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} v_i + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} v_j \right) + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} \right], \\
\sigma_{3i} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_3} \right], \\
\sigma_{ij} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{1}{A_j} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_i} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} v_i - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} v_j \right], \quad (i \neq j = 1, 2).
\end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Уравнения (1.5.1) – (1.5.2) соответствуют уравнениям трёхмерной теории упругости для плоского слоя с условием, что срединная плоскость слоя совпадает с метрикой срединной поверхности оболочки. Коэффициенты этих уравнений не зависят от нормальной координаты  $\alpha_3$  и являются функциями от коэффициентов первой квадратичной формы срединной поверхности.

Выпишем теперь искомые уравнения для асимптотически главной составляющей компоненты в нашем случае осесимметричного нестационарного НДС оболочки вращения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + \frac{B'}{B} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) - \rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + \frac{B'}{B} \sigma_{13} - \rho \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} &= 0,
\end{aligned} \tag{1.5.3}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{B'}{B} v_1 \right) + \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} \right], \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} \right) + \frac{B'}{B} v_1 \right], \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{B'}{B} v_1 \right) + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right], \\
\sigma_{31} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right].
\end{aligned} \tag{1.5.4}$$

## 1.6 Асимптотическая теория параболического погранслоя

При анализе в параграфе 1.3 нестационарного НДС оболочек в случае воздействия типа ЛГ описана главная проблема использования двумерной теории Кирхгофа-Лява в задачах о распространении нестационарных волн: продольные волны распространяются по двумерной теории со скоростью  $c_3$  вместо истинной скорости продольной волны (волны расширения), распространяющейся со скоростью  $c_1$ . По сути, фронт волны растяжения-сжатия по двумерной теории является квазифронтом, в окрестности которого происходит хотя и скачкообразное, но непрерывное изменение компонент НДС. Именно поэтому в окрестности квазифронта  $\alpha = c_3 t$  требуется коррекция решения, определенного двумерной безмоментной составляющей теории Кирхгофа-Лява: построены уравнения так называемого параболического погранслоя, который должен иметь области согласования как с безмоментной составляющей, так и с симметричной коротковолновой высокочастотной составляющей.

Асимптотически оптимальные уравнения параболического погранслоя выведены с учётом значения показателя изменчивости  $q$  по продольной координате, удовлетворяющему неравенству [104]:

$$\frac{2}{3} \leq q < 1. \quad (1.6.1)$$

Впервые эти уравнения были выведены в [189], [191] на базе двумерной теории оболочек высокого порядка приближения. В работах [172], [11] была предложена методика их непосредственного вывода на базе точных трёхмерных уравнений теории упругости, причём в этих работах данный погранслои исследовался в волновых задачах для анизотропных и вязкоупругих оболочек. В окончательном виде вывод искомым уравнений приведён в [111]. Разрешающие уравнения записываются в двумерной форме и асимптотика компонент НДС имеет следующий вид [111, с. 123]:

$$\begin{aligned} v_1 &= R\left(\varepsilon^{2/3}v_1^0 + \varepsilon^{5/3}v_1^1\right), & v_2 &= R\left(\varepsilon^{4/3}v_2^0 + \eta^{7/3}v_2^1\right), \\ v_3 &= R\left(\varepsilon v_3^0 + \varepsilon^{4/3}v_3^1\right), & \sigma_{11} &= E\left(\sigma_{11}^0 + \varepsilon\sigma_{11}^1\right), & \sigma_{22} &= E\left(\sigma_{22}^0 + \varepsilon\sigma_{22}^1\right), \\ \sigma_{33} &= E\left(\varepsilon^{2/3}\sigma_{33}^0 + \varepsilon^{5/3}\sigma_{33}^1\right), & \sigma_{13} &= E\left(\varepsilon\sigma_{13}^0 + \varepsilon^{4/3}\sigma_{13}^1\right), \\ \sigma_{23} &= E\left(\varepsilon^{5/3}\sigma_{23}^0 + \varepsilon^2\sigma_{23}^1\right), & \sigma_{12} &= E\left(\varepsilon^{2/3}\sigma_{12}^0 + \varepsilon^{5/3}\sigma_{12}^1\right). \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

Как и в параграфе 1.4 при выводе двумерных уравнений безмоментной и изгибной составляющих, считается [111], что все величины с индексами нуль и единица имеют один и тот же асимптотический порядок, причём величины с индексом нуль задают симметричную часть НДС относительно срединной поверхности, а величины с индексом единица – антисимметричную.

Зависимость компонент из (1.6.2) от нормальной координаты установлена следующим образом [111, с. 123]:

$$\begin{aligned}
v_1^0 &= v_{1,0}^{(0)} + \varepsilon^{2/3} \left( v_{1,1}^{(0)} + \zeta^2 v_{1,1}^{(2)} \right), & v_2^{(0)} &= v_2^{(0)}, & v_3^1 &= v_3^{(0)}, \\
\sigma_{11}^0 &= \sigma_{11,0}^{(0)} + \varepsilon^{2/3} \left( \sigma_{11,1}^{(0)} + \zeta^2 \sigma_{11,1}^{(2)} \right), & \sigma_{22}^0 &= \sigma_{22}^{(0)}, & \sigma_{ij}^0 &= \sigma_{ij}^{(0)}, \\
v_i^1 &= \zeta v_i^{(1)}, & v_3^0 &= \zeta v_3^{(1)}, & \sigma_{ij}^1 &= \zeta \sigma_{ij}^{(1)}, & \sigma_{ii}^1 &= \zeta \sigma_{ii}^{(1)}, & i \neq j &= 1, 2.
\end{aligned} \tag{1.6.3}$$

Усилия и перемещения срединной поверхности введены по формулам [111, с. 123]:

$$\begin{aligned}
T_1 &= 2Eh\sigma_{11,0}^{(0)}, & T_2 &= 2Eh\sigma_{22}^{(0)}, & S_{ij} &= 2Eh\varepsilon^{2/3}\sigma_{ij}^{(0)}, \\
u_1 &= R\varepsilon^{2/3}v_{1,0}^{(0)}, & u_2 &= R\varepsilon^{4/3}v_2^{(0)}, & w &= R\varepsilon^{4/3}v_3^{(0)}.
\end{aligned} \tag{1.6.4}$$

Уравнения для асимптотически главных компонент [111, с. 124] имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{c_3} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{B'}{2B} u_1 - \frac{\nu^2 h^2}{6(1-\nu)^2 c_3^2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} &= 0, \\
T_1 &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha}, & T_2 &= \frac{2Eh\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha},
\end{aligned} \tag{1.6.5}$$

а уравнения для асимптотически второстепенных компонент [111, с. 124] имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} &= 0, & \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u_1 &= 0, \\
S_{12} &= \frac{Eh}{1+\nu} \left( -\frac{1}{B} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \right).
\end{aligned} \tag{1.6.6}$$

## Глава 2

# Асимптотическая теория гиперболического погранслоя

Схемы расчленения нестационарного НДС в оболочках вращения на составляющие с различными показателями изменяемости и динамичности, а также области их применения представлены в Главе 1. В настоящей главе мы изложим вывод асимптотически оптимальных уравнений гиперболических погранслоёв для общего случая оболочек вращения произвольного профиля с учётом изменяющейся в процессе распространения волн геометрической формы волновых фронтов. Рассматриваемые погранслои имеют место в малых окрестностях фронтов волн расширения и сдвига и не могут быть описаны известными двумерными теориями. Так, уравнения классической теории Кирхгофа-Лява выводятся асимптотическим методом из точных уравнений теории упругости при показателях изменяемости и динамичности, меньшими единицы, а искомые погранслои в узкой прифронтной области имеют значения этих показателей, равные двум. Двумерные теории типа Тимошенко также не могут описать рассматриваемые погранслои, поскольку гипотезы, лежащие в основе построения этих двумерных теорий, в принципе не соответствуют характеру НДС в прифронтных областях волн и расширения, и сдвига.

Впервые асимптотически оптимальные уравнения гиперболических погранслоёв были выведены для цилиндрических оболочек и оболочек нулевой гауссовой кривизны в работе [74]. В этой работе рассмотрены оба типа искомого погранслоёв. Здесь же отмечена их существенная особенность, связанная с геометрией фронтов волн для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны: они образованы нормальными к срединной поверхности. Поэтому и была применена новая модификация асимптотического интегрирования трёхмерных уравнений

теории упругости, когда оно проводится в новом пространстве переменных после перехода к характеристической координате, представляющей расстояние до соответствующего фронта волны. При этом проводятся два процесса асимптотического интегрирования для погранслоёв в окрестностях соответствующих фронтов.

В общем же случае оболочек вращения из-за кривизны их конструкции фронты волн уже не формируются нормальными к срединной поверхности и имеют сложную форму, от неё зависящую. В случае рассматриваемой малой изменяемости геометрии (соответствующей нулевой изменяемости в безразмерных координатах, когда толщина оболочки много меньше характерного значения радиусов кривизны срединной поверхности) образующая фронтовой поверхности (представляемая отрезком линии пересечения этой фронтовой поверхности с перпендикулярной ей плоскостью, проходящей через ось срединной поверхности вращения) расположена в области оболочки протяжённостью порядка толщины по координате  $\alpha$ . В параграфе 2.1 будет рассмотрен вопрос построения искомой фронтовой поверхности и проведена её асимптотическая аппроксимация, когда рассматриваемая образующая фронтовой поверхности представляется повернутой нормалью к срединной поверхности.

Методика построения асимптотических уравнений гиперболического погранслоя, полученная в [74] для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны, была использована в работах [191], [83] для общего случая оболочек вращения. При этом предполагалось, что в узкой прифронтовой зоне порядка толщины оболочки, как и для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны, имеется высокая изменяемость и динамичность решения ( $q, a > 1$ ). Этот факт и лёг там в основу вывода разрешающих уравнений гиперболического погранслоя методом перехода к характеристической координате, связанной с нормалью к срединной поверхности. Однако в этих рассуждениях отсутствовал учёт и влияние на волновой процесс расположения истинных фронтов волн.

В настоящей работе результаты параграфа 2.1 используются для постро-

ения асимптотически оптимальных уравнений гиперболического погранслоя в окрестностях фронтов волн расширения и сдвига путём перехода к характеристическим координатам, учитывающим отклонение от истинных фронтов [76], [77]. Полученные при этом уравнения позволяют оценить более простой метод получения искомым разрешающих уравнений, изложенный в уже цитированных здесь работах [191], [83].

## 2.1 Постановка задачи

Рассмотрим сначала вопросы формирования волновых фронтов расширения при распространении нестационарных волн в оболочках вращения произвольного профиля. Анализ проведём на примере оболочки вращения положительной гауссовой кривизны, представленной схематично на рисунке 2.1. Здесь рассматривается картина распространения возмущений в момент времени  $t_0$ .

При ударе на торец  $\alpha = 0$  волновое поле можно представить в виде наложения элементарной волны, возбуждённой непосредственно торцом и элементарных волн, отражённых от лицевых поверхностей. При выходе переднего фронта волны расширения за предел области, соизмеримой с толщиной оболочки, в его формировании по всей длине будут участвовать все типы элементарных волн, порождённых как торцевой, так и лицевыми поверхностями, определяя сложную поверхность, зависящую от кривизны оболочки. Построим асимптотическую аппроксимацию геометрической формы фронта.

В рассматриваемом случае положительной гауссовой кривизны оболочки на распространение возмущений по нижней лицевой поверхности в малой окрестности переднего фронта элементарные волны от верхней лицевой поверхности влияния не оказывают. Обозначим на рисунке 2.1 граничную точку распространения возмущений на этой лицевой поверхности через  $B_2$ . Обозначим также через  $\alpha_0$  координату на образующей срединной поверхности, определяе-

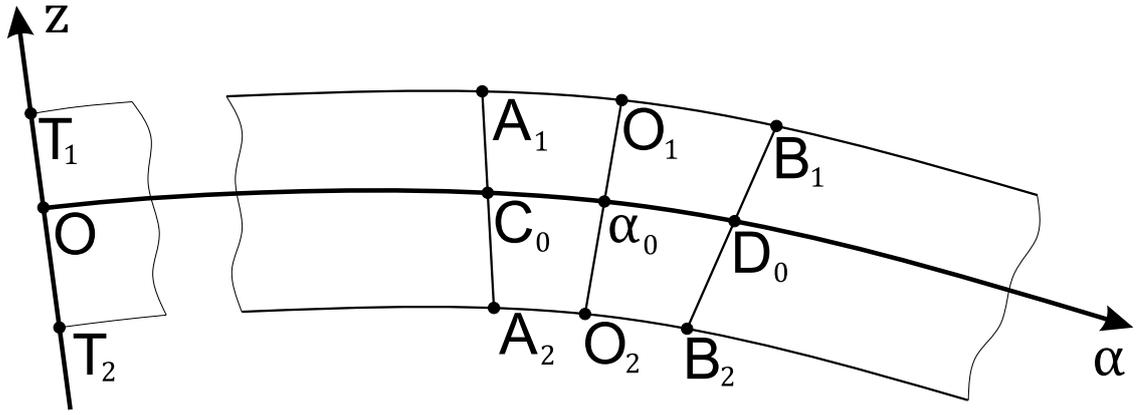


Рисунок 2.1 — Формирование фронта волны расширения в оболочках вращения

мую равенством  $\alpha_0 = c_1 t_0$ . Из построения ясно, что отрезки кривых  $O\alpha_0$  и  $T_2 B_2$  равны между собой и равны  $\alpha_0$ :

$$O\alpha_0 = T_2 B_2 = \alpha_0. \quad (2.1.1)$$

Введем нормали к срединной поверхности, проходящие через точки  $B_2$  (отрезок  $B_1 B_2$ ) и через  $\alpha_0$  (отрезок  $O_1 O_2$ ). Определим расстояния по дугам на верхней и нижней лицевых поверхностях до точек  $O_1$  и  $O_2$ . Поскольку выражение для первого коэффициента Ламе рассматриваемой системы координат имеет вид [49]:

$$H_1 = 1 + \frac{z}{R_1}, \quad (2.1.2)$$

где  $R_1$  — главный радиус кривизны срединной поверхности, то искомые расстояния определяются следующими выражениями:

$$T_1 O_1 = \alpha_0 + h \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{R_1}, \quad T_2 O_2 = \alpha_0 - h \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{R_1}. \quad (2.1.3)$$

Следовательно, длина отрезка кривой  $O_2 B_2$  на нижней лицевой поверхности определяется следующим образом:

$$O_2B_2 = h \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{R_1}. \quad (2.1.4)$$

Рассмотрим теперь особенности распространения возмущений вблизи переднего фронта на верхней лицевой поверхности. Сразу после приложения ударной торцевой нагрузки картина распространения возмущений в малой окрестности фронта волны здесь аналогична описанной ситуации для нижней лицевой поверхности: элементарные волны от противоположной стороны влияния не оказывают. Обозначим через  $A_1$  граничную точку распространения возмущений на рассматриваемой поверхности:  $T_1A_1 = \alpha_0$ . Повторяя предшествующие рассуждения, получим выражение для длины отрезка кривой  $A_1O_1$ :

$$A_1O_1 = O_2B_2 = h \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{R_1} \quad (2.1.5)$$

Нетрудно доказать также, что с асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon)$  выполняется равенство  $O_1B_1 = A_2O_2 = A_1O_1 = O_2B_2$ .

С течением времени отрезок  $A_2B_2$  увеличивается по длине, и когда он становится равным (с асимптотической точностью  $O(\varepsilon)$ )  $2h$ , выполняется условие:

$$\int_0^{c_1 t_0} \frac{d\alpha}{R_1} = 1. \quad (2.1.6)$$

При этом, с течением времени, передний фронт волны будет определяться граничными точками на лицевых поверхностях следующим образом: на нижней лицевой поверхности точка  $B_2$  по прежнему определяется условием (2.1.1), а точка  $A_1$  будет определяться следующим условием:

$$T_1A_1 = \alpha_0 + h \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{R_1} - h. \quad (2.1.7)$$

Например, для сферической оболочки с радиусом  $R$  условие (2.1.6) приобретает

простейший вид:

$$c_1 t_0 = R. \quad (2.1.8)$$

В дальнейшем будем рассматривать первый промежуток времени, когда

$$\int_0^{c_1 t_0} \frac{d\alpha}{R_1} \leq 1. \quad (2.1.9)$$

Для завершения разработки построения асимптотической модели переднего волнового фронта рассмотрим сначала модельный пример. Предложенный в [74] метод анализа гиперболического погранслоя в оболочках вращения нулевой гауссовой кривизны основан на исследовании решения для точных уравнений при распространении волн в цилиндрической оболочке. В этом смысле случай цилиндрической оболочки является базовым для более общего случая оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны. В общем же случае оболочек вращения выберем в качестве базовой задачи задачу для сферической оболочки с радиусом срединной поверхности  $R$ .

На рисунке 2.2 представлено схематическое изображение сечения сферической оболочки плоскостью, проходящей через центр  $O_3$  и определяющей осесимметричность НДС этой оболочки. Здесь, как и на рисунке 2.1, рассматривается картина распространения возмущений в момент времени  $t_0$ . Как и ранее, через  $A_1$  обозначается граничная точка распространения возмущений по верхней лицевой поверхности, через  $B_2$  – граничная точка распространения возмущений по нижней лицевой поверхности,  $\alpha_0 = c_1 t_0$ ;  $A_1 A_2$ ,  $B_1 B_2$ ,  $O_1 O_2$  – нормали к срединной поверхности, проходящие через точки  $A_1$ ,  $B_2$  и  $\alpha_0$ . Радиусы окружности срединной поверхности, проходящие через точки  $C_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $D_2$ , пересекаются в центре  $O_3$ .

В соответствии с (2.1.5) имеет место равенство:

$$A_1 O_1 = O_2 B_2 = \frac{h}{R} \alpha_0 = \varepsilon \alpha_0. \quad (2.1.10)$$

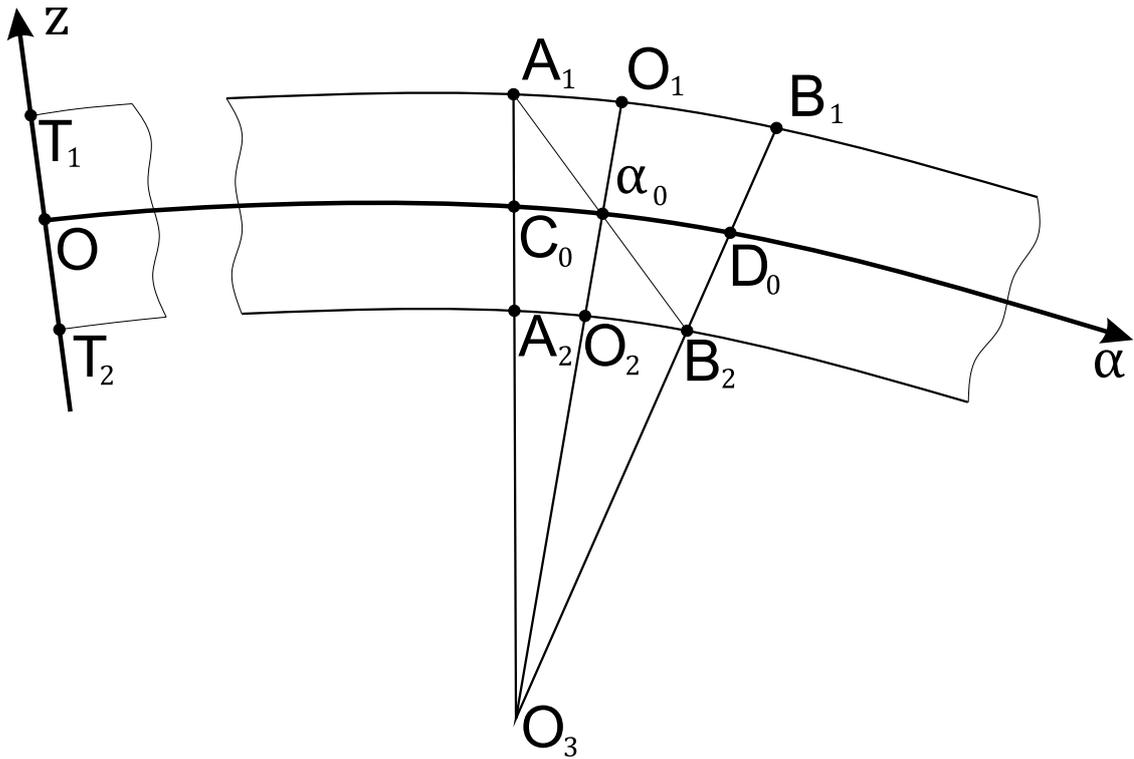


Рисунок 2.2 — Формирование фронта волны расширения в сферических оболочках

Найдём координаты точек  $A_1$  и  $B_2$ . Из построения, представленного на рисунке 2.2, ясно, что секторы  $O_3A_1O_1$  и  $O_3C_0\alpha_0$  подобны. Тогда из пропорциональности сторон следует, что

$$C_0\alpha_0 = A_1O_1 \frac{R}{R+h} = \varepsilon\alpha_0 [1 + O(\varepsilon)], \quad (2.1.11)$$

а первая координата точки  $C_0$  определяется выражением:

$$\alpha = \alpha_0 [1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2)], \quad (2.1.12)$$

что и является координатой точки  $A_1$  на верхней лицевой поверхности и, соответственно, координатой точки фронта. Следовательно, уравнение линии, соединяющей точки  $A_1$  и  $\alpha_0$  задаётся следующей линейной функцией от нормаль-

ной координаты  $z$ :

$$\alpha = \alpha_0 \left[ 1 - \frac{z}{R} + O(\varepsilon^2) \right] = \alpha_0 \left[ 1 - \varepsilon \zeta + O(\varepsilon^2) \right]. \quad (2.1.13)$$

Аналогично рассуждая, получаем из подобия секторов  $O_3\alpha_0 D_0$  и  $O_3 O_2 B_2$  выражение для координаты точки  $B_2$ :

$$\alpha = \alpha_0 \left[ 1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2) \right] \quad (2.1.14)$$

и уравнение линии, соединяющей точки  $\alpha_0$  и  $B_2$ , полностью совпадающее с уравнением (2.1.13).

Таким образом, уравнение (2.1.13) определяет с асимптотической погрешностью уравнение линии, проходящей через все три точки  $A_1$ ,  $\alpha_0$  и  $B_2$ .

Рассмотрим теперь вопросы формирования переднего фронта волны расширения. Поскольку первичными источниками возмущения при рассматриваемых торцевых ударных воздействиях являются точки торца, то в случае цилиндрических оболочек искомые фронты формируются нормальными к срединной поверхности. В рассмотренном модельном случае сферической оболочки сферические лицевые поверхности искажают прямолинейные пути распространения возмущений. Отметим, что выделение граничных точек распространения возмущений  $A_1$  и  $B_2$  позволяют сделать вывод о возможности аппроксимировать передний фронт поверхностями, определяемыми уравнением (2.1.13). Тогда искомый фронт можно считать поверхностью, образованной нормальными к срединным линиям, повернутыми в точках  $\alpha_0 = c_1 t_0$ .

Проведённые рассуждения позволяют обобщить результаты на случай оболочки вращения: с асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon)$  фронт волны расширения линейно определяется через поперечную координату по формуле:

$$\alpha = \alpha_0 \left[ 1 - \frac{\varepsilon \zeta}{\xi_0} \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{R_1} + O(\varepsilon^2) \right], \quad (2.1.15)$$

непосредственно следующей из соотношения (2.1.5).

Отметим, что уравнение для фронта волны сдвига строится аналогично случаю фронта волны расширения и также имеет вид (2.1.15), где координата фронта на образующей срединной поверхности определяется уже скоростью волны сдвига:  $\alpha_0 = c_2 t_0$ .

Отметим также, что, как и в случае сферической оболочки, выражение (2.1.15) определяет поворот нормали в точке  $\alpha_0$ , определяющий положение фронта волны расширения (или сдвига). Определим длину этого отрезка повернутой нормали, заданного граничными точками на лицевых поверхностях. В случае сферической оболочки (рисунок 2.2) отрезок нормали  $O_1 O_2$  поворачивается и принимает положение фронта – отрезка  $A_1 B_2$ , для которого имеет место выражение, определяемое с погрешностью  $O(\varepsilon)$  криволинейным треугольником  $A_1 C_0 \alpha_0$ :

$$A_1 \alpha_0 = h \sqrt{1 + \frac{\alpha_0^2}{R^2}}. \quad (2.1.16)$$

Тогда в общем случае оболочки, в соответствии с (2.1.15), примем длину отрезка повернутой нормали от срединной поверхности до поверхности лицевой в виде:

$$A_1 \alpha_0 = h \sqrt{1 + F^2(\alpha_0)}, \quad F(\alpha_0) = \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{R_1}. \quad (2.1.17)$$

Следовательно, длина отрезка повернутой нормали, измеряемая от срединной поверхности до точки на повернутой нормали с координатой  $z$ , будет определяться значением величины, обозначенной через  $z_F^0$ :

$$z_F^0 = z \sqrt{1 + F^2(\alpha_0)} \quad (2.1.18)$$

Перейдём теперь к описанию разрешающих уравнений для оболочки вращения. В общем виде, в координатной системе  $(\alpha, \theta, z)$ , уравнения движения и уравнения закона Гука выписаны в Главе 1 и имеют вид (1.1.10) – (1.1.11).

Поскольку коэффициенты этих уравнений не зависят от угловой координаты  $\theta$ , то решения можно искать в виде тригонометрических рядов. В данной работе мы рассматриваем осесимметричные задачи, поэтому выпишем разрешающие уравнения по трёхмерной теории упругости только для этого случая. С асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon^2)$ , необходимой для описания быстро изменяющейся рассматриваемой составляющей, они имеют вид:

$$\begin{aligned} & \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z} + \frac{z}{R_1} \left( -\varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \right) + \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_1}{\partial z} + \\ & \quad + \left( \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} = 0, \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \frac{z}{R_1} \left( -\frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \right. \\ & \quad \left. + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \right) - \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{1}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial z} + \\ & \quad + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} + \varkappa^{-2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0, \end{aligned}$$

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu} \left[ k_2 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{\partial v_3}{\partial z} - k_2 \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{B'}{B} v_1 + \left( \frac{k_2}{R_1} + \frac{k_1}{R_2} \right) v_3 \right],$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1+\nu} \left[ k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{\partial v_3}{\partial z} - k_1 \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_2 \frac{B'}{B} v_1 + \left( \frac{k_1}{R_1} + \frac{k_2}{R_2} \right) v_3 \right],$$

(2.1.20)

$$\sigma_{33} = \frac{E}{1+\nu} \left[ k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_2 \frac{\partial v_3}{\partial z} - k_1 \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{B'}{B} v_1 + k_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_3 \right],$$

$$\sigma_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} - \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} - \frac{1}{R_1} v_3 \right].$$

## 2.2 Асимптотический вывод уравнений гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения в оболочках вращения произвольного профиля

Получим разрешающие уравнения гиперболического погранслоя, имеющего место в малой окрестности фронта волны расширения. Для этого, основываясь на принципах вывода формулы (2.1.18) для длины отрезка повернутой фронтовой нормали  $z_F^0$ , введём новую координату  $z_F$ :

$$z_F = z\sqrt{1 + F^2(\alpha)}, \quad (2.2.1)$$

которая должна заменить в уравнениях гиперболического погранслоя нормальную координату  $z$  и которая при  $\alpha = \alpha_0 = c_1 t$  (для волны растяжения), либо  $\alpha = \alpha_0 = c_2 t$  (для волны сдвига) отсчитывается вдоль новой координатной линии, совпадающей с передним фронтом волны.

Тогда, в переменных  $\alpha_F$ ,  $z_F$ ,  $t$  ( $\alpha_F = \alpha$ ) получим, с учётом зависимости производных в уравнениях (2.1.19), (2.1.20) через производные с учетом вводимой переменной  $z_F$  (с точностью  $O(\varepsilon^2)$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_F} + z_F \frac{F}{R_1(1 + F^2)} \frac{\partial}{\partial z_F} \\ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha_F^2} + z_F \frac{2F}{R_1(1 + F^2)} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_F \partial z_F} \\ \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial z} &= \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_F \partial z_F} + z_F \frac{F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2}{\partial z_F^2} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial}{\partial z_F}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = (1 + F^2) \frac{\partial^2}{\partial z_F^2} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

следующую форму разрешающих уравнений движения (индекс «F» у обозначения  $\alpha_F$  опускаем):

$$\begin{aligned}
& \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} + \\
& + \frac{z_F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \left[ -\varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \right] + \\
& + \frac{z_F F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \left[ \frac{2\varkappa^{-2}}{\sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} \right] + \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \\
& + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \left[ \frac{3 - 4\nu}{(1 - 2\nu)R_1} + \frac{1}{(1 - 2\nu)R_2} \right] \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} = 0, \\
& \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \\
& + \frac{z_F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \left[ -\frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \right] + \\
& + \frac{z_F F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \left[ \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} + \frac{2}{\sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} \right] - \\
& - \frac{3 - 4\nu}{(1 - 2\nu)R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{B'}{B} \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \\
& + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} + \varkappa^{-2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} = 0.
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Анализ свойств искомого гиперболического погранслоя в оболочках вращения нулевой гауссовой кривизны, асимптотически оптимальные уравнения которого получены в [74], показывает, что он является в асимптотическом смысле обобщением гиперболического погранслоя в полосе, отвечающего плоскому типу НДС. При этом можно выделить симметричный и антисимметричный типы погранслоя, когда в случае симметричного типа с асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon)$   $v_1$ ,  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  по нормальной координате чётны, а  $v_3$ ,  $\sigma_{13}$  –

нечётны. Для антисимметричного типа погранслоя, наоборот, с асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon)$   $v_1, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  по нормальной координате нечётны, а  $v_3, \sigma_{13}$  – чётны. Такой анализ помог сразу упростить исходные трёхмерные уравнения теории упругости перед процедурой их асимптотического интегрирования по выводу асимптотически оптимальных уравнений гиперболического погранслоя. Поскольку любой тип НДС для нашего линейного случая теории упругости можно представить в виде комбинации симметричной и антисимметричной составляющих, то такой приём упрощения исходных трёхмерных уравнений является универсальным.

В работе [106] показано, что рассмотренные выше свойства симметричности или антисимметричности НДС имеет место для быстроизменяющегося нестационарного НДС в общем случае оболочек вращения при значениях показателей изменяемости и динамичности, равных единице и выше.

Вернёмся к уравнениям (2.2.3). Проведём преобразование этих уравнений согласно описанной выше методике. Обозначим совокупность компонент напряжений и перемещений погранслоя через  $U$ . Разобьём эту совокупность [106], подобно статике [49], на две группы  $U^{(0)}$  и  $U^{(1)}$

$$U = U^{(0)} + U^{(1)}, \quad (2.2.4)$$

где чётность и нечётность группы  $U^{(0)} = (v_1, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33})$  и  $U^{(1)} = (v_3, \sigma_{13})$  по координате  $z_F$  полностью совпадает с системой, описанной выше. Поэтому уравнения (2.2.3) могут быть преобразованы с погрешностью  $O(\varepsilon^2)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} + \\
& + \frac{z_F F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \left[ \frac{2\varkappa^{-2}}{\sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} \right] + \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} = 0, \\
& \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \\
& + \frac{z_F F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \left[ \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} + \frac{2}{\sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} \right] + \\
& \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{B'}{B} \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} = 0.
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Для определения напряжений, уравнения закона Гука достаточно выписать с асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon)$ :

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{1 + \nu} \left( k_2 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} \right), \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{1 + \nu} \left( k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} \right), \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{1 + \nu} \left( k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_2 \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} \right), \\
\sigma_{13} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \left( \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} \right).
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

По аналогии с выводом уравнений гиперболического погранслоя в оболочках вращения нулевой гауссовой кривизны [74] введём переменные, характеризующие изменяемость НДС в малой, порядка  $O(\varepsilon^2)$ , окрестности фронта волны расширения (2.1.15). В безразмерной форме они имеют вид:

$$x = \frac{1}{\varepsilon^2} (\tau_0 - \xi_0), \quad \tau_0 = c_1 t / R, \quad \xi_0 = \alpha / R, \quad \zeta_F = z_F / h, \tag{2.2.7}$$

где  $R$  – характерное значение радиусов кривизны (в базовом случае сферической оболочки – это просто радиус образующей срединной сферической поверхности). Примем, что дифференцирование по введённым безразмерным параметрам не изменяет порядки искомых функций.

Введение координат (2.2.7) позволило явно выделить области применимости разрабатываемых асимптотически оптимальных уравнений гиперболического погранслоя, схематически представленных на рисунке 2.3. Здесь для сравнения изображены искомые области применимости для цилиндрической оболочки и оболочки вращения в момент времени  $t_0$ :  $\alpha_0 = c_1 t_0$  определяет координату фронта волны расширения на срединной линии, а отрезки  $A_1 B_2$  задают прямолинейные фронты, причём в случае оболочки вращения они образуются путём поворота нормали к срединной линии вокруг точки  $\alpha_0$ .

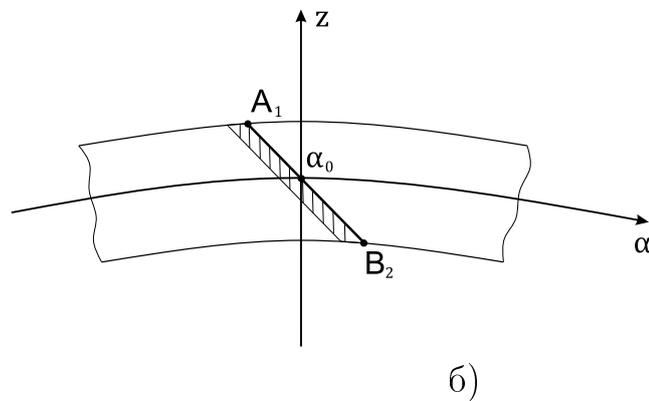
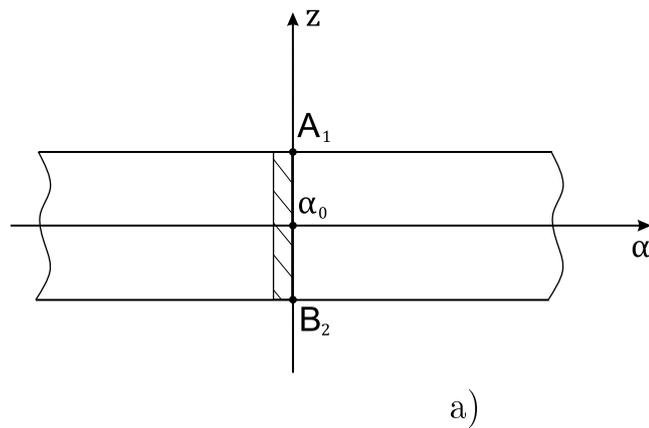


Рисунок 2.3 — Схемы областей применимости гиперболического погранслоя в цилиндрической оболочке (а) и оболочке вращения (б)

Асимптотические величины компонент напряжений и деформаций рассматриваемой составляющей НДС могут быть заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} v_1 &= R\varepsilon v_1^*, & v_3 &= R\varepsilon^2 v_3^*, \\ \sigma_{11} &= E\varepsilon^{-1} \sigma_{11}^*, & \sigma_{33} &= E\varepsilon^{-1} \sigma_{33}^*, & \sigma_{13} &= E\sigma_{13}^*, \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

где величины со звёздочками обладают одним и тем же асимптотическим порядком (звёздочки в дальнейшем будем опускать). Учитывая также зависимость производных по  $\alpha$  от производных по  $x$  и  $\xi_0$ , получаем в рамках погрешности  $O(\varepsilon^4)$  следующие выражения:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{1}{\varepsilon^2 R} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \xi_0} \right], \quad \frac{\partial}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{\varepsilon^4 R^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon^2 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi_0} + O(\varepsilon^4) \right]. \quad (2.2.9)$$

Перейдём в уравнениях (2.2.5), (2.2.6) к переменным (2.2.7) и будем учитывать (2.2.8), (2.2.9). Получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \varkappa^2 (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta_F^2} - \frac{2F}{R_1(1 + F^2)} \zeta_F \frac{\partial v_1}{\partial x \partial \zeta} - 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \xi_0} - \\ - \frac{\sqrt{1 + F^2}}{2(1 - \nu)} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \zeta_F} - \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

$$\sqrt{1 + F^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \zeta_F} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} = 0,$$

$$\sigma_{11} = -\frac{1}{2(1 + \nu)\varkappa^2} \frac{\partial v_1}{\partial x},$$

$$\sigma_{33} = -\frac{\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad (2.2.11)$$

$$\sigma_{13} = \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 + \nu} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta_F}.$$

Проанализируем полученные разрешающие уравнения гиперболического

погранслоя (2.2.10) – (2.2.11). Они являются уравнениями с медленно изменяющимися коэффициентами, зависящими от функции  $F(\xi_0)$ , которая стремится к нулю при стремлении к бесконечности главного радиуса кривизны  $R_1$ , отвечающего за кривизну образующей срединной поверхности. То есть, при стремлении к нулю функции  $F(\xi_0)$ , фронт волны, определяемый выражением (2.1.15), переходит в положение нормали к срединной поверхности, а оболочка становится оболочкой вращения нулевой гауссовой кривизны. При этом рассматриваемые уравнения становятся совпадающими с соответствующими уравнениями для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны, полученными в работе [74].

Поскольку система (2.2.10) выведена с асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon)$ , то второе уравнение (2.2.10) с медленно изменяющимся коэффициентом можно проинтегрировать по  $x$ , получая выражение для  $v_3$  через  $v_1$ :

$$\frac{\partial v_3}{\partial x} = -\sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta}. \quad (2.2.12)$$

Подставляя (2.2.12) в первое уравнение системы (2.2.10), получаем замкнутую систему относительно  $v_1$ ,  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{13}$ , представляющую асимптотически главные компоненты рассматриваемого вида нестационарного НДС:

$$\begin{aligned} (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta_F^2} + 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \xi_0} - \frac{2F}{R_1(1 + F^2)} \zeta_F \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \zeta_F} - \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial x} &= 0, \\ \sigma_{11} &= -\frac{1}{2(1 + \nu)\varkappa^2} \frac{\partial v_1}{\partial x}, \\ \sigma_{33} &= -\frac{\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \frac{\partial v_1}{\partial x}, \\ \sigma_{13} &= \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 + \nu} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta_F}. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Выпишем рассматриваемую систему в безразмерных координатах:

$$\xi = \xi_0/\varepsilon, \quad \tau = \tau_0/\varepsilon, \quad \tau_0 = c_1 t/R. \quad (2.2.14)$$

Получаем следующие уравнения, описывающие в окончательном виде искомый гиперболический погранслои:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta_F^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{2\zeta_F F}{R_1(1 + F^2)} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi \partial \zeta_F} + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} &= 0, \\ \sigma_{11} &= \frac{1}{2(1 + \nu)\varkappa^2} \frac{\partial v_1}{\partial \xi}, \\ \sigma_{33} &= \frac{\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \frac{\partial v_1}{\partial \xi}, \\ \sigma_{13} &= \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 + \nu} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta_F}. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

В исходной размерной форме выведенные уравнения для асимптотически главных составляющих примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{2z_F F}{R_1(1 + F^2)} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} &= 0, \\ \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1 + \nu)\varkappa^2} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}, \\ \sigma_{33} &= \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}, \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{1 + \nu} \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_1}{\partial z_F}. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Как было отмечено ранее, полученные разрешающие уравнения гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения для произвольной оболочки вращения обобщают аналогичные уравнения погранслоя для оболочки вращения нулевой гауссовой кривизны: при стремлении главного радиуса кривизны  $R_1$  к бесконечности, передний фронт волны переходит в положение

нормали к срединной поверхности и искомые уравнения полностью совпадают с соответствующими уравнениями в случае нулевой гауссовой кривизны.

Поскольку полученные разрешающие уравнения движения свелись для асимптотически главных компонент НДС к одному уравнению второго порядка, то они требуют удовлетворения только по одному граничному условию как на торце, так и на лицевых поверхностях. Поэтому, записывая граничные условия для асимптотически главных компонент рассматриваемого вида НДС, получаем их на лицевых поверхностях в форме:

$$\sigma_{33} = 0, \quad z_F = \pm h\sqrt{1 + F^2(\alpha)}, \quad (2.2.17)$$

а для нагружений типа ЛТ и ЛМ на торце граничные условия записываются, соответственно, в следующей форме:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= IH(t), \quad \alpha = 0, \\ \sigma_{11} &= Iz_F H(t), \quad \alpha = 0. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Отметим также, что при возвращении в уравнениях (2.2.16) к исходным координатам  $\alpha$ ,  $z$ ,  $t$  приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} &= 0, \\ \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1 + \nu)\alpha^2} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}, \\ \sigma_{33} &= \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}, \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{1 + \nu} \frac{\partial v_1}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

которые совпадают с разрешающими уравнениями для оболочки вращения нулевой гауссовой кривизны, полученными в [74].

Как и в предыдущем случае, разрешающие уравнения движения требуют удовлетворения только по одному граничному условию и на торце, и на лицевых поверхностях:

$$\sigma_{33} = 0, \quad z = \pm h \quad (2.2.20)$$

$$\sigma_{11} = IH(t), \quad \alpha = 0, \quad (2.2.21)$$

$$\sigma_{11} = IzH(t), \quad \alpha = 0.$$

Поскольку при переходе в (2.2.16) к исходным координатам  $(\alpha, z)$  мы полностью перешли к уравнениям (2.2.19), можно сделать важный вывод, что эта система (2.2.19) описывает гиперболический погранслой в рамках окрестности порядка  $O(\varepsilon)$ , внутри которой он и содержится с толщиной порядка  $O(\varepsilon^2)$ , а для его определения и требуются выведенные в специальных координатах  $(\alpha_F, z_F)$  уравнения системы (2.2.16).

## 2.3 Асимптотический вывод уравнений

### гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны сдвига в оболочках вращения произвольного профиля

Как было отмечено в Главе 1, при воздействии типа NW главный разрыв напряжений переносится фронтом волны сдвига. Скачок напряжения  $\sigma_{13}$  на торце в начальный момент времени и определяет скачок данного напряжения на этом фронте. Искомый фронт волны сдвига также определяется уравнением (2.1.15), где координата фронта на образующей срединной поверхности определяется уже скоростью волны сдвига:  $\alpha_0 = c_2 t_0$ . Тогда уравнения (2.2.5) с прифронтными координатами  $\alpha, z_F, t$  принимаем за базовые для вывода асимптотически оптимальных уравнений искомого гиперболического погран-

лоя.

Как и в предыдущем случае, перейдём в разрешающих уравнениях (2.2.5) к безразмерным прифронтным координатам:

$$x = \frac{1}{\varepsilon^2}(\tau_0 - \xi_0), \quad \tau_0 = \frac{c_2}{R}t, \quad \zeta_F = \frac{1}{R}z_F, \quad \xi_0 = \frac{1}{R}\alpha \quad (2.3.1)$$

и примем, что дифференцирование по введённым координатам не изменяет порядок искомых неизвестных функций.

Асимптотику компонент НДС рассматриваемого погранслоя можно задать следующим образом:

$$v_1 = R\varepsilon^2 v_1^*, \quad v_3 = R\varepsilon v_3^*, \quad (2.3.2)$$

$$\sigma_{11} = E\sigma_{11}^*, \quad \sigma_{33} = E\sigma_{33}^*, \quad \sigma_{13} = E\varepsilon^{-1}\sigma_{13}^*,$$

где, как и ранее, величины со звездочками обладают одним и тем же асимптотическим порядком (звездочки в дальнейшем будем опускать). Перейдем в уравнениях (2.2.5), (2.2.6) к переменным (2.3.1) и будем учитывать (2.3.2). Дальнейшие рассуждения и выкладки по общей форме совпадают с соответствующими рассуждениями и выкладками для случая оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны [74].

Асимптотически главной компонентой вектора перемещений является в рассматриваемом случае компонента  $v_3$ . В системе разрешающих уравнений движения в перемещениях (2.2.5) главным уравнением, определяющим гиперболический погранслоя в окрестности фронта волны сдвига, является второе уравнение этой системы, принимающее в асимптотически главном следующую форму:

$$-\frac{\sqrt{1+F^2}}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \zeta_F} + \varepsilon^{-2} (1+F^2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta_F^2} + 2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \zeta} - \frac{2F}{R_1(1+F^2)} \zeta_F \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \zeta_F} - \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial x} = 0. \quad (2.3.3)$$

С помощью первого уравнения системы (2.2.5) в асимптотически главном:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \zeta_F} = 0 \quad (2.3.4)$$

получаем окончательную форму зависимости перемещения  $v_1$  от перемещения  $v_3$ :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta_F}. \quad (2.3.5)$$

Подставляя полученное выражение для производной от  $v_1$  через производную от перемещения  $v_3$ , получаем замкнутую систему относительно асимптотически главных компонент перемещений и напряжений  $v_3, \sigma_{13}, \sigma_{11}, \sigma_{33}$ :

$$\begin{aligned} (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta_F^2} + 2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \xi_0} - \frac{2 \zeta_F F}{R_1 (1 + F^2)} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \zeta_F} - \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial x} &= 0, \\ \sigma_{11} &= -\frac{1}{(1 + \nu)} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta_F}, \\ \sigma_{33} &= \frac{1}{(1 + \nu)} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta_F}, \\ \sigma_{13} &= \frac{\sqrt{1 + F^2}}{2(1 + \nu)} \frac{\partial v_3}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Выпишем полученную систему (2.3.6) в безразмерных координатах:

$$\xi = \xi_0 / \varepsilon, \quad \tau = \tau_0 / \varepsilon. \quad (2.3.7)$$

При этом получаем следующие уравнения, описывающие искомый гиперболи-

ческий погранслоем в окрестности фронта волны сдвига в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta_F^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{2\zeta_F F}{R_1(1 + F^2)} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi \partial \zeta_F} + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} &= 0, \\ \sigma_{13} &= \frac{\sqrt{1 + F^2}}{2(1 + \nu)} \frac{\partial v_3}{\partial \xi}, \\ \sigma_{11} &= -\frac{1}{(1 + \nu)} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta_F}, \\ \sigma_{33} &= \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta_F}. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

В исходной размерной форме выведенные уравнения для асимптотически главных составляющих примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \frac{2z_F F}{R_1(1 + F^2)} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} &= 0, \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha}, \\ \sigma_{11} &= -\frac{E}{(1 + \nu)} \frac{\partial v_3}{\partial z_F}, \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1 + \nu} \frac{\partial v_3}{\partial z_F}. \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Как и в предыдущем случае, разрешающие уравнения движения свелись к одному дифференциальному уравнению второго порядка, и, следовательно, оно требует удовлетворения только одному граничному условию на торце и лицевых поверхностях:

$$\sigma_{13} = 0, \quad z_F = \pm h\sqrt{1 + F^2}, \quad (2.3.10)$$

$$\sigma_{13} = IH(t), \quad \alpha = 0.$$

Отметим также, что как и в случае волн расширения, переход к исходным координатам  $\alpha$ ,  $z$ ,  $t$  даёт разрешающие уравнения, обобщающие случай оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны [74]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} &= 0, \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha}, \\ \sigma_{11} &= -\frac{E}{(1 + \nu)} \frac{\partial v_3}{\partial z}, \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1 + \nu} \frac{\partial v_3}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

При этом граничные условия на лицевых поверхностях и на торце записываются аналогично (2.3.10):

$$\sigma_{13} = 0, \quad z = \pm h, \quad (2.3.12)$$

$$\sigma_{13} = IH(t), \quad \alpha = 0.$$

Аналогично случаю гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения, рассматриваемая прифронтальная зона размером  $O(\varepsilon)$  в окрестности нормали к оболочке  $\alpha = c_2 t$  содержит узкую прифронтальную зону размером порядка  $O(\varepsilon^2)$  в окрестности повернутой нормали  $z_F = c_2 t$ , в которой и работают асимптотически оптимальные уравнения (2.3.9). В этом смысле и можно рассматривать в исходных координатах  $(\alpha, z)$  окрестность нормали  $\alpha = c_2 t$  размером порядка  $O(\varepsilon)$  как область действия искомого погранслоя, что и представлялось в предыдущих работах автора.

## 2.4 Механический смысл асимптотической теории гиперболического погранслоя

В обоих случаях гиперболического погранслоя (соответственно в окрестностях передних фронтов расширения и сдвига) построена в специальных координатах асимптотическая модель нестационарного НДС оболочек вращения произвольного профиля. Эта модель включает асимптотику геометрии искомого фронта волны, разрешающие уравнения второго порядка относительно продольного или нормального перемещений и по одному граничному условию на лицевых поверхностях и торце. Установлены связи между полученной моделью и моделью искомого погранслоя в стандартной криволинейной системе координат. Установлено также, что модель в стандартной системе координат работает в большей, порядка  $O(\varepsilon)$ , прифронтной области и эта модель позволяет перейти к разработанной здесь модели в специальной системе координат, работающей в узкой, порядка  $O(\varepsilon^2)$  зоне, непосредственно примыкающей к переднему фронту.

Представленная в настоящей главе работа является завершающей в цикле работ по построению асимптотической теории гиперболического погранслоя. У этого цикла есть специфические математические основы и глубокий механический смысл.

Математическое построение рассматриваемой теории основано на использовании принципа масштабирования переменных [89] и концепции показателей изменчивости НДС по переменным, введённой в [49]. Особенностью представленного асимптотического построения явилось его применение в специальной прифронтной системе координат.

Механический смысл гиперболического погранслоя полностью соответствует выводам работ [145], [156] о действии принципа Сен-Венана в динамике тонкостенных конструкций: в отличие от статики, способ приложения нагрузки

на торец влияет на НДС не только в его малой окрестности, но и переносится фронтами волн расширения и сдвига в их малых окрестностях.

## Глава 3

# Асимптотическая теория нестационарного НДС упругих оболочек вращения при торцевых ударных воздействиях продольного типа

Представленная на рисунке 1.2 схема решения для продольного усилия  $T_1$  при ударном продольном воздействии типа ЛТ, заданным граничным условием (1.2.1) при  $f(\theta) = 1$ , даёт возможность применения приближенных теорий, полученных методом асимптотического интегрирования точных трёхмерных уравнений теории упругости для полного описания волновых процессов в оболочках вращения.

Таким образом, предполагаем, что нестационарное НДС в оболочках вращения произвольного профиля можно представить с помощью таких составляющих, как безмоментная составляющая теории Кирхгофа-Лява (двумерная тангенциальная составляющая), параболический погранслои, коротковолновая высокочастотная составляющая и гиперболический погранслои. Уравнения для безмоментной составляющей, параболического погранслоя и коротковолновой высокочастотной составляющей приведены в Главе 1. Уравнения для гиперболического погранслоя в окончательном виде для оболочки вращения выведены в Главе 2. Полнота построения схемы расчленения рассматриваемого НДС с помощью указанных теорий в произвольных оболочках вращения будет доказана определением существования и нахождением границ следующих областей согласований:

$\mathcal{B}_3$  – область согласования безмоментной составляющей и параболического погранслоя,

$\mathcal{B}_2$  – область согласования параболического погранслоя и коротковолнового высокочастотного приближения,

$\mathcal{B}_1$  – область согласования коротковолнового высокочастотного приближения и гиперболического погранслоя.

Таким образом, как и в модельном случае оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны, наличие указанных областей согласования доказывает корректность применяемой асимптотической схемы расчленения нестационарного НДС в оболочках вращения произвольного профиля на составляющие с различными показателями изменчивости и динамичности, применяемые в различных участках фазовой плоскости. Отметим, что на примере оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны область  $\mathcal{B}_1$  рассматривалась в [74]. Область  $\mathcal{B}_2$  рассматривается для всех типов оболочек впервые в настоящей работе. Область  $\mathcal{B}_3$  описана для цилиндрической оболочки в [191].

Асимптотические методы не только позволяют получить приближённые уравнения, адекватно определяющие нестационарное НДС в различных участках фазовой плоскости для произвольных оболочек вращения, но и дают возможность найти аналитическое решение для всех типов составляющих. Такие решения не только позволяют анализировать свойства искомого НДС, но и дают необходимую информацию для разработки качественных численных методов.

Разработка асимптотического метода определения решения для безмоментной составляющей основывается на использовании интегрального преобразования Лапласа по временной переменной. В общем случае неосесимметричного НДС для оболочек вращения при нулевой изменчивости по координатам и времени в [106] был представлен простейший метод прифронтной асимптотики на основе разложения решения по степеням расстояния от текущей точки до фронта волны.

Решение для параболического погранслоя в случае цилиндрической оболочки представлено в [191]. Получено оно на основе точного решения уравнения движения для асимптотически главных составляющих с помощью интегрального преобразования Лапласа по времени и выражается через интеграл

от функций Эйри. В настоящей работе искомое решение строится в общем случае оболочек вращения в пространстве преобразования Лапласа по временной переменной при использовании метода экспоненциальных представлений.

Решение для гиперболического погранслоя использует подходы, описанные для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны в [74] и для оболочек вращения в [106] при исследовании динамического погранслоя в общей области, включающей области  $\mathcal{R}_3$ ,  $\mathcal{R}_2$ ,  $\mathcal{R}_1$  (рисунок 1.2). Окончательная разработка решения с учётом поведения волнового фронта проведена автором в работах [76], [198]. Используются в этих работах символический метод Лурье [145], [156] и метод экспоненциальных представлений в пространстве изображений интегрального преобразования Лапласа по временной переменной.

### **3.1 Схема расчленения нестационарного НДС оболочек вращения произвольного профиля при ударных воздействиях продольного типа**

Предложенная в Главе 1 схема расчленения нестационарного НДС на составляющие с различными показателями изменяемости и динамичности впервые была полностью описана в [112] для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны – цилиндрических и конических. В настоящем параграфе эта схема, разработанная автором ранее, распространяется на общий случай оболочек вращения. Как этого требуется, необходимо доказать полноту предлагаемого набора асимптотически приближённых теорий: двумерной безмоментной составляющей по теории Кирхгофа-Лява (область  $\mathcal{R}_4$ ), наложения безмоментной теории и квазистатического погранслоя типа Сен-Венана (область  $\mathcal{R}_5$ ), параболического погранслоя в окрестности квазифронта – фронта двумерной волны растяжения-сжатия по теории Кирхгофа-Лява (область  $\mathcal{R}_3$ ), коротковолновой высокочастотной составляющей – прямого аналога соответствующего

решения плоской симметричной по нормальной координате задачи о нестационарном НДС слоя (область  $\mathcal{R}_2$ ) и гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения (область  $\mathcal{R}_1$ ).

Полная искомая схема расчленения нестационарного НДС представлена на рисунке 3.1 как областями применимости приближенных теорий, так и областями согласования  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ . На рисунке 3.2 изображена схема областей применимости приближённых теорий в фазовой плоскости  $(\alpha, t)$ .

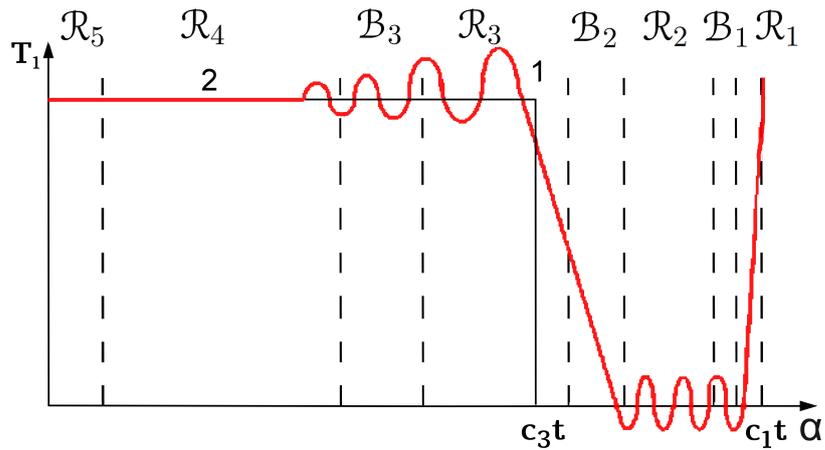


Рисунок 3.1 — Схема решения для продольного усилия  $T_1$  в оболочке вращения

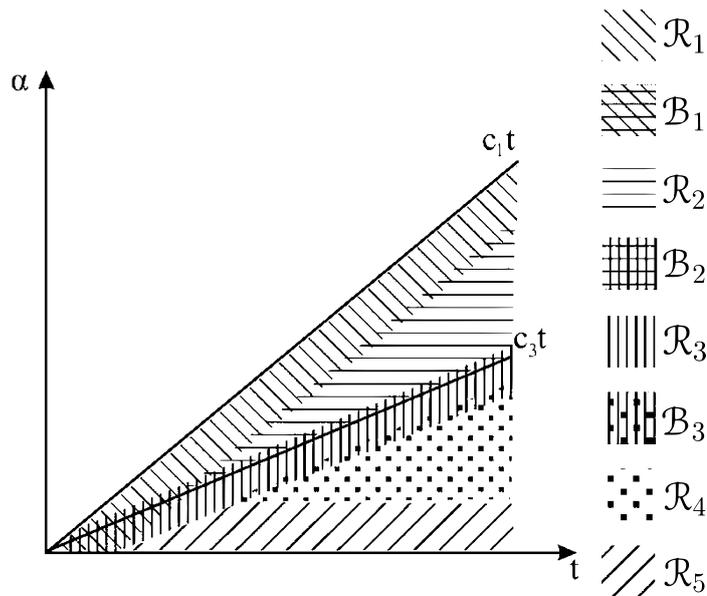


Рисунок 3.2 — Схема областей применимости асимптотически приближённых теорий в фазовой плоскости

## 3.2 Решение для тангенциальной составляющей Кирхгофа-Лява

В соответствии с граничными условиями в трёхмерной постановке (1.2.1), граничное условие для рассматриваемой тангенциальной составляющей в случае осесимметричного НДС запишется в виде:

$$T_1 = 2hIH(t), \quad (3.2.1)$$

а начальное условие (1.2.4) преобразуется следующим образом:

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (3.2.2)$$

Перейдем в разрешающих уравнениях (1.4.11) и (1.4.12), описывающих безмоментное напряженное состояние в оболочках вращения, к безразмерным усилиям, перемещениям и деформациям по следующим формулам:

$$u = hu^*, \quad w = hw^*, \quad T_i = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \varepsilon T_i^*, \quad \varepsilon_i = \varepsilon \varepsilon_i^*, \quad (3.2.3)$$

где величины со звёздочкой имеют один и тот же асимптотический порядок. Звёздочки в дальнейшем будем опускать. Введём также безразмерную пространственную переменную  $\xi_0$  аналогично как и в Главе 2, но безразмерную временную переменную введем по формуле:

$$\tau_0 = \left[ \frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{t}{R}, \quad (3.2.4)$$

привязавшись к скорости распространения продольной волны (волны растяжения-сжатия) по двумерной теории. Перейдем также к безразмерной форме геометрических параметров:  $R_i = RR_i^*$ ,  $B = RB^*$ . Тогда разрешающие уравнения примут вид (звёздочки опускаем):

$$\frac{\partial T_1}{\partial \xi_0} + \frac{B'}{B} (T_1 - T_2) - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau_0^2} = 0, \quad (3.2.5)$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau_0^2} = 0,$$

$$T_1 = \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2, \quad T_2 = \varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1, \quad (3.2.6)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial \xi_0} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{B'}{B} u + \frac{w}{R_2}.$$

Выпишем также разрешающие уравнения движения в перемещениях:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_0^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial u}{\partial \xi_0} + R_3 u - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau_0^2} + R_4 \frac{\partial w}{\partial \xi_0} + R_5 w = 0, \quad (3.2.7)$$

$$R_4 \frac{\partial u}{\partial \xi_0} + R_6 \frac{B'}{B} u + R_7 w + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau_0^2} = 0,$$

где введены следующие обозначения:

$$R_3 = \nu \left( \frac{B'}{B} \right)' - (1 - \nu) \left( \frac{B'}{B} \right)^2, \quad R_4 = \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2},$$

$$R_5 = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right)' + (1 - \nu) \frac{B'}{B} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (3.2.8)$$

$$R_6 = \frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad R_7 = \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2}.$$

В работе [106] описаны методы получения различных приближённых решений для безмоментной составляющей. В случае неосесимметричного, быстро изменяющегося по окружной координате НДС, решение получено с помощью интегрального преобразования по временной переменной с последующим обращением изображения специальным методом прифронтной асимптотики, когда оно раскладывается в ряд по отрицательным степеням параметра преобразования. Тогда искомые решения принимают форму рядов по функциям, выражаю-

щимся через функции Бесселя. В случае же нулевой изменчивости по окружной координате, в этой же работе представлен подход к решению, основанный на использовании простейшей формы метода прифронтальной асимптотики, когда решение ищется в виде разложения по степеням расстояния от текущей точки до фронта волны. Применяя этот подход к решению рассматриваемой задачи определения осесимметричного нестационарного НДС для общего случая оболочек вращения произвольного профиля, будем искать искомое решение в виде следующих рядов:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\xi_0)(\tau_0 - \xi_0)^n, \\ w &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n(\xi_0)(\tau_0 - \xi_0)^{n+1}, \\ T_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} T_{1,n}(\xi_0)(\tau_0 - \xi_0)^{n-1}, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

где  $U_n(\xi_0)$ ,  $W_n(\xi_0)$ ,  $T_{1,n}(\xi_0)$  – неизвестные функции. Подставляя (3.2.9) в (3.2.7), группируем члены при одинаковых степенях расстояния до фронта волны  $\xi_0 = \tau_0$ . Тогда получаем систему зацепляющихся обыкновенных дифференциальных уравнений относительно этих неизвестных функций:

$$\begin{aligned} (\sqrt{B}U_n)' &= \frac{\sqrt{B}}{2n} \left[ \frac{1}{B}(BU'_{n-1})' + R_3U_{n-1} - nR_4W_{n-1} + R_4W'_{n-2} + R_5W_{n-2} \right], \\ W_n &= \frac{R_4}{n+1}U_n - \frac{1}{n(n+1)} \left[ R_4U'_{n-1} + \frac{B'R_6}{B}U_{n-1} + R_7W_{n-2} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Решая систему (3.2.10), находим рекуррентные выражения для искомых функций – коэффициентов разложения решений в ряды (3.2.9):

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{\sqrt{B}} \left( C_n + \frac{1}{2n} \int_0^{\xi_0} \sqrt{B}L_{1,n}d\xi_0 \right), \\ W_n &= \frac{R_4}{n+1}U_n - \frac{1}{n(n+1)}L_{2,n}, \\ T_{1,n} &= -nU_n + L_{3,n}, \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

где  $C_n$  – постоянные интегрирования, а функции  $L_{1,n}$ ,  $L_{2,n}$  и  $L_{3,n}$  определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} L_{1,n} &= \frac{1}{B} \left( BU'_{n-1} \right)' + R_3 U_{n-1} - n R_4 W_{n-1} + R_4 W'_{n-2} + R_5 W_{n-2}, \\ L_{2,n} &= R_4 U'_{n-1} + \frac{B' R_6}{B} U_{n-1} + R_7 W_{n-2}, \\ L_{3,n} &= U'_{n-1} + \nu \frac{B'}{B} U_{n-1} + R_4 W_{n-2}. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Полученное решение (3.2.11) соответствует решению для неосесимметричного случая НДС оболочек вращения из [106]. Подставляя его в граничное условие (3.2.1) (в безразмерной форме), приходим к следующему явному виду первых приближений для искомых компонент НДС:

$$\begin{aligned} u &= \left[ U_1(\tau_0 - \xi_0) + U_2(\tau_0 - \xi_0)^2 + \dots \right] H(\tau_0 - \xi_0), \\ w &= \left[ W_1(\tau_0 - \xi_0) + W_2(\tau_0 - \xi_0)^2 + \dots \right] H(\tau_0 - \xi_0), \\ T_1 &= \left[ T_{1,1} + T_{1,2}(\tau_0 - \xi_0) + \dots \right] H(\tau_0 - \xi_0), \\ U_1 &= -I \sqrt{\frac{B_0}{B}}, \quad U_2 = \frac{I}{4\sqrt{B}} \left( A_1 + \int_0^{\xi_0} R_8 d\xi_0 \right), \\ W_1 &= -I \frac{R_4}{2} \sqrt{\frac{B_0}{B}}, \quad W_2 = I \frac{1}{12\sqrt{B}} \left( A_1 R_4 - R_9 + R_4 \int_0^{\xi_0} R_8 d\xi_0 \right), \\ T_{1,1} &= I \sqrt{\frac{B_0}{B}}, \quad T_{1,2} = -\frac{I}{2\sqrt{B}} \left[ A_1 - (1 - 2\nu) \sqrt{B_0} \frac{B'}{B} + \int_0^{\xi_0} R_8 d\xi_0 \right], \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

где постоянные  $A_1$ ,  $B_0$ ,  $B'_0$  и функции  $R_8$ ,  $R_9$  задаются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
A_1 &= (1 - 2\nu) \frac{B'_0}{\sqrt{B_0}}, \quad B_0 = B(0), \quad B'_0 = B'(0), \\
R_8 &= \frac{1}{2B} \left( \sqrt{\frac{B_0}{B}} B' \right)' + (R_4^2 - R_3) \sqrt{\frac{B_0}{B}}, \\
R_9 &= \sqrt{B_0} \frac{B'}{B^{3/2}} \left( \frac{1 - 2\nu}{R_1} + \frac{2 - \nu}{R_2} \right).
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Выражения (3.2.14) определяют следующее решение для цилиндрической оболочки ( $B = 1$ ,  $1/R_1 = 0$ ,  $R_2 = R$ ,  $R$  – радиус цилиндрической срединной поверхности):

$$\begin{aligned}
u &= -I \left[ (\tau_0 - \xi_0) - \frac{\nu^2}{4} \xi_0 (\tau_0 - \xi_0)^2 + \dots \right] H(\tau_0 - \xi_0), \\
w &= -I \left[ \frac{\nu^2}{2} (\tau_0 - \xi_0) - \frac{\nu^3}{12} \xi_0 (\tau_0 - \xi_0)^3 + \dots \right] H(\tau_0 - \xi_0), \\
T_1 &= I \left[ 1 - \frac{\nu^2}{2} \xi_0 (\tau_0 - \xi_0) + \dots \right] H(\tau_0 - \xi_0).
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Решение (3.2.15) полностью соответствует решению аналогичной задачи для неосимметричного случая из [106]. В работе [106] показано, что такие ряды по степеням  $(\tau_0 - \xi_0)$  являются быстроходящимися при  $\tau_0$ ,  $\xi_0 = O(1)$ . Это означает, что данный метод даёт эффективное решение для таких моментов времени, когда фронт двумерной волны растяжения-сжатия проходит расстояние, соизмеримое с радиусом цилиндрической срединной поверхности.

### 3.3 Разработка асимптотического решения для симметричного гиперболического погранслоя в оболочках вращения произвольного профиля в окрестности фронта волны расширения

Получим решение для гиперболического погранслоя в общем случае оболочек вращения при осесимметричной нагрузке, определяемой граничными условиями (2.2.17) – (2.2.18):

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= IH(\tau), \quad \xi = 0, \\ \sigma_{33} &= 0, \quad \zeta_F = \pm\sqrt{1+F^2}.\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

Здесь мы используем безразмерные переменные  $\xi$ ,  $\zeta_F$ ,  $\tau$ , введённые в параграфе 2.2, где безразмерная переменная  $\zeta_F$  определяет повернутое, по отношению к нормали срединной поверхности, положение прямолинейного волнового фронта, а безразмерная переменная  $\tau$  отнесена к скорости волн расширения  $c_1$ . Записанные в перемещениях граничные условия (3.3.1) имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial \xi} &= 2(1+\nu)\alpha^2 IH(\tau), \quad \xi = 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial \xi} &= 0, \quad \zeta_F = \pm\sqrt{1+F^2}.\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

Разрешающие уравнения движения имеют при этом вид (2.2.15).

Искомое решение основывается на полученном в [74] решении для данного погранслоя в случае цилиндрической оболочки. Поскольку такое решение для цилиндрической оболочки является базовым, приведём его вывод полностью.

В рассматриваемом случае цилиндрической оболочки уравнения движения записываются в безразмерных переменных  $\xi$ ,  $\zeta$ ,  $\tau$ , имеют постоянные коэффи-

циенты, а для их решения можно применить интегральные преобразования: Лапласа по времени и Фурье по продольной координате. Разрешающие уравнения этой модельной задачи записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} &= 0, \\ \sigma_{11} &= \frac{1}{2(1+\nu)\alpha^2} \frac{\partial v_1}{\partial \xi}, \\ \sigma_{33} &= \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{\partial v_1}{\partial \xi}, \\ \sigma_{13} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} &= I^* H(\tau), \quad \xi = 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial \xi} &= 0, \quad \zeta = \pm 1, \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

где  $I^* = 2(1+\nu)\alpha^2 I$ .

Для интегральных преобразований Лапласа и Фурье

$$\begin{aligned} v_1^{LC} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty v_1^L \cos \chi \xi d\xi, \\ v_1^L &= \int_0^\infty v_1 e^{-s\tau} d\tau, \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

где  $s$  и  $\chi$  – параметры преобразования Лапласа и Фурье, соответственно, разрешающие уравнения имеют форму

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_1^{LC}}{d\zeta^2} - (\chi^2 + s^2) v_1^{LC} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} I^* \frac{1}{s}, \\ v_1^{LC} &= 0, \quad \zeta = \pm 1. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Решение уравнения (3.3.6) при однородных граничных условиях на лицевых поверхностях  $\zeta = \pm 1$  имеет вид:

$$v_1^{LC} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} I^* \left( \frac{\operatorname{ch} \alpha_1 \zeta}{s \alpha_1^2 \operatorname{ch} \alpha_1} - \frac{1}{s \alpha_1^2} \right), \quad (3.3.7)$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\chi^2 + s^2}.$$

Поскольку подынтегральная функция  $v_1^{LC}$  при обращении преобразования Фурье является мероморфной, с полюсами – корнями уравнения

$$\operatorname{ch} \alpha_1 = 0, \quad (3.3.8)$$

определяемыми выражениями:

$$\chi_n = i s \left[ 1 + \frac{(n - \frac{1}{2})^2 \pi^2}{s^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.9)$$

то она может быть разложена в ряд по этим полюсам [74]:

$$v_1^L = \frac{4\alpha^2(1+\nu)I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n-1/2)\pi\zeta}{(n-1/2)[1 + \frac{(n-1/2)^2\pi^2}{s^2}]^{1/2} s^2} \times \exp \left\{ -s \left[ 1 + \frac{(n-1/2)^2\pi^2}{s^2} \right]^{1/2} \xi \right\}, \quad (3.3.10)$$

что соответствует разложению по модам колебаний, являющихся асимптотическим представлением мод колебаний плоского слоя [106].

Согласно методу прифронтной асимптотики, применяемому в пространстве интегрального преобразования Лапласа, можно разложить изображение (3.3.10) в ряд по функциям:

$$\frac{1}{s^{k+1}} \exp \left[ - \left( sc + \frac{g}{s} \right) \xi \right], \quad k \geq 0, \quad (3.3.11)$$

где  $g$  и  $c$  – постоянные. Используя табличную форму преобразования Лапласа:

$$\int_0^\infty \exp \left[ -s\tau \left( \frac{\tau}{g} \right)^{\frac{k}{2}} \right] J_k(2\sqrt{g\tau}) d\tau = \frac{1}{s^{k+1}} \exp \left( -\frac{g}{s} \right), \quad (3.3.12)$$

и оставляя в разложении для изображения (3.3.10) только функции (3.3.11) при  $k = 1$ , получим следующую асимптотику решения для  $v_1$  в искомой прифронтальной области  $\mathcal{R}_1$  [74]:

$$v_1 = \frac{4\alpha^2(1 + \nu)I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n - 1/2)\pi\zeta}{n - 1/2} \times \quad (3.3.13)$$

$$\times J_1 \left[ 2^{1/2}(n - 1/2)\pi\sqrt{\xi(\tau - \xi)} \right] H(\tau - \xi).$$

Перейдём к рассмотрению гиперболического погранслоя в общем случае оболочек вращения при заданных граничных условиях (3.3.2). Построим его в малой окрестности фронта волны расширения с изменяемостью и динамичностью  $q = a = 2$ . Тогда переходим к переменным  $\xi_*$ ,  $\tau_*$  по формулам:

$$\xi_* = \frac{\xi}{\varepsilon}, \quad \tau_* = \frac{\tau}{\varepsilon}. \quad (3.3.14)$$

Анализ базового решения (3.3.13) показывает, что оно имеет место при  $\tau_0 - \xi_0 = O(\varepsilon^2)$ . Предполагаем, что аналогичная оценка будет иметь место и для гиперболического погранслоя в рассматриваемом случае оболочек вращения.

Запишем систему разрешающих уравнений (2.2.15) в переменных (3.3.14):

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi_*^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau_*^2} + \varepsilon^2 \left[ (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta_F^2} + \frac{2\zeta_F F}{(1 + F^2)R_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi_* \partial \zeta_F} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \xi_*} \right] = 0,$$

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2(1 + \nu)\varkappa^2 \varepsilon} \frac{\partial v_1}{\partial \xi_*},$$

$$\sigma_{33} = \frac{\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)\varepsilon} \frac{\partial v_1}{\partial \xi_*},$$

$$\sigma_{13} = \frac{\sqrt{1 + F^2}}{2(1 + \nu)} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta_F}.$$

(3.3.15)

Проведём анализ решения (3.3.13) для гиперболического погранслоя в цилиндрической оболочке, полученного при использовании интегрального преобразования Лапласа. Оно представлено здесь в форме бесконечного ряда, члены которого удовлетворяют, каждый, как уравнениям движения, так и однородным граничным условиям на лицевых поверхностях в форме (3.3.4). Эти частные решения соответствуют модам – частным решениям системы уравнений движения для симметричных колебаний пластины, когда соотношения между частотами колебаний и длинами волн описываются дисперсионными уравнениями Рэлея-Лэмба [3].

Применим к разрешающей системе (3.3.15) интегральное преобразование Лапласа по временной переменной  $\tau_*$ . Тогда разрешающие уравнения в изображениях будут записываться для асимптотически главных составляющих НДС в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 v_1^L}{\partial \xi_*^2} - s^2 v_1^L + \varepsilon^2 \left[ (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1^L}{\partial \zeta_F^2} + \frac{2\zeta_F F}{(1 + F^2)R_1} \frac{\partial^2 v_1^L}{\partial \xi_* \partial \zeta_F} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1^L}{\partial \xi_*} \right] = 0,$$

$$\sigma_{11}^L = \frac{1}{2(1 + \nu)\varkappa^2 \varepsilon} \frac{\partial v_1^L}{\partial \xi_*},$$

$$\sigma_{33}^L = \frac{\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)\varepsilon} \frac{\partial v_1^L}{\partial \xi_*},$$

$$\sigma_{13}^L = \frac{\sqrt{1 + F^2}}{2(1 + \nu)} \frac{\partial v_1^L}{\partial \zeta_F}.$$

(3.3.16)

Поскольку асимптотически главная часть системы уравнений (3.3.16), определяющая асимптотически главные составляющие решения в узкой прифронтальной зоне, полностью совпадает с соответствующими уравнениями для цилиндрической оболочки, представим изображение для  $v_1$  в рассматриваемом общем случае также разложением по модам колебаний, где моды ищутся асимптотическим методом. Представим решение для мод  $v_{1,n}^L$  в виде:

$$v_1^L = \exp \left[ -\frac{s\xi_0}{\varepsilon^2} + \psi(\xi_0) + i\lambda(\xi_0)\zeta_F \right], \quad (3.3.17)$$

где  $\psi$  и  $\lambda$  являются медленно изменяющимися функциями по  $\xi_0$ ,  $i$  – мнимая единица. Подставим это представление решения в уравнение движения (3.3.16). Для начального приближения функций  $\psi$  и  $\lambda$ , обеспечивающего погрешность для моды  $v_1^L$  порядка  $O(\varepsilon)$ , получим следующее уравнение:

$$2s\psi' + (1 + F^2)\lambda^2 + s\frac{B'}{B} + i\zeta_F \left( 2s\lambda' + \frac{sF\lambda}{(1 + F^2)R_1} \right) = 0. \quad (3.3.18)$$

Приравнявая нулю в полученном уравнении (3.3.18) составляющие при нулевой и первой степени  $\zeta_F$ , приходим к системе обыкновенных дифференциальных

уравнений для искомых функций:

$$2\lambda' + \frac{F}{(1+F^2)R_1}\lambda = 0, \quad (3.3.19)$$

$$2s\psi' + (1+F^2)\lambda^2 + s\frac{B'}{B} = 0.$$

Учитывая зависимость функции  $F$  от приведенного значения радиуса кривизны  $R_1$  (2.1.17), получаем из (3.3.19) явные выражения для функций  $\psi'$  и  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{C}{\sqrt{1+F^2}}, \quad \psi' = -\frac{C^2}{s} - \frac{B'}{2B}, \quad (3.3.20)$$

где  $C$  – некоторая постоянная. Следовательно, выражение (3.3.17) может быть записано в следующем виде:

$$v_1^L = \exp \left[ -\varepsilon^{-2}\xi_0 s - C^2\xi_0\frac{1}{s} + \ln\frac{1}{\sqrt{B}} + i\frac{C\zeta_F}{\sqrt{1+F^2}} \right]. \quad (3.3.21)$$

Перепишем выражение (3.3.21) в форме

$$v_1^L = \frac{1}{\sqrt{B}} \exp \left( i\frac{C\zeta_F}{\sqrt{1+F^2}} \right) \exp \left[ -\varepsilon^2\xi_0 s - C^2\xi_0\frac{1}{s} \right]. \quad (3.3.22)$$

Для того, чтобы функции (3.3.22) были модами колебаний для симметричного случая погранслоя, необходимо, чтобы они удовлетворяли условиям свободных лицевых поверхностей. Поэтому выбираем следующее выражение для постоянной  $C$ :  $C = (n - 1/2)\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Тогда выражение (3.3.22) в своей действительной части определяет окончательное выражение для искомых мод:

$$v_{1n}^L = \frac{1}{\sqrt{B}} \cos \left[ \frac{(n - 1/2)\pi\zeta_F}{\sqrt{1+F^2}} \right] \exp \left[ -\varepsilon^{-2}s\xi_0 - \frac{1}{2}(n - 1/2)^2\pi^2\xi_0\frac{1}{s} \right], \quad (3.3.23)$$

которое полностью соответствует решению для  $v_{1,n}^L$  в случае цилиндрической

оболочки, получаемому из точного решения в преобразованиях Лапласа методом прифронтной асимптотики.

Имея представление для мод (3.3.23), получим искомые решения для изображений  $v_1$ ,  $\sigma_{11}$ ,  $T_1$ , подставляя его в базовые разложения, представляющие решения соответствующей задачи для цилиндрической оболочки (3.3.10):

$$\begin{aligned}
 v_1^L &= \frac{4\alpha^2(1+\nu)I}{\pi} \sqrt{\frac{B(0)}{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \left[ \frac{-(n-1/2)\pi}{\sqrt{1+F^2}} \zeta_F \right]}{(n-1/2)s^2} \times \\
 &\quad \times \exp \left[ -\varepsilon^{-2} \xi_0 s - \frac{1}{2} (n-1/2)^2 \pi^2 \xi_0 \frac{1}{s} \right], \\
 \sigma_{11}^L &= \frac{2I}{\pi} \sqrt{\frac{B(0)}{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos \left[ \frac{-(n-1/2)\pi}{\sqrt{1+F^2}} \zeta_F \right]}{(n-1/2)s} \times \\
 &\quad \times \exp \left[ -\varepsilon^{-2} \xi_0 s - \frac{1}{2} (n-1/2)^2 \pi^2 \xi_0 \frac{1}{s} \right], \\
 T_1^L &= \frac{4I}{\pi^2} \sqrt{\frac{B(0)}{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1/2)^2 s} \exp \left[ -\varepsilon^{-2} \xi_0 s - \frac{1}{2} (n-1/2)^2 \pi^2 \xi_0 \frac{1}{s} \right].
 \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Далее процесс получения решения для искомым составляющих НДС, определяющих главные перемещение, напряжение и усилие, полностью совпадает со случаем цилиндрической оболочки. Применяя преобразование (3.3.12), получа-

ем следующие выражения для искоемых оригиналов:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{2^{5/2} \varkappa^2 (1 + \nu) I}{\pi} \sqrt{\frac{B(0)}{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\tau - \xi)^{1/2} \cos \left[ \frac{(n-1/2)\pi \zeta_F}{\sqrt{1+F^2}} \right]}{(n-1/2)^2 \xi_0^{1/2}} \times \\
&\quad \times J_1 \left[ 2^{1/2} (n-1/2) \pi \sqrt{\xi(\tau - \xi)} \right] H(\tau - \xi), \\
\sigma_{11} &= \frac{2I}{\pi} \sqrt{\frac{B(0)}{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos \left[ \frac{(n-1/2)\pi \zeta_F}{\sqrt{1+F^2}} \right]}{n-1/2} \times \\
&\quad \times J_0 \left[ 2^{1/2} (n-1/2) \pi \sqrt{\xi(\tau - \xi)} \right] H(\tau - \xi), \\
T_1 &= \frac{4I}{\pi^2} \sqrt{\frac{B(0)}{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1/2)^2} \times \\
&\quad \times J_0 \left[ 2^{1/2} (n-1/2) \pi \sqrt{\xi(\tau - \xi)} \right] H(\tau - \xi).
\end{aligned} \tag{3.3.25}$$

Поскольку имеет место следующее выражение для суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \tag{3.3.26}$$

то формула (3.3.25) определяет, что усилие  $T_1$  равно  $2IH(t)$  на торце  $\xi = 0$ , что соответствует скачку  $T_1$  на фронте при ударном воздействии на торец в начальный момент времени. Таким образом, асимптотическое решение (3.3.25) удовлетворяет граничным условиям на торце и лицевых поверхностях, удовлетворяет разрешающим уравнениям, а сходимость рядов определена сходимостью соответствующих рядов в решении для цилиндрической оболочки.

### 3.4 Разработка асимптотического решения для параболического погранслоя в оболочках вращения произвольного профиля

В безразмерных координатах  $\xi_0$ ,  $\tau_0$ , введенных в параграфе 3.2, разрешающие уравнения (1.6.5) для асимптотически главных компонент рассматриваемой составляющей нестационарного НДС в общем случае оболочек вращения примут вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_0} + \frac{\partial u}{\partial \tau_0} + \frac{B'}{2B}u - \frac{\nu^2 \varepsilon^2}{6(1-\nu)^2} \frac{\partial^3 u}{\partial \tau_0^3} = 0, \quad (3.4.1)$$

$$T_1 = \frac{2E\varepsilon}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial \xi_0}, \quad T_2 = \frac{2E\varepsilon\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial \xi_0},$$

а граничное условие на торце при  $\xi_0 = 0$  запишем так:

$$T_1 = IH(\tau_0). \quad (3.4.2)$$

Учитывая, что значение показателя изменяемости для параболического погранслоя определяется неравенством (1.6.1), введём независимые переменные  $\xi$ ,  $\tau$  с учётом верхней границы показателя изменяемости, и с учётом скорости распространения двумерной волны растяжения-сжатия (подобно введению временной переменной  $\tau_0$  для безмоментной составляющей):

$$\xi = \frac{1}{\varepsilon} \xi_0, \quad \tau = \frac{1}{\varepsilon} \tau_0. \quad (3.4.3)$$

Тогда разрешающие уравнения (3.4.1) запишутся в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{B'}{2B} u - \frac{\nu^2}{6(1-\nu)^2} \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} = 0,$$

$$T_1 = \frac{2E}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad (3.4.4)$$

$$T_2 = \frac{2E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Для решения искомой задачи применим преобразование Лапласа по временной переменной  $\tau$ . Тогда разрешающие уравнения относительно изображения перемещения примут форму:

$$\frac{du^L}{d\xi} + \left[ s - \frac{\nu^2}{6(1-\nu)^2} s^3 + \varepsilon \frac{B'}{2B} \right] u^L = 0, \quad (3.4.5)$$

$$\frac{du^L}{d\xi} = \frac{(1-\nu^2)I}{2E} \frac{1}{s}, \quad \xi = 0.$$

Структура разрешающего уравнения (3.4.5) такова, что оно содержит слагаемым в коэффициенте при функции  $u^L$  медленно изменяющуюся функцию с малым множителем относительного параметра тонкостенности  $\varepsilon$ . Поэтому будем искать решение этого уравнения, подобно случаю в параграфе 3.3, асимптотическим методом экспоненциального представления в виде:

$$u^L = U(\xi_0, s) \exp [\varepsilon^{-1} \psi(\xi_0, s)] + O(\varepsilon), \quad (3.4.6)$$

где  $U(\xi_0, s)$  и  $\psi(\xi_0, s)$  – медленно изменяющиеся функции интенсивности и изменчивости. Учитывая, что производная от функции интенсивности по  $\xi_0$  будет иметь малый порядок  $O(\varepsilon)$  (поскольку асимптотически главные члены разрешающего уравнения (3.4.5) имеют постоянные коэффициенты):

$$\frac{dU}{d\xi_0} = O(\varepsilon), \quad (3.4.7)$$

получаем для определения функции  $\psi$  следующее уравнение:

$$\frac{d\psi}{d\xi_0} U + \left[ s - \frac{\nu^2}{6(1-\nu)^2} s^3 + \varepsilon \frac{B'}{2B} \right] U = 0, \quad (3.4.8)$$

из которого следует выражение для искомой функции изменчивости:

$$\psi = -\varepsilon \ln \frac{1}{\sqrt{B}} - \left[ s - \frac{\nu^2}{6(1-\nu)^2} s^3 \right] \xi_0, \quad (3.4.9)$$

а функция интенсивности с точностью  $O(\varepsilon)$  будет зависеть только от параметра преобразования Лапласа:

$$U(\xi_0, s) = U_0(s), \quad (3.4.10)$$

где  $U_0(s)$  – некоторая функция от  $s$ , определяемая из граничного условия системы (3.4.5). Следовательно, решение рассматриваемого уравнения имеет вид:

$$u^L = U_0 \frac{1}{\sqrt{B}} \exp \left( -\varepsilon^{-1} \left[ s - \frac{\nu^2}{6(1-\nu)^2} s^3 \right] \xi_0 \right) + O(\varepsilon). \quad (3.4.11)$$

Решение (3.4.11) даёт выражение для изображения продольного усилия  $T_1$ :

$$T_1^L = -\frac{2E}{1-\nu^2} \frac{U_0}{\sqrt{B}} \left[ s - \frac{\nu^2}{6(1-\nu)^2} s^3 \right] \exp \left( -\varepsilon^{-1} \left[ s - \frac{\nu^2}{6(1-\nu)^2} s^3 \right] \xi_0 \right) + O(\varepsilon). \quad (3.4.12)$$

В книге [191] описано построение решения для параболического погранслоя в цилиндрической оболочке. Использовано преобразование Лапласа по времени, решение (3.4.12) его обобщает. Оригинал решения получен там с помощью разложения в ряд по положительным степеням  $s$ , то есть основывается на свойстве искомого решения в окрестности квазифронта при  $s \rightarrow 0$ . Используя это свойство, запишем приближение решения (3.4.12) при  $s \rightarrow 0$  в виде:

$$T_1^L = -\frac{2E}{1-\nu^2} \frac{U_0}{\sqrt{B}} s \exp \left( -\varepsilon^{-1} \left[ s - \frac{\nu^2}{6(1-\nu)^2} s^3 \right] \xi_0 \right). \quad (3.4.13)$$

Из граничного условия системы (3.4.1) получаем выражение для коэффициента  $U_0$ :

$$U_0(s) = -\frac{(1-\nu^2)I}{2E} \frac{1}{s^2} \sqrt{B(0)}. \quad (3.4.14)$$

Окончательно, выражение для изображения  $T_1^L$  получит вид:

$$T_1^L = I \sqrt{\frac{B(0)}{B}} \frac{1}{s} \exp\left(-\varepsilon^{-1} \left[ s - \frac{\nu^2}{6(1-\nu)^2} s^3 \right] \xi_0\right). \quad (3.4.15)$$

Согласно [191], обращая преобразование Лапласа  $T_1^L$ , имеем:

$$T_1 = I \sqrt{\frac{B(0)}{B}} \left( \frac{1}{3} + \int_0^y A_i(-y') dy' \right), \quad (3.4.16)$$

$$y = \left[ \frac{2(1-\nu)^2}{\nu^2 \varepsilon^2 \xi_0} \right]^{\frac{1}{3}} (\tau_0 - \xi_0),$$

где  $A_i(y')$  – функция Эйри.

### 3.5 Область согласования параболического погранслоя и двумерной тангенциальной составляющей

Как уже отмечалось ранее, суть применяемого асимптотического метода заключается в построении для каждого типа торцевого ударного воздействия системы асимптотически приближенных теорий, описывающих нестационарное НДС во всех участках фазовой плоскости, причём полнота описания НДС приближенными теориями и расположение их применения на фазовой плоскости определяется наличием областей согласования, где решения по различным приближенным теориям совпадают с некоторой асимптотической точностью. Рассмотренная в параграфе 3.1 схема расчленения нестационарного НДС при LT

воздействию требует доказательства наличия областей согласования двумерной тангенциальной составляющей  $\mathcal{R}_4$  и параболического погранслоя  $\mathcal{R}_3$  (область согласования  $\mathcal{B}_3$ ), параболического погранслоя  $\mathcal{R}_3$  и симметричного коротковолнового высокочастотного приближения  $\mathcal{R}_2$  (область согласования  $\mathcal{B}_2$ ), а также симметричного коротковолнового высокочастотного приближения  $\mathcal{R}_2$  и гиперболического погранслоя (область согласования  $\mathcal{B}_1$ ). В рассматриваемом параграфе докажем существование и определим расположение области согласования  $\mathcal{B}_3$ .

Проанализируем сначала поведение решения для нормального усилия  $T_1$  по безмоментной теории (3.2.13) и теории параболического погранслоя (3.4.16). Областью применимости безмоментной составляющей является вся область  $\mathcal{R}_3$ , включающая пространство за фронтом волны растяжения-сжатия  $\xi_0 < \tau_0$ :

$$\tau_0 - \xi_0 = O(1). \quad (3.5.1)$$

Рассмотрим поведение решения для параболического погранслоя (3.4.16) при удалении от квазифронта в области  $\tau_0 - \xi_0 > 0$ . Поведение интеграла в этой формуле при  $y \rightarrow \infty$  определяется выражением [191]:

$$y \rightarrow \infty : \int_0^y A_i(-y') dy' \rightarrow \frac{2}{3}, \quad (3.5.2)$$

при этом решение для  $T_1$  в случае параболического погранслоя асимптотически стремится к  $I\sqrt{B(0)/B(\xi_0)}$  при  $\tau_0 - \xi_0 \gg \varepsilon^{\frac{2}{3}}$ .

Решение для  $T_1$  по безмоментной составляющей можно оценить в малой окрестности квазифронта как:

$$T_1 = I\sqrt{\frac{B(O)}{B(\tau_0)}}[1 + O(\tau_0 - \xi_0)]. \quad (3.5.3)$$

Таким образом, по оценкам решений для  $T_1$  по безмоментной теории и

теории параболического погранслоя областью согласования этих решений будет следующий интервал:

$$\varepsilon^{\frac{2}{3}} \ll \tau_0 - \xi_0 \ll 1. \quad (3.5.4)$$

Интервал (3.5.4) совпадает с областью согласования рассматриваемых составляющих для цилиндрической оболочки, полученной в [191].

Перейдём в изучении области согласования решений по двумерной тангенциальной составляющей и параболического погранслоя от рассмотрения решений для конкретной задачи к исследованию проблем для общего случая торцевых воздействий типа ЛТ. Начнём с безмоментной составляющей. Описание поведения любого решения при приближении к фронту волны основывается на свойстве увеличения значения показателя изменяемости по продольной координате и показателя динамичности, начиная от своих минимальных значений в окрестности фронта. Поэтому, вводя новую переменную  $x$ , характеризующую отклонение от фронта  $\xi_0 = \tau_0$ , учтём увеличение изменяемости для безмоментного решения по переменным  $\xi_0$ ,  $\tau_0$ , когда эти переменные входят в  $x$ :

$$x = \varepsilon^{-r}(\tau_0 - \xi_0), \quad r > 0, \quad (3.5.5)$$

где  $r$  является показателем изменяемости НДС по  $x$ .

Поскольку разрыв на фронте волны растяжения-сжатия имеет место для усилия  $T_1$ , и, следовательно, для производной от перемещения  $u$ , первое уравнение системы (3.2.7) является основным при определении рассматриваемого НДС в нашей окрестности. Тогда асимптотически главная часть этого уравнения должна содержать производные от  $u$  по  $x$  и  $\tau_0$ . Второе уравнение системы определяет соотношение между перемещениями  $u$ ,  $w$ : перемещение  $w$  имеет порядок  $O(\varepsilon^r)$  по сравнению с перемещением  $u$ . Обозначим:

$$u = u^*(x, \tau_0), \quad w = \varepsilon^r w^*(x, \tau_0). \quad (3.5.6)$$

Для введённых функций  $u^*$ ,  $w^*$  в переменных  $x$ ,  $\tau_0$  уравнения (3.2.7) получают форму:

$$\begin{aligned} \frac{B'}{B} \frac{\partial u^*}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial \tau_0} + \varepsilon^r (-R_3 u^* + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau_0^2} + R_4 \frac{\partial w^*}{\partial x}) + \varepsilon^{2r} R_5 w^* &= 0, \\ -R_4 \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \varepsilon^r (R_6 \frac{B'}{B} u^* + 2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial \tau_0}) + \varepsilon^{2r} (R_7 w^* + \frac{\partial^2 w^*}{\partial \tau_0^2}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

С асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon^r)$  при  $\tau_0 - \xi_0 \ll 1$  уравнения (3.5.7) принимают вид:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial \tau_0} + \frac{B'}{B} \frac{\partial u^*}{\partial x} &= 0, \\ -R_4 \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

Рассмотрим теперь поведение уравнений параболического погранслоя с удалением от квазифронта. В этом случае, наоборот, происходит уменьшение изменчивости решения. Аналогично предыдущему рассуждению, введём переменную  $x$ , определяющую расстояние от фронта растяжения-сжатия, согласно (3.5.5). Тогда разрешающее уравнение (3.4.1) примет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_0} + \frac{\partial u}{\partial \tau_0} + \frac{B'}{2B} u - \varepsilon^{2-3r} \frac{\nu^2}{6(1-\nu)^2} \frac{\partial^3 u}{\partial \tau_0^3} = 0. \quad (3.5.9)$$

Отметим, что при  $r < 2/3$  членом с третьей производной от перемещения по времени можно пренебречь с асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon^{2-3r})$ , то есть при  $\tau_0 - \xi_0 \gg \varepsilon^{\frac{2}{3}}$ . Таким образом, в области (3.5.4) уравнения (3.5.8) и (3.5.9) совпадают в асимптотически главном, что и подтверждает вывод относительно решений для безмоментной составляющей и параболического погранслоя по оценке области их согласования асимптотическим неравенством (3.5.4).

### 3.6 Область согласования параболического погранслоя и симметричного коротковолнового высокочастотного приближения

В рассматриваемом параграфе изучим особенности существования и расположения области согласования  $\mathcal{B}_2$  – области согласования параболического погранслоя и симметричного коротковолнового высокочастотного приближения. Для этого исследуем сначала поведение уравнений рассматриваемого высокочастотного приближения в малой окрестности квазифронта. С этой целью выпишем сначала разрешающие уравнения данного приближения в перемещениях, непосредственно следующие из уравнений движения (1.5.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \varkappa^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z} = 0, \\ \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z} + \varkappa^2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \\ + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial z} + \varkappa \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} = 0. \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu} \left( k_2 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{\partial v_3}{\partial z} + k_1 \frac{B'}{B} v_1 \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1+\nu} \left( k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_2 \frac{\partial v_3}{\partial z} + k_1 \frac{B'}{B} v_1 \right), \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

$$\sigma_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} \right),$$

где постоянные  $k_1$ ,  $k_2$  заданы в параграфе 1.1.

Введём показатель изменчивости по продольной координате и показатель динамичности  $r < 1$  для искомого НДС в малой окрестности квазифронта,

определяющий соответствующие безразмерные координаты  $x$ ,  $\tau_0$  по формулам:

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon^{-r}(\tau_0 - \xi_0), & \tau_0 &= \frac{c_3}{R}t, \\ \xi_0 &= \frac{1}{R}\alpha, & \zeta &= \frac{1}{R\varepsilon}z. \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Метод, изложенный в [111] для вывода уравнений параболического погранслоя из трёхмерных уравнений теории упругости, может быть использован для изучения расположения рассматриваемой области согласования. Зададим асимптотические величины компонент перемещений и напряжений в виде:

$$v_1 = R\varepsilon v_1^*, \quad v_3 = R\varepsilon v_3^*, \quad \sigma_{11} = E\sigma_{11}^*, \quad \sigma_{33} = E\sigma_{33}^*, \quad \sigma_{13} = E\sigma_{13}^*, \quad (3.6.4)$$

где величины со звёздочками обладают одним и тем же асимптотическим порядком (звёздочки в дальнейшем будем опускать). Перейдём в уравнениях (3.6.1), (3.6.2) к переменным (3.6.3) с учётом (3.6.4):

$$\begin{aligned} \varepsilon^{2-2r} \left(1 - k_3\right) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \varkappa^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} - \varepsilon^{2-2r} 2k_3 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \tau_0} - \varepsilon^2 k_3 \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau_0^2} - \\ - \varepsilon^{2-2r} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial x} - \varepsilon^{1-r} \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \zeta} = 0, \\ - \varepsilon^{1-r} \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \zeta} + \varepsilon^{2-2r} (\varkappa^2 - k_3) \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta^2} - \varepsilon^{2-2r} 2k_3 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \tau_0} - \\ - \varepsilon^2 k_3 \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau_0^2} + \varepsilon \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} - \varepsilon^{2-r} \varkappa^2 \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{1}{1+\nu} \left( \varepsilon^{-r} k_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \varepsilon^{-1} k_1 \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} + k_1 \frac{B'}{B} v_1 \right), \\
\sigma_{33} &= \frac{1}{1+\nu} \left( \varepsilon^{-r} k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \varepsilon^{-1} k_2 \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} + k_1 \frac{B'}{B} v_1 \right), \\
\sigma_{13} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \left( \varepsilon^{-1} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-r} \frac{\partial v_3}{\partial x} \right),
\end{aligned} \tag{3.6.6}$$

где  $k_3 = (1 - 2\nu)/(1 - \nu)^2$ .

Разобьём компоненты (3.6.4) на две составляющие, обобщающие симметричный и антисимметричный по нормальной координате  $\zeta$  типы НДС:

$$v_1 = v_1^0 + \varepsilon v_1^1, \quad v_3 = \varepsilon^{1-r} v_3^0 + \varepsilon^r v_3^1, \tag{3.6.7}$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^0 + \varepsilon \sigma_{11}^1, \quad \sigma_{33} = \sigma_{33}^0 + \varepsilon \sigma_{33}^1, \quad \sigma_{13} = \varepsilon^{1-r} \sigma_{13}^0 + \varepsilon^r \sigma_{13}^1.$$

Здесь  $v_1^0, v_3^1, \sigma_{11}^0, \sigma_{33}^0, \sigma_{13}^1$  – чётные по  $\zeta$  функции,  $v_1^1, v_3^0, \sigma_{11}^1, \sigma_{33}^1, \sigma_{13}^0$  – нечётные. Тогда для асимптотически главной симметричной составляющей НДС имеют место следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{2-2r} (1 - k_3) \frac{\partial^2 v_1^0}{\partial x^2} + \varkappa^2 \frac{\partial^2 v_1^0}{\partial \zeta^2} - \varepsilon^{2-r} 2k_3 \frac{\partial^2 v_1^0}{\partial x \partial \tau_0} - \varepsilon^2 k_3 \frac{\partial^2 v_1^0}{\partial \tau_0^2} - \\
&\quad - \varepsilon^{2-r} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1^0}{\partial x} - \varepsilon^{2-2r} \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v_3^0}{\partial x \partial \zeta} = 0, \\
&-\varepsilon^{1-r} \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v_1^0}{\partial x \partial \zeta} + \varepsilon^{3-3r} (\varkappa^2 - k_3) \frac{\partial^2 v_3^0}{\partial x^2} + \varepsilon^{1-r} \frac{\partial^2 v_3^0}{\partial \zeta^2} - \varepsilon^{3-2r} 2k_3 \frac{\partial^2 v_3^0}{\partial x \partial \tau_0} - \\
&\quad - \varepsilon^{3-r} k_3 \frac{\partial^2 v_3^0}{\partial \tau_0^2} + \varepsilon \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1^0}{\partial \zeta} - \varepsilon^{3-2r} \varkappa^2 \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3^0}{\partial x} = 0,
\end{aligned} \tag{3.6.8}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^0 &= \frac{1}{1+\nu} \left( -\varepsilon^{-r} k_2 \frac{\partial v_1^0}{\partial x} + \varepsilon^{-r} k_1 \frac{\partial v_3^0}{\partial \zeta} + k_1 \frac{B'}{B} v_1^0 \right), \\
\sigma_{33}^0 &= \frac{1}{1-\nu} \left( -\varepsilon^{-r} k_1 \frac{\partial v_1^0}{\partial x} + \varepsilon^{-r} k_2 \frac{\partial v_3^0}{\partial \zeta} + k_1 \frac{B'}{B} v_1^0 \right), \\
\sigma_{13}^0 &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left( \varepsilon^{-1} \frac{\partial v_1^0}{\partial \zeta} - \varepsilon^{-r} \frac{\partial v_3^0}{\partial x} \right).
\end{aligned} \tag{3.6.9}$$

Проинтегрируем уравнения (3.6.8) – (3.6.9), учитывая, что в окрестности квазифронта асимптотически главные перемещения и напряжения  $v_1^0$ ,  $\sigma_{11}^0$  и  $\sigma_{33}^0$  должны определяться с большей точностью по сравнению с другими компонентами. Тогда, интегрируя эти уравнения по  $\zeta$ , определяем следующую форму зависимости компонент НДС от нормальной координаты с асимптотической точностью  $O(\varepsilon^{2-2r})$ :

$$\begin{aligned}
v_1^0 &= v_{1,0}^{(0)} + \varepsilon^{2-2r} \left( v_{1,1}^{(0)} + \zeta^2 v_{1,1}^{(2)} \right) + \varepsilon^{4-4r} \left( v_{1,2}^{(0)} + \zeta^2 v_{1,2}^{(2)} + \zeta^4 v_{1,2}^{(4)} \right), \\
v_3^0 &= \zeta v_{3,0}^{(1)} + \varepsilon^{2-2r} \left( \zeta v_{3,1}^{(1)} + \zeta^3 v_{3,1}^{(3)} \right), \\
\sigma_{11}^0 &= \varepsilon^{-r} \frac{1}{1+\nu} \left[ -k_2 \frac{\partial v_{1,0}^{(0)}}{\partial x} + k_1 v_{3,0}^{(1)} + \varepsilon^{2-2r} \left( -k_2 \frac{\partial v_{1,1}^{(0)}}{\partial x} + k_1 v_{3,1}^{(1)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \zeta^2 \left( -k_2 \frac{\partial v_{1,1}^{(2)}}{\partial x} + 3k_1 v_{3,1}^{(3)} \right) \right) + \varepsilon^r k_1 \frac{B'}{B} v_{1,0}^{(0)} \right], \\
\sigma_{33}^0 &= \varepsilon^{-r} \frac{1}{1-\nu} \left[ -k_1 \frac{\partial v_{1,0}^{(0)}}{\partial x} + k_2 v_{3,0}^{(1)} + \varepsilon^{2-2r} \left( -k_1 \frac{\partial v_{1,1}^{(0)}}{\partial x} + k_2 v_{3,1}^{(1)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \zeta^2 \left( -k_1 \frac{\partial v_{1,1}^{(2)}}{\partial x} + 3k_2 v_{3,1}^{(3)} \right) \right) + \varepsilon^r k_1 \frac{B'}{B} v_{1,0}^{(0)} \right],
\end{aligned} \tag{3.6.10}$$

$$\sigma_{13}^0 = \varepsilon^{1-2r} \frac{1}{2(1+\nu)} \left[ 2\zeta v_{1,1}^{(2)} - \zeta \frac{\partial v_{3,0}^{(1)}}{\partial x} + \varepsilon^{2-2r} \left( 2\zeta v_{1,2}^{(2)} - \zeta \frac{\partial v_{3,1}^{(1)}}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \zeta^3 \left( 4v_{1,2}^{(4)} - \frac{\partial v_{3,1}^{(3)}}{\partial x} \right) \right) \right].$$

В параграфе 1.6, описывающем уравнения параболического погранслоя, отмечено, что параболический погранслои в малой окрестности квазифронта имеет показатель изменчивости, определяемой неравенством (1.6.1). Тогда запишем первое уравнение системы (3.6.8) с асимптотической точностью  $O(\varepsilon^{2-2r})$ , а второе – с асимптотической точностью  $O(1)$  в формах, соответствующих предельному значению  $r = 2/3$ :

$$\begin{aligned} (1 - k_3) \frac{\partial^2 v_{1,0}^{(0)}}{\partial x^2} + 2\alpha^2 v_{1,1}^{(2)} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial v_{3,0}^{(1)}}{\partial x} + \varepsilon^r \left( -2k_3 \frac{\partial^2 v_{1,0}^{(0)}}{\partial x \partial \tau_0} - \frac{B'}{B} \frac{\partial v_{1,0}^{(0)}}{\partial x} \right) + \\ + \varepsilon^{2-2r} \left[ (1 - k_3) \frac{\partial^2 v_{1,1}^{(0)}}{\partial x^2} + 2\alpha^2 v_{1,2}^{(2)} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial v_{3,1}^{(1)}}{\partial x} + \right. \\ \left. + \zeta^2 (1 - k_3) \frac{\partial^2 v_{1,1}^{(2)}}{\partial x^2} + 12\alpha^2 v_{1,2}^{(4)} - \frac{3}{2(1-\nu)} \frac{\partial v_{3,1}^{(3)}}{\partial x} \right] = 0, \\ - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial v_{1,1}^{(2)}}{\partial x} + (\alpha^2 - k_3) \frac{\partial^2 v_{3,0}^{(1)}}{\partial x} + 6v_{3,1}^{(3)} = 0. \end{aligned} \quad (3.6.11)$$

Запишем также граничные условия при  $\zeta = \pm 1$  в виде:

$$\begin{aligned} -k_1 \left( \frac{\partial v_{1,0}^{(0)}}{\partial x} + \varepsilon^{2-2r} \left( \frac{\partial v_{1,1}^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1,1}^{(2)}}{\partial x} \right) \right) + \\ + k_2 \left( v_{3,0}^{(1)} + \varepsilon^{2-2r} (v_{3,1}^{(1)} + 3v_{3,1}^{(3)}) \right) + \varepsilon^r k_1 \frac{B'}{B} v_{1,0}^{(0)} = 0, \\ 2v_{1,1}^{(2)} + \varepsilon^{2-2r} \left( 2v_{1,2}^{(2)} + 4v_{1,2}^{(4)} \right) - \\ - \frac{\partial v_{3,0}^{(1)}}{\partial x} - \varepsilon^{2-2r} \left( \frac{\partial v_{3,1}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v_{3,1}^{(3)}}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.6.12)$$

С целью вывода разрешающего уравнения для составляющей  $v_{1,0}^{(0)}$ , проинтегрируем систему (3.6.11) с учетом граничных условий (3.6.12). Выражая из асимптотически главной части этих граничных условий представления для  $v_{3,0}^{(1)}$  и  $v_{1,1}^{(2)}$  через искомую составляющую  $v_{1,0}^{(0)}$ :

$$v_{3,0}^{(1)} = \frac{k_1}{k_2} \frac{\partial v_{1,0}^{(0)}}{\partial x} - \varepsilon^r \frac{k_1}{k_2} \frac{B'}{B} v_{1,0}^{(0)}, \quad (3.6.13)$$

$$v_{1,1}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_{3,0}^{(1)}}{\partial x},$$

запишем разрешающие уравнения (3.6.11) – (3.6.12) в следующей форме:

$$\begin{aligned} & -2k_3 \frac{\partial^2 v_{1,0}^{(0)}}{\partial x \partial \tau_0} - k_3 \frac{B'}{B} \frac{\partial v_{1,0}^{(0)}}{\partial x} + \varepsilon^{2-3r} \left[ (1 - k_3) \frac{\partial^2 v_{1,1}^{(0)}}{\partial x^2} + 2\alpha^2 v_{1,2}^{(2)} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2(1 - \nu)} \frac{\partial v_{3,1}^{(1)}}{\partial x} + \zeta^2 \left( (1 - k_3) \frac{\partial^2 v_{1,1}^{(2)}}{\partial x^2} + 12\alpha^2 v_{1,2}^{(4)} - \frac{3}{2(1 - \nu)} \frac{\partial v_{3,1}^{(3)}}{\partial x} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

$$-\frac{1}{1 - \nu} \frac{\partial v_{1,1}^{(2)}}{\partial x} + (\alpha^2 - k_3) \frac{\partial^2 v_{3,0}^{(1)}}{\partial x} + 6v_{3,1}^{(3)} = 0,$$

$$-k_1 \left( \frac{\partial v_{1,1}^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1,1}^{(2)}}{\partial x} \right) + k_2 \left( v_{3,1}^{(1)} + 3v_{3,1}^{(3)} \right) = 0, \quad (3.6.15)$$

$$2v_{1,2}^{(2)} + 4v_{1,2}^{(4)} - \left( \frac{\partial v_{3,1}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v_{3,1}^{(3)}}{\partial x} \right) = 0.$$

Преобразование системы (3.6.14) – (3.6.15) с учетом приравнивания нулю составляющих при разных степенях нормальной координаты  $\zeta$  даёт следующее разрешающее уравнение для  $v_{1,0}^{(0)}$ :

$$\frac{\partial^2 v_{1,0}^{(0)}}{\partial x \partial \tau_0} + \frac{B'}{2B} \frac{\partial v_{1,0}^{(0)}}{\partial x} - \varepsilon^{2-3r} \frac{\nu^2}{6(1 - \nu)^2} \frac{\partial^4 v_{1,0}^{(0)}}{\partial x^4} = 0. \quad (3.6.16)$$

Для волн, распространяющихся в направлении возрастания продольной координаты  $\alpha$ , разрешающее уравнение может быть записано в форме:

$$\frac{\partial v_{1,0}^{(0)}}{\partial \tau_0} + \frac{B'}{2B} v_{1,0}^{(0)} - \varepsilon^{2-3r} \frac{\nu^2}{6(1-\nu)^2} \frac{\partial^3 v_{1,0}^{(0)}}{\partial x^3} = 0, \quad (3.6.17)$$

которое в безразмерных переменных  $\xi_0, \tau_0$  относительно двумерного перемещения  $u = v_{1,0}^{(0)}$  запишется в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_0} + \frac{\partial u}{\partial \tau_0} + \frac{B'}{2B} u - \varepsilon^{2-3r} \frac{\nu^2}{6(1-\nu)^2} \frac{\partial^3 u}{\partial \tau_0^3} = 0, \quad (3.6.18)$$

совпадающем по форме с приближённым уравнением (3.5.9). Таким образом, в области

$$\xi_0 - \tau_0 = O(\varepsilon^{2/3}) \quad (3.6.19)$$

оно совпадает с уравнением параболического погранслоя и эта область является, по сути, областью согласования параболического погранслоя и высокочастотной коротковолновой составляющей.

### **3.7 Область согласования симметричного гиперболического погранслоя и симметричного коротковолнового высокочастотного приближения**

Перейдём теперь к изучению особенностей существования и расположения области согласования  $\mathcal{B}_1$  – области согласования симметричного гиперболического погранслоя и симметричного коротковолнового высокочастотного приближения. С этой целью исследуем поведение компонент этого приближения в малой окрестности фронта волны расширения. В работе [75] эта область рассматривалась на примере оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны.

Обобщим эти рассуждения на рассматриваемый случай оболочек вращения общего очертания. Как показано в [74], показатели изменчивости и динамичности решения увеличиваются при приближении к фронту волны расширения от значений  $q = a = 1$ , которые имеют место на расстоянии от фронта порядка  $O(\varepsilon)$ , до значений  $q = a = 2$ , которые имеют место на расстоянии порядка  $O(\varepsilon^2)$ , где решение описывается гиперболическим погранслоем.

Разрешающие уравнения коротковолновой высокочастотной составляющей (1.5.3) – (1.5.4) описывают нестационарное НДС в области  $\mathcal{R}_2$  и определяют некоторое НДС в той же самой прифронтной области, что и для гиперболического погранслоя. Происходит это из-за того, что асимптотически главная часть разрешающих уравнений для коротковолновой высокочастотной составляющей полностью повторяет асимптотически главную часть разрешающих уравнений по полной трёхмерной теории упругости. Рассмотрим такое нестационарное НДС. Для этого выпишем сначала разрешающие уравнения для рассматриваемой составляющей в перемещениях согласно (1.5.3) – (1.5.4):

$$\begin{aligned} \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z} + \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha} = 0, \\ \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1 + \nu} \left( k_2 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{\partial v_3}{\partial z} \right), \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1 + \nu} \left( k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{\partial v_3}{\partial z} \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1 + \nu} \left( k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_2 \frac{\partial v_3}{\partial z} \right), \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

Здесь в уравнениях состояния (3.7.2) оказалось возможным пренебречь величинами первого порядка малости  $O(\varepsilon)$ . Как и в случае гиперболического погранслоя, введём переменные, характеризующие изменчивость НДС в малой окрестности фронта волны расширения, но сделаем это в исходных переменных  $\alpha$ ,  $z$ ,  $t$ :

$$x = \frac{1}{\varepsilon^2}(\tau_0 - \xi_0), \quad \tau_0 = c_1 t/R, \quad \xi_0 = \alpha/R, \quad \zeta = z/h. \quad (3.7.3)$$

Асимптотические величины компонент напряжений и деформаций задаются также, как и в (2.2.8). Перейдём в уравнениях (3.7.1), (3.7.2) к переменным (3.7.3) и будем учитывать асимптотические величины напряжений и деформаций. Тогда приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \varkappa^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \zeta} + 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \xi_0} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \zeta} - \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \zeta} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} = 0, \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{1}{2(1+\nu)\varkappa^2} \frac{\partial v_1}{\partial x}, \\ \sigma_{33} &= -\frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{\partial v_1}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

$$\sigma_{13} = \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta}.$$

Проинтегрируем второе уравнение (3.7.4) по  $x$ , получаем выражение для производной от  $v_3$  через производную от  $v_1$ :

$$\frac{\partial v_3}{\partial x} = -\frac{\partial v_1}{\partial \zeta}. \quad (3.7.6)$$

Тогда окончательный вид разрешающих уравнений для искомой составляющей

имеет форму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \xi_0} - \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial x} &= 0, \\ \sigma_{11} &= -\frac{1}{2(1+\nu)\alpha^2} \frac{\partial v_1}{\partial x}, \\ \sigma_{33} &= -\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial v_1}{\partial x}, \\ \sigma_{13} &= \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta}. \end{aligned} \tag{3.7.7}$$

В безразмерных координатах  $\xi$ ,  $\tau$ ,  $\zeta$  система (3.7.7) запишется в форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial v_1}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} &= 0, \\ \sigma_{11} &= \frac{1}{2(1+\nu)\alpha^2} \frac{\partial v_1}{\partial \xi}, \\ \sigma_{33} &= -\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial v_1}{\partial \xi}, \\ \sigma_{13} &= \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta}, \end{aligned} \tag{3.7.8}$$

а в исходной размерной форме примет вид, совпадающий с разрешающими уравнениями гиперболического погранслоя (2.2.9) в координатах  $\alpha$ ,  $z$ ,  $\tau$ :

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\sigma_{11} = \frac{E}{2(1+\nu)\alpha^2} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha},$$

$$\sigma_{33} = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha},$$

$$\sigma_{13} = \frac{E}{\sqrt{1+\nu}} \frac{\partial v_1}{\partial z}.$$

(3.7.9)

Следовательно, поскольку областью применимости выведенных уравнений гиперболического погранслоя является область в окрестности фронта (2.1.5)

$$\tau_0 - \xi_0 = O(\varepsilon^2), \quad |\zeta_F| \leq \sqrt{1 + F^2(\xi_0)}, \quad (3.7.10)$$

что имеет место в координатах  $(\xi_0, \zeta, \tau_0)$  в окрестности фронта порядка  $O(\varepsilon)$ :  $\tau_0 - \xi_0 = O(\varepsilon)$ , то и границу этой области можно считать областью согласования гиперболического погранслоя и высокочастотной коротковолновой составляющей.

Отметим, что в [74] анализ расположения области согласования рассматриваемых составляющих был проведён на примере общего неосесимметричного случая нестационарного НДС для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны. Исследование показывает, что все проведённые рассуждения имеют место и для случая оболочек вращения общего вида.

### 3.8 Численный анализ нестационарного НДС сферических оболочек при торцевом ударном нагружении типа LT

Разработанные в настоящей главе аналитические методы решения краевых задач для основных составляющих нестационарного НДС оболочек вращения при LT ударном нагружении применяются для анализа их свойств в зависимости от пространственных переменных и времени на примере сферической оболочки. Нестационарное НДС сферической оболочки является характерным типом изучаемых механических процессов и будет рассматриваться в следующих главах для анализа свойств решения и при других типах ударных воздействий.

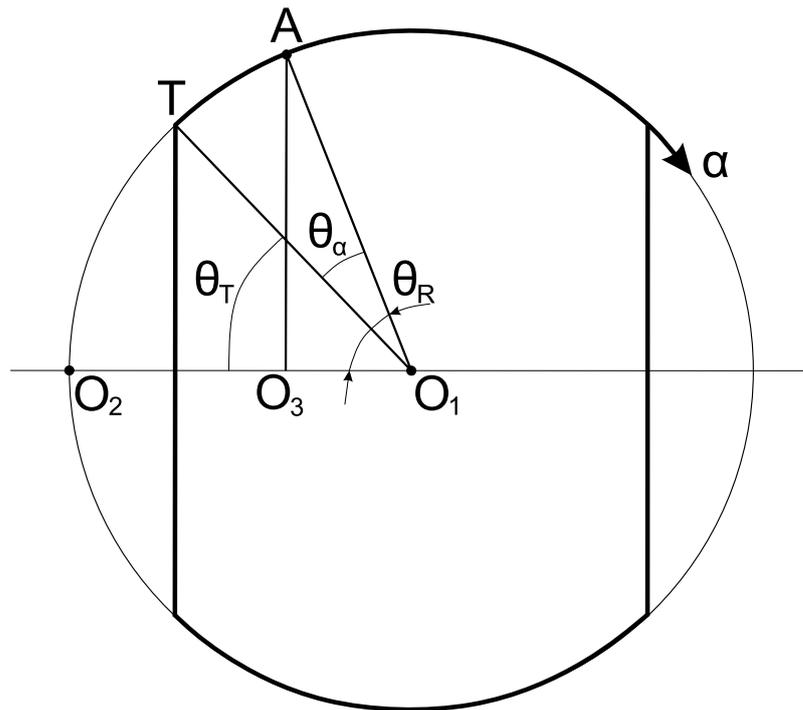


Рисунок 3.3 — Геометрия сечения сферической оболочки

На рисунке 3.3 изображена схема сечения срединной поверхности сферической оболочки плоскостью, проходящей через центр сферы. Здесь введены следующие обозначения: точка  $O_1$  – центр сферы; точка  $T$  – пересечение торцевой поверхности со срединной линией оболочки; точка  $A$  соответствует текущей ко-

ординате  $\alpha_0$  на образующей оболочки; углы  $\theta_T$  и  $\theta_R$  соответствуют радиусам до точек  $T$  и  $A$ ; точка  $O_3$  является точкой пересечения нормали из точки  $A$ , опущенной к осевой линии  $O_2O_1$ ; угол  $\theta_\alpha$  является углом между отрезками  $O_3A$  и  $O_1A$ .

Поскольку в качестве координаты  $\alpha$  выбрано расстояние вдоль образующей до текущей точки от торца, а образующей является окружность, то мы получаем следующие выражения для угла  $\theta_\alpha$  и расстояния  $B(\alpha)$ :

$$\theta_\alpha = \frac{\alpha}{R}, \quad \theta_R = \theta_T + \frac{\alpha}{R}, \quad B = R \sin \left( \theta_T + \frac{\alpha}{R} \right). \quad (3.8.1)$$

Выражение (3.8.1) даёт возможность полностью определить решения для рассматриваемых основных составляющих нестационарного НДС при воздействии типа ЛТ: безмоментной составляющей, параболического и гиперболических погранслоёв.

Начнём анализ с задачи для безмоментной составляющей. Решение для рассматриваемой составляющей получено в параграфе 3.2 простейшим методом прифронтной асимптотики в форме степенных рядов (3.2.14), что является частным случаем рассмотренной в [106] более общей задачи для неосесимметричной торцевой нагрузки. В работе [106] доказано, что такие ряды являются сходящимися для всех значений координаты  $\xi_0$  и времени  $\tau_0$ , и позволяют эффективно представлять решение для моментов времени  $\tau_0 = O(1)$ . В целях наглядности, ограничимся в анализе решения для нашего модельного примера в представлении продольного усилия только первым членом разложения. С учётом (3.8.1) получаем следующее выражение:

$$T_1 = I \sqrt{\frac{\sin(\theta_T)}{\sin(\theta_T + \xi_0)}} H(\tau_0 - \xi_0), \quad \xi_0 = \alpha/R, \quad \tau_0 = c_3 t/R. \quad (3.8.2)$$

На рисунке 3.4 изображена схема нагружения на торец оболочки

На рисунке 3.5 изображен график продольного усилия, рассчитанного по

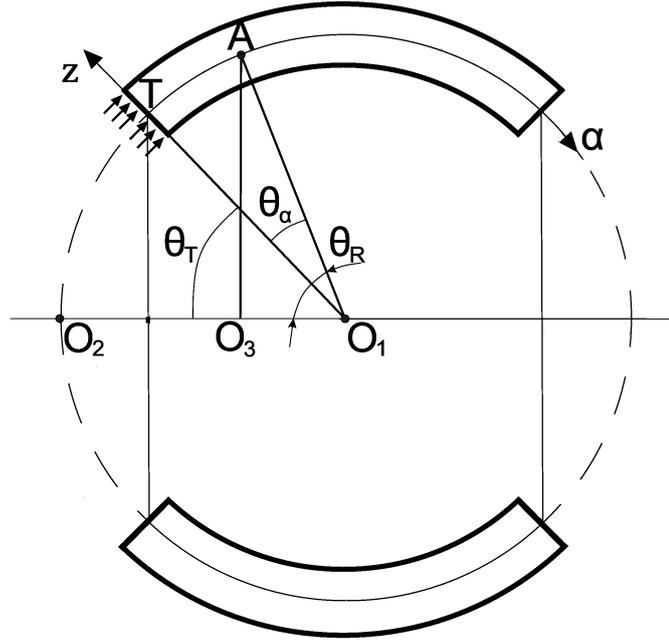


Рисунок 3.4 — Схема нагружения на торец оболочки

формуле (3.8.2). Здесь кривые 1, 2 соответствуют моментам безразмерного времени  $\tau_0 = 1$  и  $\tau_0 = 2$ . Геометрический и механический параметры принимались следующими:  $\theta_T = 0,2$ ,  $\nu = 0,3$ .

Как было описано ранее, безмоментное решение даёт ложный разрыв на фронте двумерной волны растяжения-сжатия  $\xi_0 = \tau_0$ , который в общем решении должен быть сглажен с помощью решения для параболического погранслоя.

Решение задачи для параболического погранслоя представлено формулами (3.4.16). Для рассматриваемого модельного случая сферической оболочки, представленной на рисунке 3.3, продольное усилие имеет следующую форму:

$$T_1 = I \sqrt{\frac{\sin(\theta_T)}{\sin(\theta_T + \xi_0)}} \left[ \frac{1}{3} + \int_0^y Ai(-y') dy' \right], \quad (3.8.3)$$

$$y = \left[ \frac{2(1 - \nu^2)}{\nu^2 \varepsilon^2 \xi_0} \right]^{1/3} (\tau_0 - \xi_0), \quad \xi_0 = \alpha/R, \quad \tau_0 = c_3 t/R,$$

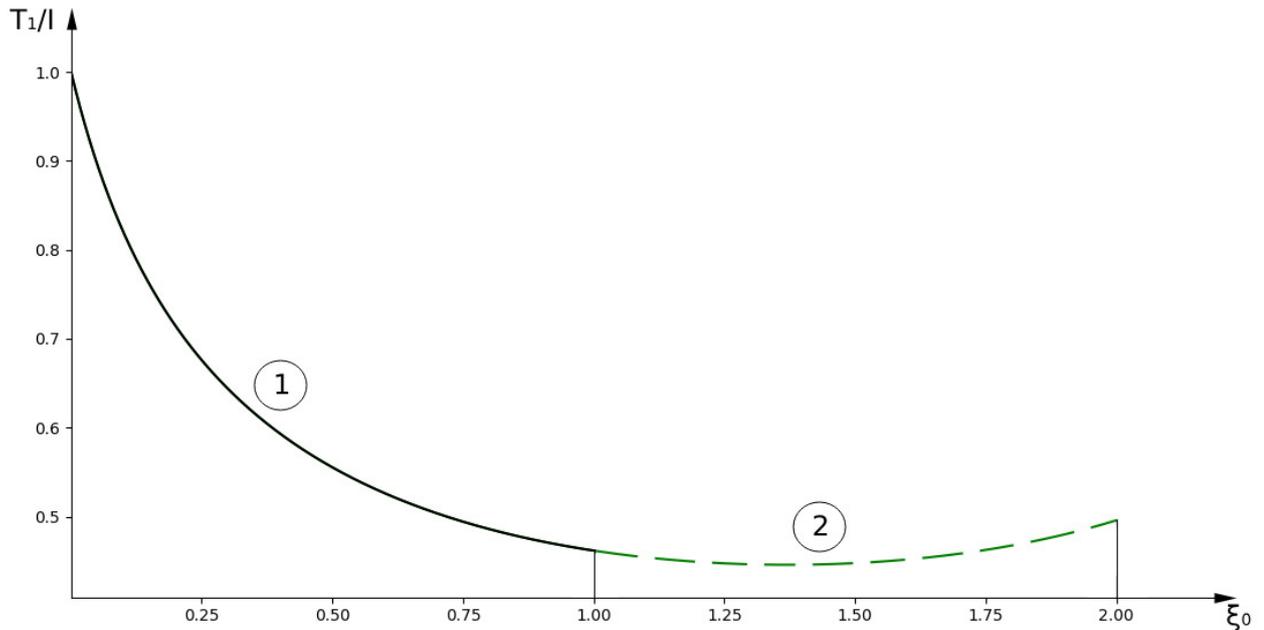


Рисунок 3.5 — Графики продольного усилия  $T_1$  в моменты времени  $\tau_0 = 1$  (график 1) и  $\tau_0 = 2$  (график 2)

где  $Ai(y)$  — функция Эйри.

На рисунках 3.6 представлены графики суммарного значения продольного усилия в моменты времени  $\tau_0 = 1$  и  $\tau_0 = 2$  в окрестности фронта двумерной волны. Здесь видно, как решение для параболического погранслоя (сплошная жирная линия) сглаживает разрыв двумерного безмоментного решения (тонкая пунктирная линия) и как осциллирует, затухая, вокруг двумерной составляющей. Расчёт вёлся при тех же значениях  $\theta_T$  и  $\nu$ , как в предыдущем расчёте, а так же при следующем значении малого параметра тонкостенности:  $\varepsilon = 0.05$ .

Представленные на рисунке 3.7 схемы расположения областей действия гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения иллюстрируют изменение с ростом времени угла наклона фронтовой поверхности к срединной поверхности и характеризуют расположение узкой области (порядка  $O(\varepsilon^2)$ ) действия гиперболического погранслоя в широкой области (порядка  $O(\varepsilon)$ ), где, как показано в параграфе 3.7, также действуют уравнения высокочастотной коротковолновой составляющей.

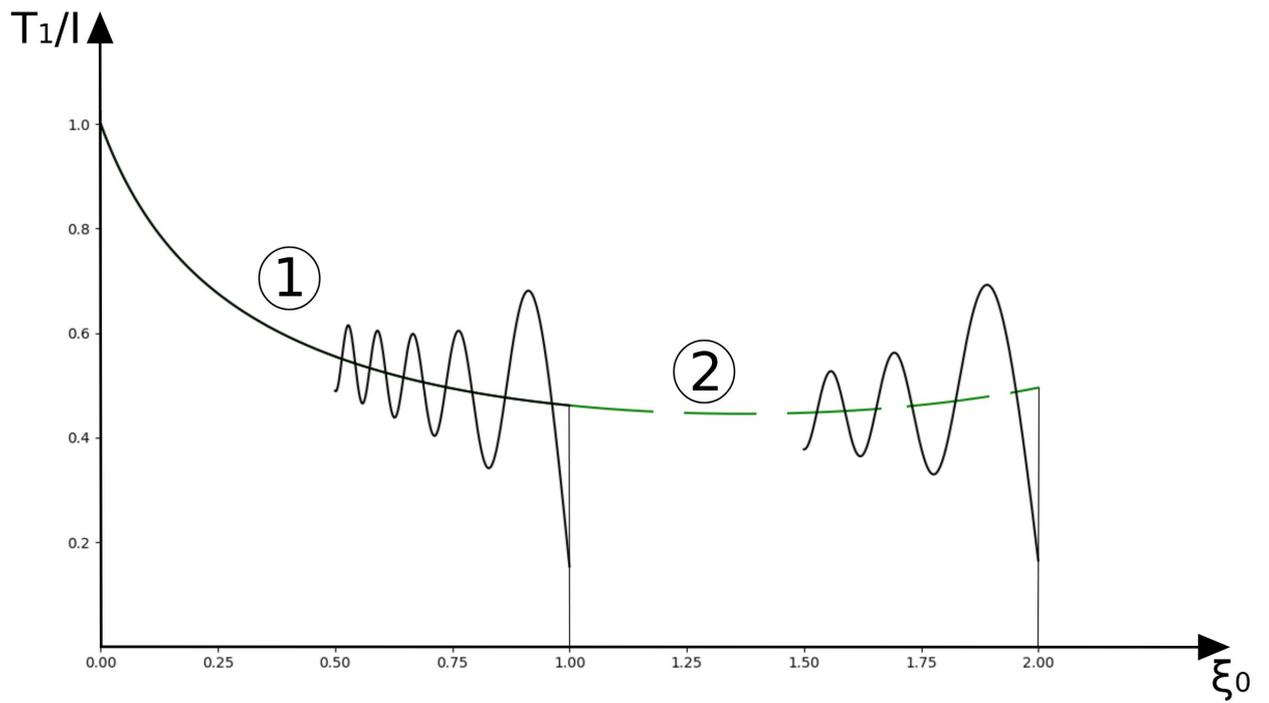
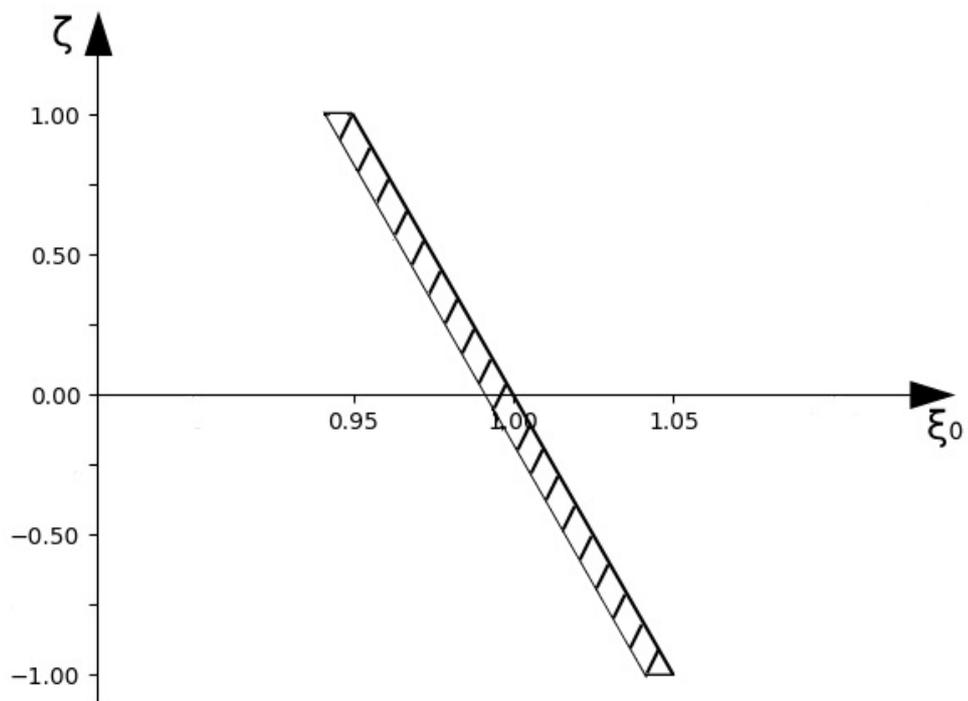
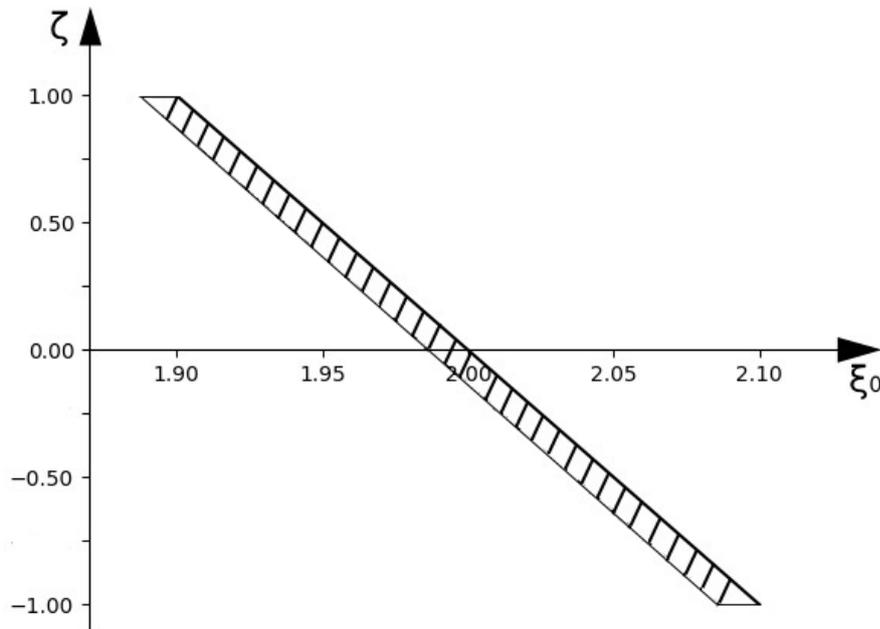


Рисунок 3.6 — График продольного усилия  $T_1$  в момент времени  $\tau_0 = 1$  и  $\tau_0 = 2$  в окрестности квазифронта



а



b

Рисунок 3.7 — Схемы расположения областей действия гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения для моментов времени  $\tau_0 = 1$  (a) и  $\tau_0 = 2$  (b)

На рисунке 3.8 изображены графики расчёта продольного усилия в узкой окрестности фронта для моментов времени  $\tau_0 = 1$  и  $\tau_0 = 2$ , а также выбранных ранее значениях геометрических и механических параметров.

В завершении параграфа рассмотрим решение задачи для гиперболического погранслоя, представленное формулами (3.3.25). Как и ранее, выберем для численного анализа поведение продольного усилия  $T_1$ , задаваемого для сферической оболочки следующей формулой:

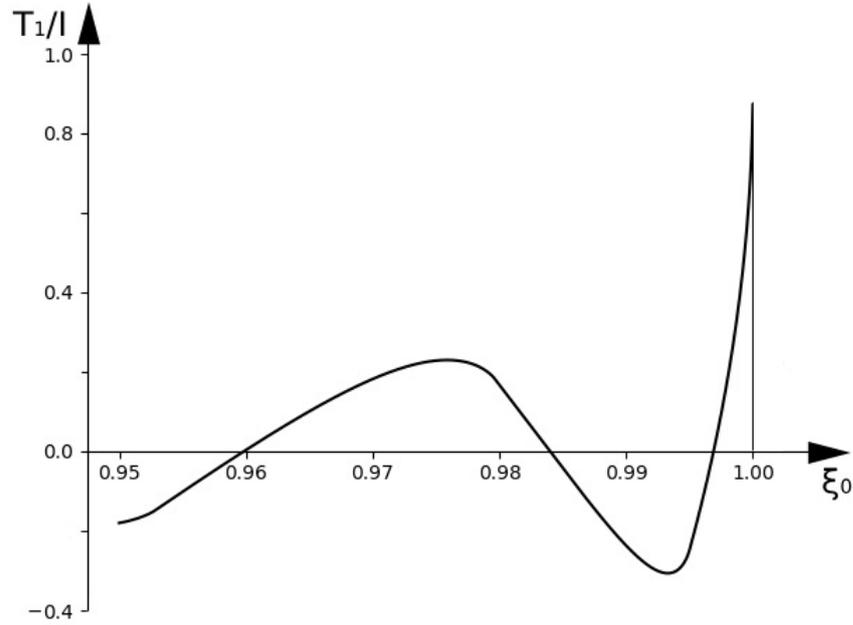
$$T_1 = \frac{4I}{\pi^2} \sqrt{\frac{\sin(\theta_T)}{\sin(\theta_T + \xi_0)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0 \left[ 2^{1/2}(n - 1/2)\pi \sqrt{\xi_0(\tau_0 - \xi_0)}/\varepsilon \right]}{(n - 1/2)^2} H(\tau_0 - \xi_0), \quad (3.8.4)$$

$$\xi_0 = \alpha/R, \quad \tau_0 = c_1 t/R.$$

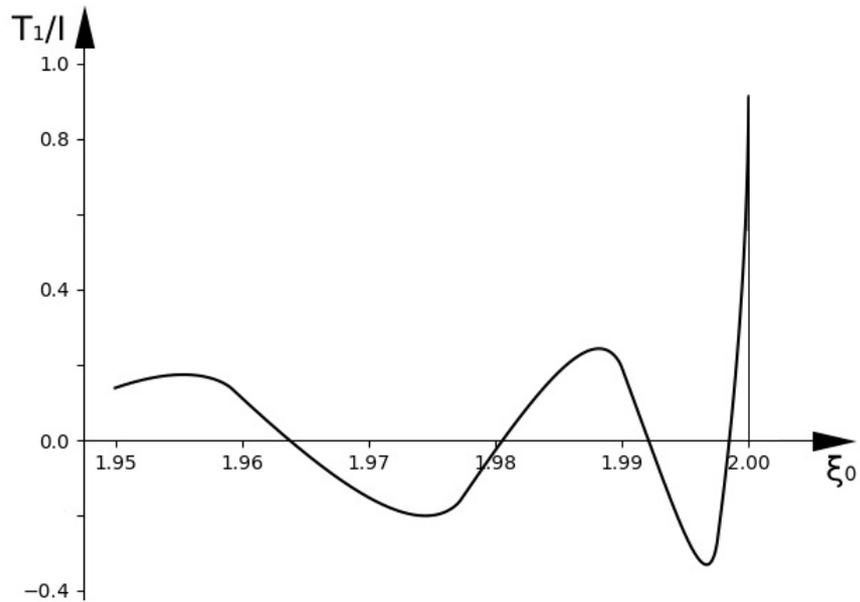
Расчёты для искомого погранслоя проведены в прифронтовой области. Асимптотическая модель фронта волны расширения, описанная во второй главе, опре-

деляет его уравнение в масштабе радиуса оболочки следующим образом:

$$\xi_{F0} = \xi_0 (1 - \varepsilon \zeta). \quad (3.8.5)$$



a



b

Рисунок 3.8 — Графики изгибающего момента  $T_1/I$  в окрестности фронта волны расширения в моменты времени  $\tau_0 = 1$  (a) and  $\tau_0 = 2$  (b)

В заключение рассмотрения расчётов составляющих нестационарного НДС при действии ударного LT нагружения на базе разработанной асимптотической теории отметим, что они полностью подтвердили его специфические свойства, выявленные аналитически и определившие основы этой теории.

## Глава 4

# Асимптотическая теория нестационарного НДС упругих оболочек вращения при торцевых ударных воздействиях изгибающего типа

Предполагаем, что нестационарное НДС оболочки вращения произвольного профиля, в соответствии со схемой, изображенной на рисунке 1.3, при продольном воздействии изгибающего типа LM, можно представить с помощью таких составляющих, как квазистатический погранслои типа Сен-Венана, моментная составляющая по теории Кирхгофа-Лява (динамический простой краевой эффект), коротковолновая высокочастотная антисимметричная составляющая и антисимметричный по нормальной координате гиперболический погранслои в окрестности фронта волны расширения. Уравнения для моментной составляющей и коротковолновой высокочастотной составляющей описаны в Главе 1. Уравнения гиперболического погранслоя описаны в Главе 2. Доказательство полноты построения схемы расчленения рассматриваемого НДС с помощью указанных теорий будет выполнено в настоящей главе доказательством существования и определения границ следующих областей согласования:

$\mathcal{B}_2$  – область согласования моментной составляющей и коротковолнового высокочастотного приближения,

$\mathcal{B}_1$  – область согласования коротковолнового высокочастотного приближения и гиперболического погранслоя.

Таким образом, как и в модельном случае оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны, исследование указанных областей согласования доказывает корректность применяемой асимптотической схемы расчленения нестационарного НДС в оболочках вращения произвольного профиля на составляющие с различными показателями изменчивости и динамичности, применяемые в раз-

личных участках фазовой плоскости. Отметим, что область  $\mathcal{B}_1$  рассматривалась на примере оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны в [74], а область  $\mathcal{B}_2$  описана для цилиндрической оболочки в [191].

Разработка асимптотического метода решения краевых задач для моментной составляющей основывается на использовании метода экспоненциальных представлений в пространстве преобразования Лапласа по временной переменной. В общем случае неосесимметричного по окружной координате НДС для оболочек вращения решение было представлено в [106] на основе разложения его по специальным функциям и использовании метода перевала в пространстве преобразования. В представленной главе это решение приведено для рассматриваемого осесимметричного случая НДС.

Решение для гиперболического погранслоя в рассматриваемом случае основывается на подходах, разработанных для цилиндрических оболочек и оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны в работе [74]. В настоящей работе [76], [77] используются символический метод Лурье [145], [156] и метод экспоненциальных представлений в пространстве изображений интегрального преобразования Лапласа по временной переменной. При этом обращение преобразований производится методом разложения по функциям Бесселя, основанном на разложении изображений в ряды по отрицательным степеням параметра преобразования.

#### **4.1 Схема расчленения нестационарного НДС оболочек вращения произвольного профиля при ударных воздействиях изгибающего типа**

Схема расчленения нестационарного НДС на составляющие с различными показателями изменчивости и динамичности, как и для случая ЛТ (параграф 3.1), была разработана сначала для оболочек вращения нулевой гауссовой кри-

визны. В настоящем параграфе эти положения обобщаются на общий случай оболочек вращения. Подобно исследованию для случая граничного условия типа LT, изложенному в параграфе 3.1, необходимо доказать полноту предлагаемого для случая граничных условий типа LM набора составляющих: погранслоя типа Сен-Венана (область  $\mathcal{R}_4$ ), двумерной моментной (изгибной) составляющей по теории Кирхгофа-Лява (область  $\mathcal{R}_3$ ), коротковолновой высокочастотной антисимметричной составляющей (область  $\mathcal{R}_2$ ) и гиперболического антисимметричного погранслоя в окрестности фронта волны расширения (область  $\mathcal{R}_1$ ).

Полная схема расчленения нестационарного НДС в оболочках вращения при рассматриваемом воздействии типа LM представлена на рисунке 4.1 как областями применимости приближённых теорий, так и областями согласования  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ .

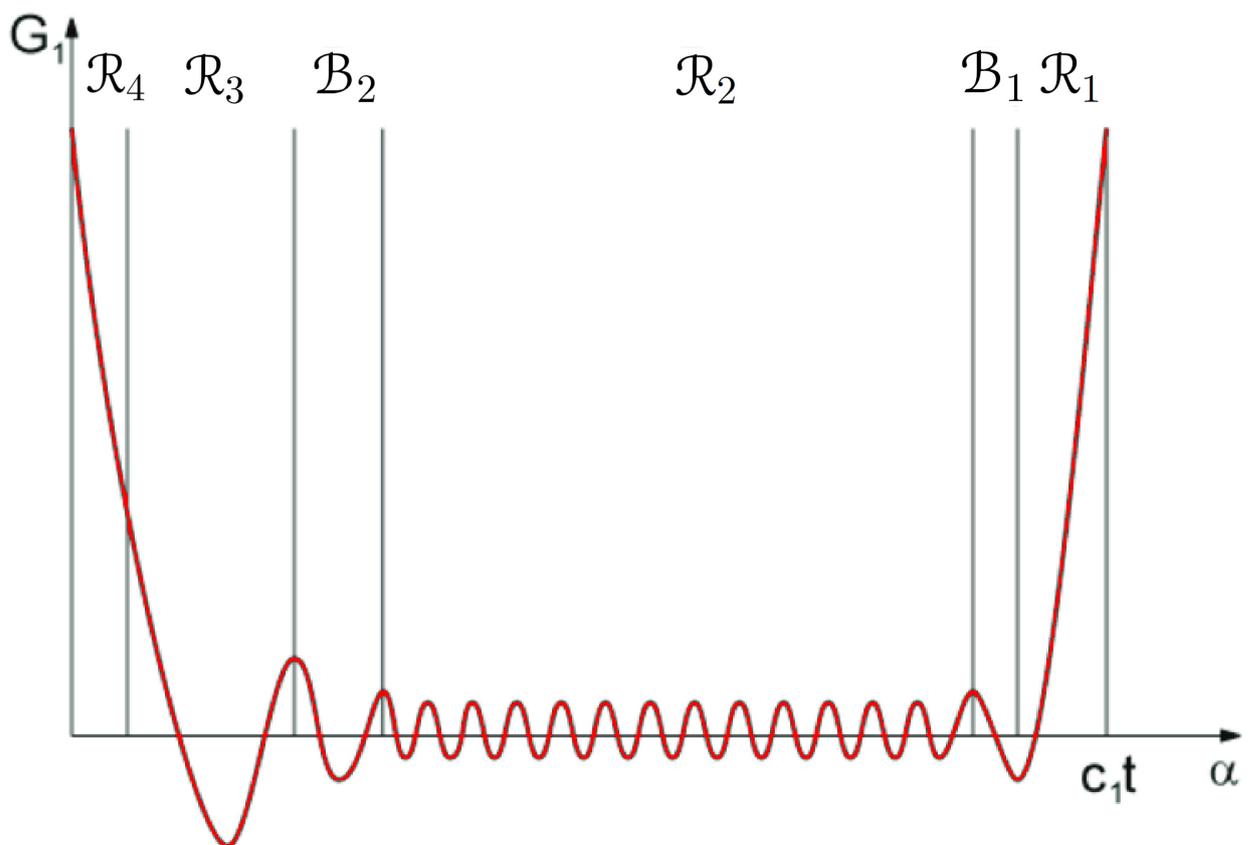


Рисунок 4.1 — Схема расчленения нестационарного НДС в оболочках вращения при действии торцевой ударной нагрузки типа LM

На рисунке 4.2 изображена схема областей применимости приближённых теорий на фазовой плоскости  $(\alpha, t)$ . Как и в случае воздействия типа LT, эти схемы полностью совпадают с соответствующими схемами, изображенными для цилиндрической оболочки в [112].

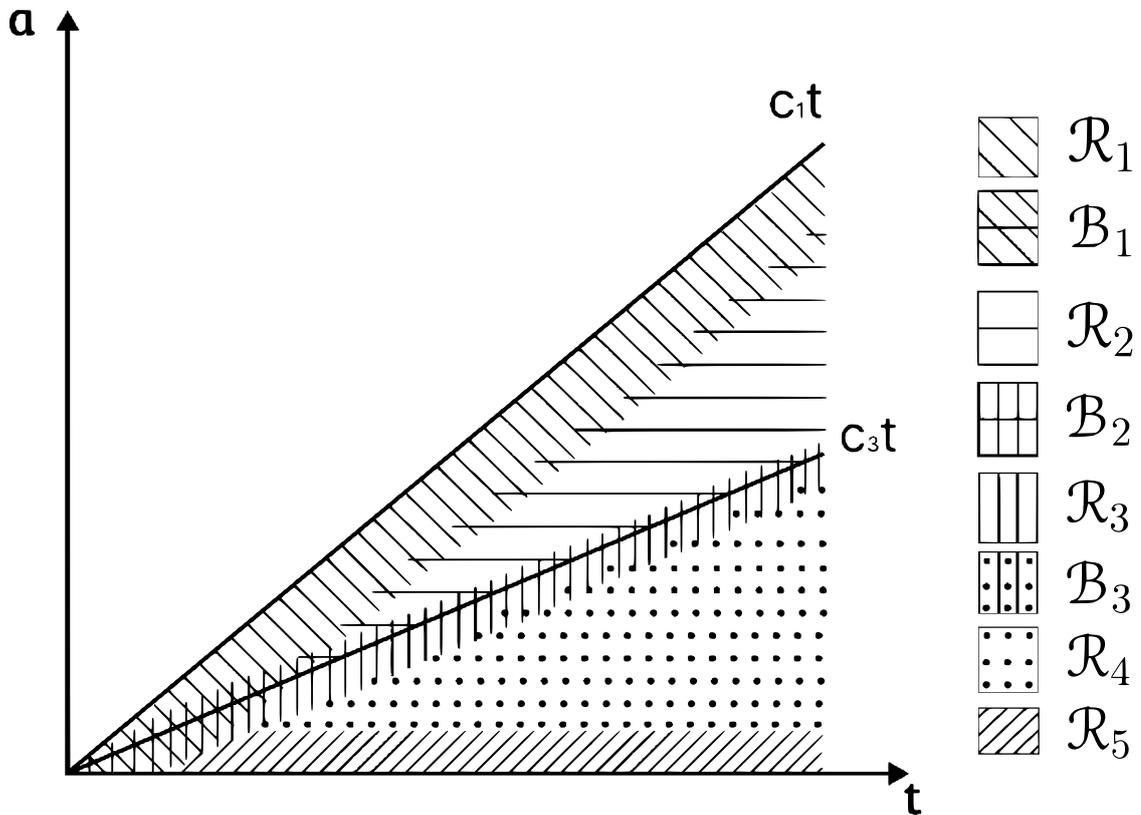


Рисунок 4.2 — Схема областей применимости асимптотических приближённых теорий в фазовой плоскости

## 4.2 Решение для изгибной составляющей теории Кирхгофа-Лява

В соответствии с граничными условиями на торце в трёхмерной постановке (1.2.2), граничные условия для рассматриваемой изгибной составляющей по теории Кирхгофа-Лява для случая осесимметричного НДС записываются в виде:

$$G_1 = \frac{2}{3}h^3IH(t), \quad w = 0, \quad \alpha = 0, \quad (4.2.1)$$

а начальные условия (1.2.4) преобразуются следующим образом:

$$w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad t = 0. \quad (4.2.2)$$

Перейдём в разрешающих уравнениях (1.4.9) и (1.4.10), описывающих моментное напряженное состояние в оболочках вращения, к безразмерным усилиям, моментам и деформациям по следующим формулам:

$$\begin{aligned} u &= h\varepsilon^{-1/2}u^*, \quad w = h\varepsilon^{-1}w^*, \quad T_i = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\varepsilon T_i^*, \\ G_i &= \frac{2Eh^2}{1-\nu^2}G_i^*, \quad N_i = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\varepsilon^{1/2}N_i^*, \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

где величины со звёздочками имеют один и тот же асимптотический порядок. Звёздочки в дальнейшем будем опускать. Введём также безразмерные переменные:

$$\xi = \varepsilon^{-1/2}\xi_0, \quad \xi_0 = \alpha/R, \quad \tau_0 = c_3 \frac{t}{R}, \quad c_3 = \left[ \frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \right]^{1/2}, \quad (4.2.4)$$

привязавшись к показателю изменяемости по продольной координате  $q = 1/2$  [66] и к скорости распространения продольной волны  $c_3$  по двумерной теории. Тогда уравнения для рассматриваемой составляющей в безразмерной форме с асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon)$  примут вид, непосредственно следующий из (1.4.9), (1.4.10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \xi} + \varepsilon^{1/2} \frac{B'}{B} (T_1 - T_2) &= 0, \\ \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{\partial N_1}{\partial \xi} + \frac{B'}{B} N_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau_0^2} &= 0, \\ \frac{\partial G_1}{\partial \xi} + \varepsilon^{1/2} \frac{B'}{B} (G_1 - G_2) - N_1 &= 0, \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{\partial u}{\partial \xi} - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) w + \varepsilon^{1/2} \frac{\nu B'}{B} u, \\
T_2 &= \nu \frac{\partial u}{\partial \xi} - \left( \frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) w + \varepsilon^{1/2} \frac{B'}{B} u, \\
G_1 &= -\frac{1}{3} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{1/2} \frac{\nu B'}{B} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right), \\
G_2 &= -\frac{1}{3} \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{1/2} \frac{B'}{B} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right).
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Выпишем также разрешающие уравнения движения в перемещениях:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) \frac{\partial w}{\partial \xi} + \varepsilon^{1/2} \frac{B'}{B} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= 0, \\
\frac{1}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau_0^2} + \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) w - \\
- \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \varepsilon^{1/2} \frac{2B'}{3B} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Применим к решению системы (4.2.7), (4.2.6) с учётом граничных условий в безразмерной форме:

$$G_1 = IH(\tau_0), \quad w = 0, \quad \xi_0 = 0 \tag{4.2.8}$$

и при начальных условиях в безразмерной форме:

$$w = \frac{\partial w}{\partial \tau_0} = 0, \quad \tau_0 = 0 \tag{4.2.9}$$

интегральное преобразование Лапласа по временной переменной  $\tau_0$ . Тогда система уравнений (4.2.6) – (4.2.9) преобразуется в систему для изображений следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u^L}{d\xi^2} - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) \frac{dw^L}{d\xi} + \varepsilon^{1/2} \frac{B'}{B} \frac{du^L}{d\xi} = 0, \\ - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) \frac{du^L}{d\xi} + \left( s^2 + \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) w^L + \varepsilon^{1/2} \frac{2B'}{3B} \frac{d^3 w^L}{d\xi^3} = 0, \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

$$\begin{aligned} G_1^L &= -\frac{1}{3} \left( \frac{d^2 w^L}{d\xi^2} + \varepsilon^{1/2} \frac{\nu B'}{B} \frac{dw^L}{d\xi} \right), \\ G_2^L &= -\frac{1}{3} \left( \nu \frac{d^2 w^L}{d\xi^2} + \varepsilon^{1/2} \frac{B'}{B} \frac{dw^L}{d\xi} \right), \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

$$G_1^L = I \frac{1}{s},$$

$$w^L = 0, \quad \xi = 0. \quad (4.2.12)$$

В работе Л.Ю. Коссовича [106] построены асимптотические методы определения решения для рассматриваемой моментной составляющей в общем случае неосесимметричного нестационарного НДС в оболочках вращения произвольного профиля. Они основаны на применении интегрального преобразования Лапласа по временной переменной и поиске решения для изображений методом экспоненциальных представлений. Эти методы определены в зависимости от значений показателя изменяемости по окружной координате. При значении этого показателя, меньшего или равного  $1/2$ , решение раскладывается в сходящийся ряд по специальным функциям  $D_{m,c}$  и  $D_{m,s}$ , введенных в этой же монографии [106]. При значении же показателя изменяемости по окружной координате, большего  $1/2$ , выделяются начальная, основная и приторцевая области. В начальной и приторцевой областях решение ищется с помощью разложения по тем же функциям  $D_{m,c}$  и  $D_{m,s}$ , а в основной – с помощью метода перевала.

Указанные методы, разработанные в [106], были использованы в [191],[111]

при определении нестационарного решения для изгибной составляющей в цилиндрической оболочке в общем случае неосесимметричного НДС. В настоящей работе проиллюстрируем применение специальных функций  $D_{m,c}$  и  $D_{m,s}$  для осесимметричного НДС в общем случае оболочек вращения.

Решая систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4.2.10) – (4.2.12) относительно изображений неизвестных искомых функций, будем искать независимые решения в экспоненциальном виде:

$$\begin{aligned} u^L &= U(\xi_0) \exp\left(\varepsilon^{-1/2} \int_0^{\xi_0} p(\xi_0) d\xi_0\right), \\ w^L &= W(\xi_0) \exp\left(\varepsilon^{-1/2} \int_0^{\xi_0} p(\xi_0) d\xi_0\right), \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

где  $U$ ,  $W$  – функции интенсивности,  $p(\xi_0)$  – подинтегральная составляющая функции изменчивости.

Для определения функции изменчивости выпишем систему (4.2.10) с асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon^{1/2})$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u^L}{d\xi^2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right) \frac{dw^L}{d\xi} &= 0, \\ \frac{1}{3} \frac{d^4 w^L}{d\xi^4} + \left(s^2 + \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2}\right) w^L - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right) \frac{du^L}{d\xi} &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Тогда для функции  $p$  получаем следующее алгебраическое уравнение:

$$\frac{1}{3} p^4 + s^2 + \frac{1 - \nu^2}{R_2^2} = 0. \quad (4.2.15)$$

Для удовлетворения граничным условиям на торце  $\xi = 0$  будем выбирать корни, которые имеют отрицательную действительную часть при  $Res > 0$ , что определяет затухание решения при удалении от рассматриваемого торца вглубь оболочки  $\xi > 0$ . Тогда получаем следующее выражение:

$$p_{1,2} = (-1 \pm i)k\left(s^2 + \frac{1 - \nu^2}{R_2^2}\right)^{1/4}, \quad k = 3^{1/4}/2^{1/2}. \quad (4.2.16)$$

Для обращения изображений решения будем применять разложение по отрицательным степеням параметра преобразования Лапласа [106]. Тогда для функций  $p$  получим представление:

$$p_{1,2} = -k\sqrt{s}\left[1 \pm i + O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right]. \quad (4.2.17)$$

Имеем следующую оценку для функции изменчивости решения:

$$\int_0^{\xi_0} p_{1,2}(\xi_0)d\xi_0 = -k\xi_0\sqrt{s}\left[(1 \pm i) + O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right]. \quad (4.2.18)$$

В этом случае система (4.2.14) приводится к алгебраической системе в форме:

$$\begin{aligned} p^2U - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)pW + \varepsilon^{1/2}\left[2pU' + \frac{B'}{B}pU - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)W'\right] &= 0, \\ \left(\frac{1}{3}p^4 + s^2 + \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1R_2} + \frac{1}{R_2^2}\right)W - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)pU + \\ + \varepsilon^{1/2}\left[\frac{4}{3}p^3W' + \frac{2B'}{3B}p^3W - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)U'\right] &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Разложим функции интенсивности в ряд по  $\varepsilon^{1/2}$ :

$$U = U_0 + \varepsilon^{1/2}U_1 + O(\varepsilon), \quad W = W_0 + \varepsilon^{1/2}W_1 + O(\varepsilon). \quad (4.2.20)$$

Подставляя (4.2.20) в (4.2.19), получаем систему для нулевого приближения

функций интенсивности:

$$p^2U_0 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)pW_0 = 0, \quad (4.2.21)$$

$$\left(\frac{1}{3}p^4 + s^2 + \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1R_2} + \frac{1}{R_2^2}\right)W_0 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)pU_0 = 0.$$

Из системы (4.2.21) следует соотношение связи между нулевыми приближениями функций интенсивности:

$$U_0 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)\frac{1}{p}W_0 \quad (4.2.22)$$

и уравнение (4.2.15), определяющее функцию изменчивости.

Приравнивая нулю в системе (4.2.19) члены при малом параметре  $\varepsilon^{1/2}$ , получаем систему, связывающую нулевое и первое приближения функций интенсивности:

$$\begin{aligned} p^2U_1 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)pW_1 &= -2pU'_0 - \frac{B'}{B}pU_0 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)W_0, \\ \left(\frac{1}{3}p^4 + s^2 + \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1R_2} + \frac{1}{R_2^2}\right)W_1 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)pU_1 &= \\ &= -\frac{4}{3}p^3W'_0 - \frac{2B'}{3B}p^3W_0 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)U'_0, \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

которая для неизвестных функций  $U_1$ ,  $W_1$  имеет нулевой определитель системы, дающий простейшее уравнение для определения  $W_0$ :

$$2W'_0 + \frac{B'}{B}W_0 = 0. \quad (4.2.24)$$

Это уравнение определяет решение для нулевого приближения функции интенсивности  $W_0$ :

$$W_0 = \frac{C_0}{\sqrt{B}}, \quad (4.2.25)$$

где  $C_0$  – произвольная постоянная. Следовательно, общее решение для нулевого приближения изображения прогиба принимает вид:

$$w^L = \frac{1}{\sqrt{B}} [C_1 \cos(k\xi\sqrt{s}) \exp(-k\xi\sqrt{s}) + C_2 \sin(k\xi\sqrt{s}) \exp(-k\xi\sqrt{s})], \quad (4.2.26)$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные.

Окончательно, общее решение для изображения изгибающего момента имеет следующую форму:

$$G_1^L = \frac{1}{\sqrt{B}} s [C_2 \cos(k\xi\sqrt{s}) \exp(-k\xi\sqrt{s}) - C_1 \sin(k\xi\sqrt{s}) \exp(-k\xi\sqrt{s})]. \quad (4.2.27)$$

Полученные решения позволяют удовлетворить граничному условию (4.2.12) и дают выражение для искомого изображения изгибающего момента:

$$G_1^L = \frac{I}{\sqrt{B}} \frac{1}{s} \cos(k\xi\sqrt{s}) \exp(-k\xi\sqrt{s}) \quad (4.2.28)$$

Отображение изображения (4.2.28) выполним с помощью специальных функций  $D_{m,c}$  и  $D_{m,s}$ , введённых и описанных в [106, с. 90], они являются отображением следующих типовых изображений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^{(m+1)/2}} \exp(-k\sqrt{s}) \cos(k\sqrt{s}) &\Rightarrow D_{m,c}(\tau_0, k), \\ \frac{1}{s^{(m+1)/2}} \exp(-k\sqrt{s}) \sin(k\sqrt{s}) &\Rightarrow D_{m,s}(\tau_0, k). \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

Выражения для функций с младшими номерами  $m$  определяются следую-

щим образом:

$$\begin{aligned}
 D_{m,c} &= (2\tau_0)^{\frac{m-1}{2}} d_{m,c}(y), & D_{m,s} &= (2\tau_0)^{\frac{m-1}{2}} d_{m,s}(y), & y &= \frac{k}{\sqrt{2\tau_0}}, \\
 d_{1,c} &= 1 - C(y^2) - S(y^2), & d_{2,c} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(y^2) - y[1 - 2S(y^2)], & & (4.2.30) \\
 d_{1,s} &= C(y^2) - S(y^2), & d_{2,s} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(y^2) + y[1 - 2C(y^2)], & &
 \end{aligned}$$

где  $C(y^2)$  и  $S(y^2)$  – интегралы Френеля. А выражения для функций со старшими номерами определяются рекуррентными отношениями:

$$\begin{aligned}
 d_{m,c} &= \frac{1}{m-1} [-y(d_{m-1,c} + d_{m-1,s}) + d_{m-2,c}], \\
 d_{m,s} &= \frac{1}{m-1} [y(d_{m-1,c} - d_{m-1,s}) + d_{m-2,s}].
 \end{aligned} \tag{4.2.31}$$

Окончательно, получаем в нулевом приближении выражение для изгибающего момента:

$$G_1 = I \sqrt{\frac{B(0)}{B}} D_{1,c}(\tau_0, k). \tag{4.2.32}$$

Для наглядности перепишем выражение (4.2.32) в следующем виде:

$$G_1 = I \sqrt{\frac{B(0)}{B}} \left[ 1 - C\left(\frac{\sqrt{3}\xi_0^2}{2\varepsilon\tau_0}\right) - S\left(\frac{\sqrt{3}\xi_0^2}{2\varepsilon\tau_0}\right) \right]. \tag{4.2.33}$$

Отметим, что решение (4.2.33) полностью обобщает решение для изгибающего момента, полученное в [106], [191] в случае цилиндрической оболочки. Однако решение для цилиндрической оболочки было получено методом разложения изображения в пространстве преобразования Лапласа по отрицательным степеням параметра преобразования, а здесь развит подход по применению метода экспоненциальных представлений в пространстве преобразования Лапласа.

### 4.3 Построение асимптотического решения для антисимметричного гиперболического погранслоя в оболочках вращения произвольного профиля в окрестности фронта волн расширения

Рассмотрим задачу для гиперболического погранслоя при действии на торец оболочки вращения осесимметричной по окружной координате и антисимметричной по нормальной координате ударной нагрузке, соответствующей условиям (1.2.2) при  $m = 0$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= I\zeta H(\tau), \quad \xi = 0, \\ \sigma_{33} &= 0, \quad \zeta_F = \pm\sqrt{1 + F^2}.\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

Также, как и в параграфе 3.3, мы используем переменные  $\xi$ ,  $\zeta_F$ ,  $\tau$ , описанные в параграфе 2.2, где переменная  $\zeta_F$  введена для определения повернутого, по отношению к нормали, положения прямолинейного волнового фронта, а безразмерная переменная  $\tau$  отнесена к скорости волны расширения  $c_1$ . В перемещениях граничные условия (4.3.1) запишутся в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial \xi} &= 2(1 + \nu)\varkappa^2 IH(\tau), \quad \xi = 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial \xi} &= 0, \quad \zeta_F = \pm\sqrt{1 + F^2}, \quad \varkappa = \frac{c_2}{c_1}.\end{aligned}\tag{4.3.2}$$

Разрешающие уравнения имеют при этом также вид (2.2.15).

Базовым в рассматриваемом случае оболочек вращения является решение для цилиндрической оболочки, полученное в [74]. В этом случае для рассматриваемых уравнений с постоянными коэффициентами можно применить интегральные преобразования Лапласа по времени и Фурье по продольной координате.

нате. Разрешающие уравнения при этом сохраняют форму (3.3.3), а граничные условия запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial \xi} &= I^* \zeta H(\tau), \quad \xi = 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial \xi} &= 0, \quad \zeta = \pm 1,\end{aligned}\tag{4.3.3}$$

где  $I^* = 2(1 + \nu)\alpha^2 I$ .

Как и в случае решения задачи для гиперболического погранслоя в параграфе 3.3, применяем интегральные преобразования в форме (3.3.5). Тогда краевая задача для изображения  $v_1^{LC}$  запишется в виде:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 v_1^{LC}}{d\zeta^2} - (\chi^2 + s^2) v_1^{LC} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} I^* \zeta \frac{1}{s}, \\ \zeta = \pm 1 : v_1^{LC} &= 0.\end{aligned}\tag{4.3.4}$$

Решение системы (4.3.4) даёт следующие выражения для основных компонент рассматриваемого НДС:

$$\begin{aligned}v_1^{LC} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 + \nu) \alpha^2 I \left( \frac{\text{sh } \alpha_1 \zeta}{s \alpha_1^2 \text{sh } \alpha_1} - \frac{1}{s \alpha_1^2} \zeta \right), \\ \sigma_{11}^{LS} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} I \chi \left( \frac{\text{sh } \alpha_1 \zeta}{s \alpha_1^2 \text{sh } \alpha_1} - \frac{1}{s \alpha_1^2} \zeta \right), \\ G_1^{LS} &= -2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} I \chi \left( \frac{\text{ch } \alpha_1}{s \alpha_1^3 \text{sh } \alpha_1} - \frac{1}{s \alpha_1^4} - \frac{1}{3 s \alpha_1^2} \right).\end{aligned}\tag{4.3.5}$$

При обращении преобразования Фурье для изображений  $v_1^{LC}$ ,  $\sigma_{11}^{LS}$ ,  $G_1^{LS}$  принимаем во внимание, что они являются мероморфными функциями с полюсами – корнями уравнения

$$\text{sh } \alpha_1 = 0,\tag{4.3.6}$$

которые определяются выражениями:

$$\chi_n = is \left( 1 + \frac{n^2 \pi^2}{s^2} \right)^{1/2}. \quad (4.3.7)$$

Следовательно, интегралы Фурье при обращении (4.3.5) могут быть разложены в ряд по этим полюсам:

$$\begin{aligned} v_1^L &= \frac{4\alpha^2(1+\nu)I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\pi\zeta)}{n^2 s^2 \left(1 + \frac{n^2 \pi^2}{s^2}\right)^{1/2}} \exp \left\{ -s \left[ 1 + \frac{(n-1/2)^2 \pi^2}{s^2} \right]^{1/2} \xi \right\}, \\ \sigma_{11}^L &= -\frac{2I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\pi\zeta)}{ns} \exp \left\{ -s \left[ 1 + \frac{(n-1/2)^2 \pi^2}{s^2} \right]^{1/2} \xi \right\}, \\ G_1^L &= \frac{4I}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 s} \exp \left\{ -s \left[ 1 + \frac{(n-1/2)^2 \pi^2}{s^2} \right]^{1/2} \xi \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Как уже было указано в параграфе 3.3, такое разложение соответствует разложению по модам колебаний, являющихся в данном случае асимптотическим представлением антисимметричных (по нормальной координате) мод колебаний плоского слоя.

Применяя метод прифронтной асимптотики в пространстве преобразования Лапласа, предложенный в [106], [74], разложим изображения (4.3.8) в степенные ряды по функциям (3.3.11):

$$\begin{aligned} v_1^L &= \frac{4\alpha^2(1+\nu)I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\pi\zeta)}{n s^2} \exp \left\{ -s \left[ 1 + \frac{(n-1/2)^2 \pi^2}{s^2} \right]^{1/2} \xi \right\}, \\ \sigma_{11}^L &= -\frac{2I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\pi\zeta)}{ns} \exp \left\{ -s \left[ 1 + \frac{(n-1/2)^2 \pi^2}{s^2} \right]^{1/2} \xi \right\}, \\ G_1^L &= \frac{4I}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 s} \exp \left\{ -s \left[ 1 + \frac{(n-1/2)^2 \pi^2}{s^2} \right]^{1/2} \xi \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Используя формулу обратного преобразования Лапласа (3.3.12) получим окончательные выражения для искомых компонент:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{2^{5/2} \varkappa^2 (1 + \nu) I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\tau - \xi)^{1/2} \sin(n\pi\zeta)}{n^2 \xi_0^{1/2}} J_1 \left( \sqrt{2} n \pi \sqrt{\xi(\tau - \xi)} \right) H(\tau - \xi), \\
 \sigma_{11} &= -\frac{2I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\pi\zeta)}{n} J_0 \left( \sqrt{2} n \pi \sqrt{\xi(\tau - \xi)} \right) H(\tau - \xi), \\
 G_1 &= \frac{4I}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} J_0 \left( \sqrt{2} n \pi \sqrt{\xi(\tau - \xi)} \right) H(\tau - \xi),
 \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

$J_0, J_1$  – функции Бесселя.

Поскольку имеет место следующее выражение для суммы ряда

$$\sum_{n=1}^8 \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{4.3.11}$$

то формула (4.3.11) определяет, что изгибающий момент  $G_1$  на торце  $\xi = 0$  равен  $2IH(\tau)/3$ , что соответствует скачку  $G_1$  на фронте при ударном воздействии на торец в начальный момент времени.

Перейдём теперь к рассмотрению гиперболического погранслоя в общем случае оболочек вращения при тех же граничных условиях (4.3.1). Как и в параграфе 3.3, строим его в малой окрестности фронта волны расширения с показателями изменяемости и динамичности  $q = a = 2$ . В переменных  $\xi_*, \tau_*$ , введенных по формулам (3.3.14), система разрешающих уравнений погранслоя будет совпадать с (3.3.15), а областью его действия будет окрестность  $\tau_0 - \xi_0 = O(\varepsilon^2)$ .

Анализ решения в изображениях для цилиндрической оболочки в форме (4.3.9) показывает, аналогично случаю гиперболического погранслоя при симметричном по нормальной координате торцевом воздействии (параграф 3.3), что члены ряда соответствуют модам колебаний пластины с комплексными

значениями параметра  $s$  – аналогом частотного параметра. В данном случае моды колебаний пластины определяются дисперсионным уравнением Рэлея-Лэмба для антисимметричных по нормальной координате колебаний.

Обобщим полученные решения для гиперболического погранслоя в цилиндрической оболочке, представляя изображение для компонент искомого НДС также разложением по модам с асимптотическим представлением решений для мод.

Представляем, как и ранее, решение для мод в виде (3.3.17) с аналогичными свойствами функций  $\psi(\xi_0)$  и  $\lambda(\xi_0)$ . Как и ранее, в конечном итоге получаем решения для этих функций в форме (3.3.20), которая позволяет записать выражение для искомым антисимметричных мод в следующем виде:

$$v_1^L = \frac{1}{\sqrt{B}} \sin\left(\frac{C\xi_F}{\sqrt{1+F^2}}\right) \exp\left(-\frac{s\xi_0}{\varepsilon^2} - C^2\frac{\xi_0}{s}\right). \quad (4.3.12)$$

Для удовлетворения решением (4.3.12) однородным граничным условиям на лицевых поверхностях зададим значения для постоянной  $C$  в следующем виде:

$$C = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3.13)$$

Выражение (4.3.12), с учётом (4.3.13), позволяет записать на основе базовых разложений (4.3.9) искомые асимптотические решения для изображений следующих компонент НДС  $v_1$ ,  $\sigma_{11}$ ,  $G_1$ :

$$\begin{aligned}
v_1^L &= \frac{4\mathfrak{a}^2(1+\nu)I}{\pi} \sqrt{\frac{B(0)}{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \left[ \frac{n\pi\zeta_F}{\sqrt{1+F^2}} \right]}{ns^2} \times \\
&\quad \times \exp \left[ -\varepsilon^{-2}\xi_0 s - \frac{1}{2}n^2\pi^2\xi_0 \frac{1}{s} \right], \\
\sigma_{11}^L &= -\frac{2I}{\pi} \sqrt{\frac{B(0)}{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \left[ \frac{n\pi\zeta_F}{\sqrt{1+F^2}} \right]}{ns} \times \\
&\quad \times \exp \left[ -\varepsilon^{-2}\xi_0 s - \frac{1}{2}n^2\pi^2\xi_0 \frac{1}{s} \right], \\
G_1^L &= \frac{4I}{\pi} \sqrt{\frac{B(0)}{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2s} \exp \left[ -\varepsilon^{-2}\xi_0 s - \frac{1}{2}n^2\pi^2\xi_0 \frac{1}{s} \right].
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Применяя далее преобразование (3.3.12), получаем выражения для иско-  
мых оригиналов:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{2^{5/2}\mathfrak{a}^2(1+\nu)I}{\pi} \sqrt{\frac{B(0)}{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( \frac{n\pi}{\sqrt{1+F^2}}\zeta_F \right) \times \\
&\quad \times J_1 \left( \sqrt{2}n\pi \sqrt{\xi(\tau-\xi)} \right) H(\tau-\xi), \\
\sigma_{11} &= -\frac{2I}{\pi} \sqrt{\frac{B(0)}{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \left( \frac{n\pi}{\sqrt{1+F^2}}\zeta_F \right) \times \\
&\quad \times J_0 \left( \sqrt{2}n\pi \sqrt{\xi(\tau-\xi)} \right) H(\tau-\xi), \\
G_1 &= \frac{4I}{\pi} \sqrt{\frac{B(0)}{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} J_0 \left( \sqrt{2}n\pi \sqrt{\xi(\tau-\xi)} \right) H(\tau-\xi).
\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

Как и в случае решения задачи для симметричного гиперболического погранс-  
лоя, асимптотическое решение (4.3.15) удовлетворяет граничным условиям на  
торце и лицевых поверхностях и удовлетворяет разрешающим уравнениям. При

этом сходимость рядов определяется сходимостью соответствующих рядов в решениях для цилиндрической оболочки.

#### 4.4 Область согласования изгибной составляющей теории Кирхгофа-Лява и антисимметричного коротковолнового высокочастотного приближения

В рассматриваемом параграфе проведём анализ расположения области согласования  $\mathcal{B}_2$  – области согласования рассмотренной ранее изгибной составляющей теории Кирхгофа-Лява (динамического простого краевого эффекта) и антисимметричного коротковолнового высокочастотного приближения. Как ранее отмечалось, в работе [106] рассматривалось согласование динамического погранслоя, в совокупности описывающего как гиперболический погранслоем в окрестности фронта волны расширения, так и коротковолновое высокочастотное приближение, с динамическим простым краевым эффектом. Устанавливалось при этом расположение области согласования путём сравнения асимптотик решений, полученных методом интегрального преобразования Лапласа, методом экспоненциального представления решений в пространстве изображений по Лапласу, а также методом перевала при обращении изображений. В этом случае область согласования (аналог области  $\mathcal{B}_2$ ) определялась следующим асимптотическим неравенством, имеющим для осесимметричного случая при  $\tau_0 = O(1)$  вид [111]:

$$\varepsilon^{1/2} \ll \xi_0 \ll \varepsilon^{1/4}. \quad (4.4.1)$$

Отметим, что при выделении антисимметричного коротковолнового высокочастотного приближения область его согласования с изгибной двумерной составляющей (динамическим простым краевым эффектом) рассматривалась

на примере цилиндрической оболочки в работах [191], [112]. Здесь также расположение области согласования определялось на базе сравнения асимптотик решения, что приводило к оценке границ искомой области согласования в форме (4.4.1).

В настоящем параграфе область согласования рассматриваемых составляющих (изгибной двумерной составляющей и антисимметричного коротковолнового высокочастотного приближения) определяется на базе сравнения асимптотик самих разрешающих уравнений. Начнём с анализа поведения уравнений изгибной составляющей при выходе из области применимости.

Область применимости уравнений изгибной составляющей (4.2.7) определяется изменяемостью решения по продольной координате и имеет основной размер по этой координате порядка  $O(\varepsilon^{1/2})$ . Следовательно, в приграничной переходной зоне, рассматриваемой как область согласования с соседней коротковолновой высокочастотной составляющей, показатель изменяемости больше  $1/2$ . Соответственно введём новую переменную  $\xi_*$ , отвечающую увеличенному значению показателя изменяемости и новую временную переменную  $\tau_*$ :

$$\xi = \varepsilon^r \xi_*, \quad \tau_0 = \varepsilon^{2r} \tau_*, \quad r > 0. \quad (4.4.2)$$

Введём также показатель уменьшенной интенсивности продольного перемещения

$$u = \varepsilon^r u_*. \quad (4.4.3)$$

Таким образом мы определим новые значения показателей изменяемости и динамичности решения для параболического погранслоя в предполагаемой области согласования:  $q = 1/2 + r$ ,  $a = 2r$ .

Перейдём в уравнениях (4.2.7) к новым переменным  $\xi_*$ ,  $\tau_*$  и перемещению  $u_*$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_*}{\partial \xi_*^2} - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) \frac{\partial w}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{\frac{1}{2}+r} \frac{B'}{B} \frac{\partial u_*}{\partial \xi_*} = 0, \\
& \frac{1}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi_*^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau_*^2} + \varepsilon^{4r} \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) w - \\
& - \varepsilon^{4r} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) \frac{\partial u_*}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{\frac{1}{2}+r} \frac{2B'}{3B} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi_*^3} = 0.
\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

Отметим, что с асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon^{4r})$  во втором уравнении (4.4.4) можно пренебречь членами, содержащими радиусы кривизны. Такое предположение соответствует приближенному решению краевой задачи для рассматриваемой составляющей, изложенному в параграфе 4.2, когда оно ищется методом экспоненциальных представлений в пространстве преобразования Лапласа по временной переменной, и получено, в конечном итоге, в нулевом приближении, в форме (4.2.32). Отметим также, что при  $r > 1/6$  указанными членами с радиусами кривизны можно пренебречь по сравнению с членом, содержащим функцию  $B$  и её производную. Тогда интегрирование системы (4.4.4) сводится к интегрированию следующего разрешающего уравнения:

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi_*^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau_*^2} + \varepsilon^{\frac{1}{2}+r} \frac{2B'}{3B} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi_*^3} = 0. \tag{4.4.5}$$

Значит, уравнение (4.4.5) описывает изгибающую составляющую при  $r > 0$ , что соответствует области  $\xi_0 \gg \varepsilon^{1/2}$ .

Перейдём теперь к построению асимптотически оптимальных уравнений для антисимметричного коротковолнового высокочастотного приближения в предполагаемой области согласования. Разрешающие уравнения для асимптотически главных компонент рассматриваемой составляющей имеют вид (1.5.3) – (1.5.4). Введём для изучаемой области показатели изменчивости и динамичности:

$$q = \frac{1}{2} + r, \quad a = 2r \quad (0 < r < 1/2), \tag{4.4.6}$$

что соответствует показателям изменяемости и динамичности в предполагаемой области согласования для параболического погранслоя. Перейдём в разрешающих уравнениях к безразмерным переменным с учётом изменяемости и динамичности:

$$\alpha = R\varepsilon^{1/2+r}\xi_*, \quad z = R\varepsilon\zeta, \quad t = \frac{R}{c_2}\varepsilon^{2r}\tau_*. \quad (4.4.7)$$

Зададим также асимптотические величины компонент напряжений и перемещений в виде:

$$\begin{aligned} v_1 &= R\varepsilon v_1^*, \quad v_3 = R\varepsilon^{1/2+r}v_3^*, \\ \sigma_{11} &= E\varepsilon^{1/2-r}\sigma_{11}^*, \quad \sigma_{31} = E\varepsilon^{1-2r}\sigma_{31}^*, \quad \sigma_{33} = E\varepsilon^{3/2-3r}\sigma_{33}^*, \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

где, как обычно, величины со звёздочками обладают одним и тем же асимптотическим порядком. Перейдём в уравнениях (1.5.3) – (1.5.4) к безразмерным переменным (4.4.7) и компонентам НДС (4.4.8). Пренебрегая в этих уравнениях величинами порядка  $O(\varepsilon^{1-2r})$ , приходим к системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{31}^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{11}^*}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \frac{B'}{B} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{33}^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{31}^*}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \frac{B'}{B} \sigma_{31}^* - \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v_3^*}{\partial \tau_*^2} &= 0, \\ \sigma_{11}^* &= \frac{1}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial v_1^*}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \nu \frac{B'}{B} v_1^* \right), \\ \sigma_{22}^* &= \frac{1}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial v_1^*}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \nu \frac{B'}{B} v_1^* \right), \\ \frac{\partial v_3^*}{\partial \zeta} &= 0, \\ \frac{\partial v_1^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_3^*}{\partial \xi_*} &= 0. \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Анализ уравнений (4.4.9) показывает следующую зависимость компонент НДС от нормальной координаты  $\zeta$ :

$$\begin{aligned} v_1^* &= \zeta v_1^{(1)}, \quad v_3^* = v_3^{(0)}, \quad \sigma_{11}^* = \zeta \sigma_{11}^{(1)}, \\ \sigma_{31}^* &= \sigma_{31}^{(0)} + \zeta^2 \sigma_{31}^{(2)}, \quad \sigma_{33}^* = \zeta \sigma_{33}^{(1)} + \zeta^3 \sigma_{33}^{(2)}, \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

которая показывает выполнение геометрических гипотез Кирхгофа-Лява теории оболочек относительно неизменности как длины нормального элемента к срединной поверхности, так и его перпендикулярности к ней.

Учитывая граничные условия на лицевых поверхностях

$$\sigma_{31}^* = \sigma_{33}^* = 0, \quad \zeta = \pm 1, \quad (4.4.11)$$

получаем следующие зависимости для составляющих асимптотического разложения компонент НДС по нормальной координате:

$$\begin{aligned} v_1^{(1)} &= -\frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \xi_*}, \\ \sigma_{11}^{(1)} &= \frac{1}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \nu \frac{B'}{B} v_1^{(1)} \right), \\ \sigma_{31}^{(0)} &= -\sigma_{31}^{(2)}, \\ \sigma_{31}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \sigma_{11}^{(1)}}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \frac{B'}{B} (\sigma_{11}^{(1)} - \sigma_{22}^{(1)}) \right], \\ \sigma_{33}^{(1)} &= -\frac{\partial \sigma_{31}^{(0)}}{\partial \xi_*} - \varepsilon^{1/2+r} \frac{B'}{B} \sigma_{31}^{(0)} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v_3^{(0)}}{\partial \tau_*^2}, \\ \sigma_{33}^{(3)} &= -\frac{1}{3} \left( \frac{\partial \sigma_{31}^{(2)}}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \frac{B'}{B} \sigma_{31}^{(2)} \right). \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

Система (4.4.12) позволяет получить следующее разрешающее уравнение

относительно прогиба  $v_3^{(0)}$ :

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^4 v_3^{(0)}}{\partial \xi_*^4} - \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 v_3^{(0)}}{\partial \tau_*^2} + \varepsilon^{\frac{1}{2}+r} \frac{2B'}{3B} \frac{\partial^3 v_3^{(0)}}{\partial \xi_*^3} = 0. \quad (4.4.13)$$

Учитывая, что  $c_2^2/c_3^2 = (1 - \nu)/2$ , получаем, что безразмерные переменные  $\tau_*^{(2)}$  из (4.4.7) и  $\tau_*^{(1)}$  из (4.4.2), отнесенные, соответственно, к скоростям волны сдвига  $c_2$  и волны растяжения-сжатия по двумерной теории Кирхгофа-Лява  $c_3$ , связаны соотношением:

$$\tau_*^{(2)} = \sqrt{\frac{1 - \nu}{2}} \tau_*^{(1)} \quad (4.4.14)$$

и уравнения (4.4.5), (4.4.13) совпадают в области изменения показателя  $q$

$$\frac{1}{2} < q < 1. \quad (4.4.15)$$

Это соответствует границам области согласования изгибной составляющей теории Кирхгофа-Лява и антисимметричной коротковолновой высокочастотной составляющей, определяемой следующим асимптотическим неравенством:

$$\varepsilon^{1/2} \ll \xi_0 \ll 1. \quad (4.4.16)$$

Данный вывод, основанный на сравнении асимптотик разрешающих уравнений, уточняет оценку (4.4.1).

#### **4.5 Область согласования антисимметричного гиперболического погранслоя и антисимметричного коротковолнового высокочастотного приближения**

В параграфе 3.7 приведено исследование особенностей существования и расположения области согласования гиперболического погранслоя, действующего в окрестности фронта волны расширения, и симметричного коротковолнового высокочастотного приближения. В настоящем параграфе рассматривается аналогичная задача, но только вместо симметричного гиперболического погранслоя и симметричного коротковолнового высокочастотного приближения мы будем работать с их антисимметричными аналогами.

Как и в предшествующем случае, предполагаем, что в переходной зоне решения показатели изменчивости и динамичности увеличиваются от значений  $q = a = 1$  до значений  $q = a = 2$ . Тогда, переходя в уравнениях для антисимметричного коротковолнового высокочастотного приближения к новым переменным (3.7.3), получаем асимптотическое представление разрешающего уравнения, совпадающее с (3.7.9). Следовательно, область согласования в рассматриваемом антисимметричном случае совпадает с областью согласования в предыдущем случае и определяется областью (3.7.10).

#### **4.6 Численный анализ нестационарного НДС сферических оболочек при торцевом LM ударном нагружении**

Как и было заявлено в параграфе 3.8, анализ свойств решений для компонент НДС при LM ударном торцевом нагружении будем проводить на базе разработанных асимптотических решений для основных составляющих – изгибной

составляющей и гиперболического погранслоя – на примере сферической оболочки. Расчёты для случая ЛТ торцевого воздействия показали удобство рассмотрения нестационарных волновых процессов в сферической оболочке, как модельном примере, для оценки эффективности разработанных аналитических методов.

Геометрическая модель сферической оболочки, соответствующая выбранной в Главе 1 для оболочек вращения системе координат, представлена рисунком 3.3 и формулами (3.8.1). Рассматриваем асимптотические решения для компонент НДС, разработанные в параграфах 4.2 и 4.3.

Анализ решения для изгибной двумерной составляющей теории Кирхгофа-Лява проведём на примере изгибающего момента  $G_1$ . Согласно формуле (4.2.32) нулевое приближение решения для него запишется в виде:

$$G_1 = I \sqrt{\frac{\sin(\theta_T)}{\sin(\theta_T + \xi_0)}} D_{1,c}(\tau_0, k), \quad \xi = \varepsilon^{1/2} \xi_0, \quad \xi_0 = \alpha/R, \quad \tau_0 = c_3 t/R, \quad (4.6.1)$$

где специальная функция  $D_{1,c}$  определена формулами (4.2.30).

В работах [106], [191] проведены расчёты изгибающего момента  $G_1$  для осесимметричной ЛМ нагрузки на торец цилиндрической оболочки. Расчёты же для сферической оболочки представлены графиками на рисунке 4.3. Здесь кривые 1 и 2 соответствуют моментам безразмерного времени  $\tau_0 = 1$  и  $\tau_0 = 2$ . Геометрические и механические параметры принимались, как и в Главе 3, следующими:  $\theta_T = 0.2$ ,  $\varepsilon = 0.05$ ,  $\nu = 0.3$ .

Расчёты показывают поведение изгибающего момента при удалении от торца: он с ростом времени осциллирует, затухая.

Перейдём к решению задачи для гиперболического погранслоя, представленному формулами (4.3.15). Будем рассматривать поведение изгибающего мо-

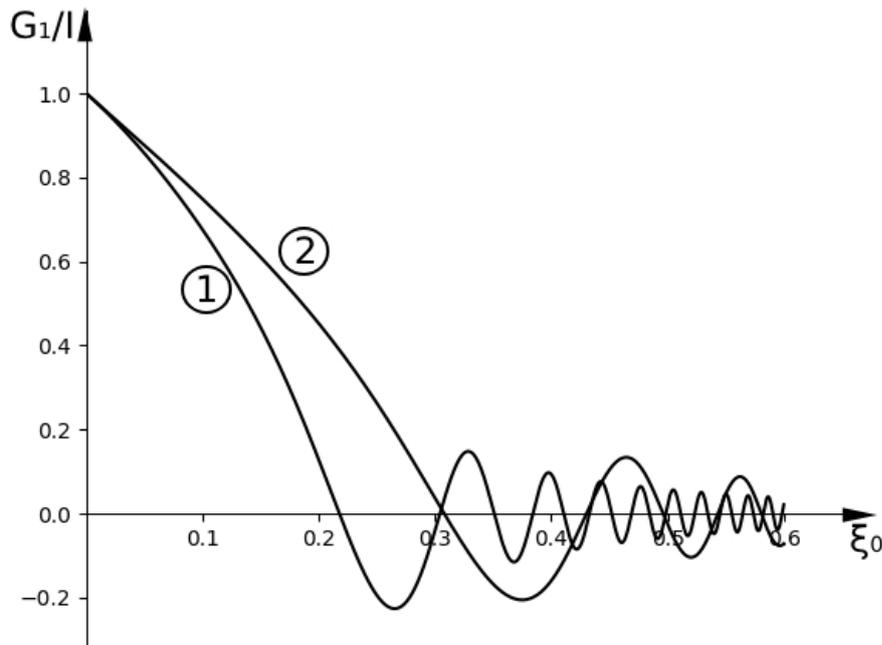


Рисунок 4.3 — Графики изгибающего момента  $G_1$  в моменты времени  $\tau_0 = 1$  (график 1) и  $\tau_0 = 2$  (график 2)

мента, задаваемого следующей формулой:

$$G_1 = \frac{4I}{\pi} \sqrt{\frac{\sin(\theta_T)}{\sin(\theta_T + \xi_0)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} J_0 \left[ \sqrt{2} n \pi \sqrt{\xi_0(\tau_0 - \xi_0)} \varepsilon^{-1} \right] H(\tau_0 - \xi_0), \quad (4.6.2)$$

$$\xi_0 = \alpha/R, \quad \tau_0 = c_1 t/R.$$

Расчёты для рассматриваемого гиперболического погранслоя проведены для прифронтной области. Поведение фронта волны расширения проанализировано в параграфе 3.8 на примере гиперболического погранслоя в случае LT ударного торцевого воздействия; в рассматриваемом случае картина поведения этого фронта полностью аналогична. На рисунке 4.4 изображены расчёты изгибающего момента в узкой окрестности фронта для моментов времени  $\tau_0 = 1$  и  $\tau_0 = 2$ , а также выбранных ранее значениях геометрических и механических параметров.

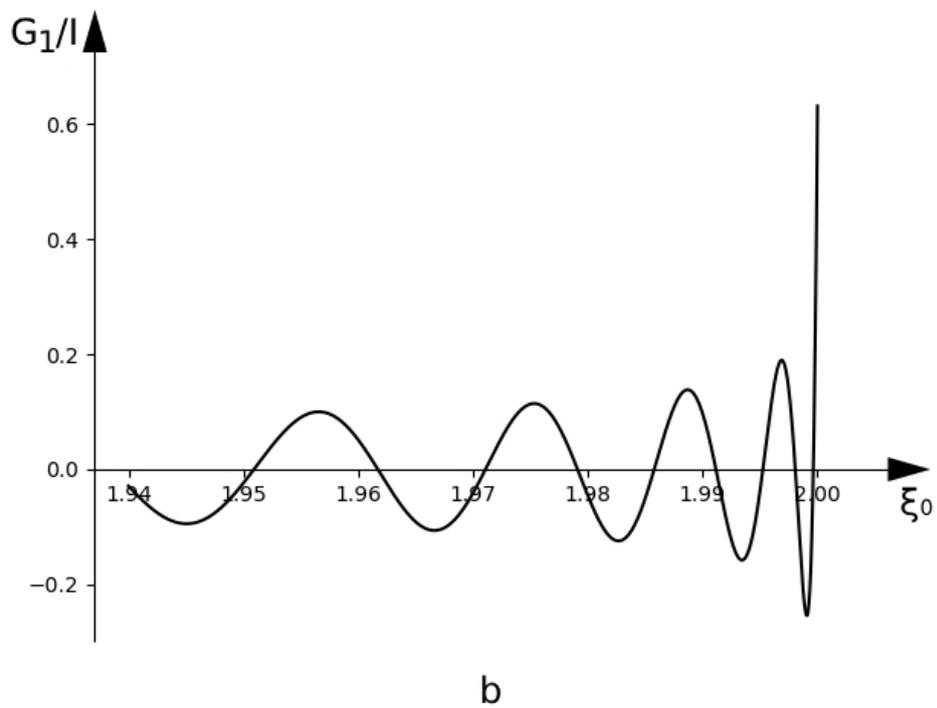
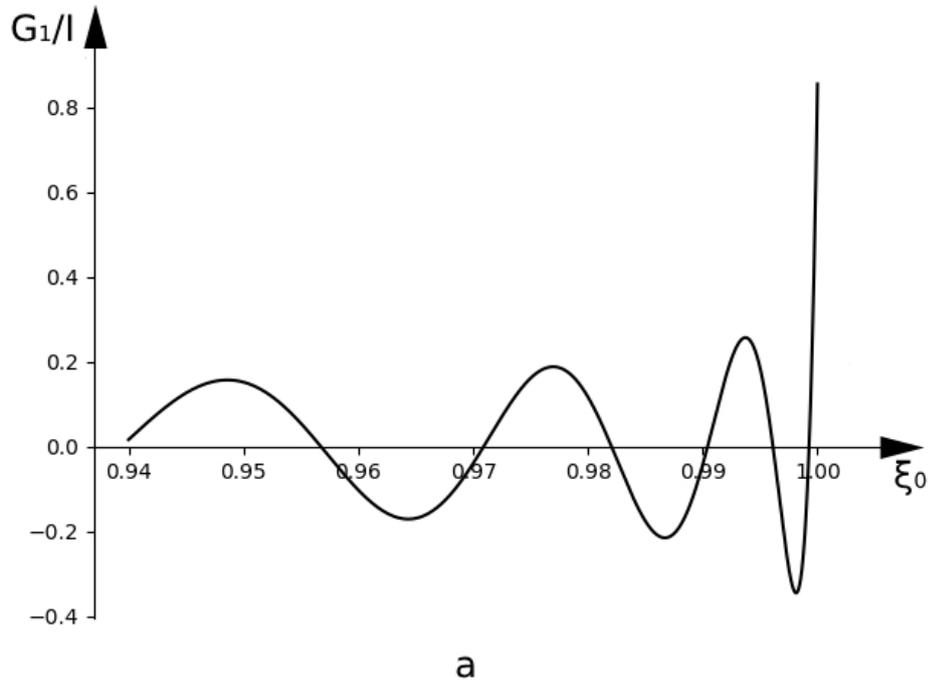


Рисунок 4.4 — Графики изгибающего момента  $G_1/I$  в окрестности фронта волны расширения в моменты времени  $\tau_0 = 1$  (a) and  $\tau_0 = 2$  (b)

## Глава 5

# Асимптотический вывод уравнений эллиптического погранслоя в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея для оболочек вращения произвольного профиля

В Главе 1 приведено краткое описание схемы расчленения нестационарного НДС на составляющие с различными показателями изменчивости и динамичности при торцевых воздействиях нормального типа. Здесь выделена область  $\mathcal{R}_3$  в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея, где решение носит быстроизменяющийся характер и, по сути своей, является погранслоем, а условный фронт поверхностных волн Рэлея ( $\alpha = c_R t$ ) – квазифронт. Асимптотический метод, позволяющий построить уравнения для этого погранслоя, позволяет проанализировать его характер и по новому взглянуть на степень применимости теорий типа Тимошенко, создающих новый (с точки зрения трёхмерной теории упругости) ложный фронт волны сдвига. Помимо этой области теории типа Тимошенко не дают ничего нового по сравнению даже с теорией Кирхгофа-Лява.

Эллиптический тип выведенных в данной главе уравнений погранслоя определяет и новые его свойства по сравнению со свойствами параболического погранслоя в окрестности квазифронта и гиперболических погранслоёв в окрестностях фронтов волн расширения и сдвига.

Тонкие оболочки являются геометрически сложными конструкциями, поэтому для исследования искомого погранслоя необходимо было сначала выявить аналогичные решения в классической задаче Ламе о действии сосредоточенных ударных нормальных нагрузок на границу полуплоскости [68]. Здесь

впервые была сформулирована асимптотическая модель, выделившая дальнейшее поле волны Рэлея в случае плоской деформации. Эта модель определяет движение скачка компонент нестационарного НДС вдоль границы полуплоскости со скоростью условного фронта волны Рэлея через граничное условие, задаваемое уравнением гиперболического типа. При этом затухание решения вглубь полуплоскости задаётся уравнениями эллиптического типа. Затем разработанная методика была использована для анализа распространения волны Блюштейна-Гуляева в трансверсально изотропном пьезо-электрическом пространстве [192].

Анализ нестационарного НДС в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея для тонкостенных конструкций впервые был начат в работах [125], [118] – [120] на примере бесконечного слоя и бесконечной цилиндрической оболочки при действии ударных нормальных воздействий на лицевые поверхности. Затем были рассмотрены случаи полубесконечного слоя [126], [93], [97] и полубесконечной цилиндрической оболочки [94] – [96], [117], [159] – [160].

Общая схема расчленения нестационарного НДС при ударных поверхностных и торцевых воздействиях нормального типа в общем случае оболочек вращения (и введение понятия «эллиптический погранслой»), а также и вывод асимптотически оптимальных уравнений эллиптического погранслоя приведены в работах [200], [201], [113] – [115], [78], [79], [81], [85] – [87]. Эти работы используются в данной главе для системного изложения теории эллиптического погранслоя. Таким образом опыт, приобретённый при изучении рассматриваемых волновых процессов в геометрически простых телах, используется при выводе асимптотически оптимальных уравнений эллиптического погранслоя в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея в тонких оболочках произвольного профиля на примере оболочек вращения. Сначала рассматривается полуплоскость с криволинейной границей и показывается, что соответствующие уравнения для эллиптического погранслоя в криволинейных координатах полностью аналогичны соответствующим уравнениям в декартовых координатах для случая полуплоскости с прямолинейной границей. Затем рассматрива-

ются оболочки вращения при действии нормальной ударной нагрузки на лицевые поверхности. Использование здесь символического метода Лурье позволяет построить асимптотические уравнения рассматриваемого погранслоя для общего случая задачи при разрешающих уравнениях с переменными по продольной координате коэффициентами. Построены два приближения асимптотически оптимальных уравнений искомого погранслоя. Первое приближение соответствует волнам, инициируемым лицевыми поверхностями без учёта их отражения от противоположных лицевых поверхностей. Второе приближение учитывает влияние на НДС первых отражённых волн.

Завершается глава построением асимптотически оптимальных уравнений эллиптического погранслоя для случая торцевых нагрузок. При этом задача сводится к эквивалентной задаче о действии специальной поверхностной нагрузки.

## 5.1 Уравнения нестационарного НДС в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея для полуплоскости с криволинейной границей

Рассмотрим полуплоскость с криволинейной границей (рисунок 5.1). Отнесём рассматриваемую полуплоскость к координатной системе  $(\alpha, z)$ , где  $\alpha$  – длина дуги граничной линии,  $z$  – нормальная координата. Тогда уравнения движения и уравнения состояния запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \alpha} + H \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + \frac{2}{R_1} \sigma_{13} - \rho H \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \alpha} + H \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} - \frac{1}{R_1} (\sigma_{11} + \sigma_{33}) - \rho H \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

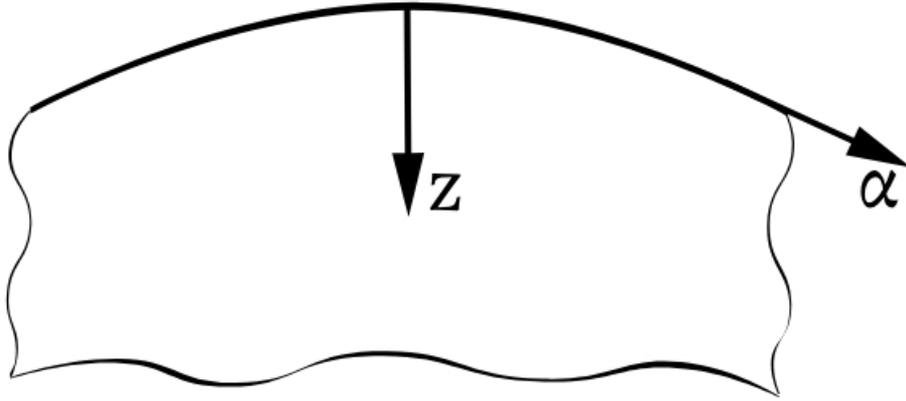


Рисунок 5.1 — Криволинейные координаты полуплоскости с криволинейной границей

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2} \left( \frac{1}{H} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{1}{HR_1} v_3 \right), \\
 \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2} \left( \frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{H} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{HR_1} v_3 \right), \\
 \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{1}{H} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} - \frac{1}{HR_1} v_1 \right).
 \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

где  $H = 1 + z/R_1$ ,  $R_1$  — радиус кривизны координатной линии  $\alpha$ ,  $\varkappa = c_2/c_1$ .

Предполагая, как и в случае прямолинейной границы [68], что искомое поле НДС затухает при удалении от границы по нормали к ней, обозначим глубину его проникновения по оси  $z$  через  $h$ , а характерный размер расстояния, пройденного волной Рэлея вдоль границы через  $R$ . Будем рассматривать такие моменты времени, когда  $R$  имеет тот же порядок, что и  $R_1$ . Аналогично случаю прямолинейной границы принимаем, что  $h \ll R$ . Введём малый параметр  $\varepsilon = h/R$ . Тогда, пренебрегая в уравнениях движения величинами второго по-

рядка малости  $O(\varepsilon^2)$ , получим следующую их форму:

$$\begin{aligned}
& \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z} - \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \\
& + \frac{z}{R_1} \left( -\varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \right) + \\
& + \frac{1}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{1}{R_1} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} = 0, \\
& \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \\
& + \frac{z}{R_1} \left( -\frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \right) - \\
& - \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{1}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \varkappa^{-2} \frac{1}{R_1} \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0,
\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

а уравнения состояния могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_3}{\partial z} - \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_1} v_3 \right), \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2} \left( \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_3}{\partial z} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{R_1} v_3 \right), \\
\sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} - \frac{1}{R_1} v_1 - \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} \right).
\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Считаем, что изменяемость искомого НДС в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея равна единице, т.е. характерная длина рисунка деформации соизмерима с характерным размером глубины проникновения по оси  $z$ . Это предположение находит полное подтверждение в дальнейших рассуждениях.

В соответствии с принятыми предположениями, введём безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{\alpha}{h}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad \tau = \frac{c_2 t}{h} \quad (5.1.5)$$

Тогда разрешающие уравнения (5.1.3) – (5.1.4) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \varkappa^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{\zeta}{R_1^*} \left( -\varkappa^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} \right) + \varepsilon \frac{1}{R_1^*} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \varepsilon \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{1}{R_1^*} \frac{\partial v_3}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi^2} + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{\zeta}{R_1^*} \left( -\frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi^2} + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta^2} - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} \right) - \varepsilon \varkappa^{-2} \frac{1}{R_1^*} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} = 0, \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} + \varepsilon \left( -\frac{\zeta}{R_1^*} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{1}{R_1^*} v_3 \right) \right], \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} + \varepsilon \left( -\frac{\nu}{1-\nu} \frac{z}{R_1^*} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{R_1^*} v_3 \right) \right], \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_3}{\partial \xi} - \varepsilon \left( \frac{1}{R_1^*} v_1 + \frac{z}{R_1^*} \frac{\partial v_3}{\partial \xi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Анализ уравнений (5.1.6) - (5.1.7) показывает, что асимптотически главные части этой системы и части первого порядка малости имеют противоположные свойства чётности и нечётности членов уравнений по координате  $\zeta$ . Такое свойство было использовано в [106] для выделения основной компоненты НДС и асимптотически второстепенной компоненты при выводе асимптотических уравнений динамического погранслоя, объединяющего в этой книге высокочастотную коротковолновую составляющую и гиперболический погранслой.

Воспользуемся здесь тем же приёмом.

Таким образом, будем искать НДС, описанное уравнениями (5.1.6) - (5.1.7) в виде наложения основной и второстепенной составляющих. Обозначим волновой компоненты основной составляющей и двумя волнами – второстепенной составляющей. Тогда компоненты НДС представляются в виде:

$$v_i = \tilde{v}_i + \varepsilon \tilde{\tilde{v}}_i, \quad \sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} + \varepsilon \tilde{\tilde{\sigma}}_{ij}, \quad i, j = 1, 3. \quad (5.1.8)$$

Уравнения движения и состояния для асимптотически главной составляющей записываются следующим образом (волны опускаем):

$$\begin{aligned} \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} &= 0, \\ \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi^2} + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} &= 0, \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2} \left( \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} \right), \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} \right). \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

Запишем разрешающие уравнения в исходных размерных координатах:

$$\begin{aligned} \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z} - \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\mathfrak{x}^2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_3}{\partial z} \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\mathfrak{x}^2} \left( \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right), \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} \right).\end{aligned}\tag{5.1.12}$$

Таким образом, в координатах  $(\alpha, z)$ , где  $\alpha$  – длина дуги граничной линии, система уравнений (5.1.11) – (5.1.12) формально совпадает с системой динамических уравнений плоского напряженного состояния. Это означает, что с требуемой асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon)$  можно воспользоваться разработанной в [68] асимптотической моделью для случая упругой полуплоскости.

Рассмотрим случай нестационарного нормального воздействия на границе  $z = 0$  при нулевых начальных условиях:

$$\sigma_{33} = -P(\alpha, t), \quad \sigma_{13} = 0,\tag{5.1.13}$$

где  $P(\alpha, t)$  – заданное напряжение. Согласно модели [68] напряжения выражаются через потенциальные функции  $\varphi_\alpha, \varphi_z$  следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \left( 1 + \frac{c_R^2}{2c_2^2} - \frac{c_R^2}{c_1^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial \alpha \partial z} \right], \\ \sigma_{33} &= -\frac{E}{1+\nu} \left[ \left( 1 - \frac{c_R^2}{2c_2^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial \alpha \partial z} \right], \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial \alpha \partial z} - \left( 1 - \frac{c_R^2}{2c_2^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial \alpha^2} \right],\end{aligned}\tag{5.1.14}$$

где потенциальные функции определяются эллиптическими уравнениями:

$$\begin{aligned} \left(1' - \frac{c_R^2}{2c_1^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial z^2} &= 0, \\ \left(1 - \frac{c_R^2}{2c_1^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

с граничными условиями при  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - c_R^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} &= \frac{(1 + \nu)c_R^2 B_\omega}{E \varkappa_R} \frac{\partial P}{\partial \alpha}, \\ \chi &= \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z} = \left(1 - \frac{c_R^2}{2c_2^2}\right) \frac{\partial \varphi_z}{\partial \alpha}, \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

где функция  $\chi(\alpha, t)$  является одномерной, а коэффициенты  $\varkappa_R$ ,  $B_\omega$  определяются выражениями:

$$\varkappa_R = \frac{c_R}{c_2}, \quad B_\omega = 2 \left( \frac{\varkappa_R}{1 - \varkappa_R^2} + \frac{\varkappa_R^2 \varkappa_R}{1 - \varkappa_R^2 \varkappa_R} - \frac{2\varkappa_R}{1 - \varkappa_R^2/2} \right)^{-1}. \quad (5.1.17)$$

Уравнения (5.1.15) – (5.1.16) определяют специфические свойства рассматриваемой составляющей нестационарного НДС полуплоскости: как и в случае прямолинейной границы, оно на своей криволинейной границе определяется волновым гиперболическим уравнением, а затухание при удалении от границы вглубь полуплоскости определяется системой эллиптических уравнений. Поэтому мы и называем рассматриваемую составляющую эллиптическим погранслоем. Такой же термин мы сохраним и для соответствующей составляющей в случае оболочек вращения.

## 5.2 Асимптотический вывод уравнений

### эллиптического погранслоя в оболочках вращения произвольного профиля при ударных поверхностных нагрузках

Рассмотрим осесимметричные нестационарные волны в оболочке вращения, изображенной на рисунке 1.1, при действии нормальных ударных воздействий на её лицевые поверхности. Используем введенную в параграфе 1.1 криволинейную систему координат  $(\alpha, \theta, z)$ . Тогда уравнения движения и закон Гука имеют вид (2.1.19) – (2.1.20)

Введём безразмерные координаты (5.1.5) и безразмерные радиусы кривизны  $R_i^* = R_i/R$  (звёздочки в дальнейшем опускаем). Перепишем разрешающие уравнения (2.1.19) – (2.1.20) в безразмерной форме:

$$\begin{aligned}
 & \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\zeta}{R_1} \left( -\varkappa^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} \right) + \varepsilon \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \varepsilon \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \\
 & + \varepsilon \left( \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_3}{\partial \xi} = 0, \\
 & \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi^2} + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{\zeta}{R_1} \left( -\frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi^2} + \right. \\
 & \left. + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} \right) - \varepsilon \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{1}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{1}{1-2\nu} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \\
 & + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \xi} + \varepsilon \varkappa^{-2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} = 0,
 \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2 h} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} + \varepsilon \left( -\frac{\zeta}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{B'}{B} v_1 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{R_2} \right) v_3 \right], \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2 h} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} + \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon \frac{\nu}{1-\nu} \left( -\frac{\zeta}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{B'}{B} v_1 \right) + \varepsilon \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_3 \right], \\
\sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)h} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_3}{\partial \xi} - \varepsilon \left( \frac{1}{R_1} v_1 + \frac{\zeta}{R_1} \frac{\partial v_3}{\partial \xi} \right) \right].
\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Структура уравнений (5.2.1) – (5.2.2) обобщает структуру уравнений (5.1.6) – (5.1.7): асимптотически главные части этой системы и части первого порядка малости имеют противоположные свойства чётности и нечётности членов по координате  $\zeta$ . Поэтому искомую составляющую будем искать в виде наложения «симметричной» и «антисимметричной» по  $\zeta$  составляющих. Обозначим волной асимптотически главную и двумя волнами – второстепенную составляющие согласно формулам (5.1.8). Тогда разрешающие уравнения для асимптотически главной составляющей (волны опускаем) могут быть записаны с погрешностью  $O(\varepsilon^2)$  следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} + \varepsilon \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} &= 0, \\
\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi^2} + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} + \\
+ \varepsilon \left( \frac{1}{1-2\nu} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \xi} \right) &= 0,
\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2 h} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} + \varepsilon \frac{\nu}{1-\nu} \frac{B'}{B} v_1 \right), \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2 h} \left( \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} + \varepsilon \frac{\nu}{1-\nu} \frac{B'}{B} v_1 \right), \\
\sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)h} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_3}{\partial \xi} \right).
\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Дальнейший вывод асимптотически оптимальных уравнений эллиптического погранслоя будем вести с помощью символического метода Лурье. Введём для этого операторные обозначения:

$$\partial_\xi = \partial/\partial \xi, \quad \partial_\tau = \partial/\partial \tau \tag{5.2.5}$$

Запишем уравнения (5.2.3), (5.2.4) как обыкновенные дифференциальные уравнения относительно переменной  $\zeta$ , рассматривая операторы  $\partial_\xi$ ,  $\partial_\tau$  как некие постоянные:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 v_1}{d\zeta^2} + (\varkappa^{-2} \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2) v_1 + \frac{\partial_\xi}{1-2\nu} \frac{dv_3}{d\zeta} + \varepsilon \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \partial_\xi v_1 &= 0, \\
\frac{\partial_\xi}{1-2\nu} \frac{dv_1}{d\zeta} + \varkappa^{-2} \frac{d^2 v_3}{d\zeta^2} + (\partial_\xi^2 - \partial_\tau^2) v_3 + \varepsilon \frac{B'}{B} \left( \frac{1}{1-2\nu} \frac{dv_1}{d\zeta} + \partial_\xi v_3 \right) &= 0,
\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2 h} \left( \partial_\xi v_1 + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{dv_3}{d\zeta} + \varepsilon \frac{\nu}{1-\nu} \frac{B'}{B} v_1 \right), \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\varkappa^2 h} \left( \frac{\nu}{1-\nu} \partial_\xi v_1 + \frac{dv_3}{d\zeta} + \varepsilon \frac{\nu}{1-\nu} \frac{B'}{B} v_1 \right), \\
\sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)h} \left( \frac{dv_1}{d\zeta} + \partial_\xi v_3 \right).
\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Решение (5.2.6) ищем в виде:

$$v_1 = e^{\lambda\zeta} D, \quad v_3 = e^{\lambda\zeta} F, \quad (5.2.8)$$

где  $\lambda, D, F$  – некоторые операторы. Подставляя (5.2.8) в (5.2.6), получаем следующую систему алгебраических уравнений относительно  $D, F$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \lambda^2 + (\varkappa^{-2} \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2 + \varepsilon \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \partial_\xi) \right] D + (\varkappa^{-2} - 1) \partial_\xi \lambda F = 0, \\ & (\varkappa^{-2} - 1) \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \lambda D + \left[ \varkappa^{-2} \lambda^2 + \left( \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2 + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_\xi \right) \right] F = 0. \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Приравняв нулю определитель системы (5.2.9), получаем выражение для показателя степени экспоненты  $\lambda$  и связь между коэффициентами  $F, D$ :

$$\begin{aligned} \lambda = \pm \alpha_1, \quad \alpha_1 &= \sqrt{\partial_\xi^2 - \varkappa^2 \partial_\tau^2 + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_\xi}, \quad F = \pm i \frac{\alpha_1}{\partial_\xi} D, \\ \lambda = \pm \beta_1, \quad \beta_1 &= \sqrt{\partial_\xi^2 - \partial_\tau^2 + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_\xi}, \quad F = \pm \frac{1}{\beta_1} \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) D. \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Учитывая выражения (5.2.10), представим выражения для перемещений и напряжений в виде:

$$\begin{aligned} v_1 &= e^{i\alpha_1\zeta} D_1 + e^{-i\alpha_1\zeta} D_2 + e^{i\beta_1\zeta} D_3 + e^{-i\beta_1\zeta} D_4, \\ v_3 &= i \frac{\alpha_1}{\partial_\xi} e^{i\alpha_1\zeta} D_1 - i \frac{\alpha_1}{\partial_\xi} e^{-i\alpha_1\zeta} D_2 + i \frac{1}{\beta_1} \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) e^{i\beta_1\zeta} D_3 - \\ & \quad - i \frac{1}{\beta_1} \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) e^{i\beta_1\zeta} D_4, \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33} &= -\frac{E}{(1+\nu)h} \left[ \frac{\gamma_1^2}{\partial_\xi} e^{i\alpha_1\zeta} D_1 + \frac{\gamma_1^2}{\partial_\xi} e^{-i\alpha_1\zeta} D_2 + \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) e^{i\beta_1\zeta} D_3 + \right. \\
&\quad \left. + \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) e^{-i\beta_1\zeta} D_4 \right], \\
\sigma_{13} &= \frac{E}{(1+\nu)h} \left[ i\alpha_1 e^{i\alpha_1\zeta} D_1 - i\alpha_1 e^{-i\alpha_1\zeta} D_2 + i \frac{\gamma_1^2}{\beta_1} e^{i\beta_1\zeta} D_3 - i \frac{\gamma_1^2}{\beta_1} e^{-i\beta_1\zeta} D_4 \right], \\
\gamma_1^2 &= \partial_\xi^2 - \frac{1}{2} \partial_\tau^2 + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_\xi,
\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

где  $D_i$  – операторы-коэффициенты. За счёт произвола выбора коэффициентов  $D_i$  перепишем выражения (5.2.11), (5.2.12) для перемещений и напряжений в виде:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \partial_\xi e^{i(1+\zeta)\alpha_1} D_1 + \partial_\xi e^{i(1-\zeta)\alpha_1} D_2 + \beta_1 e^{i(1+\zeta)\beta_1} D_3 + \beta_1 e^{i(1-\zeta)\beta_1} D_4, \\
v_3 &= i\alpha_1 e^{i(1+\zeta)\alpha_1} D_1 - i\alpha_1 e^{i(1-\zeta)\alpha_1} D_2 + i \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) e^{i(1+\zeta)\beta_1} D_3 - \\
&\quad - i \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) e^{i(1-\zeta)\beta_1} D_4,
\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33} &= -\frac{E}{(1+\nu)h} \left[ \gamma_1^2 e^{i(\alpha+\zeta)\alpha_1} D_1 + \gamma_1^2 e^{i(\alpha-\zeta)\alpha_1} D_2 + \right. \\
&\quad \left. + \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \beta_1 e^{i(1+\zeta)\beta_1} D_3 + \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \beta_1 e^{i(1-\zeta)\beta_1} D_4 \right], \\
\sigma_{13} &= \frac{E}{(1+\nu)h} \left[ i\partial_\xi \alpha_1 e^{i(1+\zeta)\alpha_1} D_1 - i\partial_\xi \alpha_1 e^{i(1-\zeta)\alpha_1} D_2 + \right. \\
&\quad \left. + i\gamma_1^2 e^{i(1+\zeta)\beta_1} D_3 - i\gamma_1^2 e^{i(1-\zeta)\beta_1} D_4 \right].
\end{aligned} \tag{5.2.14}$$

Воспользуемся опытом построения эллиптического погранслоя для пластин, полученный в работах [120], [117], [109]. Для этого будем основываться на аналогии символического метода Лурье с методом интегральных преобразований. Символическое решение (5.2.13) – (5.2.14), основывается на прямой аналогии символического метода с методом интегральных преобразований и соответствует изображению двойного интегрального преобразования Лапласа (по времени) и Фурье (по продольной координате) при соответствии  $\partial_\tau$  и  $s$ ,  $\partial_\xi$  и  $i\chi$ , где  $s, \chi$  – параметры преобразования Лапласа и Фурье. В рассматриваемом решении слагаемые с множителями  $(1 - \zeta)$  в показателях степени экспоненты определяют волны, инициируемые лицевой поверхностью  $\zeta = 1$  и распространяющиеся в отрицательном направлении оси  $\zeta$ , а слагаемые с множителями  $(1 + \zeta)$  – волны, инициируемые лицевой поверхностью  $\zeta = -1$  и распространяющиеся в положительном направлении оси  $\zeta$ .

Дальнейший вывод асимптотически оптимальных уравнений рассматриваемого эллиптического погранслоя зависит от типа граничных условий на лицевых поверхностях. Примем, что на границах  $\zeta = \pm 1$  ( $z = \pm h$ ) действует ударное воздействие нормального типа:

$$\sigma_{33} = -P(\alpha, \tau), \quad \sigma_{13} = 0, \quad z = \pm h. \quad (5.2.15)$$

Примем также, что начальные условия являются однородными. Тогда, подставляя решение (5.2.14) в граничные условия (5.2.15), получим следующую систему алгебраических уравнений для  $D_i$ :

$$\begin{aligned}
\gamma_1^2 D_1 + \gamma_1^2 e^{i2\alpha_1} D_2 + \left(\partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B}\right) \beta_1 D_3 + \left(\partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B}\right) \beta_1 e^{i2\beta_1} D_4 &= \frac{(1+\nu)h}{E} P, \\
\gamma_1^2 e^{i2\alpha_1} D_1 + \gamma_1^2 D_2 + \left(\partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B}\right) \beta_1 e^{i2\beta_1} D_3 + \left(\partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B}\right) \beta_1 D_4 &= \frac{(1+\nu)h}{E} P, \\
\partial_\xi \alpha_1 D_1 - \partial_\xi \alpha_1 e^{i2\alpha_1} D_2 + \gamma_1^2 D_3 - \gamma_1^2 e^{i2\beta_1} D_4 &= 0, \\
\partial_\xi \alpha_1 e^{i2\alpha_1} D_1 - \partial_\xi \alpha_1 D_2 + \gamma_1^2 e^{i2\beta_1} D_3 - \gamma_1^2 D_4 &= 0.
\end{aligned} \tag{5.2.16}$$

Получим простейшее приближение системы уравнений (5.2.16). С этой целью пренебрежём в уравнениях членами с множителями  $e^{i2\alpha_1}$ ,  $e^{i2\beta_1}$ . Это соответствует, в конечном итоге, пренебрежению в асимптотике для первого корня уравнения Рэлея-Лэмба  $\omega_1(\chi)$  при  $\chi \rightarrow \infty$  [118] ( $B_\omega$ ,  $\varkappa_R$  введены в предшествующем параграфе) членами с экспоненциальными множителями по сравнению с первым членом  $\varkappa_R \chi$ .

$$\begin{aligned}
\omega_1(\chi) &= \varkappa_R \chi - B_\omega \chi \exp\left(-2\sqrt{1 - \varkappa_R^2}\right) + \\
&+ B_\omega \chi \exp\left(-2\sqrt{1 - \varkappa^2 \varkappa_R^2}\right),
\end{aligned} \tag{5.2.17}$$

Отметим, что корни уравнения Рэлея-Лэмба появляются при решении динамических задач методами двукратных преобразований Лапласа и Фурье [106], а коэффициент  $\varkappa_R$  является корнем известного трансцендентного уравнения [118]:

$$(2 - \varkappa_R^2)^2 - 4\sqrt{1 - \varkappa_R^2}\sqrt{1 - \varkappa^2 \varkappa_R^2} = 0. \tag{5.2.18}$$

Тогда уравнения (5.2.16) могут быть преобразованы к виду:

$$\begin{aligned}
\gamma_1^2 D_1 + \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \beta_1 D_3 &= \frac{(1 + \nu)h}{E} P, \\
\gamma_1^2 D_2 + \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \beta_1 D_4 &= \frac{(1 + \nu)h}{E} P, \\
\partial_\xi \alpha_1 D_1 + \gamma_1^2 D_3 &= 0, \\
\partial_\xi \alpha_1 D_2 + \gamma_1^2 D_4 &= 0.
\end{aligned} \tag{5.2.19}$$

Получим из (5.2.19) выражения для  $D_1$  и  $D_2$  через  $D_3$  и  $D_4$ :

$$D_1 = -\frac{\gamma_1^2}{\partial_\xi \alpha_1} D_3, \quad D_2 = -\frac{\gamma_1^2}{\partial_\xi \alpha_1} D_4. \tag{5.2.20}$$

Используя (5.2.20), приходим к разрешающим уравнениям для  $D_3$  и  $D_4$ :

$$\begin{aligned}
\left[ \gamma_1^4 - \partial_\xi \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} (\alpha_1 \beta_1) \right) \right] D_3 &= -\frac{(1 + \nu)h}{E} \partial_\xi \alpha_1 P, \\
\left[ \gamma_1^4 - \partial_\xi \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} (\alpha_1 \beta_1) \right) \right] D_4 &= -\frac{(1 + \nu)h}{E} \partial_\xi \alpha_1 P,
\end{aligned} \tag{5.2.21}$$

Рассмотрим значения времени когда  $\tau \gg 1$ , т. е. когда фронты волн проходят расстояние, много большее толщины оболочки:  $\tau = O(T)$ ,  $T \gg 1$ . Введём малый параметр  $\eta = 1/T$  и масштабированные переменные  $y$ ,  $\tau_0$ :

$$y = \frac{\xi - \varkappa_R \tau}{\eta}, \quad \tau_0 = \eta \tau, \tag{5.2.22}$$

позволяющие построить прифронтную асимптотику в дальнем поле волны Рэлея. Введём также новые операторы  $\partial_y$ ,  $\partial_{\tau_0}$

$$\partial_y = \partial / \partial y, \quad \partial_{\tau_0} = \partial / \partial \tau_0, \tag{5.2.23}$$

Переходя в уравнениях (5.2.21) и (5.2.20) к новым операторам (5.2.23) и рас-

кладывая полученные уравнения в ряд по малому параметру  $\eta$ , оставим в них асимптотически главные части:

$$\left(2\eta\partial_y^3\partial_{\tau_0} + \varepsilon k_c \frac{B'}{B}\partial_y^3\right)D_i = \frac{(1+\nu)h}{E} \frac{\varkappa_R B_\omega}{\sqrt{1-\varkappa_R^2}} \partial_y^2 P, \quad i = 3, 4, \quad (5.2.24)$$

$$\left(a\partial_y^2 + \eta \frac{\varkappa^2 \varkappa_R}{a} \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \partial_y\right)D_i + \quad (5.2.25)$$

$$\left(g\partial_y^2 + \eta \varkappa_R \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_y\right)D_{i+2} = 0, \quad i = 1, 2,$$

где  $k_c = 2 + \varkappa_R B_\omega$ ,  $a = \sqrt{1 - \varkappa^2 \varkappa_R^2}$ ,  $b = \sqrt{1 - \varkappa_R}$ ,  $g = 1 - \varkappa_R^2/2$ .

Выпишем также асимптотическое представление выражений для перемещений и напряжений (5.2.13), (5.2.14) в операторах  $\partial_y, \partial_{\tau_0}$ . При этом, как будет это очевидно далее, в выражениях для перемещений и напряжений  $\sigma_{13}$  малыми членами порядка  $O(\varepsilon + \eta)$  можно пренебречь:

$$v_1 = \partial_y e^{ia(1+\zeta)\partial_y} + \partial_y e^{ia(1-\zeta)} + b\partial_y e^{ib(1+\zeta)\partial_y} D_3 + b\partial_y e^{ib(1-\zeta)\partial_y} D_4,$$

$$v_3 = ia\partial_y e^{ia(1+\zeta)\partial_y} - ia\partial_y e^{ia(1-\zeta)\partial_y} D_2 + i\partial_y e^{ib(1+\zeta)} D_3 - i\partial_y e^{ib(1-\zeta)\partial_y} D_4,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = & -\frac{E}{(1+\nu)h} \left[ \left( g\partial_y^2 + \eta \varkappa_R \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_y \right)^{ia(1+\zeta)\partial_y} D_1 + \right. \\ & + \left( g\partial_y^2 + \eta \varkappa_R \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_y \right) e^{ia(1-\zeta)\partial_y} D_2 + \\ & + \left( b\partial_y^2 + \eta \frac{\varkappa_R}{b} \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \left( b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \partial_y \right) e^{ib(1+\zeta)\partial_y} D_3 + \\ & \left. + \left( b\partial_y^2 + \eta \frac{\varkappa_R}{b} \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \left( b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \partial_y \right) e^{ib(1-\zeta)\partial_y} D_4 \right], \end{aligned} \quad (5.2.26)$$

$$\sigma_{13} = i \frac{E}{(1+\nu)h} \left[ a\partial_y^2 e^{ia(1+\zeta)\partial_y} D_1 - a\partial_y^2 e^{ia(1-\zeta)\partial_y} D_2 + \right.$$

$$\left. + g\partial_y^2 e^{ib(1+\zeta)\partial_y} D_3 - g\partial_y^2 e^{ib(1-\zeta)\partial_y} D_4 \right].$$

Вернёмся в уравнениях (5.2.24), (5.2.25) к исходным операторам, разделив сначала (5.2.24) на  $\partial_y$ :

$$\left(\mathfrak{a}_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2 + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \partial_\xi\right) D_i = \frac{(1+\nu)h \mathfrak{a}_R B_\omega}{E} P, \quad i = 3, 4, \quad (5.2.27)$$

$$\begin{aligned} & \left[ a \partial_\xi^2 + \frac{\mathfrak{a}^2}{2a} \left( \mathfrak{a}_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2 \right) + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \partial_\xi \right] D_i + \\ & + \left[ g \partial_\xi^2 + \left( \mathfrak{a}_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2 \right) + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_\xi \right] D_{i+2} = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.2.28)$$

Аналогично преобразуются и выражения (5.2.26):

$$\begin{aligned} v_1 &= \partial_\xi e^{ia(1+\zeta)\partial_\xi} D_1 + \partial_\xi e^{ia(1-\zeta)\partial_\xi} D_2 + b \partial_\xi e^{ib(1+\zeta)\partial_\xi} D_3 + b \partial_\xi e^{ib(1-\zeta)\partial_\xi} D_4, \\ v_3 &= ia \partial_\xi e^{ia(1+\zeta)\partial_\xi} D_1 - ia \partial_\xi e^{ia(1-\zeta)\partial_\xi} D_2 + i \partial_\xi e^{ib(1+\zeta)\partial_\xi} D_3 - i \partial_\xi e^{ib(1-\zeta)\partial_\xi} D_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= -\frac{E}{(1+\nu)h} \left[ \left( g \partial_\xi^2 + \frac{1}{2} \left( \mathfrak{a}_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2 \right) + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_\xi \right) e^{ia(1+\zeta)\partial_\xi} D_1 + \right. \\ & + \left( g \partial_\xi^2 + \frac{1}{2} \left( \mathfrak{a}_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2 \right) + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_\xi \right) e^{ia(1-\zeta)\partial_\xi} D_2 + \\ & + \left( b \partial_\xi^2 + \frac{1}{2b} \left( \mathfrak{a}_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2 \right) + \varepsilon \left( b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \partial_\xi \right) e^{ib(1+\zeta)\partial_\xi} D_3 + \\ & \left. + \left( b \partial_\xi^2 + \frac{1}{2b} \left( \mathfrak{a}_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2 \right) + \varepsilon \left( b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \partial_\xi \right) e^{ib(1-\zeta)\partial_\xi} D_4 \right], \\ \sigma_{13} &= i \frac{E}{(1+\nu)h} \left[ a \partial_\xi^2 e^{ia(1+\zeta)\partial_\xi} D_1 - a \partial_\xi^2 e^{ia(1-\zeta)\partial_\xi} D_2 + \right. \\ & \left. + g \partial_\xi^2 e^{ib(1+\zeta)\partial_\xi} D_3 - g \partial_\xi^2 e^{ib(1-\zeta)\partial_\xi} D_4 \right]. \end{aligned} \quad (5.2.29)$$

С целью описания нестационарного НДС в малой окрестности условного фронта поверхностной волны Рэля введём потенциальные функции  $\varphi$  и  $\psi$  (ана-

логи объёмного и сдвигового потенциалов) подобно тому, как было сделано для случая цилиндрической оболочки [96], [120], [121]. При этом разделим их на части  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ,  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ , где  $\varphi_1$  и  $\psi_1$  задают положительное по  $\zeta$  пространство возмущений, а  $\varphi_2$  и  $\psi_2$  – отрицательное. Тогда эти потенциальные функции могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= e^{ia(1+\zeta)\partial_\xi} D_1, & \varphi_2 &= e^{ia(1-\zeta)\partial_\xi} D_2, \\ \psi_1 &= e^{ib(1+\zeta)\partial_\xi} D_3, & \psi_2 &= e^{ib(1-\zeta)\partial_\xi} D_4.\end{aligned}\tag{5.2.30}$$

Вид операторных представлений потенциальных функций (5.2.30) показывает, что они определяются эллиптическими уравнениями:

$$\begin{aligned}a^2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \zeta^2} &= 0, \quad i = 1, 2, \\ b^2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \zeta^2} &= 0, \quad i = 1, 2\end{aligned}\tag{5.2.31}$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned}\varkappa_R^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \tau^2} + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} &= \frac{(1+\nu)h}{E} \frac{\varkappa_R B_\omega}{b} P, \quad i = 1, 2; \quad \zeta = \mp 1, \\ \left(a + \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a}\right) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi^2} - \frac{\varkappa^2}{2a} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} + \\ + \left(g + \frac{\varkappa_R^2}{2}\right) \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} &= 0, \quad i = 1, 2; \quad \zeta = \mp 1.\end{aligned}\tag{5.2.32}$$

Перемещения и напряжения выражаются через потенциальные функции по формулам:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} + b \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \right), \quad v_3 = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \zeta} + \frac{1}{b} \frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta} \right), \\
\sigma_{33} &= -\frac{Eh}{(1+\nu)h} \sum_{i=1}^2 \left[ \left( g + \frac{\varkappa_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} + \right. \\
&\quad \left. + \left( b + \frac{\varkappa_R^2}{2b} \right) \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2b} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \tau^2} + \varepsilon \left( b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \right], \\
\sigma_{13} &= \frac{E}{(1+\nu)h} \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{g}{b} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \xi \partial \zeta} \right).
\end{aligned} \tag{5.2.33}$$

Выпишем разрешающие уравнения в исходных размерных координатах.

Уравнения для потенциальных функций:

$$\begin{aligned}
a^2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} &= 0, \quad i = 1, 2, \\
b^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} &= 0, \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{5.2.34}$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} + \frac{k_c}{\varkappa_R^2} \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} &= \frac{1+\nu}{Eh} \frac{B_\omega}{\varkappa_R b} P, \quad i = 1, 2; \quad z = \pm h, \\
\left( a + \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a} \right) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha^2} - \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a} \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} + \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} + \\
+ \left( g + \frac{\varkappa_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \alpha^2} - \frac{\varkappa_R^2}{2} \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} &= 0, \quad i = 1, 2; \quad z = \pm h.
\end{aligned} \tag{5.2.35}$$

Выражения для перемещений и напряжений примут вид:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= h \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} + b \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} \right), \\
 v_3 &= h \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} + \frac{1}{b} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right), \\
 \sigma_{33} &= -\frac{Eh}{(1+\nu)} \sum_{i=1}^2 \left[ \left( g + \frac{\alpha_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha^2} - \frac{\alpha_R^2}{2} \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} + \right. \\
 &\quad \left. + \left( b + \frac{\alpha_R^2}{2b} \right) \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \alpha^2} - \frac{\alpha_R^2}{2b} \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} + \left( b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} \right], \\
 \sigma_{13} &= \frac{Eh}{(1+\nu)} \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha \partial z} + \frac{g}{b} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \alpha \partial z} \right).
 \end{aligned} \tag{5.2.36}$$

Полученные искомые уравнения простейшего приближения при условии пренебрежения в операторных уравнениях членами с множителями  $\exp(i2\alpha_1)$ ,  $\exp(i2\beta_1)$  описывают, в конечном итоге, ту часть волнового процесса, которая соответствует волнам, инициируемым каждой лицевой поверхностью без учёта отраженных волн (будем называть такие волны первичными). Увеличить точность можно, построив решение для волн, отраженных при падении первичных волн на противоположные лицевые поверхности. Для этого разложим операторы  $D_j$  в ряды по степеням экспонент –  $\exp(i2\alpha_1)$ ,  $\exp(i2\beta_1)$ :

$$D_j = D_{j0} + e^{i2\alpha_1} D_{j1} + e^{i2\beta_1} D_{j2} + \dots, \quad j = 1, 4. \tag{5.2.37}$$

Отметим, что данное разложение соответствует пренебрежению в асимптотике для первого корня уравнения Рэлея-Лэмба (5.2.17) членами более высокого порядка малости по сравнению с множителями  $\exp(-2a\chi)$ ,  $\exp(-2b\chi)$ .

Подставим (5.2.37) в (5.2.16). Асимптотически главная часть полученной таким образом системы полностью совпадает с выведенными ранее уравнения-

ми. Запишем системы для операторов  $D_{j1}$ ,  $D_{j2}$ :

$$\begin{aligned}\gamma_1^2 D_{11} + \left(\partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B}\right) \beta_1 D_{31} &= -\gamma_1^2 D_{20}, \\ \gamma_1^2 D_{21} + \left(\partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B}\right) \beta_1 D_{41} &= -\gamma_1^2 D_{10},\end{aligned}\tag{5.2.38}$$

$$\partial_\xi \alpha_1 D_{11} + \gamma_1^2 D_{31} = \partial_\xi \alpha_1 D_{20},$$

$$\partial_\xi \alpha_1 D_{21} + \gamma_1^2 D_{41} = \partial_\xi \alpha_1 D_{10},$$

$$\begin{aligned}\gamma_1^2 D_{12} + \left(\partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B}\right) \beta_1 D_{32} &= -\left(\partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B}\right) \beta_1 D_{40}, \\ \gamma_1^2 D_{22} + \left(\partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B}\right) \beta_1 D_{42} &= -\left(\partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B}\right) \beta_1 D_{30},\end{aligned}\tag{5.2.39}$$

$$\partial_\xi \alpha_1 D_{12} + \gamma_1^2 D_{32} = \gamma_1^2 D_{40},$$

$$\partial_\xi \alpha_1 D_{22} + \gamma_1^2 D_{42} = \gamma_1^2 D_{30}.$$

Получим из (5.2.38), (5.2.39) выражения для  $D_{1i}$ ,  $D_{2i}$  ( $i = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned}D_{11} &= -\frac{\gamma_1^2}{\partial_\xi \alpha_1} D_{31} + D_{20}, & D_{21} &= -\frac{\gamma_1^2}{\partial_\xi \alpha_1} D_{41} + D_{10}, \\ D_{12} &= -\frac{\gamma_1^2}{\partial_\xi \alpha_1} D_{32} + \frac{\gamma_1^2}{\partial_\xi \alpha_1} D_{40}, & D_{22} &= -\frac{\gamma_1^2}{\partial_\xi \alpha_1} D_{42} + \frac{\gamma_1^2}{\partial_\xi \alpha_1} D_{30}.\end{aligned}\tag{5.2.40}$$

Получим также разрешающие уравнения для  $D_{3i}$ ,  $D_{4i}$  ( $i = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned}
\left[ \gamma_1^4 - \partial_\xi \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \alpha_1 \beta_1 \right] D_{31} &= 2 \partial_\xi \alpha_1 \gamma_1^2 D_{20}, \\
\left[ \gamma_1^4 - \partial_\xi \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \alpha_1 \beta_1 \right] D_{41} &= 2 \partial_\xi \alpha_1 \gamma_1^2 D_{10}, \\
\left[ \gamma_1^4 - \partial_\xi \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \alpha_1 \beta_1 \right] D_{32} &= \left[ \gamma_1^4 + \partial_\xi \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \alpha_1 \beta_1 \right] D_{40}, \\
\left[ \gamma_1^4 - \partial_\xi \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \alpha_1 \beta_1 \right] D_{42} &= \left[ \gamma_1^4 + \partial_\xi \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \alpha_1 \beta_1 \right] D_{30}.
\end{aligned} \tag{5.2.41}$$

Так же как и в предыдущем случае, рассмотрим большие значения времени, перейдём к переменным  $y$ ,  $\tau_0$  и перепишем операторные уравнения (5.2.38), (5.2.39), (5.2.41) в операторах  $\partial_y$ ,  $\partial_{\tau_0}$  с учётом только асимптотически главных составляющих:

$$\begin{aligned}
L_1 D_{31} &= -\frac{2 \varkappa_R a B_\omega}{g} \partial_y^2 D_{20}, \quad L_1 D_{41} = -\frac{2 \varkappa_R a B_\omega}{g} \partial_y^2 D_{10}, \\
L_1 D_{32} &= -\varkappa_R B_\omega \left( 2 \partial_y^2 + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_y \right) D_{40}, \\
L_1 D_{42} &= -\varkappa_R B_\omega \left( 2 \partial_y^2 + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_y \right) D_{30}.
\end{aligned} \tag{5.2.42}$$

$$\begin{aligned}
L_2 D_{12} + L_3 D_{32} &= \left( g \partial_y^2 + \eta \varkappa_R \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_y \right) D_{40}, \\
L_2 D_{22} + L_3 D_{42} &= \left( g \partial_y^2 + \eta \varkappa_R \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_y \right) D_{30}, \\
L_2 D_{11} + L_3 D_{31} &= \left( a \partial_y^2 + \eta \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{a} \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_y \right) D_{20}, \\
L_2 D_{21} + L_3 D_{41} &= \left( a \partial_y^2 + \eta \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{a} \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \partial_y \right) D_{10},
\end{aligned} \tag{5.2.43}$$

где операторы  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} L_1 &= 2\eta\partial_y\partial_{\tau_0} + \varepsilon k_c \frac{B'}{B}\partial_y, & L_2 &= a\partial_y^2 + \eta\frac{\varkappa^2\varkappa_R^2}{a}\partial_y\partial_{\tau_0} + \varepsilon\frac{1}{2a}\frac{B'}{B}\partial_y, \\ L_3 &= g\partial_y^2 + \eta\varkappa_R\partial_y\partial_{\tau_0} + \varepsilon\frac{B'}{B}\partial_y. \end{aligned} \quad (5.2.44)$$

Выпишем асимптотическое представление выражений для перемещений и напряжений (5.2.26) с учётом разложений (5.2.37). Введём обозначения:

$$\begin{aligned} S_1 &= e^{ia(1+\zeta)\partial_y}D_{10} + e^{ia(3+\zeta)\partial_y}D_{11} + e^{i(a+2b+a\zeta)\partial_y}D_{12}, \\ S_2 &= e^{ia(1-\zeta)\partial_y}D_{20} + e^{ia(3-\zeta)\partial_y}D_{21} + e^{i(a+2b-a\zeta)\partial_y}D_{22}, \\ S_3 &= e^{ib(1+\zeta)\partial_y}D_{30} + e^{i(2a+b+b\zeta)\partial_y}D_{31} + e^{ib(3+\zeta)\partial_y}D_{32}, \\ S_4 &= e^{ib(1-\zeta)\partial_y}D_{40} + e^{i(2a+b-b\zeta)\partial_y}D_{41} + e^{ib(3-\zeta)\partial_y}D_{42}. \end{aligned} \quad (5.2.45)$$

Тогда получаем:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sum_{j=1}^2(\partial_y S_j + b\partial_y S_{j+2}), & v_3 &= \sum_{j=1}^2(-1)^{j+1}(ia\partial_y S_j + i\partial_y S_{j+2}), \\ \sigma_{33} &= -\frac{E}{(1+\nu)h} \sum_{j=1}^2(M_1 S_j + M_2 S_{j+2}), \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{(1+\nu)h} \sum_{j=1}^2(-1)^{j+1}(ia\partial_y^2 S_j + ig\partial_y^2 S_{j+2}), \end{aligned} \quad (5.2.46)$$

где операторы  $M_1$ ,  $M_2$  задаются выражениями:

$$\begin{aligned} M_1 &= g\partial_y^2 + \eta\varkappa_R\partial_y\partial_{\tau_0} + \varepsilon\frac{B'}{B}\partial_y, \\ M_2 &= b\partial_y^2 + \eta\frac{\varkappa_R}{b}\partial_y\partial_{\tau_0} + \varepsilon\left(b + \frac{1}{2b}\right)\frac{B'}{B}\partial_y. \end{aligned} \quad (5.2.47)$$

Вернёмся (5.2.42), (5.2.45) к исходным операторам  $\partial_\xi$ ,  $\partial_\tau$ . Общая форма уравнений для  $D_{3j}$ ,  $D_{4j}$  ( $j = 1, 2$ ) через операторы решения для нулевого приближения сохранится:

$$\begin{aligned} L_1 D_{31} &= -\frac{2\mathfrak{a}_R a B_\omega}{g} \partial_\xi^2 D_{20}, & L_1 D_{41} &= -\frac{2\mathfrak{a}_R a B_\omega}{g} \partial_\xi^2 D_{10}, \\ L_1 D_{32} &= -\mathfrak{a}_R B_\omega (2\partial_\xi^2 + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \partial_\xi) D_{40}, & & (5.2.48) \\ L_1 D_{42} &= -\mathfrak{a}_R B_\omega (2\partial_\xi^2 + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \partial_\xi) D_{30} \end{aligned}$$

при новой форме оператора  $L_1$ :

$$L_1 = \mathfrak{a}_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2 + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \partial_\xi. \quad (5.2.49)$$

Общая форма уравнений для  $D_{1j}$ ,  $D_{2j}$  ( $j = 1, 2$ ) также сохраняется:

$$\begin{aligned} L_2 D_{11} + L_3 D_{31} &= \left[ a \partial_\xi^2 + \frac{\mathfrak{a}^2}{2a} (\mathfrak{a}_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2) + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \partial_\xi \right] D_{20}, \\ L_2 D_{21} + L_3 D_{41} &= \left[ a \partial_\xi^2 + \frac{\mathfrak{a}^2}{2a} (\mathfrak{a}_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2) + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \partial_\xi \right] D_{10}, \\ L_2 D_{12} + L_3 D_{32} &= \left[ g \partial_\xi^2 + \frac{1}{2} (\mathfrak{a}_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2) + \varepsilon \frac{B'}{B} \right] D_{40}, \\ L_2 D_{22} + L_3 D_{42} &= \left[ g \partial_\xi^2 + \frac{1}{2} (\mathfrak{a}_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2) + \varepsilon \frac{B'}{B} \right] D_{30}, \end{aligned} \quad (5.2.50)$$

при новой форме операторов  $L_2$ ,  $L_3$ :

$$\begin{aligned} L_2 &= a \partial_\xi^2 + \frac{\mathfrak{a}^2}{2a} (\mathfrak{a}_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2) + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \partial_\xi, \\ L_3 &= g \partial_\xi^2 + \frac{1}{2} (\mathfrak{a}_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2) + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_\xi. \end{aligned} \quad (5.2.51)$$

Выражения (5.2.45), (5.2.46) преобразуются аналогично:

$$\begin{aligned}
S_1 &= e^{ia(1+\zeta)\partial_\xi} D_{10} + e^{ia(3+\zeta)\partial_\xi} D_{11} + e^{i(a+2b+a\zeta)\partial_\xi} D_{12}, \\
S_2 &= e^{ia(1-\zeta)\partial_\xi} D_{20} + e^{ia(3-\zeta)\partial_\xi} D_{21} + e^{i(a+2b-a\zeta)\partial_\xi} D_{22}, \\
S_3 &= e^{ib(1+\zeta)\partial_\xi} D_{30} + e^{i(2a+b+b\zeta)\partial_\xi} D_{31} + e^{ib(3+\zeta)\partial_\xi} D_{32}, \\
S_4 &= e^{ib(1-\zeta)\partial_\xi} D_{40} + e^{i(2a+b-b\zeta)\partial_\xi} D_{41} + e^{ib(3-\zeta)\partial_\xi} D_{42}.
\end{aligned} \tag{5.2.52}$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= \sum_{j=1}^2 (\partial_\xi S_j + b\partial_\xi S_{j+2}), \\
v_3 &= \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} (ia\partial_\xi S_j + i\partial_\xi S_{j+2}), \\
\sigma_{33} &= -\frac{E}{(1+\nu)\hbar} \sum_{j=1}^{\infty} (M_1 S_j + M_2 S_{j+2}), \\
\sigma_{13} &= \frac{E}{(1+\nu)\hbar} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} (ia\partial_\xi^2 S_j + ig\partial_\xi^2 S_{j+2}),
\end{aligned} \tag{5.2.53}$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= g\partial_\xi^2 + \frac{1}{2}(\varkappa_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2) + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_\xi, \\
M_2 &= b\partial_\xi + \frac{1}{2b}(\varkappa_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2) + \varepsilon \left(b + \frac{1}{2b}\right) \frac{B'}{B} \partial_\xi.
\end{aligned} \tag{5.2.54}$$

Введём аналоги объёмного и сдвигового потенциалов Ламе  $\varphi$  и  $\psi$ , разделяя их на 2 части, соответствующие направлениям распространения возмущений, и разложим их в ряды, соответствующие разложению (5.2.37):

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \psi = \psi_1 + \psi_2,$$

$$\varphi_i = \varphi_{i0} + \varphi_{ia} + \varphi_{ib}, \quad \psi_i = \psi_{i0} + \psi_{ia} + \psi_{ib},$$

$$\varphi_{10} = e^{ia(1+\zeta)\partial_\xi} D_{10}, \quad \varphi_{1a} = e^{ia(3+\zeta)\partial_\xi} D_{11}, \quad \varphi_{1b} = e^{i(a+2b+a\zeta)\partial_\xi} D_{12}, \quad (5.2.55)$$

$$\varphi_{20} = e^{ia(1-\zeta)\partial_\xi} D_{20}, \quad \varphi_{2a} = e^{ia(3-\zeta)\partial_\xi} D_{21}, \quad \varphi_{2b} = e^{i(a+2b-a\zeta)\partial_\xi} D_{22},$$

$$\varphi_{10} = e^{ib(1+\zeta)\partial_\xi} D_{30}, \quad \varphi_{1a} = e^{i(2a+b+b\zeta)\partial_\xi} D_{31}, \quad \varphi_{1b} = e^{ib(3+\zeta)\partial_\xi} D_{32},$$

$$\varphi_{20} = e^{ib(1-\zeta)\partial_\xi} D_{40}, \quad \varphi_{2a} = e^{i(2a+b-b\zeta)\partial_\xi} D_{41}, \quad \varphi_{2b} = e^{ib(3-\zeta)\partial_\xi} D_{42}.$$

Разложения потенциальных функций определяются эллиптическими уравнениями аналогично (5.2.34):

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi_{ij}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{ij}}{\partial \zeta^2} = 0, \quad i = 1, 2; \quad j = 0, a, b, \quad (5.2.56)$$

$$b^2 \frac{\partial^2 \psi_{ij}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_{ij}}{\partial \zeta^2} = 0, \quad i = 1, 2; \quad j = 0, a, b$$

при следующих граничных условиях, полученных из операторных уравнений (5.2.48) – (5.2.50) (уравнения граничных условий для  $\varphi_{i0}$ ,  $\psi_{i0}$  выведены ранее для асимптотически главного приближения):

$$L_1 \psi_{1a} = -\frac{2\alpha_R a B \omega}{g} \frac{\partial^2 \psi_{20}}{\partial \xi^2}, \quad \zeta = -1,$$

$$L_1 \psi_{2a} = -\frac{2\alpha_R a B \omega}{g} \frac{\partial^2 \psi_{10}}{\partial \xi^2}, \quad \zeta = 1,$$

(5.2.57)

$$L_1 \psi_{1b} = -\alpha_R B \omega \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial \xi^2} + \varepsilon K \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial \xi} \right), \quad \zeta = -1,$$

$$L_1 \psi_{2b} = -\alpha_R B \omega \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial \xi^2} + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \xi} \right), \quad \zeta = 1,$$

$$\begin{aligned}
L_2\varphi_{1a} + L_3\psi_{1a} &= \left(a + \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a}\right) \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial \xi^2} - \frac{\varkappa^2}{2a} \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial \xi}, \quad \zeta = -1, \\
L_2\varphi_{2a} + L_3\psi_{2a} &= \left(a + \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a}\right) \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial \xi^2} - \frac{\varkappa^2}{2a} \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \xi}, \quad \zeta = 1, \\
L_2\varphi_{1b} + L_3\psi_{1b} &= \left(g + \frac{\varkappa_R^2}{2}\right) \frac{\partial^2 \psi_{20}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_{20}}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial \xi}, \quad \zeta = -1, \\
L_2\varphi_{2b} + L_3\psi_{2b} &= \left(g + \frac{\varkappa_R^2}{2}\right) \frac{\partial^2 \psi_{10}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_{10}}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_{10}}{\partial \xi}, \quad \zeta = 1,
\end{aligned} \tag{5.2.58}$$

$$L_1 = \varkappa_R^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \varepsilon k_c \frac{B'}{B},$$

$$L_2 = \left(a + \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a}\right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\varkappa^2}{2a} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \frac{\partial}{\partial \xi}, \tag{5.2.59}$$

$$L_3 = \left(g + \frac{\varkappa_R^2}{2}\right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Выпишем разрешающие уравнения в исходных размерных координатах.

Уравнения для потенциальных функций:

$$\begin{aligned}
a^2 \frac{\partial^2 \varphi_{ij}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{ij}}{\partial z^2} &= 0, \quad i = 1, 2; \quad j = 0, a, b, \\
b^2 \frac{\partial^2 \psi_{ij}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \psi_{ij}}{\partial z^2} &= 0, \quad i = 1, 2; \quad j = 0, a, b.
\end{aligned} \tag{5.2.60}$$

Граничные условия для составляющих потенциальных функций  $\psi$ :

$$\begin{aligned}
L_1\psi_{1a} &= -\frac{2aB_\omega}{\varkappa_R g} \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial \alpha^2}, \quad z = -h, \\
L_1\psi_{2a} &= -\frac{2aB_\omega}{\varkappa_R g} \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial \alpha^2}, \quad z = h, \\
L_1\psi_{1b} &= -\frac{B_\omega}{\varkappa_R} \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial \xi^2} + \varepsilon K \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial \xi} \right), \quad z = -h, \\
L_1\psi_{2b} &= -\frac{B_\omega}{\varkappa_R} \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial \xi^2} + \varepsilon K \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \xi} \right), \quad z = h, \\
L_1 &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{k_c}{\varkappa_R^2} \frac{B'}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}.
\end{aligned} \tag{5.2.61}$$

Граничные условия для составляющих потенциальной функции  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}
L_2\varphi_{1a} + L_3\psi_{1a} &= \left( a + \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a} \right) \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial \alpha^2} - \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2ac_R^2} \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial t^2} + \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial \alpha}, \quad z = -h, \\
L_2\varphi_{2a} + L_3\psi_{2a} &= \left( a + \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a} \right) \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial \alpha^2} - \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2ac_R^2} \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial t^2} + \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \alpha}, \quad z = h, \\
L_2\varphi_{1b} + L_3\psi_{1b} &= \left( g + \frac{\varkappa_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \psi_{20}}{\partial \alpha^2} - \frac{\varkappa_R^2}{2c_R^2} \frac{\partial^2 \psi_{20}}{\partial t^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial \alpha}, \quad z = -h, \\
L_2\varphi_{2b} + L_3\psi_{2b} &= \left( g + \frac{\varkappa_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \psi_{10}}{\partial \alpha^2} - \frac{\varkappa_R^2}{2c_R^2} \frac{\partial^2 \psi_{10}}{\partial t^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_{10}}{\partial \alpha}, \quad z = h, \\
L_2 &= \left( a + \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a} \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2ac_R^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \\
L_3 &= \left( g + \frac{\varkappa_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\varkappa_R^2}{2c_R^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}.
\end{aligned} \tag{5.2.62}$$

Перемещения и напряжения выражаются через потенциальные функции по формулам (5.2.36).

### 5.3 Асимптотический вывод уравнений эллиптического погранслоя в оболочках вращения произвольного профиля при ударных торцевых нагрузках

Рассмотрим следующий случай ударного воздействия типа NW – случай ударного воздействия на торец  $\alpha = 0$  полубесконечной оболочки вращения:

$$\sigma_{13} = IH(t), \quad v_1 = 0, \quad (5.3.1)$$

где  $I$  – амплитуда нагрузки. Будем считать, что лицевые поверхности свободны от напряжений. В безразмерных координатах (5.1.5) рассматриваемые граничные условия запишутся в виде:

$$\frac{\partial v_3}{\partial \xi} = I^*H(t), \quad v_1 = 0, \quad (5.3.2)$$

где  $I^* = 2(1 + \nu)hI/E$ . Звёздочки в дальнейшем будем опускать.

В работах [94] – [96] построен эллиптический погранслои при ударных воздействиях на торец пластин и цилиндрических оболочек. Как и в предыдущем параграфе, используем этот опыт для построения искомого погранслоя при воздействии на торец оболочки вращения произвольного профиля.

Сведём рассматриваемую задачу к эквивалентной задаче для бесконечной оболочки. Для этого сначала выделим частное решение исходных уравнений, удовлетворяющее только торцевым условиям (5.3.2). В указанных работах это частное решение строилось элементарно, исходя из системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. В рассматриваемом случае уравнений с переменными коэффициентами для оболочки вращения, искомое частное решение может быть получено приближённо с помощью метода при-

фронтальной асимптотики.

Согласно простейшему варианту метода прифронтальной асимптотики, широко использованному в [106] для определения слабо изменяющихся по продольной координате и времени компонент нестационарного НДС оболочек вращения, искомое решение представляется в виде разложения в ряд по степеням отклонения продольной координаты от фронтов волн. В рассматриваемом случае построения частного решения, удовлетворяющего уравнениям (5.2.3) и только граничным условиям при  $\xi = 0$  (5.3.2), перейдем сначала в этих уравнениях к переменным  $\xi_0$ ,  $\tau_0$  и будем искать частное решение в следующем виде (обозначим его верхним индексом «0»):

$$v_1^{(0)} = 0,$$

$$v_3^{(0)} = -I \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\xi_0) (\tau_0 - \xi_0)^n H(\tau_0 - \xi_0), \quad (5.3.3)$$

$$\sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{33}^{(0)} = 0,$$

$$\sigma_{13}^{(0)} = I \sum_{n=1}^{\infty} [nF_n(\xi_0) - F'_{n-1}(\xi_0)] (\tau_0 - \xi_0)^{n-1} H(\tau_0 - \xi_0),$$

где  $F_n(\xi_0)$  – неизвестные функции, определяемые при подстановке (5.3.3) в уравнения движения (5.2.3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ n \left( 2 \frac{dF_n}{d\xi_0} + \frac{B'}{B} F_n \right) - \frac{d^2 F_{n-1}}{d\xi_0^2} - \frac{B'}{B} \frac{dF_{n-1}}{d\xi_0} \right] (\tau_0 - \xi_0)^n = 0. \quad (5.3.4)$$

Зацепляющуюся систему уравнений для  $F_n$  получим из (5.3.4), приравняв нулю члены при степенях  $(\tau_0 - \xi_0)^n$ :

$$2\frac{dF_n}{d\xi_0} + \frac{B'}{B}F_n = \frac{1}{n}\left(\frac{d^2F_{n-1}}{d\xi_0^2} + \frac{B'}{B}\frac{dF_{n-1}}{d\xi_0}\right), \quad n = 1, 2, 3\dots \quad (5.3.5)$$

Решение системы (5.3.5) имеет вид:

$$F_n = \frac{C_n}{\sqrt{B}} + \frac{1}{2n\sqrt{B}} \int_0^{\xi_0} \frac{1}{\sqrt{B}} \frac{d}{d\xi_0} \left( \frac{1}{B} \frac{dF_{n-1}}{d\xi_0} \right) d\xi_0, \quad n = 1, 2, 3\dots, \quad (5.3.6)$$

где  $F_0 = 0$ ,  $C_n$  – постоянные интегрирования. Тогда частное решение (5.3.3) с учётом граничных условий (5.3.2) принимает окончательную форму:

$$v_1^{(0)} = 0,$$

$$v_3^{(0)} = -I \left[ (\tau_0 - \xi_0) \sqrt{\frac{B(0)}{B}} + \sum_{n=2}^{\infty} \Phi_n(\xi_0) (\tau_0 - \xi_0)^n \right] H(\tau_0 - \xi_0),$$

$$\sigma_{13}^{(0)} = I \left[ \sqrt{\frac{B(0)}{B}} + \sum_{n=2}^{\infty} (n\Phi_n - \Phi'_{n-1}) (\tau_0 - \xi_0)^{n-1} \right] H(\tau_0 - \xi_0), \quad (5.3.7)$$

$$\sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{33}^{(0)} = 0,$$

$$\Phi_1 = \sqrt{\frac{B(0)}{B}},$$

$$\Phi_n = \frac{1}{2n\sqrt{B}} \int_0^{\xi_0} \frac{1}{\sqrt{B}} \frac{d}{d\xi_0} \left( \frac{1}{B} \frac{d\Phi_{n-1}}{d\xi_0} \right) d\xi_0.$$

При этом, для удовлетворения граничным условиям, были приняты следующие выражения для постоянных интегрирования из (5.3.6):

$$C_1 = \sqrt{B(0)}, \quad C_n = 0, \quad n > 1. \quad (5.3.8)$$

Представим решение нашей задачи в виде суммы

$$\text{НДС} = \text{НДС}^{(0)} + \text{НДС}^{(1)}, \quad (5.3.9)$$

где составляющая с индексом «0» определяется построенным частным решением, а задачу для второй составляющей назовём эквивалентной. Для эквивалентной задачи должны быть поставлены следующие граничные условия на торце и лицевых поверхностях:

$$\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \xi} = 0, \quad v_1^{(1)} = 0, \quad \xi = 0,$$

$$\sigma_{33}^{(1)} = 0,$$

$$\sigma_{13}^{(1)} = -I \left[ \sqrt{\frac{B(0)}{B}} + \sum_{n=2}^{\infty} (n\Phi_n - \Phi'_{n-1})(\tau_0 - \xi_0)^{n-1} \right] \times \\ \times H(\tau_0 - \xi_0), \quad \zeta = \pm 1. \quad (5.3.10)$$

Анализ показывает, что для решения с граничными условиями (5.3.10) деформированное торцевое сечение прямолинейно и перпендикулярно к оси  $\xi$ . Рассмотрим сначала оболочку вращения с плоской торцевой поверхностью, представленную на рисунке 5.2. Тогда бесконечная оболочка вращения, состоящая из двух таких состыкованных полубесконечных оболочек (рисунок 5.3), с нагружением, симметричным относительно оси  $\zeta$  и определённым граничными условиями (5.3.10), имеет НДС, соответствующее исходной полубесконечной оболочке. В этом случае задача для этой бесконечной оболочки эквивалентна исходной задаче для оболочки исходной, полубесконечной.

Следовательно, бесконечная оболочка вращения с симметричным относительно оси  $\zeta$  нагружением на лицевые поверхности, определённым граничным условиям (5.3.10), имеет НДС, соответствующее полубесконечной оболочке, а задача для неё эквивалентна исходной задаче для полубесконечной оболочки (рисунок 5.3).

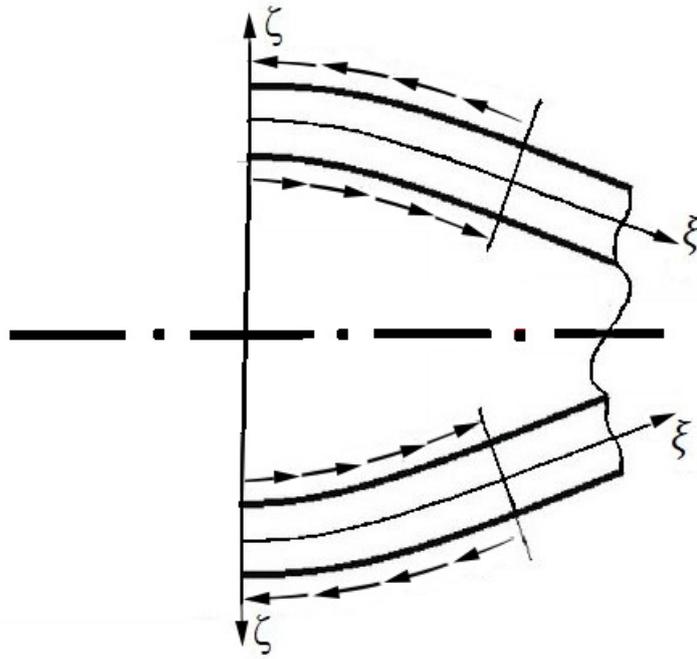


Рисунок 5.2 — Схема нагружения на лицевые поверхности полубесконечной оболочки в эквивалентной задаче

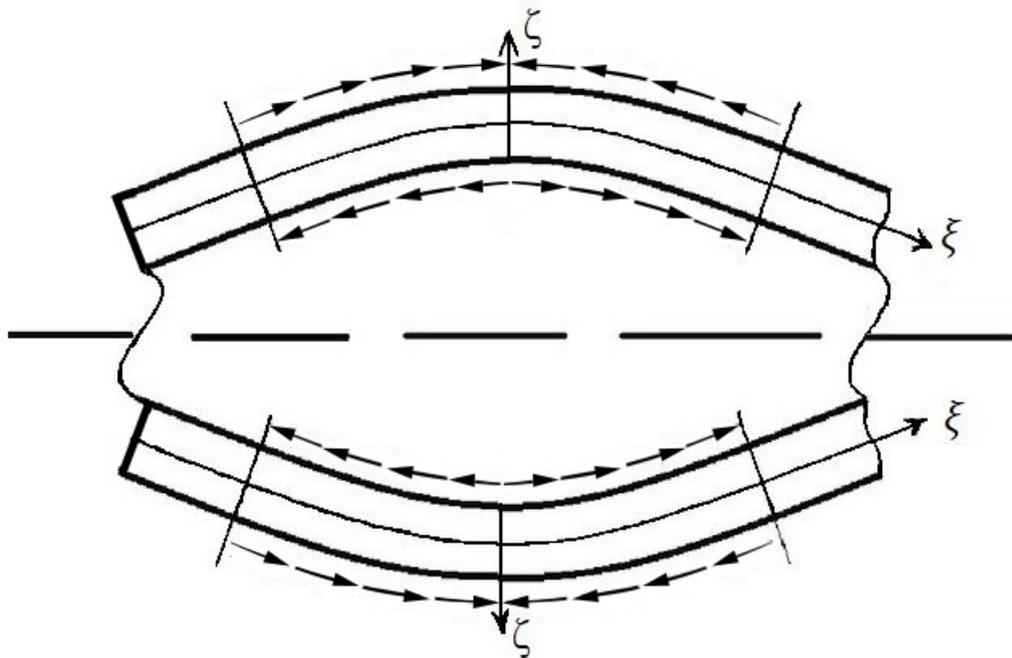


Рисунок 5.3 — Схема нагружения на лицевые поверхности бесконечной оболочки в случае эквивалентной задачи

Перейдём к исследованию эквивалентной задачи для бесконечной оболочки вращения. Как и ранее, введём операторные обозначения (5.2.5), запишем уравнения движения и закон Гука в операторной форме (5.2.6), (5.2.7). Решение операторных уравнений сохраняют форму (5.2.11), (5.2.12). Подставляя эти решения в граничные условия (5.3.10) при  $\zeta = \pm 1$ , получаем систему алгебраических уравнений для  $D_i$ :

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 D_1 + \gamma_1^2 e^{i2\alpha_1} D_2 + \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \beta_1 D_3 + \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \beta_1 e^{i2\beta_1} D_4 &= 0, \\ \gamma_1^2 e^{i2\alpha_1} D_1 + \gamma_1^2 D_2 + \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \beta_1 e^{i2\beta_1} D_3 + \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \beta_1 D_4 &= 0, \\ i\partial_\xi \alpha_1 D_1 - i\partial_\xi \alpha_1 e^{i2\alpha_1} D_2 + i\gamma_1^2 D_3 - i\gamma_1^2 e^{i2\beta_1} D_4 &= -S, \\ i\partial_\xi \alpha_1 e^{i2\alpha_1} D_1 - i\partial_\xi \alpha_1 D_2 + i\gamma_1^2 e^{i2\beta_1} D_3 - i\gamma_1^2 D_4 &= -S, \end{aligned} \tag{5.3.11}$$

$$S = I \frac{1}{\sqrt{B}} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n\Phi_n - \Phi'_{n-1})(\tau_0 - \xi_0)^n \right] H(\tau_0 - \xi_0), \quad \xi_0 > 0, \tag{5.3.12}$$

$$S = -I \frac{1}{\sqrt{B}} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n\Phi_n - \Phi'_{n-1})(\tau_0 + \xi_0)^n \right] H(\tau_0 + \xi_0), \quad \xi_0 < 0.$$

Как и в параграфе 5.2, получим простейшее приближение уравнений для граничных условий, пренебрегая в уравнениях (5.3.11) членами с множителями  $e^{i2\alpha_1}$ ,  $e^{i2\beta_1}$ . Это соответствует рассмотрению волн, инициированных поверхностями  $\zeta = -1$  и  $\zeta = 1$  без отражения от противоположных поверхностей. Тогда получаем следующий вид алгебраической системы:

$$\begin{aligned}
\gamma_1^2 D_1 + \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \beta_1 D_3 &= 0, \\
\gamma_1^2 D_2 + \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \beta_1 D_4 &= 0, \\
i \partial_\xi \alpha_1 D_1 + i \gamma_1^2 D_3 &= -S, \\
i \partial_\xi \alpha_1 D_2 + i \gamma_1^2 D_4 &= S.
\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

Получим из (5.3.13) выражения для  $D_1$  и  $D_2$  через  $D_3$  и  $D_4$ :

$$D_1 = -\frac{1}{\gamma_1^2} \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \beta_1 D_3, \quad D_2 = -\frac{1}{\gamma_1^2} \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \beta_1 D_4 \tag{5.3.14}$$

Подставляя полученные выражения для  $D_1$  и  $D_2$  в третье и четвертое уравнения (5.3.13), получаем разрешающие уравнения для  $D_3$  и  $D_4$ :

$$\begin{aligned}
i \left[ \gamma_1^4 - \partial_\xi \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \alpha_1 \beta_1 \right] D_3 &= -\gamma_1^2 S, \\
i \left[ \gamma_1^4 - \partial_\xi \left( \partial_\xi + \varepsilon \frac{B'}{B} \right) \alpha_1 \beta_1 \right] D_4 &= \gamma_1^2 S.
\end{aligned} \tag{5.3.15}$$

Рассмотрим теперь большие значения времени  $\tau \gg 1$ . Вводим переменные  $y$ ,  $\tau_0$  по формулам (5.2.22). По формулам (5.2.23) вводим операторы  $\partial_y$ ,  $\partial_{\tau_0}$ . Тогда получим, аналогично (5.2.24) следующие разрешающие уравнения в операторной форме:

$$\begin{aligned}
i \left( \eta 2 \varkappa_R \partial_y^2 \partial_{\tau_0} + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \partial_y^2 \right) D_3 &= -\frac{\varkappa_R B_\omega}{g} \partial_y S, \\
i \left( \eta 2 \varkappa_R \partial_y^2 \partial_{\tau_0} + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \partial_y^2 \right) D_4 &= \frac{\varkappa_R B_\omega}{g} \partial_y S.
\end{aligned} \tag{5.3.16}$$

Для наглядности обратного перехода к дифференциальной форме граничных условий, запишем (5.3.16) в виде:

$$\begin{aligned} \left( \eta 2 \varkappa_R \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \partial_y \right) i \partial_y D_3 &= - \frac{\varkappa_R B_\omega}{g} \partial_y S, \\ \left( \eta 2 \varkappa_R \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \partial_y \right) i \partial_y D_4 &= \frac{\varkappa_R B_\omega}{g} \partial_y S. \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

Представим асимптотически главную часть первого и второго уравнения (5.3.13) следующим образом:

$$\begin{aligned} \left[ g \partial_y^2 - \eta \varkappa_R \partial_y \partial_{\tau_0} - \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_y \right] D_1 + \left[ b \partial_y^2 - \eta \frac{\varkappa_R}{b} \partial_y \partial_{\tau_0} - \varepsilon \left( b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \partial_y \right] D_3 &= 0, \\ \left[ g \partial_y^2 - \eta \varkappa_R \partial_y \partial_{\tau_0} - \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_y \right] D_2 + \left[ b \partial_y^2 - \eta \frac{\varkappa_R}{b} \partial_y \partial_{\tau_0} - \varepsilon \left( b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \partial_y \right] D_4 &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

Асимптотические представления выражений для перемещений и напряжений будут отличаться от предыдущих представлений (5.2.26): члены более высокого порядка малости следует удерживать в представлении напряжений  $\sigma_{13}$ . Получаем:

$$\begin{aligned} v_1 &= \partial_y e^{ia(1+\zeta)\partial_y} D_1 + \partial_y e^{ia(1-\zeta)\partial_y} \partial_y D_2 + b \partial_y e^{ib(1+\zeta)\partial_y} D_3 + b \partial_y e^{ib(1-\zeta)\partial_y} D_4, \\ v_3 &= ia \partial_y e^{ia(1+\zeta)\partial_y} D_1 - ia \partial_y e^{ia(1+\zeta)\partial_y} D_2 + i \partial_y e^{ib(1+\zeta)\partial_y} D_3 - i \partial_y e^{ib(1-\zeta)\partial_y} D_4, \\ \sigma_{33} &= - \frac{E}{(1+\nu)h} \left[ g \partial_y^2 e^{ia(1+\zeta)\partial_y} D_1 + g \partial_y^2 e^{ia(1-\zeta)\partial_y} D_2 + \right. \\ &\quad \left. + b \partial_y^2 e^{ib(1+\zeta)\partial_y} D_3 + b \partial_y^2 e^{ib(1-\zeta)\partial_y} D_4 \right], \\ \sigma_{13} &= i \frac{E}{(1+\nu)h} \left[ \left( a \partial_y^2 + \eta \frac{\varkappa^2 \varkappa_R}{a} \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \partial_y \right) e^{ia(1+\zeta)\partial_y} D_1 - \right. \\ &\quad - \left( a \partial_y^2 + \eta \frac{\varkappa^2 \varkappa_R}{a} \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{1}{2a} \partial_y \right) e^{ia(1-\zeta)\partial_y} D_2 + \\ &\quad + \left( g \partial_y^2 + \eta \varkappa_R \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_y \right) e^{ib(1+\zeta)\partial_y} D_3 - \\ &\quad \left. - \left( g \partial_y^2 + \eta \varkappa_R \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_y \right) e^{ib(1-\zeta)\partial_y} D_4 \right]. \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

В исходном операторном виде уравнения (5.3.17), (5.3.18) примут вид

$$\left(\mathfrak{a}_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2 + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \partial_\xi\right) i \partial_\xi D_i = \frac{\mathfrak{a}_R B_\omega}{g} \partial_\xi S, \quad i = 3, 4, \quad (5.3.20)$$

$$\begin{aligned} & \left[ g \partial_\xi^2 + \frac{1}{2} (\mathfrak{a}_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2) + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_\xi \right] D_i + \\ & + \left[ b \partial_\xi^2 + \frac{1}{2b} (\mathfrak{a}_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2) + \varepsilon \left( b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \partial_\xi \right] D_{i+2} = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

Аналогично преобразуются и выражения (5.3.19) для  $v_1$ ,  $v_3$ ,  $\sigma_{13}$ :

$$\begin{aligned} v_1 &= \partial_\xi e^{ia(1+\zeta)\partial_\xi} D_1 + \partial_\xi e^{ia(1-\zeta)\partial_\xi} \partial_\xi D_2 + b \partial_\xi e^{ib(1+\zeta)\partial_\xi} D_3 + b \partial_\xi e^{ib(1-\zeta)\partial_\xi} D_4, \\ v_3 &= ia \partial_\xi e^{ia(1+\zeta)\partial_\xi} D_1 - ia \partial_\xi e^{ia(1-\zeta)\partial_\xi} D_2 + i \partial_\xi e^{ib(1+\zeta)\partial_\xi} D_3 - i \partial_\xi e^{ib(1-\zeta)\partial_\xi} D_4, \\ \sigma_{33} &= -\frac{E}{(1+\nu)h} \left[ g \partial_\xi^2 e^{ia(1+\zeta)\partial_\xi} D_1 + g \partial_\xi^2 e^{ia(1-\zeta)\partial_\xi} D_2 + \right. \\ & \left. + b \partial_\xi^2 e^{ib(1+\zeta)\partial_\xi} D_3 + b \partial_\xi^2 e^{ib(1-\zeta)\partial_\xi} D_4 \right]. \end{aligned} \quad (5.3.22)$$

Рассмотрим преобразование выражения для  $\sigma_{13}$ . Учитываем, что при  $\xi > 0$  волна распространяется в сторону  $\xi \rightarrow +\infty$ , и выражение для  $\sigma_{33}$  может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \frac{E}{(1+\nu)h} \left[ i \left( \frac{1}{a} \partial_\xi^2 + \frac{\mathfrak{a}^2 \mathfrak{a}_R}{a} \partial_\xi \partial_\tau + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \partial_\xi \right) e^{ia(1+\zeta)\partial_\xi} D_1 - \right. \\ & - i \left( \frac{1}{a} \partial_\xi^2 + \frac{\mathfrak{a}^2 \mathfrak{a}_R}{a} \partial_\xi \partial_\tau + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \partial_\xi \right) e^{ia(1-\zeta)\partial_\xi} D_2 + \\ & + i \left( (g + \mathfrak{a}_R^2) \partial_\xi^2 + \mathfrak{a}_R \partial_\xi \partial_\tau + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_\xi \right) e^{ib(1+\zeta)\partial_\xi} D_3 - \\ & \left. - i \left( (g + \mathfrak{a}_R^2) \partial_\xi^2 + \mathfrak{a}_R \partial_\xi \partial_\tau + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_\xi \right) e^{ib(1-\zeta)\partial_\xi} D_4 \right]. \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

При  $\xi < 0$  рассматриваем волну, распространяющуюся в сторону  $\xi \rightarrow -\infty$ .

При этом переменные  $y$ ,  $\tau_0$ , в отличие от (5.2.22), вводятся следующим образом:

$$y = \frac{\xi + \varkappa_R \tau}{\eta}, \quad \tau_0 = \eta \tau. \quad (5.3.24)$$

Тогда в новых операторах  $\partial_y$ ,  $\partial_{\tau_0}$  разрешающие уравнения примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \left( \eta 2 \varkappa_R \partial_y \partial_{\tau_0} - \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \partial_y \right) i \partial_y D_3 &= - \frac{\varkappa_R B_\omega}{g} \partial_y S, \\ \left( \eta 2 \varkappa_R \partial_y \partial_{\tau_0} - \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \partial_y \right) i \partial_y D_4 &= \frac{\varkappa_R B_\omega}{g} \partial_y S. \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

Асимптотически главная часть уравнений для  $D_1$ ,  $D_2$  запишется в форме:

$$\begin{aligned} &\left[ g \partial_y^2 - \eta \varkappa_R \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_y \right] D_i + \\ &+ \left[ b \partial_y^2 - \eta \frac{\varkappa_R}{b} \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \left( b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \partial_y \right] D_{i+2} = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

Асимптотические представления для перемещений  $v_1$ ,  $v_3$  и напряжения  $\sigma_{33}$  совпадают с представлениями (5.3.19). Представление же для напряжения  $\sigma_{13}$  записывается в следующей форме:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= i \frac{E}{(1+\nu)h} \left[ \left( a \partial_y^2 - \eta \frac{\varkappa^2 \varkappa_R}{a} \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \partial_y \right) e^{ia(1+\zeta)\partial_y} D_1 - \right. \\ &- \left( a \partial_y^2 - \eta \frac{\varkappa^2 \varkappa_R}{a} \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \partial_y \right) e^{ia(1-\zeta)\partial_y} D_2 + \\ &+ \left( g \partial_y^2 - \eta \varkappa_R \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_y \right) e^{ib(1+\zeta)\partial_y} D_3 - \\ &\left. - \left( g \partial_y^2 - \eta \varkappa_R \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_y \right) e^{ib(1-\zeta)\partial_y} D_4 \right]. \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

Запишем уравнения (5.3.25), (5.3.26) и выражение (5.3.27) в исходном операторном виде:

$$\left(\varkappa_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2 + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \partial_\xi\right) i \partial_\xi D_3 = \frac{\varkappa_R B_\omega}{g} \partial_\xi S, \quad (5.3.28)$$

$$\left(\varkappa_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2 + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \partial_\xi\right) i \partial_\xi D_4 = -\frac{\varkappa_R B_\omega}{g} \partial_\xi S,$$

$$\begin{aligned} & \left[ g \partial_\xi^2 + \frac{1}{2} (\varkappa_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2) + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_\xi \right] D_{i+} \\ & + \left[ b \partial_\xi^2 + \frac{1}{2b} \left( \varkappa_R^2 \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2 + \varepsilon \left( b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \partial_\xi \right) \right] D_{i+2} = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.3.29)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = & \frac{E}{(1+\nu)h} \left[ i \left( \frac{1}{a} \partial_\xi^2 - \frac{\varkappa^2 \varkappa_R}{a} \partial_\xi \partial_\tau + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \partial_\xi \right) e^{ia(1+\zeta)\partial_\xi} D_{1-} \right. \\ & - i \left( \frac{1}{a} \partial_\xi^2 - \frac{\varkappa^2 \varkappa_R}{a} \partial_\xi \partial_\tau + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \partial_\xi \right) e^{ia(1-\zeta)\partial_\xi} D_{2+} \\ & + i \left( (g + \varkappa_R^2) \partial_\xi^2 - \varkappa_R \partial_\xi \partial_\tau + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_\xi \right) e^{ib(1+\zeta)\partial_\xi} D_{3-} \\ & \left. - i \left( (g + \varkappa_R^2) \partial_\xi^2 - \varkappa_R \partial_\xi \partial_\tau + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_\xi \right) e^{ib(1-\zeta)\partial_\xi} D_{4+} \right]. \end{aligned} \quad (5.3.30)$$

Как и в параграфе 5.2, получим окончательную приближённую форму уравнений для малых окрестностей условного фронта поверхностных волн Рэлея. Введём потенциальные функции  $\varphi$  и  $\psi$  (аналоги объёмного и сдвигового потенциалов), разделив их на части для областей  $\xi > 0$  ( $\varphi^+, \psi^+$ ) и  $\xi < 0$  ( $\varphi^-, \psi^-$ ), и в соответствии с направлением распространения возмущений:  $\varphi_1^\pm, \psi_1^\pm$  – в положительном направлении оси  $\zeta$  и  $\varphi_2^\pm, \psi_2^\pm$  – в отрицательном направлении оси  $\zeta$ . При этом для этих потенциалов  $\varphi^\pm = \varphi_1^\pm + \varphi_2^\pm$ ,  $\psi^\pm = \psi_1^\pm + \psi_2^\pm$  имеют место следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\varphi_1^\pm &= \exp \left[ (1 + \zeta) ia \partial_\xi \right] D_1^\pm, & \varphi_2^\pm &= \exp \left[ (1 - \zeta) ia \partial_\xi \right] D_2^\pm, \\
\psi_1^\pm &= \exp \left[ (1 + \zeta) ib \partial_\xi \right] D_3^\pm, & \psi_2^\pm &= \exp \left[ (1 - \zeta) ib \partial_\xi \right] D_4^\pm.
\end{aligned} \tag{5.3.31}$$

Введём также следующие функции:

$$\begin{aligned}
\Phi_1^\pm &= ia \partial_\xi \exp \left[ (1 + \zeta) ia \partial_\xi \right] D_1^\pm, & \Phi_2^\pm &= -ia \partial_\xi \exp \left[ (1 - \zeta) ia \partial_\xi \right] D_2^\pm, \\
\Psi_1^\pm &= ib \partial_\xi \exp \left[ (1 + \zeta) ib \partial_\xi \right] D_3^\pm, & \Psi_2^\pm &= -ib \partial_\xi \exp \left[ (1 - \zeta) ib \partial_\xi \right] D_4^\pm,
\end{aligned} \tag{5.3.32}$$

которые связаны с функциями  $\varphi_i^\pm$ ,  $\psi_i^\pm$  ( $i = 1, 2$ ) следующим образом:

$$\Phi_i^\pm = \frac{\partial \varphi_i^\pm}{\partial \zeta}, \quad \Psi_i^\pm = \pm \frac{\partial \psi_i^\pm}{\partial \zeta}, \quad i = 1, 2. \tag{5.3.33}$$

Введённые потенциальные функции будут описываться уравнениями (5.2.31). Уравнения граничных условий для областей  $\xi > 0$  и  $\xi < 0$  запишутся в единой форме в виде:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_R^2 \frac{\partial^2 \Psi_1^\pm}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Psi_1^\pm}{\partial \tau^2} + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \frac{\partial \Psi_1^\pm}{\partial \xi} &= \frac{\mathfrak{a}_R B_\omega}{g} \frac{\partial S}{\partial \xi}, \quad \zeta = -1, \\
\mathfrak{a}_R^2 \frac{\partial^2 \Psi_2^\pm}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2^\pm}{\partial \tau^2} + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \frac{\partial \Psi_2^\pm}{\partial \xi} &= -\frac{\mathfrak{a}_R B_\omega}{g} \frac{\partial S}{\partial \xi}, \quad \zeta = 1, \\
\left( g + \frac{\mathfrak{a}_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_i^\pm}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_i^\pm}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_i^\pm}{\partial \xi} &+ \\
+ \left( b + \frac{\mathfrak{a}_R^2}{2b} \right) \frac{\partial^2 \psi_i^\pm}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2b} \frac{\partial^2 \psi_i^\pm}{\partial \tau^2} &+ \\
+ \varepsilon \left( b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_i^\pm}{\partial \xi} &= 0, \quad i = 1, 2, \quad \zeta = \mp 1.
\end{aligned} \tag{5.3.34}$$

Перемещения и напряжения выражаются через введённые потенциальные функ-

ции в единой форме следующим образом:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{\partial \varphi_1^\pm}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_2^\pm}{\partial \xi} + b \frac{\partial \psi_1^\pm}{\partial \xi} + b \frac{\partial \psi_2^\pm}{\partial \xi}, \\
v_3 &= \frac{\partial \varphi_1^\pm}{\partial \zeta} + \frac{\partial \varphi_2^\pm}{\partial \zeta} + \frac{1}{b} \frac{\partial \psi_1^\pm}{\partial \zeta} + \frac{1}{b} \frac{\partial \psi_2^\pm}{\partial \zeta}, \\
\sigma_{33} &= -\frac{E}{(1+\nu)h} \left[ g \frac{\partial^2 \varphi_1^\pm}{\partial \xi^2} + g \frac{\partial^2 \varphi_2^\pm}{\partial \xi^2} + b \frac{\partial^2 \psi_1^\pm}{\partial \xi^2} + b \frac{\partial^2 \psi_2^\pm}{\partial \xi^2} \right], \\
\sigma_{13} &= \frac{E}{(1+\nu)h} \left[ \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi_1^\pm}{\partial \xi \partial \zeta} \pm \frac{\varkappa^2 \varkappa_R}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi_1^\pm}{\partial \zeta \partial \tau} + \varepsilon \frac{1}{2a^2} \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_1^\pm}{\partial \zeta} + \right. \\
&\quad + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi_2^\pm}{\partial \xi \partial \zeta} \pm \frac{\varkappa^2 \varkappa_R}{a^2} \frac{\partial \varphi_2^\pm}{\partial \zeta \partial \tau} + \varepsilon \frac{1}{2a^2} \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_2^\pm}{\partial \zeta} + \\
&\quad + \frac{g + \varkappa_R^2}{b} \frac{\partial^2 \psi_1^\pm}{\partial \xi \partial \zeta} \pm \frac{\varkappa_R}{b} \frac{\partial^2 \psi_1^\pm}{\partial \zeta \partial \tau} + \varepsilon \frac{1}{b} \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_1^\pm}{\partial \zeta} + \\
&\quad \left. + \frac{g + \varkappa_R^2}{b} \frac{\partial^2 \psi_2^\pm}{\partial \xi \partial \zeta} \pm \frac{\varkappa_R}{b} \frac{\partial^2 \psi_2^\pm}{\partial \zeta \partial \tau} + \varepsilon \frac{1}{b} \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_2^\pm}{\partial \zeta} \right]. \tag{5.3.35}
\end{aligned}$$

Запишем разрешающие уравнения в исходной размерной форме, общей для областей  $\alpha > 0$  и  $\alpha < 0$ . Уравнения для потенциальных функций сохраняют форму (5.2.34), а граничные условия и выражения для перемещений и напряжений получают следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \Psi_1^\pm}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \Psi_1^\pm}{\partial t^2} + \frac{k_c}{\varkappa_R^2} \frac{B'}{B} \frac{\partial \Psi_1^\pm}{\partial \alpha} = \frac{B_\omega}{g \varkappa_R} \frac{\partial S}{\partial \alpha}, \quad z = -h,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_2^\pm}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \Psi_2^\pm}{\partial t^2} + \frac{k_c}{\varkappa_R^2} \frac{B'}{B} \frac{\partial \Psi_2^\pm}{\partial \alpha} = -\frac{B_\omega}{g \varkappa_R} \frac{\partial S}{\partial \alpha}, \quad z = h,$$

$$\Psi_i^\pm = \pm h \frac{\partial \psi_i^\pm}{\partial z}, \quad i = 1, 2,$$

(5.3.36)

$$\left( g + \frac{\varkappa_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_i^\pm}{\partial \alpha^2} - \frac{\varkappa_R^2}{2c_R^2} \frac{\partial^2 \varphi_i^\pm}{\partial t^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_i^\pm}{\partial \alpha} +$$

$$+ \left( b + \frac{\varkappa_R^2}{2b} \right) \frac{\partial^2 \psi_i^\pm}{\partial \alpha^2} - \frac{\varkappa_R^2}{2bc_R^2} \frac{\partial^2 \psi_i^\pm}{\partial t^2} +$$

$$+ \left( b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_i^\pm}{\partial \alpha} = 0, \quad i = 1, 2, \quad z = -h.$$

$$v_1 = h \left( \frac{\partial \varphi_1^\pm}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi_2^\pm}{\partial \alpha} + b \frac{\partial \psi_1^\pm}{\partial \alpha} + b \frac{\partial \psi_2^\pm}{\partial \alpha} \right),$$

$$v_3 = h \left( \frac{\partial \varphi_1^\pm}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_2^\pm}{\partial z} + b \frac{\partial \psi_1^\pm}{\partial z} + b \frac{\partial \psi_2^\pm}{\partial z} \right),$$

$$\sigma_{33} = -\frac{Eh}{1+\nu} \left( g \frac{\partial^2 \varphi_1^\pm}{\partial \alpha^2} + g \frac{\partial^2 \varphi_2^\pm}{\partial \alpha^2} + b \frac{\partial^2 \psi_1^\pm}{\partial \alpha^2} + b \frac{\partial^2 \psi_2^\pm}{\partial \alpha^2} \right),$$

$$\sigma_{13} = \frac{Eh}{1+\nu} \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi_1^\pm}{\partial \alpha \partial z} \pm \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{a^2 c_R} \frac{\partial^2 \varphi_1^\pm}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2a^2} \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_1^\pm}{\partial z} + \right. \tag{5.3.37}$$

$$\left. + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi_2^\pm}{\partial \alpha \partial z} \pm \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{a^2 c_R} \frac{\partial^2 \varphi_2^\pm}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2a^2} \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_2^\pm}{\partial z} + \right.$$

$$\left. + \frac{g + \varkappa_R^2}{b} \frac{\partial^2 \psi_1^\pm}{\partial \alpha \partial z} \pm \frac{\varkappa_R^2}{bc_R} \frac{\partial^2 \psi_1^\pm}{\partial z \partial t} + \frac{1}{b} \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_1^\pm}{\partial z} + \right.$$

$$\left. + \frac{g + \varkappa_R^2}{b} \frac{\partial^2 \psi_2^\pm}{\partial \alpha \partial z} \pm \frac{\varkappa_R^2}{bc_R} \frac{\partial^2 \psi_2^\pm}{\partial z \partial t} + \frac{1}{b} \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_2^\pm}{\partial z} \right).$$

Для удобства использования интегрального преобразования Фурье по про-

дольной координате в случае решения задач для цилиндрической оболочки, найдём новое асимптотическое представление для напряжения  $\sigma_{13}$ . Вернёмся к символической форме решения (5.3.19). Запишем это представление в виде:

$$\begin{aligned} \partial_y \sigma_{13} = & \frac{E}{(1+\nu)h} \left[ i\partial_y \left( a\partial_y^2 + \eta \frac{\mathfrak{a}^2 \mathfrak{a}_R}{a} \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \partial_y \right) \exp \left[ ia(1+\zeta)\partial_y \right] D_1 - \right. \\ & - i\partial_y \left( a\partial_y^2 + \eta \frac{\mathfrak{a}^2 \mathfrak{a}_R}{a} \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \partial_y \right) \exp \left[ ia(1-\zeta)\partial_y \right] D_2 + \\ & + i\partial_y \left( g\partial_y^2 + \eta \mathfrak{a}_R \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_y \right) \exp \left[ ib(1+\zeta)\partial_y \right] D_3 - \\ & \left. - i\partial_y \left( g\partial_y^2 + \eta \mathfrak{a}_R \partial_y \partial_{\tau_0} + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_y \right) \exp \left[ ib(1-\zeta)\partial_y \right] D_4 \right]. \end{aligned} \quad (5.3.38)$$

Вернёмся в (5.3.38) к исходным операторам, получим следующую зависимость:

$$\begin{aligned} \partial_\xi \sigma_{13} = & \frac{E}{(1+\nu)h} \left[ \left( \frac{2 - \mathfrak{a}^2 \mathfrak{a}_R^2}{2a} \partial_\xi^2 - \frac{\mathfrak{a}^2}{2a} \partial_\tau^2 + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \partial_\xi \right) i\partial_\xi \exp \left[ ia(1+\zeta)\partial_y \right] D_1 - \right. \\ & - \left( \frac{2 - \mathfrak{a}^2 \mathfrak{a}_R^2}{2a} \partial_\xi^2 - \frac{\mathfrak{a}^2}{2a} \partial_\tau^2 + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \partial_\xi \right) i\partial_\xi \exp \left[ ia(1-\zeta)\partial_y \right] D_2 + \\ & + \left( \partial_\xi^2 - \frac{1}{2} \partial_\tau^2 + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_\xi \right) i\partial_\xi \exp \left[ ib(1+\zeta)\partial_y \right] D_3 - \\ & \left. - \left( \partial_\xi^2 - \frac{1}{2} \partial_\tau^2 + \varepsilon \frac{B'}{B} \partial_\xi \right) i\partial_\xi \exp \left[ ib(1-\zeta)\partial_y \right] D_4 \right]. \end{aligned} \quad (5.3.39)$$

Из представления (5.3.39) следует удобное для использования интегрального преобразования Фурье по продольной координате представление для области  $\xi > 0$  производной от напряжения  $\sigma_{13}$  по продольной координате:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \xi} = & \frac{Eh}{(1+\nu)h} \left( \frac{2 - \varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a} \frac{\partial^2 \Phi_1^+}{\partial \xi^2} - \frac{\varkappa^2}{2a} \frac{\partial^2 \Phi_1^+}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \frac{\partial \Phi_1^+}{\partial \xi} - \right. \\
& - \frac{2 - \varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a} \frac{\partial^2 \Phi_2^+}{\partial \xi^2} + \frac{\varkappa^2}{2a} \frac{\partial^2 \Phi_2^+}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \frac{\partial \Phi_2^+}{\partial \xi} + \\
& + \frac{\partial^2 \Psi_1^+}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi_1^+}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial \Psi_1^+}{\partial \xi} - \\
& \left. - \frac{\partial^2 \Psi_2^+}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi_2^+}{\partial \tau^2} - \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial \Psi_2^+}{\partial \xi} \right). \tag{5.3.40}
\end{aligned}$$

Отметим, что выражение (5.3.40) будет справедливо и при  $\xi < 0$ . Запишем окончательный вид выражения для определения касательного напряжения в размерной форме:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \alpha} = & \frac{E}{(1+\nu)h} \left( \frac{2 - \varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a} \frac{\partial^2 \Phi_1^\pm}{\partial \alpha^2} - \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a} \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \Phi_1^\pm}{\partial t^2} + \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \frac{\partial \Phi_1^\pm}{\partial \alpha} - \right. \\
& - \frac{2 - \varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a} \frac{\partial^2 \Phi_2^\pm}{\partial \alpha^2} + \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a} \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \Phi_2^\pm}{\partial t^2} - \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \frac{\partial \Phi_2^\pm}{\partial \alpha} + \\
& + \frac{\partial^2 \Psi_1^\pm}{\partial \alpha^2} - \frac{\varkappa_R^2}{2} \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \Psi_1^\pm}{\partial t^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial \Psi_1^\pm}{\partial \alpha} - \\
& \left. - \frac{\partial^2 \Psi_2^\pm}{\partial \alpha^2} + \frac{\varkappa_R^2}{2} \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \Psi_2^\pm}{\partial t^2} - \frac{B'}{B} \frac{\partial \Psi_2^\pm}{\partial \alpha} \right). \tag{5.3.41}
\end{aligned}$$

Полученные асимптотические разрешающие уравнения для класса оболочек с плоской торцевой поверхностью (рисунок 5.2) описывают эллиптический погранслой в бесконечной оболочке, вызванный ударной нагрузкой на лицевой поверхности, задаваемой касательным напряжением по формуле (5.3.10), движущимся со скоростью волны сдвига. Выведенные уравнения описывают эллиптический погранслой и в полубесконечной оболочке с неплоской торцевой поверхностью, но в этом случае не будут автоматически выполняться торцевые

граничные условия из (5.3.10).

Однако ударная нагрузка на лицевую поверхность будет по-прежнему оказывать доминирующее влияние на формирование эллиптического погранслоя.

## Глава 6

# Асимптотическая теория нестационарного НДС упругих оболочек вращения при торцевых и поверхностных воздействиях нормального типа

Предполагаем, что искомое нестационарное НДС можно представить с помощью таких составляющих, как изгибная составляющая теории Кирхгофа-Лява, эллиптический погранслои, антисимметричная коротковолновая высокочастотная составляющая и гиперболический погранслои в окрестности фронта волны сдвига. Уравнения для изгибной составляющей и антисимметричного коротковолнового высокочастотного приближения приведены в Главе 1. Уравнения для гиперболического погранслоя выведены в Главе 2, а уравнения для эллиптического погранслоя – в Главе 5. Доказательство корректности рассматриваемого асимптотического подхода основано на доказательстве существования и определения границ следующих областей согласования:

$\mathcal{B}_5$  – область согласования изгибной составляющей и коротковолновой высокочастотной составляющей,

$\mathcal{B}_4, \mathcal{B}_3$  – области согласования коротковолновой высокочастотной составляющей и эллиптического погранслоя,

$\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1$  – области согласования коротковолновой высокочастотной составляющей и гиперболического погранслоя.

В предшествующей главе, во введении, подробно описано развитие метода асимптотического интегрирования трёхмерных уравнений теории упругости применительно к эллиптическому погранслою, когда вначале рассматриваются задачи для простейших геометрических объектов, таких как пластина и цилиндрическая оболочка. И только после этого осуществляется переход к рас-

смотрению общего вида тонких оболочек на примере произвольных оболочек вращения.

В рассматриваемом случае ударных воздействий нормального типа метод расчленения нестационарного НДС на составляющие с различными показателями изменчивости и динамичности рассматривался для простейших геометрических объектов (пластины и цилиндрические оболочки). Как и в модельном случае, в общей теории наличие указанных ранее областей согласования доказывает корректность применяемой асимптотической схемы представления решения для нестационарных волн в различных областях фазовой плоскости различными приближёнными теориями.

Решения для всех приближённых теорий строятся различными асимптотическими методами, основанными на применении интегральных преобразований, разложений в степенные ряды, методов прифронтальной асимптотики и разложений в ряды по специальным функциям. Так, решение для изгибающей составляющей Кирхгофа-Лява получено, как и в Главе 4, с помощью метода экспоненциальных представлений в пространстве преобразования Лапласа по временной переменной и разложении оригиналов в ряд по специальным функциям  $D_{m,c}$  и  $D_{m,s}$ , введенным в [106].

Методика решения для гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения, описанная в Главе 3 и в Главе 4 используется в настоящей главе для построения гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны сдвига: решение здесь получено на базе разложения решения для модельной задачи в ряд по модам колебаний в пространстве преобразования Лапласа на основе асимптотического представления решения для мод в рассматриваемом случае произвольных оболочек.

Решение для эллиптического погранслоя строится в два этапа. На первом этапе решение в малой окрестности фронта поверхностной волны Рэлея ищется с помощью двукратных интегральных преобразований – Лапласа по времени и Фурье по продольной координате – для частного случая цилиндрических

оболочек.

На втором этапе полученное решение для цилиндрической оболочки обобщается на общий случай оболочек вращения. Здесь методом экспоненциальных представлений в пространстве изображений по Лапласу сначала строится решение для потенциальных функций на лицевой поверхности оболочки, а затем оно используется для построения полного решения для этих функций на базе системы эллиптических уравнений с помощью интегрального преобразования Фурье по продольной координате.

## **6.1 Схема расчленения нестационарного НДС оболочек вращения произвольного профиля при ударных торцевых воздействиях нормального типа**

Полная искомая схема расчленения нестационарного НДС при рассматриваемом торцевом воздействии приведена на рисунке 6.1. Необходимо доказать полноту предлагаемого набора асимптотически приближённых теорий: изгибной составляющей по теории Кирхгофа-Лява (область  $\mathcal{R}_4$ ), наложения изгибной составляющей и квазистатического погранслоя типа Сен-Венана (область  $\mathcal{R}_5$ ), антисимметричной коротковолновой высокочастотной составляющей (область  $\mathcal{R}_1$ ), эллиптического погранслоя (область  $\mathcal{R}_3$ ) и гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны сдвига (область  $\mathcal{R}_2$ ). На этом рисунке приведены также области согласования  $\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1$ .

На рисунке 6.2 изображена схема областей применимости указанных приближённых теорий в фазовой плоскости  $(\alpha, t)$ .

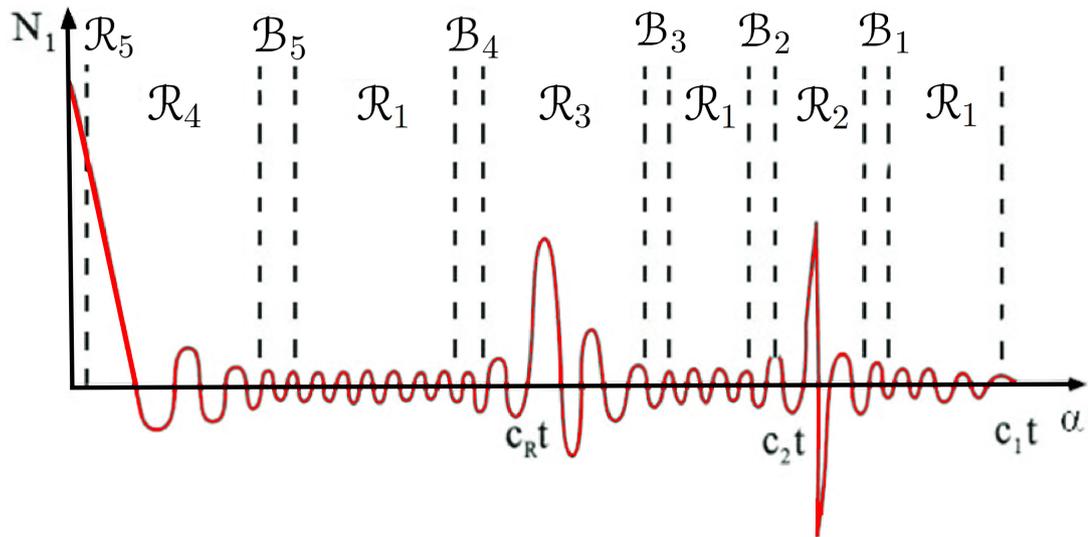


Рисунок 6.1 — Схема решения для перерезывающей силы  $N_1$  в оболочке вращения

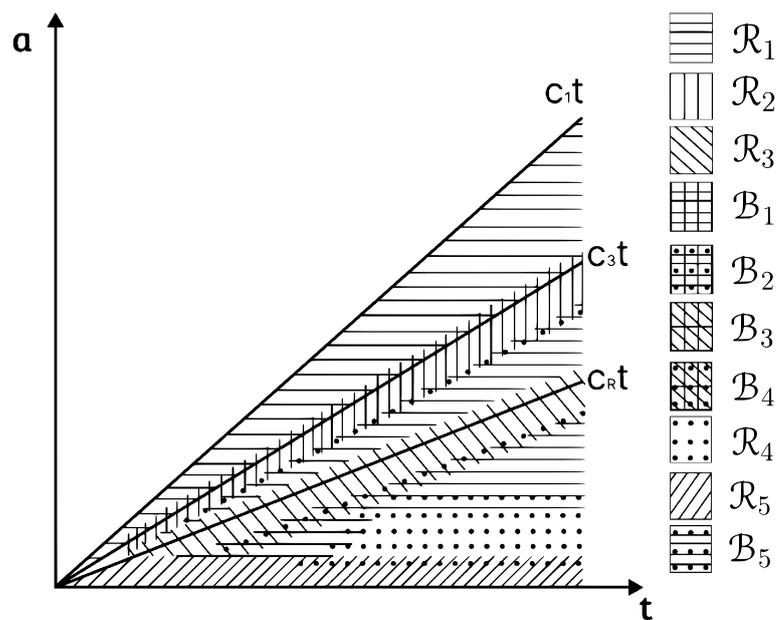


Рисунок 6.2 — Схема областей применимости асимптотических приближённых теорий в фазовой плоскости

## 6.2 Решение для изгибной составляющей теории Кирхгофа-Лява

Как и ранее, граничным условиям на торце в трёхмерной постановке (1.2.3) ставим в соответствие граничные условия для рассматриваемой изгибной со-

ставляющей для случая осесимметричного НДС в форме:

$$N_1 = 2hIH(t), \quad G_1 = 0, \quad (6.2.1)$$

а начальные условия имеют вид, аналогичный случаю изгибной составляющей при ударном торцевом воздействии  $LM$ , представленный формулами (4.2.2).

Алгоритм определения решения для искомой изгибной составляющей полностью совпадает с алгоритмом, изложенным в параграфе 4.2. Безразмерные усилия, моменты и перемещения вводятся по формулам (4.2.3), а безразмерные переменные по формулам (4.2.4). Разрешающие уравнения движения и связь усилий и моментов с перемещениями имеют вид для безразмерных величин (4.2.7), (4.2.6). Решение этих уравнений ищется в преобразованиях Лапласа по временной переменной. Разрешающие уравнения имеют при этом форму (4.2.10), (4.2.11). Используется метод экспоненциальных представлений для изображения решений в форме (4.2.13). В результате получаем общее решение для изображения прогиба в форме (4.2.25). При этом выражение для изображения изгибающего момента  $G_1^L$  имеет вид (4.2.26), а изображение для перерезывающей силы  $N_1$  определяется следующей формулой:

$$N_1^L = \frac{k^3}{3\sqrt{B}} s^{3/2} \left[ -2(C_1 + C_2) \cos(k\xi\sqrt{s}) + 2(C_1 - C_2) \sin(k\xi\sqrt{s}) \right] e^{-k\xi\sqrt{s}}, \quad (6.2.2)$$

где  $k = 3^{1/4}/2^{1/2}$ ,  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные,  $s$  – параметр преобразования Лапласа.

Подстановка полученных выражений в граничные условия (6.2.1) для изображений, даёт следующее выражение для искомого изображения перерезывающей силы:

$$N_1^L = \frac{I}{\sqrt{B}} \frac{1}{s} \left[ \cos(k\xi\sqrt{s}) - \sin(k\xi\sqrt{s}) \right] e^{-k\xi\sqrt{s}}. \quad (6.2.3)$$

Обращение изображения (6.2.3) выполняется с помощью специальных функ-

ций  $D_{m,c}$  и  $D_{m,s}$ , описанных в Главе 4 и определённых формулами (4.2.29)-(4.2.31). В результате получаем для нулевого приближения разложения решения в ряд по малому параметру  $\varepsilon^{1/2}$  следующее выражение:

$$N_1 = I \sqrt{\frac{B(0)}{B}} \left[ D_{1,c}(\tau_0, k) - D_{1,s}(\tau_0, k) \right]. \quad (6.2.4)$$

### 6.3 Разработка асимптотического решения для эллиптического погранслоя в оболочках вращения произвольного профиля при ударном воздействии нормального типа на лицевые поверхности

Рассмотрим простейшее приближение, описываемое в безразмерной форме уравнениями (5.2.31) – (5.2.33). Будем рассматривать только волну, инициируемую лицевой поверхностью  $z = -h$  ( $\zeta = -1$ ) и определяемую потенциалами  $\varphi_1$ ,  $\psi_1$ . Тогда разрешающие уравнения для этой составляющей рассматриваемого НДС запишутся в виде:

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (6.3.1)$$

$$b^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \zeta^2} = 0,$$

$$\varkappa_R^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \tau^2} + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} = \frac{(1 + \nu)h \varkappa_R B_\omega}{E b} P, \quad \zeta = -1,$$

$$\left( a + \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi^2} - \frac{\varkappa^2 \partial^2 \varphi_1}{2a \partial \tau^2} + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi} + \quad (6.3.2)$$

$$+ \left( g + \frac{\varkappa_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{1}{2} \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} = 0, \quad \zeta = -1,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = & -\frac{E}{(1+\nu)h} \left[ \left( g + \frac{\alpha_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + \right. \\ & \left. + \left( b + \frac{\alpha_R^2}{2b} \right) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2b} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \tau^2} + \varepsilon \left( b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \right], \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

$k_c, a, b, g$  – введены в Главе 5, формула (5.2.25).

Рассмотрим ударное воздействие  $P(\xi, \tau)$  в виде [76]:

$$P = \begin{cases} pH(\tau), & |\xi_0| \leq l, \\ 0, & |\xi_0| > l, \end{cases} \quad (6.3.4)$$

где  $p$  – амплитуда нагрузки,  $H(\tau)$  – единичная функция Хэвисайда,  $l$  – ширина (в безразмерном виде) кольца нагрузки на поверхности. Для решения общей задачи (6.3.1) – (6.3.4) рассмотрим сначала базовую задачу для цилиндрической оболочки, описываемую следующей системой уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\alpha_R^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \tau^2} = \frac{(1+\nu)h \alpha_R B_\omega}{E b} P, \quad \zeta = -1, \quad (6.3.5)$$

$$\left( a + \frac{\alpha^2 \alpha_R^2}{2a} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi^2} - \frac{\alpha^2}{2a} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} + \left( g + \frac{\alpha_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \tau^2} = 0, \quad \zeta = -1,$$

$$\sigma_{33} = -\frac{E}{(1+\nu)h} \left[ \left( g + \frac{\alpha_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} + \left( b + \frac{\alpha_R^2}{2b} \right) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2b} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \tau^2} \right]. \quad (6.3.6)$$

Для решения рассматриваемой системы применим преобразование Фурье по продольной переменной  $\xi$  и преобразование Лапласа по временной переменной  $\tau$ . Тогда искомые разрешающие уравнения (6.3.1), (6.3.5), (6.3.6) в преобразованиях запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi_1^{LF}}{d\zeta^2} - a^2\chi^2\varphi_1^{LF} &= 0, \\ \frac{d^2\psi_1^{LF}}{d\zeta^2} - b^2\chi^2\psi_1^{LF} &= 0,\end{aligned}\tag{6.3.7}$$

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}_R^2\chi^2 + s^2)\psi_1^{LF} &= -\frac{(1+\nu)h\mathfrak{a}_R B_\omega}{E} P^{LF}, \quad \zeta = -1, \\ \left[\left(\frac{a + \mathfrak{a}_R^2}{2a}\right)\chi^2 + \frac{\mathfrak{a}_R^2}{2a}s^2\right]\psi_1^{LF} + \left[\left(g + \frac{\mathfrak{a}_R^2}{2}\right)\chi^2 + \frac{1}{2}s^2\right]\psi_1^{LF} &= 0, \quad \zeta = -1,\end{aligned}\tag{6.3.8}$$

где преобразование Фурье по продольной координате  $\xi$  определяется следующим образом:

$$f^F(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\chi\xi} d\xi.\tag{6.3.9}$$

Выражение для изображения нормального напряжения запишется в виде:

$$\sigma_{33}^{LF} = \frac{E}{(1+\nu)h} \left[ \left( \left( g + \frac{\mathfrak{a}_R^2}{2} \right) \chi^2 + \frac{1}{2} s^2 \right) \varphi_1^{LF} + \left( \left( b + \frac{\mathfrak{a}_R^2}{2b} \right) \chi^2 + \frac{1}{2b} s^2 \right) \psi_1^{LF} \right].\tag{6.3.10}$$

Изображение функции ударного воздействия  $P(\xi, \tau)$ , определяемой выражением (6.3.4), примет следующий вид:

$$P^{LF} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} p \frac{\sin(\chi l)}{s \chi}.\tag{6.3.11}$$

Решение уравнений (6.3.5) выбираем в зависимости от знака параметра  $\chi$ :

$$\varphi_1^{LF} = C_1^+ e^{-a\chi(1+\zeta)}, \quad \psi_1^{LF} = C_2^+ e^{-b\chi(1+\zeta)}, \quad \chi > 0,\tag{6.3.12}$$

$$\varphi_1^{LF} = C_1^- e^{a\chi(1+\zeta)}, \quad \psi_1^{LF} = C_2^- e^{b\chi(1+\zeta)}, \quad \chi < 0,$$

где  $C_i^+$ ,  $C_i^-$  ( $i = 1, 2$ ) являются произвольными постоянными искомого реше-

ния, зависящими от параметров преобразований.

Подставим полученные выражения для потенциальных функций (6.3.12) в граничные условия (6.3.8). Из второго уравнения этой системы (6.3.6) следуют уравнения связи между постоянными  $C_1^+$ ,  $C_1^-$  и  $C_2^+$ ,  $C_2^-$ :

$$C_1^\pm = -\frac{g\chi^2 + \frac{1}{2}(\mathfrak{a}_R^2\chi^2 + s^2)}{a\chi^2 + \frac{\mathfrak{a}^2}{2a}(\mathfrak{a}_R^2\chi^2 + s^2)}C_2^\pm. \quad (6.3.13)$$

Отметим, что искомые выражения можно получить при разложении изображений по степеням  $(\mathfrak{a}_R^2\chi^2 + s^2)$ , что соответствует разложению в ряд по малому параметру  $\eta$  в искомой области действия эллиптического погранслоя в пространстве операторов  $\partial_y$ ,  $\partial_\tau$  (глава 5, параграф 2). Используя это свойство и пренебрегая величинами второго порядка малости, получим асимптотическое приближение уравнения связи (6.3.13):

$$C_1^\pm = -\left[\frac{g}{a} + \frac{1}{2a}\left(1 - \frac{g\mathfrak{a}^2\mathfrak{a}_R^2\chi^2 + s^2}{a^2\chi^2}\right)\right]C_2^\pm. \quad (6.3.14)$$

Из первого уравнения граничных условий (6.3.8) следует выражение для постоянных интегрирования  $C_2^\pm$ :

$$C_2^\pm = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(1+\nu)h\mathfrak{a}_R B_\omega}{E} \frac{\sin(\chi l)}{b s\chi(\mathfrak{a}_R^2\chi^2 + s^2)}. \quad (6.3.15)$$

Тогда выражение для изображения напряжения  $\sigma_{33}$  при  $\chi > 0$  и  $\chi < 0$  примет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{LF} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}p\mathfrak{a}_R B_\omega & \left[ \left( \frac{\chi^2}{s(\mathfrak{a}_R^2\chi^2 + s^2)} + \left( \frac{g}{ab} - \frac{\mathfrak{a}^2}{2a^2} \right) \frac{1}{s} \right) \frac{\sin(\chi l)}{\chi} \exp[\mp a \chi(1 + \zeta)] - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\chi^2}{s(\mathfrak{a}_R^2\chi^2 + s^2)} + \frac{1}{2b^2} \frac{1}{s} \right) \frac{\sin(\chi l)}{\chi} \exp[\pm b \chi(1 + \zeta)] \right]. \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

Анализ выражения (6.3.16) показывает выполнение для изображения  $\sigma_{33}^{LF}$  граничного условия при  $\zeta = -1$ . Найдём оригинал для искомого напряжения. Обращаем сначала преобразование Лапласа по известным правилам [94]:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^F = \sqrt{\frac{2p}{\pi}} \alpha_R B_\omega & \left[ \left( \frac{1}{\alpha_R^2} + \left( \frac{g}{ab} - \frac{\alpha^2}{2a^2} - \frac{1}{\alpha_R^2} \cos(\alpha_R \tau \chi) \right) \frac{\sin(\chi l)}{\chi} \exp[\mp a \chi (1 + \zeta)] - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( \frac{1}{\alpha_R^2} + \frac{1}{2b^2} - \frac{1}{\alpha_R^2} \cos(\alpha_R \tau \chi) \right) \frac{\sin(\chi l)}{\chi} \exp[\mp a \chi (1 + \zeta)] \right]. \end{aligned} \quad (6.3.17)$$

Найдём теперь оригинал для напряжения  $\sigma_{33}$ . Сначала сведём интеграл Фурье:

$$\sigma_{33} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{33}^F \exp[i\chi\xi] d\chi. \quad (6.3.18)$$

к интегралу на полубесконечном интервале  $(0, \infty)$ . Учитывая чётность функции  $\sigma_{33}^F$  по  $\chi$ , получаем:

$$\sigma_{33} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sigma_{33}^F \cos(\chi\xi) d\chi \quad (6.3.19)$$

Используя табличный интеграл:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\chi l)}{\chi} e^{-a\chi} \cos(\chi\xi) d\chi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{2la}{a^2 - l^2 + \xi^2} \right) \quad (6.3.20)$$

и теорему о модуляции [100], получаем окончательное выражение для напряжения:

$$\begin{aligned}
\sigma_{33} = & \frac{1}{\pi} p \varkappa_R B_\omega \left[ \left( \frac{1}{\varkappa_R^2} + \frac{1}{g} - \frac{\varkappa^2}{2a^2} \right) \operatorname{arctg} \left( \frac{2la(1+\zeta)}{a^2(1+\zeta)^2 - l^2 + \xi^2} \right) - \right. \\
& - \frac{1}{2\varkappa_R^2} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{2la(1+\zeta)}{a^2(1+\zeta)^2 - l^2 + (\xi - \varkappa_R \tau)^2} \right) + \right. \\
& \left. \left. + \operatorname{arctg} \left( \frac{2la(1+\zeta)}{a^2(1+\zeta)^2 - l^2 + (\xi + \varkappa_R \tau)^2} \right) \right) \right] - \\
& - \left( \frac{1}{\varkappa_R^2} + \frac{1}{2b^2} \right) \operatorname{arctg} \left( \frac{2lb(1+\zeta)}{b^2(1+\zeta)^2 - l^2 + \xi^2} \right) + \\
& + \frac{1}{2\varkappa_R^2} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{2lb(1+\zeta)}{b^2(1+\zeta)^2 - l^2 + (\xi - \varkappa_R \tau)^2} \right) + \right. \\
& \left. \left. + \operatorname{arctg} \left( \frac{2lb(1+\zeta)}{b^2(1+\zeta)^2 - l^2 + (\xi + \varkappa_R \tau)^2} \right) \right) \right].
\end{aligned} \tag{6.3.21}$$

Формула (6.3.21) показывает, что асимптотическое выражение для искомого напряжения в окрестности квазифронта  $\xi = \varkappa_R \tau + l$  может быть записано в виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_{33} = & p \frac{B_\omega}{2\pi \varkappa_R} \left[ - \operatorname{arctg} \left( \frac{2la(1+\zeta)}{a^2(1+\zeta)^2 - l^2 + (\xi - \varkappa_R \tau)^2} \right) + \right. \\
& \left. + \operatorname{arctg} \left( \frac{2lb(1+\zeta)}{b^2(1+\zeta)^2 - l^2 + (\xi - \varkappa_R \tau)^2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{6.3.22}$$

Перейдём к построению решения рассматриваемой задачи для общего случая оболочек вращения, когда разрешающие уравнения (6.3.2) – (6.3.3) содержат члены порядка  $\varepsilon$  с переменными коэффициентами. Для этого проанализируем сначала поведение потенциальной функции  $\psi_1$  на границе  $\zeta = -1$  для рассмотренного случая цилиндрической оболочки, когда её изображение определяется из (6.3.12), (6.3.15) следующим образом:

$$\psi_1^{LF}|_{\zeta=-1} = \psi_{1,0}^{LF} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1+\nu)h}{E} p \frac{\varkappa_R B_\omega}{b} \frac{\sin(\chi l)}{s\chi(\varkappa_R^2 \chi^2 + s^2)}. \quad (6.3.23)$$

Обратим в изображении (6.3.23) интегральное преобразование Фурье по продольной координате. Используя табличный интеграл [219]:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x(x^2 + b^2)} \cos(ux) dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi b^{-2}[1 - e^{-ab} \operatorname{ch}(bu)], & u < a, \\ \frac{1}{2}\pi b^{-2} e^{-bu} \operatorname{sh}(ab), & u > a, \end{cases} \quad (6.3.24)$$

и принимая в (6.3.24) следующие значения для  $x, a, b, u$ :  $x = \chi$ ,  $a = l$ ,  $b^2 = s^2/\varkappa_R^2$ ,  $u = \xi$ , приходим к выражению для интеграла из обратного преобразования для (6.3.23):

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\chi l)}{\chi(\varkappa_R^2 \chi^2 + s^2)} \cos(\chi \xi) d\chi = \begin{cases} \xi < l : \\ \frac{\pi}{2} \frac{1}{s^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \exp\left(\frac{\xi-l}{\varkappa_R} s\right) + \exp\left(-\frac{\xi+l}{\varkappa_R} s\right) \right) \right], \\ \xi > l : \\ \frac{\pi}{4} \frac{1}{s^2} \left[ \exp\left(-\frac{\xi-l}{\varkappa_R} s\right) - \exp\left(-\frac{\xi+l}{\varkappa_R} s\right) \right]. \end{cases} \quad (6.3.25)$$

Таким образом, получаем следующее выражение для  $\psi_{1,0}^L$ :

$$\begin{aligned} & \xi_0 \leq l_0 : \\ \psi_{1,0}^L &= -\frac{(1+\nu)h}{E} p \frac{\varkappa_R B_\omega}{b} \frac{1}{s^3} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \exp\left(\frac{\xi_0 - l_0}{\varkappa_R \varepsilon} s\right) + \exp\left(-\frac{\xi_0 + l_0}{\varkappa_R \varepsilon} s\right) \right) \right], \end{aligned} \quad (6.3.26)$$

$$\begin{aligned} & \xi_0 \geq l_0 : \\ \psi_{1,0}^L &= -\frac{(1+\nu)h}{E} p \frac{\varkappa_R B_\omega}{2b} \frac{1}{s^3} \left( \exp\left(-\frac{\xi_0 - l_0}{\varkappa_R \varepsilon} s\right) - \exp\left(-\frac{\xi_0 + l_0}{\varkappa_R \varepsilon} s\right) \right), l_0 = \varepsilon l. \end{aligned}$$

В решении (6.3.24) слагаемые с  $\exp\{\pm[(\xi_0 - l_0)/\alpha_R \varepsilon]s\}$ :

$$\psi_{1,0}^L = \frac{(1 + \nu)h \alpha_R B_\omega}{E} \frac{1}{2b} \frac{1}{s^3} \exp\left(\pm \frac{\xi_0 \pm l_0}{\alpha_R \varepsilon} s\right) \quad (6.3.27)$$

определяют волны, возбуждаемые границами приложения ударной поверхностной нагрузки  $\xi_0 = \pm l_0$ . Так, в области  $\xi_0 > 0$  граница  $\xi_0 = l_0$  возбуждает прифронтное поле в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея  $\xi_0 = \alpha_R \tau_0 + l_0$  (слагаемое  $\exp\{-[(\xi_0 - l_0)/\alpha_R \varepsilon]s\}$ ) и прифронтное поле в окрестности фронта  $\xi_0 = l_0 - \alpha_R \tau_0$  (слагаемое  $\exp\{[(\xi_0 - l_0)/\alpha_R \varepsilon]s\}$ ). В этой же области  $\xi_0 > 0$  граница  $\xi_0 = -l_0$  возбуждает прифронтное поле в окрестности фронта  $\xi_0 = \alpha_R \tau_0 - l_0$  (слагаемое  $\exp\{-[(\xi_0 + l_0)/\alpha_R \varepsilon]s\}$ ).

Отметим также, что решение (6.3.24) можно непосредственно получить из уравнения для граничного значения потенциальной функции  $\psi_{10}^L$  как линейную комбинацию частного решения неоднородного уравнения и общих решений уравнения однородного, определяющих вышеописанные волновые поля. Проведённый анализ позволяет построить асимптотическое решение соответствующего уравнения для общего случая оболочек вращения произвольного профиля.

Перейдём теперь к оболочке вращения. Для нахождения изображения функции потенциала  $\psi_{10}$  на границе ( $\zeta = -1$ ) выпишем первое граничное условие системы (6.3.2) в изображениях по Лапласу:

$$\alpha_R^2 \frac{d^2 \psi_{1,0}^L}{d\xi^2} - s^2 \psi_{1,0}^L + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \frac{d\psi_{1,0}^L}{d\xi} = \frac{(1 + \nu)h \alpha_R B_\omega}{E} \frac{1}{b} P^L, \quad (6.3.28)$$

$$P^L = \begin{cases} p/s, & |\xi| \leq l, \\ 0, & |\xi| > l. \end{cases}$$

Аналог решения (6.3.26) получим из уравнения (6.3.28) асимптотическим методом. Для этого представим однородную его часть в экспоненциальной форме:

$$\psi_{1,0}^L = \Psi(\xi_0, s) \exp \left[ -\lambda(s) \xi_0 \frac{1}{\varepsilon} \right], \quad (6.3.29)$$

где  $\lambda(s)\xi_0/\varepsilon$  – специальный вид функции изменяемости, а  $\Psi(\xi_0, s)$  – медленно изменяющаяся функция интенсивности, представляемая разложением в степенной ряд по малому параметру  $\varepsilon$ .

Подставляя (6.3.29) в однородную форму уравнения (6.3.28), получаем с погрешностью  $O(\varepsilon^2)$  следующее уравнение для функции изменяемости и нулевого приближения функции интенсивности:

$$(\varkappa_R^2 \lambda^2 - s^2) \Psi - \varepsilon (2\varkappa_R^2 \lambda \Psi' + k_c \frac{B'}{B} \lambda \Psi) = 0, \quad (6.3.30)$$

которое даёт следующее выражение для коэффициента функции изменяемости:

$$\lambda = \frac{1}{\varkappa_R} s \quad (6.3.31)$$

и нулевое приближение для функции интенсивности в форме:

$$\Psi_{(\xi_0, s)} = C_2(s) \frac{1}{B^{k_r}}, \quad k_r = \frac{k_c}{2\varkappa_R^2}, \quad (6.3.32)$$

где  $C_2(s)$  – постоянная интегрирования.

Частное решение неоднородного уравнения (6.3.28), учитывая его малую изменяемость в области  $|\xi| \leq l$ , может быть записано с асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon)$  в следующем виде:

$$\psi_{1,0}^L = -\frac{(1 + \nu)h}{E} p \frac{\varkappa_R B_\omega}{b} \frac{1}{s^3}, \quad (6.3.33)$$

Общее решение уравнения (6.3.28) получим при использовании волновых решений (6.3.29) за счёт выбора постоянных интегрирования  $C_2(s)$  при условии его непрерывности в точках  $\xi_0 = \pm l_0$ . В итоге получаем следующее решение:

$$\begin{aligned}
\xi_0 \leq l_0 : \quad \psi_{1,0}^L &= -\frac{(1+\nu)h}{E} p \frac{\varkappa_R B_\omega}{b} \frac{1}{s^3} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{B(l_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left( \exp \left( \frac{\xi_0 - l_0}{\varkappa_R \varepsilon} s \right) + \exp \left( -\frac{\xi_0 + l_0}{\varkappa_R \varepsilon} s \right) \right) \right], \\
\xi_0 \geq l_0 : \quad \psi_{1,0}^L &= -\frac{(1+\nu)h}{E} p \frac{\varkappa_R B_\omega}{2b} \frac{1}{s^3} \left( \frac{B(l_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \times \\
&\quad \times \left( \exp \left( \frac{\xi_0 - l_0}{\varkappa_R \varepsilon} s \right) - \exp \left( -\frac{\xi_0 + l_0}{\varkappa_R \varepsilon} s \right) \right).
\end{aligned} \tag{6.3.34}$$

Полученное решение (6.3.34) полностью обобщает соответствующее решение (6.3.26) для случая цилиндрической оболочки. Поскольку нас интересуют асимптотики только в малых окрестностях условных фронтов Рэлея, то решение (6.3.34) можно переписать в следующей форме:

$$\begin{aligned}
\xi_0 \leq l_0 : \quad \psi_{1,0}^L &= -\frac{(1+\nu)h}{E} p \frac{\varkappa_R B_\omega}{b} \frac{1}{s^3} \left( \frac{B(l_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \times \\
&\quad \times \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \exp \left( \frac{\xi_0 - l_0}{\varkappa_R \varepsilon} s \right) + \exp \left( -\frac{\xi_0 + l_0}{\varkappa_R \varepsilon} s \right) \right) \right], \\
\xi_0 \geq l_0 : \quad \psi_{1,0}^L &= -\frac{(1+\nu)h}{E} p \frac{\varkappa_R B_\omega}{2b} \frac{1}{s^3} \left( \frac{B(l_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \times \\
&\quad \times \left( \exp \left( -\frac{\xi_0 - l_0}{\varkappa_R \varepsilon} s \right) - \exp \left( -\frac{\xi_0 + l_0}{\varkappa_R \varepsilon} s \right) \right).
\end{aligned} \tag{6.3.35}$$

Из вида асимптотики решения (6.3.35) следует, что она связана с соответствующим решением для цилиндрической оболочки (6.3.26) следующим образом:

$$\psi_{1,0}^L = \left( \frac{B(l_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \psi_{1,0,c}^L, \tag{6.3.36}$$

где  $\psi_{1,0,c}^L$  является соответствующим решением для цилиндрической оболочки.

Построим теперь потенциальные функции  $\varphi_1$ ,  $\psi_1$  в основной области. Проанализируем систему (6.3.1) – (6.3.3). Первое уравнение в граничных условиях (6.3.2) содержит в асимптотически главной части волновой оператор, определяющий быстроизменяющееся НДС в окрестностях условных фронтов поверхностных волн Рэлея. Следовательно, только в этом уравнении нужно учитывать величины нулевого и первого порядка малости; в остальных же уравнениях достаточно удерживать только асимптотически главные величины. Следовательно, по аналогии с (6.3.36) все компоненты могут быть представлены в виде:

$$\sigma_{i,j}^L = \left( \frac{B(l_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \sigma_{i,j,c}^L, \quad v_i^L = \left( \frac{B(l_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} v_{i,c}^L, \quad (6.3.37)$$

где  $\sigma_{ij,c}$  и  $v_{i,c}$  – соответствующие решения для случая цилиндрической оболочки. Следовательно, для оригиналов этих компонент НДС также имеют место аналогичные зависимости:

$$\sigma_{i,j} = \left( \frac{B(l_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \sigma_{ij,c}, \quad v_i = \left( \frac{B(l_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} v_{i,c}. \quad (6.3.38)$$

Используя результаты решения задачи для цилиндрической оболочки в форме (6.3.22), получаем следующее решение для напряжения  $\sigma_{33}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = p \frac{B_\omega}{2\pi \varkappa_R} \left( \frac{B(l_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} & \left[ - \operatorname{arctg} \left( \frac{2la(1+\zeta)}{a^2(1+\zeta)^2 - l^2 + (\xi - \varkappa_R \tau)^2} \right) + \right. \\ & \left. + \operatorname{arctg} \left( \frac{2lb(1+\zeta)}{b^2(1+\zeta)^2 - l^2 + (\xi - \varkappa_R \tau)^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.3.39)$$

Асимптотический анализ решения (6.3.39) показывает, что вне малых окрестностей условного фронта волны Рэлея его порядок уменьшается пропорционально малому параметру  $\varepsilon$ . Отметим также, что вне узкой прифронтовой зоны эллиптического погранслоя порядка  $O(\varepsilon^2)$  решение для  $\sigma_{33}$  имеет порядок  $O(1)$  только в малой приторцевой зоне  $\zeta + 1 = O(\varepsilon)$ . Следовательно, важнейшее

предположение о достаточности отдельного рассмотрения волн, инициируемых каждой лицевой поверхностью, полностью оправдывается при построении решения в этой области:

$$\xi_0 - (\varkappa_R \tau_0 \pm l_0) = O(\varepsilon^2), \quad (6.3.40)$$

где, как и показывает численные расчёты, имеет место скачок напряжения  $\sigma_{zz}$ .

#### **6.4 Численный анализ решения для эллиптического погранслоя в случае сферической оболочки при ударном воздействии на лицевые поверхности**

Рассмотрим на примере сферической оболочки свойства решения для нормального напряжения  $\sigma_{zz}$  в зависимости от пространственных переменных и времени. Геометрия этой оболочки подробно описана в Главе 3. Расчёт проведен по формуле (6.3.39) при  $B = \sin(\theta_T + \alpha/R)$ .

На рисунках 6.3 и 6.4 изображены графики нормального напряжения  $\sigma_{zz}$  в малой окрестности условного фронта волны Рэлея  $\xi_0 = \varkappa_R \tau_0 - l_0$ , возбуждаемого границей приложения нагрузки  $\xi_0 = -l_0$ . Здесь кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям нормальной координаты  $\zeta = -0.99, -0.96, -0.92$ . Расчёты проведены для моментов безразмерного времени  $\tau_0 = 1$  (рисунок 6.3) и  $\tau_0 = 2$  (рисунок 6.4). Геометрические и механические параметры принимались, как и ранее, следующими:  $\varepsilon = 0.01, l_0 = 0.2, \theta_T = 0.93, \nu = 0.3, \varkappa_R = 0.93$ .

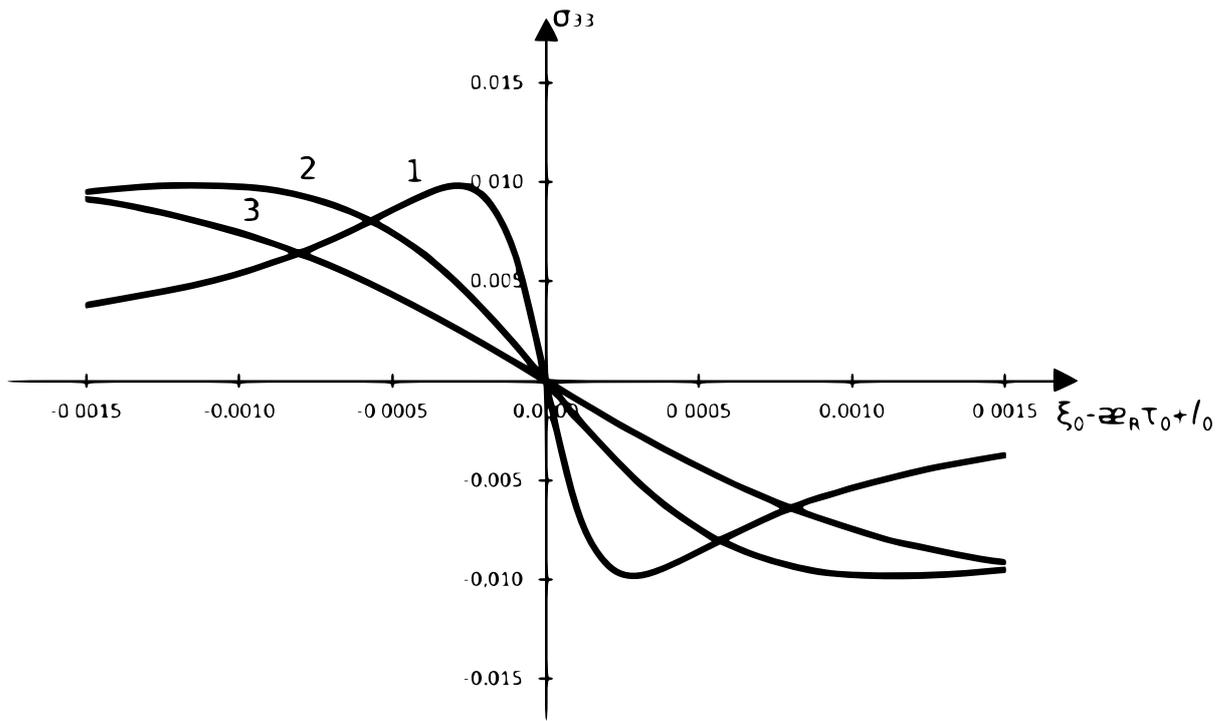


Рисунок 6.3 — График нормального напряжения  $\sigma_{33}$  в малой окрестности условного фронта волны Рэлея  $\xi_0 = \alpha_R \tau_0 - l_0$  в момент времени  $\tau_0 = 1$  для значений нормальной координаты  $\zeta = -0.99, -0.96, -0.92$

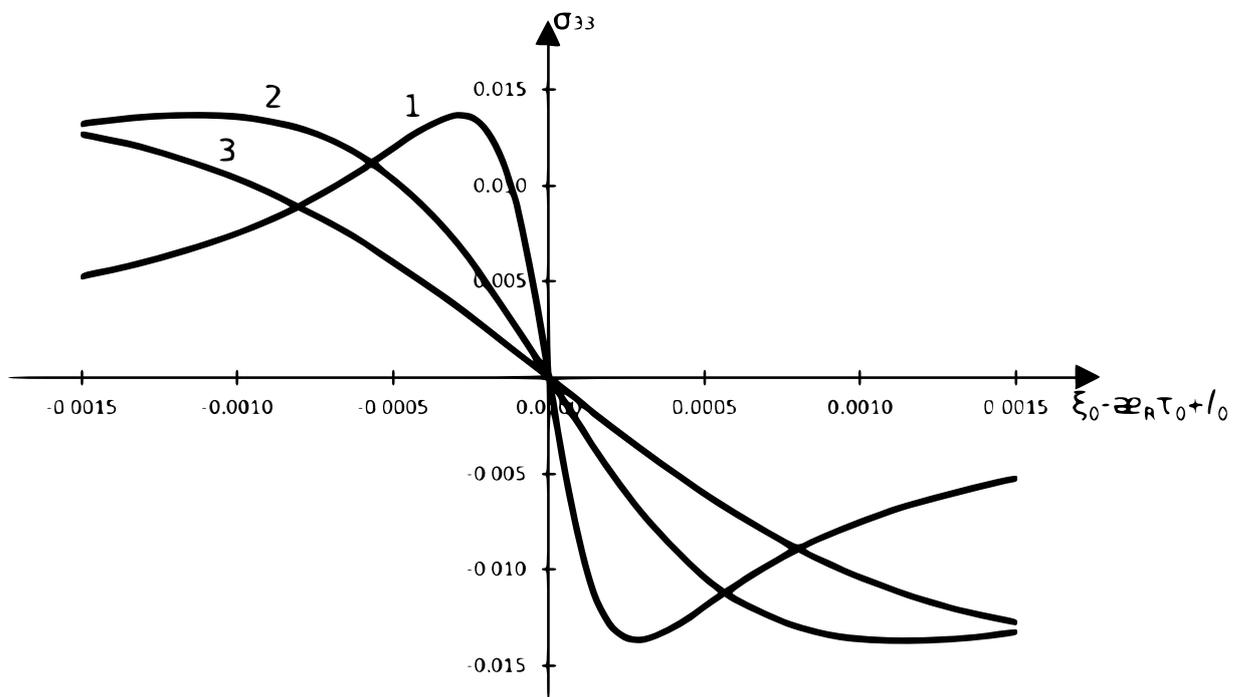


Рисунок 6.4 — График нормального напряжения  $\sigma_{33}$  в малой окрестности условного фронта волны Рэлея  $\xi_0 = \alpha_R \tau_0 - l_0$  в момент времени  $\tau_0 = 2$  для значений нормальной координаты  $\zeta = -0.99, -0.96, -0.92$

## 6.5 Разработка асимптотического решения для эллиптического погранслоя в оболочках вращения произвольного профиля при ударном торцевом воздействии нормального типа

Рассмотрим теперь задачу о распространении ударных волн в полубесконечных оболочках вращения при действии ударной торцевой нагрузки, определяемой граничными условиями (1.2.3). Отметим, что в работах [93], [96], [97] рассматривалось построение дальнего поля волны Рэлея (область действия эллиптического погранслоя) для упругой полуполосы и цилиндрической оболочки при действии ударной торцевой нагрузки типа NW (нормальный тип). При этом для решения уравнений использовался, как и здесь, метод двукратного интегрального преобразования Лапласа по времени и Фурье по продольной координате. Однако для нахождения оригинала решения использовалась аппроксимация изображения, основанная на аппроксимации первого корня дисперсионного уравнения Рэлея-Лэмба, вносящего основной вклад в искомое решение.

Как и в параграфе 6.3, рассмотрим сначала простейший случай цилиндрической оболочки. При этом, в настоящем исследовании строится точное решение для погранслоя эквивалентной задачи при рассмотрении волны, инициируемой лицевой поверхностью  $z = -h$  ( $\zeta = -1$ ) аналогично подходу, изложенному в указанном параграфе. Решение для частной задачи (5.3.3) запишется в нашем случае в виде:

$$\begin{aligned} v_1^{(0)} = 0, \quad v_3^{(0)} = -I(\tau_0 - \xi_0)H(\tau_0 - \xi_0), \\ \sigma_{13}^{(0)} = IH(\tau_0 - \xi_0), \quad \sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{33}^{(0)} = 0. \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

Тогда разрешающие уравнения для потенциальных функций  $\varphi_1, \psi_1$  сохра-

няют вид (6.3.1), а граничные условия и выражение для напряжения запишутся в форме:

$$\begin{aligned} \varkappa_R^2 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \tau^2} &= \frac{\varkappa_R B_\omega}{g} \frac{\partial S}{\partial \xi}, \quad \zeta = -1, \\ \left(g + \frac{\varkappa_R^2}{2}\right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} + \left(b^2 + \frac{\varkappa_R^2}{2b}\right) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2b} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \tau^2} &= 0, \quad \zeta = -1, \end{aligned} \quad (6.5.2)$$

$$\Psi_1 = \frac{1}{b} \frac{\partial \psi}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \xi} = \frac{E}{(1+\nu)h} \left( \frac{2 - \varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} - \frac{\varkappa^2}{2a} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \tau^2} \right), \quad (6.5.3)$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta}.$$

При этом функция  $S(\xi, \tau)$  записываются в виде:

$$\begin{aligned} S &= IH(\tau - \xi), \quad \xi > 0, \\ S &= -IH(\tau - \xi), \quad \xi < 0. \end{aligned} \quad (6.5.4)$$

Как и в задаче о действии ударной нагрузки на лицевые поверхности оболочки, применим к решению искомым уравнений интегральное преобразование Лапласа по временной переменной и Фурье – по пространственной. Изображение функции нагрузки на лицевые поверхности  $S(\xi, \tau)$  запишется в форме:

$$S^{LF} = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} I \frac{\chi}{s(s^2 + \chi^2)}. \quad (6.5.5)$$

Разрешающие уравнения в изображениях для  $\varphi_1$ ,  $\psi_1$  сохраняют вид (6.3.7). Выведем граничные условия в изображениях. Они будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
(\varkappa_R^2 \chi^2 + s^2) \Psi_1^{LF} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} I \frac{(1+\nu)h \varkappa_R B_\omega}{E} \frac{\chi^2}{g s(s^2 + \chi^2)}, \quad \zeta = -1, \\
\left[ \left( g + \frac{\varkappa_R^2}{2} \right) \chi^2 + \frac{1}{2} s^2 \right] \varphi_1^{LF} + \left[ \left( b + \frac{\varkappa_R^2}{2b} \right) \chi^2 + \frac{1}{2b^2} s^2 \right] \psi_1^{LF} &= 0, \quad \zeta = -1, \quad (6.5.6) \\
\Psi_1^{LF} &= \frac{1}{b} \frac{d\psi_1^{LF}}{d\zeta}.
\end{aligned}$$

Выражение для изображения касательного напряжения запишется следующим образом:

$$\sigma_{13}^{LF} = -i \frac{E}{(1+\nu)h} \frac{1}{\chi} \left[ \left( \frac{2 - \varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a} \chi^2 + \frac{\varkappa^2}{2a} s^2 \right) \Phi_1^{LF} + \left( \chi^2 + \frac{1}{2} s^2 \right) \Psi_1^{LF} \right]. \quad (6.5.7)$$

Решение уравнений (6.3.7) сохраняет вид (6.3.12). Подставляя эти выражения в граничные условия (6.5.6), получаем уравнение связи между постоянными  $C_1^\pm$  и  $C_2^\pm$ :

$$C_1^\pm = -\frac{b\chi^2 + \frac{1}{2b}(\varkappa_R^2 \chi^2 + s^2)}{g\chi^2 + \frac{1}{2}(\varkappa_R^2 \chi^2 + s^2)} C_2^\pm. \quad (6.5.8)$$

Как и ранее, в задаче об ударном воздействии на лицевые поверхности, разложим решения для постоянных интегрирования в ряды по степеням  $(\varkappa_R^2 \chi^2 + s^2)$ . Тогда получаем следующие выражения для этих постоянных:

$$\begin{aligned}
C_1^\pm &= \mp \sqrt{\frac{2}{\pi}} I \frac{(1+\nu)h \varkappa_R B_\omega}{E} \frac{1}{g} \left[ \frac{b}{g} + \frac{1}{2bg} \left( 1 - \frac{b^2}{g} \right) \frac{\varkappa_R^2 \chi^2 + s^2}{\chi^2} \right] \times \\
&\quad \times \frac{\chi}{s(\varkappa_R^2 \chi^2 + s^2)(s^2 + \chi^2)}, \quad (6.5.9)
\end{aligned}$$

$$C_2^\pm = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} I \frac{(1+\nu)h \varkappa_R B_\omega}{E} \frac{\chi}{g s(\varkappa_R^2 \chi^2 + s^2)(\chi^2 + s^2)}.$$

Выражения (6.5.9) позволяют получить окончательное решение для изоб-

ражения напряжения  $\sigma_{13}$ , удовлетворяющее граничным условиям для  $\sigma_{13}$  при  $\zeta = -1$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{LF} = & -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}I\frac{\varkappa_R B_\omega}{g} \left\{ \left( g \frac{\chi^3}{s(\varkappa_R^2 \chi^2 + s^2)(s^2 + \chi^2)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{\varkappa^2 g}{2a^2} + \frac{g}{2b^2} - \frac{1}{2} \right) \frac{\chi}{s(s^2 + \chi^2)} \right) \exp[\mp a\chi(1 + \zeta)] - \right. \\ & \left. - \left( g \frac{\chi^3}{s(\varkappa_R^2 \chi^2 + s^2)(s^2 + \chi^2)} + \frac{1}{2} \frac{\chi}{s(s^2 + \chi^2)} \right) \exp[\mp b\chi(1 + \zeta)] \right\}. \end{aligned} \quad (6.5.10)$$

Преобразуем выражение (6.5.10) к более удобному для обращения преобразования виду:

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{LF} = & -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}I\frac{\varkappa_R B_\omega}{g} \left\{ \left( \frac{g}{b^2} \frac{\chi}{s(\varkappa_R^2 \chi^2 + s^2)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{\varkappa^2 g}{2a^2} - \frac{g}{2b^2} - \frac{1}{2} \right) \frac{\chi}{s(\chi^2 + s^2)} \right) \exp[\mp a\chi(1 + \zeta)] - \right. \\ & \left. - \left( \frac{g}{b^2} \frac{\chi}{s(\varkappa_R^2 \chi^2 + s^2)} + \left( -\frac{g}{b^2} + \frac{1}{2} \right) \frac{\chi}{s(\chi^2 + s^2)} \right) \exp[\mp b\chi(1 + \zeta)] \right\}. \end{aligned} \quad (6.5.11)$$

Как и в случае поверхностной ударной нагрузки, сначала обращаем преобразование Лапласа. Тогда получаем следующую форму изображения по Фурье искомого решения для касательного напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^F = & -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}I\frac{\varkappa_R B_\omega}{g} \left\{ \left( \frac{g}{\varkappa_R^2 b^2} \frac{1 - \cos(\varkappa_R \tau \chi)}{\chi} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{\varkappa^2 g}{2a^2} - \frac{g}{2b^2} - \frac{1}{2} \right) \frac{1 - \cos \tau \chi}{\chi} \right) \exp[\mp a\chi(1 + \zeta)] - \right. \\ & \left. - \left( \frac{g}{\varkappa_R^2 b} \frac{1 - \cos(\varkappa_R \tau \chi)}{\chi} + \left( -\frac{g}{b^2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1 - \cos(\tau \chi)}{\chi} \right) \exp[\mp b\chi(1 + \zeta)] \right\}. \end{aligned} \quad (6.5.12)$$

Найдём оригинал для напряжения  $\sigma_{13}$ . Сначала сведём интеграл Фурье:

$$\sigma_{13} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{13}^F e^{i\chi\xi} d\xi \quad (6.5.13)$$

к соответствующему интегралу на полубесконечном интервале  $(0, -\infty)$ . Учитывая нечётность функции  $\sigma_{13}^F$  по  $\chi$ , получаем:

$$\sigma_{13} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sigma_{13}^F \sin(\chi\xi) d\xi. \quad (6.5.14)$$

Используя табличный интеграл:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(\chi l)}{\chi} e^{-a\chi} \sin(\chi\xi) d\chi = \operatorname{arctg} \left( \frac{\xi}{a} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{2\xi a}{a^2 - \xi^2 + l^2} \right), \quad (6.5.15)$$

приходим к следующей формуле для искомого напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = & \frac{2}{\pi} I \frac{\varkappa_R B_\omega}{g} \left[ \left( \frac{g}{\varkappa_R^2 b^2} + \frac{\varkappa^2 g}{2a^2} - \frac{g}{2b^2} - \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} \left( \frac{\xi}{a(1+\zeta)} \right) + \right. \\ & + \left( -\frac{g}{\varkappa_R^2 b^2} + \frac{g}{b^2} - \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} \left( \frac{\xi}{b(1+\zeta)} \right) - \\ & - \frac{g}{2\varkappa_R^2 b^2} \operatorname{arctg} \left( \frac{2a\xi(1+\zeta)}{a^2(1+\zeta)^2 - \xi^2 + \varkappa_R^2 \tau^2} \right) - \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{\varkappa^2 g}{2a^2} - \frac{g}{2b^2} - \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} \left( \frac{2a\xi(1+\zeta)}{a^2(1+\zeta)^2 - \xi^2 + \tau^2} \right) + \\ & + \frac{g}{2\varkappa_R^2 b^2} \operatorname{arctg} \left( \frac{2b\xi(1+\zeta)}{b^2(1+\zeta)^2 - \xi^2 + \varkappa_R^2 \tau^2} \right) + \\ & \left. + \frac{1}{2} \left( -\frac{g}{b^2} + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} \left( \frac{2b\xi(1+\zeta)}{b^2(1+\zeta)^2 - \xi^2 + \tau^2} \right) \right]. \quad (6.5.16) \end{aligned}$$

Проверка показывает, что полученное выражение удовлетворяет граничному условию при  $\zeta = -1$ . Проанализируем его поведение для моментов времени,

когда условный фронт волны Рэлея прошёл расстояние значительно большее толщины оболочки и соизмеримое с радиусом, т. е. когда  $\zeta, \tau \gg 1$ . Тогда примем, что в малой окрестности этого условного фронта можно положить:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \left( \frac{\xi}{a(1+\zeta)} \right) = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} \left( \frac{\xi}{b(1+\zeta)} \right) = \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{arctg} \left( \frac{2a\xi(1+\zeta)}{a^2(1+\zeta)^2 - \xi^2 + \tau^2} \right) = 0, \quad \operatorname{arctg} \left( \frac{2b\xi(1+\zeta)}{b^2(1+\zeta)^2 - \xi^2 + \tau^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.5.17)$$

В этом случае выражение (6.5.16) принимает вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = -I + I \frac{B_\omega}{\pi \varkappa_R b^2} \left[ -\operatorname{arctg} \left( \frac{2a\xi}{a^2(1+\zeta)^2 - \xi^2 + \varkappa_R^2 \tau^2} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \left( \frac{2b\xi}{b^2(1+\zeta)^2 - \xi^2 + \varkappa_R^2 \tau^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.5.18)$$

Перейдём к построению решения рассматриваемой задачи для общего случая оболочек вращения произвольного профиля. Сначала проанализируем поведение функции  $\Psi_1$  на поверхности оболочки  $\zeta = -1$  для рассмотренного выше случая, когда её изображение определяется из (6.5.9) следующим образом:

$$\Psi_1^{LF} |_{\zeta=-1} = \Psi_{1,0}^{LF} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} I \frac{(1+\nu)h \varkappa_R B_\omega}{E g} \frac{\chi^2}{s(s^2 + \chi^2)(\varkappa_R^2 \chi^2 + s^2)}. \quad (6.5.19)$$

Преобразуем изображение (6.5.19) следующим образом:

$$\Psi_{1,0}^{LF} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} I \frac{(1+\nu)h \varkappa_R B_\omega}{E b^2 g} \left[ \frac{1}{s^2(\varkappa_R^2 \chi^2 + s^2)} - \frac{1}{s(s^2 + \chi^2)} \right]. \quad (6.5.20)$$

Представление (6.5.20) позволяет использовать хорошо известные табличные интегралы [219] для первого этапа обращения искомого изображения – обращения преобразования Фурье:

$$\Psi_{1,0}^L = -I \frac{(1+\nu)h B_\omega}{E b^2 g} \left[ \frac{1}{s^2} \exp\left(\mp \frac{\xi}{\alpha_R} s\right) - \frac{1}{s^2} \exp\left(\mp \xi s\right) \right], \quad \xi \leq 0. \quad (6.5.21)$$

В решении (6.5.21) слагаемые с  $\exp(\mp \frac{\xi}{\alpha_R} s)$  определяют поверхностные волны Рэлея, а слагаемые с  $\exp(\mp \xi s)$  – волны сдвига. Это решение можно непосредственно получить из (6.5.2) как линейную комбинацию частного решения неоднородного уравнения и общего решения уравнения однородного. Аналогично случаю ударной нагрузки на лицевые поверхности (параграф 6.3) строим однородное решение для общего случая оболочки вращения в изображениях Лапласа по времени с помощью метода экспоненциальных представлений в форме:

$$\Psi_{1,0}^L = C(s) \frac{1}{B^{k_r}} \exp\left(\mp \frac{\xi_0}{\alpha_R} s \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (6.5.22)$$

и метода малого параметра для частного решения, медленно изменяющегося по продольной координате. Тогда, учитывая только асимптотически главный член для этого частного решения, получаем следующую форму для  $\Psi_{1,0}^L$ :

$$\begin{aligned} \Psi_{1,0}^L = & -\frac{(1+\nu)h B_\omega}{E g b^2} \left[ \left(\frac{B(0)}{B(\xi_0)}\right)^{k_r} \frac{1}{s^2} \exp\left(\mp \frac{\xi_0}{\alpha_R} s \frac{1}{\varepsilon}\right) - \right. \\ & \left. - \alpha_R \left(\frac{B(0)}{B(\xi_0)}\right)^{1/2} \exp\left(\mp \xi_0 s \frac{1}{\varepsilon}\right) \right], \quad \xi_0 \leq 0. \end{aligned} \quad (6.5.23)$$

Решение в окрестности фронта волны Рэлея определяется первым слагаемым:

$$\Psi_{1,0}^L = -\frac{(1+\nu)h B_\omega}{E g b^2} \left(\frac{B(0)}{B(\xi_0)}\right)^{k_r} \frac{1}{s^2} \exp\left(\mp \frac{\xi_0}{\alpha_R} s \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \xi_0 \geq 0. \quad (6.5.24)$$

Следовательно, выражаем рассматриваемое решение для  $\Psi_{1,0}^L$  через соответствующее  $\Psi_{1,0,c}^L$  решение для цилиндрической оболочки:

$$\Psi_{1,0}^L = \left( \frac{B(0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \Psi_{1,0,c}^L. \quad (6.5.25)$$

Методика определения асимптотического решения краевой задачи, описанная в случае ударной торцевой нагрузки в параграфе 6.3, может быть применена в дальнейшем для рассматриваемого случая. В итоге получаем, что напряжения и перемещения для общего случая оболочек вращения произвольного профиля выражаются через их аналоги для цилиндрической оболочки формулами (6.3.38). Таким образом, используя решение (6.5.18), получаем окончательный вид выражения для касательного напряжения  $\sigma_{13}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = I \frac{B_\omega}{\pi \varkappa_R b^2} \left( \frac{B(0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} & \left[ - \operatorname{arctg} \left( \frac{2a\xi(1+\zeta)}{a^2(1+\zeta)^2 - \xi^2 + \varkappa_R \tau^2} \right) + \right. \\ & \left. + \operatorname{arctg} \left( \frac{2b\xi(1+\zeta)}{b^2(1+\zeta)^2 - \xi^2 + \varkappa_R \tau^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.5.26)$$

## 6.6 Численный анализ решения для эллиптического погранслоя в случае сферической оболочки при ударном торцевом воздействии

Свойства полученного решения для касательного напряжения (6.5.26) изучим, подобно примеру параграфа 6.4, для сферической оболочки [81]. Его исследование должно ответить на следующие вопросы, подтверждающие основные положения разработанной асимптотики: как с течением времени сохраняется свойство решения сосредотачивать основной скачок в малой окрестности квазифронта  $O(\varepsilon^2)$  и как влияют друг на друга граничные условия на противоположных лицевых поверхностях.

Расчёты проведены при тех же значениях геометрических и механических параметров, что в параграфе 6.4. На рисунке 6.5 изображены графики

напряжения  $\sigma_{13}$  в малой окрестности фронта волны Рэлея  $\xi_0 = \varkappa_R \tau_0$  для моментов безразмерного времени  $\tau_0 = 1$ , а на рисунке 6.6 для момента времени  $\tau_0 = 2$ . Кривые 1, 2, 3 соответствуют здесь значениям нормальной координаты  $\zeta = -0.99, -0.96, -0.92$ .

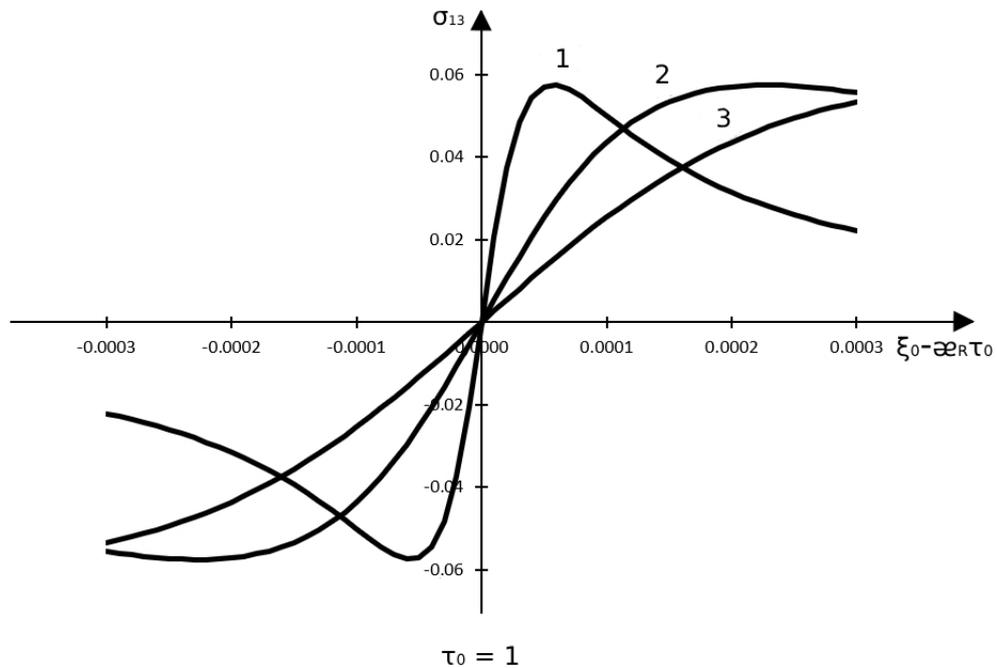


Рисунок 6.5 — График касательного напряжения  $\sigma_{13}$  в малой окрестности условного фронта волны Рэлея  $\xi_0 = \varkappa_R \tau_0$  в момент времени  $\tau_0 = 1$  для значения нормальной координаты  $\zeta = -0.99, -0.96, -0.92$

Расчёты подтвердили основные положения разработанной асимптотики. Первый (основной) скачок искомого напряжения полностью сосредоточен в узкой прифронтальной зоне. Граничные условия на противоположных лицевых поверхностях не влияют друг на друга, поскольку решение в рассматриваемой узкой зоне сосредоточено в малых окрестностях лицевых поверхностей.

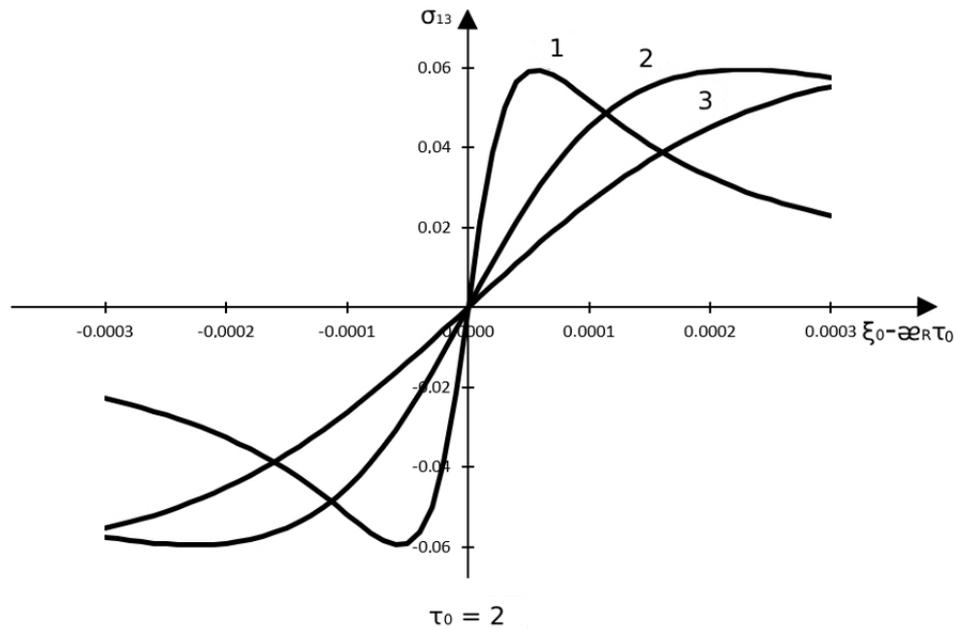


Рисунок 6.6 — График касательного напряжения  $\sigma_{13}$  в малой окрестности условного фронта волны Рэлея  $\xi_0 = \epsilon_R \tau_0$  в момент времени  $\tau_0 = 2$  для значения нормальной координаты  $\zeta = -0.99, -0.96, -0.92$

## 6.7 Разработка асимптотического решения для гиперболического погранслоя в оболочках вращения произвольного профиля при ударном торцевом воздействии нормального типа

Получим решение для гиперболического погранслоя в общем случае оболочек вращения в окрестности фронта волны сдвига при ударном торцевом нагружении, определяемым граничными условиями (2.3.10):

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= IH(\tau), \quad \xi = 0, \\ \sigma_{13} &= 0, \quad \zeta_F = \pm \sqrt{1 + F^2}. \end{aligned} \tag{6.7.1}$$

При этом мы используем безразмерные переменные  $\xi$ ,  $\zeta_F$ ,  $\tau$ , введённые в параграфе 2.3, где безразмерная переменная  $\zeta_F$  определяет повернутое положение

прямолинейного фронта волны сдвига, а безразмерная переменная  $\tau$  отнесена к скорости волны сдвига  $c_2$ . Запишем граничные условия (6.5.1) в перемещениях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3}{\partial \xi} &= 2(1 + \nu)IH(\tau), \quad \xi = 0, \\ \frac{\partial v_3}{\partial \xi} &= 0, \quad \zeta_F = \pm\sqrt{1 + F^2}. \end{aligned} \quad (6.7.2)$$

Разрешающие уравнения движения имеют вид (2.3.8). Следует отметить, что уравнение движения относительно перемещения  $v_3$  из (2.3.8) формально совпадает с разрешающим уравнением из (2.2.13) относительно перемещения  $v_1$  (имея при этом в виду, что переменные  $\tau$  в этих уравнениях отнесены к разным скоростям волн сдвига и расширения). Граничные условия (6.7.2) также формально совпадают с граничными условиями (3.3.2) с точностью до множителя  $\varkappa^2$ . Также, с точностью до множителя  $\varkappa^2$ , совпадают выражения для  $\sigma_{13}$  и  $\sigma_{11}$ . Поэтому выражения для  $v_3$  и  $\sigma_{13}$  с точностью до множителя  $\varkappa^2$  будут совпадать с выражениями для  $v_1$  и  $\sigma_{11}$  и будут записываться в форме:

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{2^{5/2}(1 + \nu)I}{\pi^2} \sqrt{\frac{B(0)}{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\tau - \xi)^{1/2} \cos \left[ \frac{(n-1/2)\pi}{\sqrt{1+F^2}} \zeta_F \right]}{(n - 1/2)^2 \sqrt{\xi}} \times \\ &\quad \times J_1 \left[ 2^{1/2}(n - 1/2)\pi \sqrt{\xi(\tau - \xi)} \right] H(\tau - \xi), \\ \sigma_{13} &= \frac{2I}{\pi} \sqrt{\frac{B(0)}{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \left[ \frac{(n-1/2)\pi}{\sqrt{1+F^2}} \zeta_F \right]}{n - 1/2} \times \\ &\quad \times J_0 \left[ 2^{1/2}(n - 1/2)\pi \sqrt{\xi(\tau - \xi)} \right] H(\tau - \xi), \quad \tau = c_2 t/h. \end{aligned} \quad (6.7.3)$$

## 6.8 Область согласования эллиптического погранслоя с антисимметричным коротковолновым высокочастотным приближением

Рассмотрим особенности расположения областей согласования  $\mathcal{B}_4$  и  $\mathcal{B}_3$ , изображённых на рисунке 6.1, являющихся областями согласования эллиптического погранслоя и антисимметричного коротковолнового высокочастотного приближения. Отметим, что, как и в случае областей согласования гиперболического погранслоя и коротковолновых высокочастотных составляющих, здесь не только будут определяться границы этих областей согласования, но и будет исследоваться соответствие решений рассматриваемых составляющих в общей области.

Рассмотрим сначала случай ударных поверхностных нагрузок нормального типа. Уравнения коротковолновой высокочастотной составляющей имеют вид (1.5.3), (1.5.4) и, после преобразования, разрешающие уравнения в перемещениях принимают форму (3.6.1), (3.6.2). Переходя к безразмерным координатам (5.1.5), соответствующим изменямости и динамичности коротковолновой высокочастотной составляющей  $\xi = \alpha/h$ ,  $\zeta = z/h$ ,  $\tau = c_2 t/h$ , получаем следующую форму разрешающих уравнений для рассматриваемой коротковолновой высокочастотной составляющей:

$$\begin{aligned} \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi \partial \zeta} + \varepsilon \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi^2} + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{1}{1-2\nu} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \xi} = 0, \end{aligned} \quad (6.8.1)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{(1+\nu)h} \left( k_2 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + k_1 \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} \right), \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{(1+\nu)h} \left( k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + k_2 \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} \right), \\
\sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)h} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_3}{\partial \xi} \right).
\end{aligned} \tag{6.8.2}$$

Следует отметить, что при выводе уравнений эллиптического погранслоя из точных трёхмерных уравнений теории упругости при значениях показателей изменчивости и динамичности, равных единице, было использовано следующее свойство (параграф 5.2): асимптотически главные части разрешающей системы уравнений имеют противоположные свойства чётности и нечётности по нормальной координате  $\zeta$ . Вследствие этого происходит значительное упрощение разрешающей системы (5.2.1), (5.2.2), позволяющее одинаково описать «симметричную» и «антисимметричную» по  $\zeta$  составляющие с асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon^2)$  уравнениями (5.2.3), (5.2.4), полностью совпадающими с уравнениями коротковолновых высокочастотных приближений (6.8.1) – (6.8.2). Следовательно, область действия эллиптического погранслоя

$$|\xi_0 - \varkappa_R \tau_0| = O(\varepsilon \eta) \tag{6.8.3}$$

является общей областью применимости уравнений коротковолновой высокочастотной составляющей и эллиптического погранслоя. Точнее говоря, уравнения высокочастотной коротковолновой составляющей описывают, в целом, не только малоамплитудные высокочастотные осцилляции, но и, в частности эллиптический погранслой. А границы промежутка (6.8.3) можно считать условно искомыми областями согласования.

В случае ударных торцевых воздействий нормального типа все вышеприведённые в настоящем параграфе рассуждения относительно области действия

эллиптического погранслоя сохраняют силу и область (6.8.3) можно считать областью применимости разработанной теории эллиптического погранслоя для обоих видов нормального воздействия.

## 6.9 Область согласования гиперболического погранслоя и антисимметричного коротковолнового высокочастотного приближения

Перейдём теперь к изучению областей согласования  $\mathcal{B}_2$  и  $\mathcal{B}_1$  (рисунки 6.1 и 6.2) – областей согласования антисимметричного гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны сдвига и антисимметричного коротковолнового высокочастотного приближения. Для этого, как и в Главе 3, исследуем поведение этого приближения в малой окрестности фронта волны, но уже фронта волны сдвига.

Разрешающие уравнения коротковолнового высокочастотного приближения используем в форме (3.7.1) – (3.7.2). В Главе 2, при выводе разрешающих уравнений гиперболического погранслоя, форма области его существования выбиралась в соответствии с расположением в пространстве фронта волны, который по аналогии с фронтом волны расширения (2.1.15), примет вид для значения времени  $t_0$ :

$$\alpha = \alpha_0 \left[ 1 - \frac{\varepsilon \zeta}{\xi_0} \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{R_1} + O(\varepsilon^2) \right], \quad \alpha_0 = c_2 t_0. \quad (6.9.1)$$

Отметим, что в параграфе 3.7 область согласования между симметричным гиперболическим погранслоем и симметричным высокочастотным приближением (а также и в параграфе 4.5 область согласования антисимметричного гиперболического погранслоя и антисимметричного коротковолнового приближения) рассматривались на базе сравнения асимптотических разрешающих уравнений

в области применимости гиперболического погранслоя в исходных координатах  $\alpha$ ,  $z$ ,  $t$ . При этом переход к координатам  $\alpha$ ,  $z_F$ ,  $t$ , явно определяющим узкую прифронтную зону погранслоя в малой, порядка  $O(\varepsilon^2)$ , окрестности повёрнутого фронта волны расширения (3.7.10) не производился. В настоящем же параграфе построение искомым асимптотических уравнений рассматриваемых составляющих НДС производится после перехода в уравнениях коротковолновой высокочастотной составляющей к вышеупомянутым координатам  $\alpha$ ,  $z_F$ ,  $t$ .

Переходя по аналогии со случаем гиперболического погранслоя в разрешающих уравнениях (3.7.1) – (3.7.2) к переменным  $\alpha$ ,  $z_F$ ,  $t$ , приходим к следующим разрешающим уравнениям:

$$\begin{aligned}
& \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} + \\
& + \frac{z_F F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \left[ \frac{2\varkappa^{-2}}{\sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} \right] + \\
& + \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} = 0, \\
& \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} - \\
& - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \frac{z_F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \left[ \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} + \frac{2}{\sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} \right] + \\
& + \frac{B' \sqrt{1 + F^2}}{(1 - 2\nu) B} \frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_F} = 0,
\end{aligned} \tag{6.9.2}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu} \left( k_2 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \sqrt{1+F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} \right), \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{1+\nu} \left( k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \sqrt{1+F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} \right), \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{1+\nu} \left( k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_2 \sqrt{1+F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} \right), \\
\sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \sqrt{1+F^2} \frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} \right).
\end{aligned} \tag{6.9.3}$$

Полученные уравнения (6.9.2) полностью совпадают с уравнениями промежуточных выкладок (2.2.5), полученных при выводе разрешающих уравнений гиперболического погранслоя (как для в окрестности волны расширения, так и в окрестности волны сдвига) из общих уравнений (2.2.3) после представления решения в виде суммы симметричных и антисимметричных по  $z_F$  составляющих с асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon)$ . В итоге, мы получаем, что область в окрестности фронта волны сдвига (6.9.1):

$$|\tau_0 - \xi_0| = O(\varepsilon^2), \quad |\zeta_F| \leq \sqrt{1+F^2(\xi_0)}, \quad \tau_0 = c_2 t/R \tag{6.9.4}$$

является общей областью применения как теории коротковолновой высокочастотной составляющей, так и теории гиперболического погранслоя, а границы этой области являются границами применения гиперболического погранслоя и их можно считать соответствующими областями согласования.

## Заключение

В представленной диссертационной работе описана асимптотическая теория нестационарных волновых процессов в тонких оболочках вращения произвольного профиля. Основные результаты исследований заключаются в следующем:

1. Асимптотический метод сращиваемых разложений с различными значениями показателей изменяемости по координатам и показателя динамичности позволил свести решение краевой задачи трёхмерной теории упругости, определяющей нестационарное НДС в оболочках вращения, к системе краевых задач, описывающих следующие составляющие:
  - безмоментную и моментную составляющие теории Кирхгофа-Лява, удовлетворяющие, соответственно, тангенциальной и нетангенциальной части граничных условий в двумерной форме; при этом безмоментная составляющая описывает распространение двумерных волн растяжения-сжатия и сдвига;
  - малоамплитудную симметричную и антисимметричную по нормальной координате коротковолновую высокочастотную составляющую, являющуюся асимптотическим обобщением плоской задачи теории упругости для полосы;
  - эллиптический погранслои, определяющий при лицевых и торцевых ударных воздействиях НДС оболочки в малой окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея, обладающий свойством быстрого затухания с удалением от каждой лицевой поверхности; название этот погранслои получил в соответствии с эллиптическим типом разрешающей

системы уравнений относительно потенциальных функций при описании поведения НДС в теле оболочки, тогда как граничные условия на лицевых поверхностях задаются относительно потенциальных функций гиперболическими уравнениями;

- параболический погранслои, определяющий НДС оболочки в малой окрестности квазифронта, являющегося с точки зрения двумерной теории фронтом волны растяжения-сжатия;
- симметричный и антисимметричный по нормальной координате гиперболический погранслои, определяющий НДС оболочки в малых окрестностях фронтов волн расширения и сдвига, представляемых, по новой асимптотической модели, повернутыми нормальными к срединной поверхности; название этот погранслои получил в соответствии с видом разрешающего уравнения гиперболического типа второго порядка относительно продольного перемещения (окрестность фронта волны расширения) и нормального перемещения (окрестность фронта волны сдвига).

2. Методом асимптотического интегрирования исходных точных трёхмерных уравнений линейной теории упругости построены при различных соотношениях показателей изменчивости напряжённо-деформированного состояния по пространственным координатам и показателя динамичности асимптотически оптимальные уравнения двумерных составляющих теории Кирхгофа-Лява, гиперболического и эллиптического погранслоёв (в дополнение к известным уравнениям параболического погранслоя и коротковолновой высокочастотной составляющей).

3. В дополнение к известным методам решения краевых задач для двумерных составляющих и параболического погранслоя построены асимптотические методы решения краевых задач для погранслоёв:

- решения для эллиптического погранслоя в случае ударного воздействия

на лицевые поверхности и для эквивалентной задачи в случае ударного торцевого воздействия построены на базе точных решений для цилиндрической оболочки, полученных с помощью двукратных преобразований Лапласа и Фурье, и основаны на следующем подходе: методом экспоненциального представления в пространстве преобразования Лапласа ищется сначала решение для граничных значений потенциальных функций на лицевых поверхностях, а затем строится в теле оболочки решение системы разрешающих уравнений эллиптического типа;

- решения для всех типов гиперболических погранслоёв построены методом разложения по модам колебаний на базе соответствующих решений для цилиндрической оболочки при условии построения мод методом экспоненциального представления в пространстве преобразования Лапласа по времени; обращение изображений проводится специальной формой метода прифронтной асимптотики, когда разложения изображений в ряды по обратным степеням параметра преобразования приводят к разложениям по функциям Бесселя, быстро сходящимся в рассматриваемой области; построенная общая методика позволяет получать решения в малых окрестностях фронтов волн расширения и сдвига.

4. Выполнено доказательство полноты представления нестационарного НДС оболочек вращения при всех трёх типах ударных воздействий (продольного, тангенциального типа (LT); продольного, изгибающего типа (LM); нормального типа (NW)) путём выявления областей согласования соседних составляющих в фазовой плоскости. Найдены асимптотические оценки границ всех областей согласования составляющих при всех типах ударных воздействий. Доказано совпадение в областях согласования асимптотик уравнений соседних составляющих.

5. Проведённые исследования полностью определили области применимости двумерных теорий Кирхгофа-Лява и типа Тимошенко.

6. Численные расчёты составляющих нестационарного НДС на примере сферической оболочки для всех типов воздействий показали высокую эффективность разработанных аналитических методов решения краевых задач.

## Основные обозначения

$a$	показатель изменяемости
$A_i (i = 1, 2)$	коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности
$Ai(y)$	функция Эйри
$B(\alpha)$	расстояние от точки срединной поверхности до оси вращения
$\mathcal{B}_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$	области согласования решений
$c_R$	скорость условного фронта поверхностных волн Рэлея
$c_1$	скорость волны расширения по трёхмерной теории
$c_2$	скорость волны сдвига по трёхмерной теории
$c_3$	скорость волны растяжения-сжатия по двумерной теории
$C(y), S(y)$	интегралы Френеля
$D_{m,c}, D_{m,s}$	специальные функции
$E$	модуль Юнга
$G_i (i = 1, 2)$	изгибающий момент
$h$	полутолщина оболочки
$H(t)$	единичная ступенчатая функция Хевисайда
$H_i (i = 1, 2)$	коэффициенты Ламе
$H_{ij}$	скручивающий момент
$I$	амплитуда
$J_i (i = 0, 1, \dots)$	функции Бесселя
$k_1$	$\frac{\nu}{1-2\nu}$
$k_2$	$\frac{1-\nu}{1-2\nu}$
$k_3$	$\frac{1-2\nu}{(1-2\nu)^2}$
$N_i$	перерезывающая сила

$q$	показатель динамичности
$R$	характерный линейный размер
$R_i (i = 1, 2)$	главные радиусы кривизны срединной поверхности
$\mathcal{R}_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$	области применимости приближённых теорий
$s$	параметр преобразования Лапласа
$S_{ij} (i, j = 1, 2)$	сдвигающее усилие
$t$	время
$T_i (i = 1, 2)$	продольное усилие
$u_i (i = 1, 2)$	тангенциальное перемещение
$v_k (k = 1, 2, 3)$	перемещение
$w$	прогиб срединной поверхности
$z$	координата внешней нормали срединной поверхности
$\alpha$	длина дуги вдоль образующей
$\alpha_i (i = 1, 2)$	параметры линий кривизны срединной поверхности
$\alpha_3$	расстояние от срединной поверхности по нормали
$\varepsilon$	$\frac{h}{R}$
$\varepsilon_{lm} (l, m = 1, 2, 3)$	деформации
$\zeta$	$\frac{z}{h}$
$\theta$	угол в окружном направлении
$\varkappa$	$\frac{c_2}{c_1}$
$\varkappa_R$	$\frac{c_R}{c_2}$
$\nu$	коэффициент Пуассона
$\rho$	плотность
$\sigma_{lm} (l, m = 1, 2, 3)$	напряжение
$\chi$	параметр преобразования Фурье

## Список литературы

1. Айнола, Л.Я. О расчётных моделях упругих пластинок для динамических задач / Л.Я. Айнола // Изв. АН Эст. ССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. – 1963. – Т. 12, № 1. – С. 31–37.
2. Айнола, Л.Я. Вариационные принципы динамики теории оболочек / Л.Я. Айнола // ДАН СССР. – 1967. – Т. 172, №6. – С. 1296–1298.
3. Айнола, Л.Я. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек / Л.Я. Айнола, У.К.Нигул // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. – 1965. – Т. 14, № 1. – С. 3–63.
4. Алумяэ, Н.А. О применимости метода расчленения напряженного состояния при решении осесимметричных задач динамики замкнутой цилиндрической оболочки / Н.А. Алумяэ // Изв. АН Эст. ССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. – 1961. – Т. 10, № 3. – С. 171–181.
5. Алумяэ, Н.А. Теория упругих оболочек и пластинок / Н.А. Алумяэ // Механика в СССР за 50 лет. Механика деформируемого твёрдого тела. Т. 3. – Москва: Наука, 1972. – С. 227–266.
6. Алумяэ, Н.А. Переходный процесс деформации в замкнутой кругоцилиндрической оболочке при несимметричной краевой нагрузке / Н.А. Алумяэ, Л.Ю. Поверус // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. – 1963. – №1. – С. 13–23.
7. Амбарцумян, С. А. Теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – Москва: Физматгиз, 1961. – 384 с.
8. Анофрикова, Н. С. Асимптотические методы построения решений в окрестностях фронтов волн в вязкоупругом стержне при больших значениях времени / Н. С. Анофрикова, Л. Ю. Коссович, В. П. Черненко // Изв. Сарат.

- ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. – 2005. – Т. 5, Выпуск 1. – С. 82–88.
9. Бабич, Д.В. Основные уравнения движения оболочки с учетом несимметричности тензора напряжений / Д.В. Бабич // Прикладная механика. – 1966. – Т. 2, Выпуск 12. – С. 41–48.
10. Бажанова, Н.С. Погранслои в окрестности фронта волны расширения в вязкоупругих оболочках вращения / Н.С. Бажанова, Л.Ю. Коссович // Проблемы прочности и пластичности. Межвузовский сб. Изд-во Нижегородского ун-та. – 2000. – С. 22–26.
11. Бажанова, Н.С. Нестационарные волны в вязкоупругих оболочках: модель Максвелла / Н.С. Бажанова, Л.Ю. Коссович, М.С. Сухоловская // Известия ВУЗов. Северокавказский регион. Естественные науки. – 2000. – № 2(110). – С. 17–24.
12. Барегамян, Г.А. Построение эллиптического погранслоя в окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея при ударных нормальных торцевых нагрузках / Г.А. Барегамян, И.В. Кириллова, Л.Ю. Коссович // В сборнике: Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов Международной научной конференции. Воронеж. – 2019. – С. 1027–1030.
13. Болотин, В.В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек / В.В. Болотин // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 831–842.
14. Болотин, В.В. О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек / В.В. Болотин // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27, Вып. 2. – С. 362–364.

15. Болотин, В.В. Теория распределения собственных частот упругих тел и её применение к задачам случайных колебаний / В.В. Болотин // Прикладная математика и механика. – 1972. – Т. 8, Выпуск 4. – С. 3–29.
16. Ватульян, А.О. Исследование дисперсионных свойств цилиндрических волноводов с переменными свойствами / А.О. Ватульян, А.В. Моргунова // Акустический журнал. – 2015. – Т. 61, № 3. – С. 295–301.
17. Ватульян, А.О. Исследование волновых процессов в упругих топографических волноводах / А.О. Ватульян, Л.И. Парина // Акустический журнал. – 2021. – Т. 67, №2. – С. 119–125.
18. Ватульян, А.О. О дисперсионных соотношениях для неоднородного волновода при наличии затухания / А.О. Ватульян, В.О. Юров // Известия РАН. МТТ. – 2016. – № 5. – С. 85–93.
19. Ватульян, А.О. Асимптотические и численные методы исследования дисперсионных свойств неоднородных волноводов / А.О. Ватульян, В.О. Юров // В книге: Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения VII. Материалы и доклады. – 2017. – С. 75–76.
20. Ватульян, А.О. Анализ вынужденных колебаний в функциональноградиентном цилиндрическом волноводе / А.О. Ватульян, В.О. Юров // Акустический журнал. – 2018. – Т. 64, № 6. – С. 649–656.
21. Ватульян, А.О. Численное и асимптотическое решение задачи о колебаниях неоднородного волновода с кольцевой трещиной конечной ширины / А.О. Ватульян, В.О. Юров // Акустический журнал. – 2020. – Т. 66, № 5. – С. 467–474.
22. Векслер, Н.Д. К расчёту сферической оболочки на динамическую нагрузку / Н.Д. Векслер // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. – 1965. – Т. 14, №4. – С. 559–563.

23. Векслер, Н.Д. Исследование фронтовых разрывов при осесимметричной деформации оболочек вращения и круглой плиты / Н.Д. Векслер // Переходные процессы деформации оболочек и пластин. Материалы Всесоюз. симпозиума, Тарту. – 1967. – С. 41–49.
24. Векслер, Н.Д. Распространение упругих волн в цилиндрической оболочке при осесимметричной деформации / Н.Д. Векслер // Тр. 8-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Москва. – 1973. – С. 420–423.
25. Векслер, Н.Д. Применение метода сеток в теории типа Тимошенко для исследования переходных волновых процессов деформации плит конечных размеров / Н.Д. Векслер, А.И. Мяннил, У.К. Нигул // Прикладная механика: научно-технический журнал. – 1965. – Т. 1, № 12. – С. 38–49.
26. Векслер, Н.Д. К теории волновых процессов при осесимметричной деформации сферической оболочки / Н.Д. Векслер, У.К. Нигул // Инженерный журнал. Механ. твердого тела. – 1966. – № 1. – С. 74–80.
27. Векуа, И.Н. Об одном методе расчета призматических оболочек / И.Н. Векуа // Тр. Тбилисс. матем. ин-та. – 1955. – Т. 21. – С. 191–259.
28. Вельмисова, А.И. Распространение и отражение гармонических волн в плоском акустическом слое с кусочно-неоднородными гибкими стенками / А.И. Вельмисова, М.В. Вильде, И.В. Кириллова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т. 11, № 4. – С. 68–73.
29. Вильде, М.В. Применение метода расчленения НДС в задаче об ударном поверхностном воздействии нормативного типа на цилиндрическую оболочку / М.В. Вильде, В.А. Ковалев, Л.Ю. Коссович, О.В. Таранов // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2008. – № 8/1 (167). – С. 354–368.

30. Власов, В.З. Общая теория оболочек / В.З. Власов. – Москва: Гостехтеориздат, 1949. – 784 с.
31. Власов, В.З. Метод начальных функций в задачах теории упругости / В.З. Власов // Изв. АН СССР. Серия ОТН. – 1955. – №7. – С. 49–69.
32. Гольденвейзер, А.Л. Уравнения теории оболочек / А.Л. Гольденвейзер // Прикладная математика и механика. – 1940. – Т. 4, № 2. – С. 35–42.
33. Гольденвейзер, А.Л. Исследование напряжённого состояния сферической оболочки / А.Л. Гольденвейзер // Прикладная математика и механика. – 1944. – Т.8, № 6. – С. 441–467.
34. Гольденвейзер, А.Л. Качественное исследование напряжённого состояния тонкой оболочки / А.Л. Гольденвейзер // Прикладная математика и механика. – 1945. – Т.9, № 6. – С. 463–478.
35. Гольденвейзер, А.Л. О приближённых методах расчёта тонких оболочек нулевой гауссовой кривизны / А.Л. Гольденвейзер // Прикладная математика и механика. – 1947. – Т.11, № 4. – С. 409–422.
36. Гольденвейзер, А.Л. Температурные напряжения в тонких оболочках / А.Л. Гольденвейзер // Труды Центрального аэрогидродинамического института им. Н.Е. Жуковского. – № 618. – Москва: ЦАГИ, 1947. – С. 1–8.
37. Гольденвейзер, А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А.Л. Гольденвейзер – Москва: ГИТТЛ, 1953. – 544 с.
38. Гольденвейзер, А.Л. Уточнение теории простого краевого эффекта / А.Л. Гольденвейзер // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т.20, № 3. – С. 335–348.
39. Гольденвейзер, А.Л. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями, зависящими от

- параметра / А.Л. Гольденвейзер // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22, № 5. – С. 657–672.
40. Гольденвейзер, А.Л. Асимптотическое интегрирование линейных дифференциальных уравнений в частных производных с малой главной частью / А.Л. Гольденвейзер // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 23, № 1. – С. 35–37.
41. Гольденвейзер, А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости / А.Л. Гольденвейзер // Прикладная математика и механика. – 1962. – Т. 26, № 4. – С. 668–686.
42. Гольденвейзер, А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости / А.Л. Гольденвейзер // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27, № 4. – С. 593–608.
43. Гольденвейзер, А.Л. Качественный анализ свободных колебаний упругой тонкой оболочки / А.Л. Гольденвейзер // Прикладная математика и механика. – 1966. – Т. 30, № 1. – С. 94–108.
44. Гольденвейзер, А.Л. Методы обоснования и уточнения теории оболочек / А.Л. Гольденвейзер // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т. 32, № 4. – С. 684–695.
45. Гольденвейзер, А.Л. Погранслои и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки / А.Л. Гольденвейзер // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33, № 6. – С. 996–1028.
46. Гольденвейзер, А.Л. О двумерных уравнениях общей линейной теории тонких упругих оболочек / А.Л. Гольденвейзер // Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. – Москва: Наука, 1969. – С. 161–176.

47. Гольденвейзер, А.Л. Об ортогональности форм собственных колебаний тонкой упругой оболочки / А.Л. Гольденвейзер // Проблемы механики твёрдого деформируемого тела. – Ленинград: Судостроение, 1970. – С. 121–128.
48. Гольденвейзер, А.Л. О плотности частот колебаний тонкой оболочки / А.Л. Гольденвейзер // Прикладная математика и механика. – 1970. – Т. 34, № 5. – С. 952–956.
49. Гольденвейзер, А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А.Л. Гольденвейзер. – Москва: Наука, 1976. – 512 с.
50. Гольденвейзер, А.Л. Некоторые вопросы общей линейной теории оболочек / А.Л. Гольденвейзер // Изв. АН СССР. МТТ. – 1990. – № 5. – С. 126–138.
51. Гольденвейзер, А.Л. О краевом напряженно-деформированном состоянии тонких упругих оболочек / А.Л. Гольденвейзер // Изв. АН Эстонии. Физ. Матем. – 1993. – Т. 42, №1. – С. 32–44.
52. Гольденвейзер, А.Л. Алгоритмы асимптотического построения линейной двумерной теории тонких оболочек и принцип Сен-Венана / А.Л. Гольденвейзер // Прикладная математика и механика. – 1994. – Т. 58, № 6. – С. 96–108.
53. Гольденвейзер, А.Л. Свободные колебания тонких упругих оболочек / А.Л. Гольденвейзер, В.В. Лидский, П.Е. Товстик. – Москва: Наука, 1979. – 384 с.
54. Гольдштейн, Р.В. Поверхностные волны Рэлея и Лява при отрицательном коэффициенте Пуассона изотропных сред / Р.В. Гольдштейн, В.А. Городцов, Д.С. Лисовенко // Изв. РАН. МТТ. – 2014. – № 4. – С. 74–89.
55. Гринченко, В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – Киев: Наукова думка, 1981. – 284 с.

56. Димитриенко, Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких микрополярированных упругих пластин / Ю.И. Димитриенко, С.В. Бойко // Математическое моделирование и численные методы. – 2023. – № 2(38). – С. 33–66.
57. Димитриенко, Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких упругих пластин с проскальзыванием слоёв / Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева // Математическое моделирование и численные методы. – 2022. – № 2(34). – С. 28–62.
58. Димитриенко, Ю.И. Моделирование напряжений в тонких композитных цилиндрических оболочках на основе асимптотической теории / Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, А.Е. Пичугина // Математическое моделирование и численные методы. – 2018 г. – № 3(19). – С. 109–126.
59. Димитриенко, Ю.И. Моделирование термонапряжений в композитных оболочках на основе асимптотической теории. Часть 1. Общая теория оболочек / Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, А.Е. Пичугина // Математическое моделирование и численные методы. – 2020. – № 4(28). – С. 84–110.
60. Димитриенко, Ю.И. Моделирование термонапряжений в композитных оболочках на основе асимптотической теории. Часть 2. Расчет цилиндрических оболочек / Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, А.Е. Пичугина, К.В. Белькова, Д.М. Борин // Математическое моделирование и численные методы. – 2022. – № 4(36). – С. 3–30.
61. Димитриенко, Ю.И. Теория тонких оболочек, основанная на асимптотическом анализе трёхмерных уравнений теории упругости / Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, И.С. Шалыгин // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2015. – Выпуск 5(41). – С. 1–20.
62. Димитриенко, Ю.И. Вариационные уравнения асимптотической теории многослойных тонких пластин / Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева,

- Ю.В. Юрин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2015. – №4(61). – С. 67–87.
63. Димитриенко, Ю.И. Асимптотическая теория типа Тимошенко для тонких многослойных пластин / Ю.И. Димитриенко, Ю.В. Юрин // Математическое моделирование и численные методы. – 2018. – № 1(17). – С. 16–40.
64. Дубинкин, М.В. Колебания плит с учетом инерции вращения и сдвига / М.В. Дубинкин // Изв. АН СССР. ОТН. – 1958. – № 12. – С. 131–135.
65. Жаворонок, С.И. Осесимметричная задача нестационарного взаимодействия акустической волны давления с упругой оболочкой вращения / С.И. Жаворонок, Л.Н. Рабинский // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2006. – Т. 12, № 4. – С. 541–554.
66. Каплунов, Ю.Д. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек / Ю.Д. Каплунов, И.В. Кириллова, Л.Ю. Коссович // Прикладная математика и механика. – 1993. – Т. 57, № 1. – С. 83–91.
67. Каплунов, Ю.Д. Дисперсия волн в плоском акустическом слое с гибкими упругими стенками / Ю.Д. Каплунов, И.В. Кириллова, Ю.А. Постнова // Акустический журнал. – 2004. – Т. 50, № 6. – С. 802–806.
68. Каплунов, Ю.Д. Асимптотическая модель для вычисления дальнего поля волны Рэлея в упругой плоскости / Ю.Д. Каплунов, Л.Ю. Коссович // Докл. РАН. – 2004. – Т. 395, №4. – С. 482–484.
69. Каплунов, Ю.Д. О гиперболическом уравнении для волны Рэлея / Ю.Д. Каплунов, Д.А. Приказчиков, Р.Ф. Сабирова // Докл. РАН. Физика, технические науки. – 2022. – Т. 506, №2. – С. 56–59.

70. Кильчевский, Н.А. Основные уравнения равновесия упругих оболочек и некоторые методы интегрирования. Часть 1. / Н.А. Кильчевский // Сб. Тр. Инст. матем. АН УССР. – 1940. – №4. – С. 83–149.
71. Кильчевский, Н.А. Основные уравнения равновесия упругих оболочек и некоторые методы интегрирования. Часть 2. / Н.А. Кильчевский // Сб. Тр. Инст. матем. АН УССР. – 1940. – №5. – С. 73–98.
72. Кильчевский, Н.А. Основные уравнения равновесия упругих оболочек и некоторые методы интегрирования. Часть 3. / Н.А. Кильчевский // Сб. Тр. Инст. матем. АН УССР. – 1941. – №6. – С. 51–102.
73. Кильчевский, Н.А. Основы аналитической механики оболочек. Часть 1 / Н.А. Кильчевский. – Киев: Изд-во АН УССР. – 1963. – 354 с.
74. Кириллова, И.В. Асимптотический вывод двух типов приближения динамических уравнений теории упругости для тонких оболочек: дис. канд. физ. мат. наук: 01.02.04 / Кириллова Ирина Васильевна. – Саратов, 1998. – 122 с.
75. Кириллова, И.В. Области применимости погранслоев в окрестностях фронтов волн в оболочках вращения нулевой гауссовой кривизны / И.В. Кириллова // Изв. РАН. МТТ. – 2003. – № 6. – С. 117–126.
76. Кириллова, И.В. Асимптотическая теория гиперболического погранслоя в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях тангенциального типа / И.В. Кириллова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, № 2. – С. 222–230.
77. Кириллова, И.В. Гиперболический погранслои в окрестности фронта волны сдвига в оболочках вращения / И.В. Кириллова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, № 3. – С. 394–401.

78. Кириллова, И.В. Эллиптический погранслои в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа / И.В. Кириллова // Изв. РАН. МТТ. – 2024. – № 5. – С. 48–59.
79. Кириллова, И.В. Асимптотический метод в задаче об эллиптическом погранслое в тонких оболочках при ударных поверхностных воздействиях нормального типа / И.В. Кириллова // В сборнике: X Поляховские чтения. Материалы международной научной конференции по механике. – Санкт-Петербург. – 2024. – С. 524–527.
80. Кириллова, И.В. Асимптотическая теория нестационарных упругих волн в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях изгибающего типа / И.В. Кириллова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2025. – Т. 25, № 1. – С. 80–90.
81. Кириллова, И.В. Асимптотический метод в задачах об эллиптическом погранслое в оболочках вращения при ударных воздействиях нормального типа / И.В. Кириллова // Изв. РАН. МТТ. – 2025. – № 1. – С. 158–169.
82. Кириллова, И. В. Нестационарные волновые процессы деформации в тонких упругих оболочках вращения / И.В. Кириллова // В книге: Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Сборник Тезисов докладов XIX Всероссийской школы. Ростов-на-Дону. – 2025. – С. 51.
83. Кириллова, И.В. Динамический погранслои в окрестности фронта поперечной волны изгиба / И.В. Кириллова, Л.Ю. Коссович // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. II Международной конференции. Ростов-на-Дону. – 1996. – С. 92–96.

84. Кириллова, И.В. Гиперболические погранслои в составных цилиндрических оболочках / И.В. Кириллова, Л.Ю. Коссович // Изв. РАН. МТТ. – 2009. – №3. – С. 89–101.
85. Кириллова, И.В. Эллиптический погранслой в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа / И.В. Кириллова, Л.Ю. Коссович // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2016. – Т. 3, № 1. – С. 139–146.
86. Кириллова, И.В. Задача для эллиптического погранслоя в цилиндрической оболочке при ударных поверхностных воздействиях нормального типа / И.В. Кириллова, Л.Ю. Коссович // В книге: Современные проблемы механики сплошной среды. Тезисы докладов XVIII Международной конференции. Южный федеральный университет. Ростов-на-Дону. – 2016. – С. 96.
87. Кириллова, И.В. Уточненные уравнения эллиптического погранслоя в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа / И.В. Кириллова, Л.Ю. Коссович // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2017. – Т. 4, № 1. – С. 113–120.
88. Кириллова, И.В. Асимптотические методы исследования эллиптического погранслоя в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях нормального типа / И.В. Кириллова, Л.Ю. Коссович // Изв. РАН. МТТ. – 2020. – № 5. – С. 131–137.
89. Кириллова, И.В. Асимптотическая теория волновых процессов в оболочках вращения при ударных поверхностных и торцевых нормальных воздействиях / И.В. Кириллова, Л.Ю. Коссович // Изв. РАН. МТТ. – 2022. – № 2. – С. 35–49.

90. Кириллова, И.В. Асимптотическая теория нестационарных упругих волн в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях изгибающего типа / И.В. Кириллова, Л.Ю. Коссович // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Сборник тезисов докладов: в 4 т. – Санкт-Петербург, 2023. – С. 376–378.
91. Кириллова, И.В. Асимптотическая теория нестационарных упругих волн в оболочках вращения при ударных тангенциальных торцевых воздействиях / И.В. Кириллова, Л.Ю. Коссович // В сборнике: Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов Международной научной конференции. Воронежский государственный университет. Воронеж. – 2023. – С. 1056–1060.
92. Кириллова, И.В. Асимптотический подход в построении асимптотической теории нестационарных волн в тонких упругих оболочках / И.В. Кириллова, Л.Ю. Коссович // В книге: Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Сборник Тезисов докладов XVIII Всероссийской школы. Ростов-на-Дону. – 2024. – С. 48.
93. Ковалев, В.А. Дальнее поле волны Рэлея для упругой полуполосы при действии торцевой нагрузки / В.А. Ковалев, Л.Ю. Коссович, О.В. Таранов // Изв. РАН. МТТ. – 2005. – № 5. – С. 89–96.
94. Ковалев, В.А. Расчленение нестационарного НДС цилиндрических оболочек при ударных торцевых воздействиях нормального типа / В.А. Ковалев, О.В. Таранов // Смешанные задачи механики деформированного тела: матер. V Рос. конф. с международным участием. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. – 2005. – С. 191–193.
95. Ковалев, В.А. Специфика нестационарного напряжённо-деформированного состояния в цилиндрической оболочке при действии ударной нагрузки /

- В.А. Ковалев, О.В. Таранов // Сборник трудов IX Всероссийской научно-технической конференции «Новые информационные технологии». – Москва: МГАПИ, 2006. – С. 39–46.
96. Ковалев, В.А. Дальнее поле волны Рэлея для упругой цилиндрической оболочки при действии торцевой нагрузки / В.А. Ковалев, О.В. Таранов // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2007. – № 4(54). – С. 197–208.
97. Ковалев, В.А. Анализ точного и приближенного решений для погранслоя в окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея для упругой полуполосы / В.А. Ковалев, О.В. Таранов // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2007. – № 6 (56). – С. 53–50.
98. Ковалишин, Н.И. Моделирование межслоевого проскальзывания в многослойных несимметричных тонких композитных пластинах на основе асимптотической теории / Н.И. Ковалишин // Международный научный журнал. Вестник науки. – 2024. – Т. 3, № 5(74). – С. 1368–1372.
99. Копнин, А.Ю. Нестационарные изгибные волновые процессы в подкрепленных оболочках вращения при ударных краевых воздействиях / А.Ю. Копнин, Л.Ю. Коссович, С.А. Петраковский // Изв. РАН. МТТ. – 1996. – №6. – С. 127–138.
100. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – Москва: Наука, 1973. – 832 с.
101. Коссович, Л.Ю. Исследование волнового процесса в цилиндрической оболочке методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости / Л.Ю. Коссович // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1981. – С. 73–77.

102. Коссович, Л.Ю. Исследование решения задачи о распространении волн в цилиндрической оболочке переменной толщины / Л.Ю. Коссович // Изв. вузов. Математика. – 1982. – №9. – С. 20–24.
103. Коссович, Л.Ю. Метод асимптотического интегрирования в задачах о распространении волн в оболочках вращения / Л.Ю. Коссович // Изв. АН СССР. МТТ. – 1983. – №3. – С. 143–148.
104. Коссович, Л.Ю. Области согласования интегралов теории Кирхгофа-Лява и динамического нерегулярного погранслоя в задачах о распространении волн в оболочках вращения / Л.Ю. Коссович // Тр. 13-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Таллин. – 1983. – Т. 3. – С. 90–95.
105. Коссович, Л.Ю. Исследование волнового процесса в оболочках вращения методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости / Л.Ю. Коссович // Изв. АН СССР. МТТ. – 1984. – №5. – С. 142–146.
106. Коссович, Л.Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек / Л.Ю. Коссович. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та. – 1986. – 176 с.
107. Коссович, Л.Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек вращения: дис. докт. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Коссович Леонид Юрьевич. – Саратов, 1987. – 309 с.
108. Коссович, Л.Ю. Асимптотический анализ нестационарного НДС составных и подкреплённых оболочек при ударных торцевых воздействиях / Л.Ю. Коссович // Материалы V Российской конференции с международным участием «Смешанные задачи механики деформируемого тела». Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. – 2005. – С. 199–210.
109. Коссович, Л.Ю. Асимптотические методы в динамике оболочек при ударных воздействиях / Л.Ю. Коссович // Известия Саратовского университета.

Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2008. – Т. 8, № 2. – С. 12–33.

110. Коссович, Л.Ю. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая многослойной тонкой оболочки / Л.Ю. Коссович, М.В. Вильде, Ю.В. Шевцова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т. 12, Выпуск 2. – С. 56–64.
111. Коссович, Л.Ю. Асимптотический анализ нестационарных упругих волн в тонких оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях / Л.Ю. Коссович, Ю.Д. Каплунов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. Сер. – 2001. – Т. 1, №2. – С. 115–128.
112. Коссович, Л.Ю. Асимптотическая теория нестационарных процессов в тонких оболочках / Л.Ю. Коссович, И.В. Кириллова // Актуальные проблемы механики сплошной среды: Труды II международной конференции. Армения. – Дилижан. Изд-во: ЕГУАС. – 2010. – Т. 1. – С. 321–325.
113. Коссович, Л.Ю. Асимптотические методы в динамике оболочек вращения при ударных воздействиях нормального типа / Л.Ю. Коссович, И.В. Кириллова // VI Сессия Научного совета РАН по механике. – Барнаул. Изд-во: АлтГТУ. – 2012. – С. 18–20.
114. Коссович, Л.Ю. Асимптотическая теория волновых процессов в тонких оболочках при ударных торцевых воздействиях тангенциального, изгибающего и нормального типов / Л.Ю. Коссович, И.В. Кириллова // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. – Казань, 2015. – С. 2008–2010.
115. Коссович, Л.Ю. Теория эллиптического погранслоя в оболочках вращения при ударных воздействиях нормального типа / Л.Ю. Коссович,

- И.В. Кириллова // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов. В 4-х томах. Уфа. – 2019. – Т. 3. – С. 484–486.
116. Коссович, Л. Ю. Исследование поведения нестационарных волн в тонкостенных конструкциях: асимптотический подход / Л.Ю. Коссович, И.В. Кириллова, А.М. Донник, А.О. Гуляева // В книге: Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Сборник Тезисов докладов XIX Всероссийской школы. Ростов-на-Дону. – 2025. – С. 57.
117. Коссович, Л.Ю. Поле Рэлея в задаче Лэмба для цилиндрической оболочки / Л.Ю. Коссович, В.А. Ковалев, О.В. Таранов // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спецвыпуск. – 2004. – С. 52–54.
118. Коссович, Л.Ю. Анализ приближений в задаче Лэмба для бесконечного упругого слоя / Л.Ю. Коссович, А.Н. Кушеккалиев // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2003. – №9. – С. 10–22.
119. Коссович, Л.Ю. Расчленение нестационарного НДС в задаче Лэмба для бесконечного слоя на составляющие с разными показателями изменчивости / Л.Ю. Коссович, А.Н. Кушеккалиев // Труды III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием. Ростов-на-Дону. – 2003. – С. 232–234.
120. Коссович, Л.Ю. Поле Рэлея в бесконечном упругом слое / Л.Ю. Коссович, А.Н. Кушеккалиев // Математика, механика. Саратов: Изд-во СГУ. – 2003. – Выпуск 5. – С. 159–161.
121. Коссович, Л.Ю. Асимптотические приближения трёхмерных динамических уравнений теории упругости в случае двухслойных пластин / Л.Ю. Коссович, Ю.В. Шевцова // Проблемы прочности и пластичности. – 2005. – Выпуск 67. – С. 102–110.

122. Коссович, Л.Ю. Разложение решения задач теории упругости для полосы в ряд по модам / Л.Ю. Коссович, В.А. Юрко, И.В. Кириллова // Изв. Саратовского университета. Нов. Сер. – 2011. – Т. 11, № 2. – С. 83–96.
123. Коул, Дж. Методы возмущений в прикладной математике / Дж. Коул. Москва: Мир, 1972. – 274 с.
124. Кутсер, М. О применении символического метода А.И. Лурье в динамике плит при деформации, симметричной относительно срединной поверхности / М. Кутсер, У.К. Нигул // Изв. АН ЭстССР. – 1965. – Т. 14, №3. – С. 385–392.
125. Кушеккалиев, А.Н. Решение задач о распространении волн в трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке при нормальных воздействиях / А.Н. Кушеккалиев // Механика деформируемых сред. Саратов: Изд-во СГУ. – 2002. – Выпуск 14. – С. 106–115.
126. Кушеккалиев, А.Н. Волны типа Рэлея в полубесконечной пластине при нормальном воздействии поперечного типа / А.Н. Кушеккалиев // Механика деформируемых сред. Саратов: Изд-во СГУ. – 2004. – С. 66–73.
127. Локтева, Н.А. Нестационарная динамика тонких анизотропных упругих цилиндрических оболочек / Н.А. Локтева, Д.О. Сердюк, П.Д. Скопинцев // В книге: Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVI Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. – 2020. – С. 89–91.
128. Локтева, Н.А. Нестационарная динамика анизотропной оболочки Кирхгофа-Лява / Н.А. Локтева, Д.О. Сердюк, П.Д. Скопинцев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2020. – №4(46). – С. 101–106.

129. Локтева, Н.А. Нестационарное деформирование анизотропной круговой цилиндрической оболочки / Н.А. Локтева, Д.О. Сердюк, П.Д. Скопинцев, Г.В. Федотенков // Труды МАИ. – 2021. – №120.
130. Лурье, А.И. К теории толстых плит / А.И. Лурье // Прикладная математика и механика. – 1942. – Т.6, №2-3. – С. 151–168.
131. Лурье, А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек / А.И. Лурье. – Москва: ОГИЗ Гостехиздат, 1947. – 252 с.
132. Лурье, А.И. Пространственные задачи теории упругости / А.И. Лурье. – Москва: Гостехиздат, 1955. – 491 с.
133. Малышев, А.П. Волновые процессы в упругой тонкостенной цилиндрической оболочке при внезапном приложении силы к её торцу / А.П. Малышев // Изв. АН СССР. МТТ. – 1969. – №2. – С. 138–141.
134. Михасёв, Г.И. Локализованные семейства изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке с косыми краями / Г.И. Михасёв // Прикладная математика и механика. – 1996. – Т. 60, Выпуск 4. – С. 635–643.
135. Михасёв, Г.И. Асимптотическая модель длинноволновых колебаний ультратонкой полосы-балки с учетом поверхностных эффектов / Г.И. Михасёв, Н.Д. Ле // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2024. – Т. 11, №3. – С. 557–569.
136. Михасёв, Г.И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы / Г.И. Михасёв, П.Е. Товстик. – Москва: Физматлит, 2009. – 292 с.
137. Нигул, У.К. О применении символического метода А.И. Лурье в трёхмерной теории динамики упругих плит / У.К. Нигул // Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. – 1963. – № 2. – С. 146–155.

138. Нигул, У.К. Применение трёхмерной теории упругости к анализу волнового процесса изгиба полубесконечной плиты при кратковременно действующей краевой нагрузке / У.К. Нигул // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27, Выпуск 6. – С. 1044–1056.
139. Нигул, У.К. О методах и результатах анализа переходных процессов изгиба упругой плиты / У.К. Нигул // Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. – 1965. – № 3. – С. 345–384.
140. Нигул, У.К. О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформаций круговых цилиндрических оболочек / У.К. Нигул // Тр. 6-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. – Москва, 1966. – С. 593–599.
141. Нигул, У.К. Сопоставление результатов анализа переходных волновых процессов в оболочках и пластинах по теории упругости и приближенным теориям / У.К. Нигул // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33, Выпуск 2. – С. 308–322.
142. Нигул, У.К. Алгоритм метода трёхмерных сеток для анализа динамических переходных процессов осесимметричной деформации цилиндрической оболочки / У.К. Нигул, М. Петерсон // Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. – 1966. – Т. 15, № 1. – С. 28–35.
143. Никифоров, А.В. Нестационарная динамика тонких упругих анизотропных конических оболочек / А.В. Никифоров, Д.О. Сердюк, Г.В. Федотенков // БелГУТ. – 2024. – С. 185–186.
144. Новожилов, В.В. Теория тонких оболочек / В.В. Новожилов. – Ленинград: Судпромгиз, 1962. – 431 с.

145. Новожилов, В.В. О принципе Сен-Венана в динамике стержней / В.В. Новожилов, Л.И. Слепян // Прикладная математика и механика. – 1965. – Т. 29, № 2. – С. 261–281.
146. Оконечников, А.С. Пространственная нестационарная контактная задача для цилиндрической оболочки и абсолютно твёрдого тела / А.С. Оконечников, Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков // Изв. РАН. МТТ. – 2020. – №3. – С. 80–91.
147. Пещерикова, О.Н. Математическая модель полой упругой моментной оболочки / О.Н. Пещерикова, А.М. Разоренова, Г.В. Федотенков // Материалы XXX международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – 2024. – Т.2. – С. 66–67.
148. Поверус, Л.Ю. Исследование распространения упругих волн деформации в цилиндрической оболочке вариационным методом / Л.Ю. Поверус // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. – 1970. – №297. – С. 57–65.
149. Россихин, Ю.А. Анализ нестационарных волн в оболочках из псевдоконтинуума Коссера / Ю.А. Россихин, М.В. Шитикова // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. – 2018. – Т. 1, №3(35). – С. 80–85.
150. Сафаров, И.И. Нестационарные движения сферических оболочек в вязкоупругой среде / И.И. Сафаров, М.Х. Тешаев // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. – 2023. – № 83. – С. 166–179.
151. Сеницкий, Ю.Э. Расчет полой сферической оболочки на действие произвольной динамической нагрузки / Ю.Э. Сеницкий // Прикл. механика АН УССР. – 1968. – Т. 4, №4. – С. 42–46.

152. Сеницкий, Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований / Ю.Э. Сеницкий. Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та. – 1985. – 176 с.
153. Сердюк, А.О. Оценка влияния скорости движения сосредоточенной нагрузки на характер волн в анизотропной пластине Тимошенко / А.О. Сердюк, Д.О. Сердюк, Г.В. Федотенков // Материалы XXVIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – 2022. – Т. 2. – С. 119–120.
154. Сердюк, Д.О. Волновые процессы в анизотропных цилиндрических оболочках Кирхгофа-Лява и Тимошенко / Д.О. Сердюк, Г.В. Федотенков // Материалы XXX международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – 2024. – Т. 2. – С. 67–70.
155. Слепян, Л.И. Исследование нестационарных деформаций с помощью рядов, определенных на переменном интервале / Л.И. Слепян // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. – № 4. – С. 62–69.
156. Слепян, Л.И. Нестационарные упругие волны / Л.И. Слепян. – Ленинград: Судостроение, 1972. – 374 с.
157. Слепян, Л.И. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики / Л.И. Слепян, Ю.С. Яковлев. – Ленинград: Судостроение, 1980. – 343 с.
158. Тант, З.Х. Взаимодействие плоской волны давления со сферической оболочкой в упругой среде / З.Х. Тант // Труды МАИ. – 2023. – № 129.
159. Таранов, О.В. Асимптотический подход в исследовании нестационарных волн при ударных торцевых воздействиях / О.В. Таранов // Труды Юби-

- лейной школы-семинара «Проблемы современной механики твердого тела и прикладной математики», к 70-летию доктора физико-математических наук, профессора Г.И. Быковцева. Самара. Изд.-во СамГУ. – 2008. – С. 77–78.
160. Таранов, О.В. Задача об ударном поверхностном воздействии нормального типа на цилиндрическую оболочку / О.В. Таранов // Сборник трудов XIII Всероссийской научно-техн. конференции «Новые информ. технологии». Москва. – 2010. – С. 102–107.
161. Тарлаковский, Д.В. Оценка учета моментных свойств среды на примере нестационарной осесимметричной задачи / Д.В. Тарлаковский, Ван Лам Нгуен // Изв. РАН. МТТ. – 2021. – № 6. – С. 149–155.
162. Тарлаковский, Д.В. Уравнения движения изотропной сферической моментной упругой оболочки / Д.В. Тарлаковский, А.Ж. Фарманян, У.С. Гафуров // Проблемы прочности и пластичности. – 2024. – Т. 86, № 2. – С. 168–181.
163. Терегулов, И.Г. К построению уточненных теорий пластин и оболочек / И.Г. Терегулов // Прикладная математика и механика. – 1962. – Т. 26, № 2. – С. 346–350.
164. Товстик, П.Е. Интегралы уравнений осесимметричных установившихся колебаний оболочки вращения / П.Е. Товстик // Исслед. по упругости и пластичности. Ленинград. – 1965. – № 4. – С. 117–122.
165. Товстик, П.Е. Интегралы уравнений неосесимметричных колебаний тонкой оболочки вращения / П.Е. Товстик // Исслед. по упругости и пластичности. Ленинград. – 1966. – № 5. – С. 45–56.
166. Товстик, П.Е. Асимптотические методы в механике тонкостенных конструкций / П.Е. Товстик, С.М. Бауэр, А.Л. Смирнов, С.Б. Филиппов. – Санкт-Петербург: Изд.-во СПбГУ, 1995. – 188 с.

167. Уфлянд, Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин / Я.С. Уфлянд // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т. 12, Выпуск 3. – С. 287–300.
168. Черных, К.Ф. Линейная теория оболочек. Часть 1. / К.Ф. Черных. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1962. – 274 с.
169. Черных, К.Ф. Линейная теория оболочек. Часть 2. / К.Ф. Черных. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1964. – 395 с.
170. Шамровский, А.Д. Распространение упругих волн от края кругового выреза в цилиндрической оболочке типа Тимошенко / А.Д. Шамровский // Изв. АН СССР. МТТ. – 1974. – № 4. – С. 69–79.
171. Шамровский, А.Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости / А.Д. Шамровский. – Запорожье: Изд-во Запорож. гос. инж. академии. – 1997. – 169 с.
172. Шевцова, Ю.В. Погранслои в окрестности квазифронта в трансверсально изотропной цилиндрической оболочке / Ю.В. Шевцова // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. науч. сб. – Саратов: изд-во СГТУ, 2000. – С. 114–117.
173. Anderson, R.A. Flexural vibration in uniform beams according to the Timoshenko theory / R.A. Anderson // J. Appl. Mech. – 1953. – Vol. 20, N 4. – P. 504–511.
174. Anderson, R.A. On the determination of finite integral transforms for forced vibrations of circular plates / R.A. Anderson // J. Sound and vibration. – 1969. – Vol. 9, N 1. – P. 127–144.

175. Anderson, R.A. On Gegenbauer transforms and forced torsional vibrations of thin spherical shells / R.A. Anderson // J. Sound and vibration. – 1970. – Vol. 12, N 3. – P. 265–275.
176. Anofrikova, N.S. Constitutive Equations for Thin Elastic Shells / N.S. Anofrikova, L.Yu. Kossovich // Proc. 3rd International Conference on Mechanics of Time-Dependent Materials. Erlangen. 2000. P. 66-68.
177. Baregamyanyan, G.A. Equations of an elliptic boundary layer in shells of revolution under shock normal edge loading / G.A. Baregamyanyan, I.V. Kirillova, L.Y. Kossovich // Journal of Physics: Conference Series. 5th International Conference on Topical Problems of Continuum Mechanics with a Special Session in Honor of Alexander Manzhairov's 60th Birthday. TPCM–2017. – P. 55–62.
178. Bauer, S.M. Asymptotic methods in mechanics of solids / S.M. Bauer, S.B. Filippov, A.L. Smirnov, P.E. Tovstik, R. Vaillancourt // International Series of Numerical Mathematics (ISNM, volume 167). – Birkhauser, 2015. – 325 p.
179. Bogdanov, V. Problems of Impact and Non-Stationary Interaction in Elastic-Plastic Formulations / V. Bogdanov. – Cambridge Scholars Publishing, 2023. – 293 p.
180. Boley, B.A. Some solutions of the Timoshenko beam equations / B.A. Boley, C.C. Chao // J. Appl. Mech. – 1955. – Vol. 22, N 4. – P. 579–586.
181. Fedotenkov, G. Non-stationary contact problems for thin shells and solids / G. Fedotenkov, D. Tarlakovskii // Structural Integrity. – 2020. – Vol. 16. – P. 287–292.
182. Flugge, W. Bending impact waves in beams / W. Flugge, E.E. Zajac // Ing. arch. – 1959. – Vol. 28. – P. 59–70.

183. Goldstein, R.V. Young's modulus and Poisson's ratio for seven-constant tetragonal crystals and their nano/microtubes / R.V. Goldstein, V.A. Gorodtsov, D.S. Lisovenko // *Physical Mesomechanics*. – 2015. – Vol. 18, N 3. – P. 213–222.
184. Green, A.E. Some remarks on the linear theory of shells / A.E. Green, P.M. Naghdi // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* – 1965. – Vol. 18, N 3. – P. 257–276.
185. Ellis, O.E. Longitudinal strain pulse propagation in wide rectangular bars. Part 1: Theoretical consideration / O.E. Ellis, A.T. Jones // *J. Appl. Mech.* – 1963. – Vol. 30, N 1. – P. 51–60.
186. Herrmann, G. Three-dimensional and shell theory analysis of axially symmetric motions of cylinders / G. Herrmann, I. Mirsky // *J. Appl. Mech.* – 1956. – Vol. 23, N 4. – P. 563–568.
187. Johnson, M.W. On the foundations of the theory of thin elastic shells / M.W. Johnson, E. Reissner // *J. Math. and Phys.* – 1959. – Vol. 37, N 4. – P. 371–392.
188. Jose, K. Branched flows of flexural elastic waves in non-uniform cylindrical shells / K. Jose, N. Ferguson, A. Bhaskar // *PloS ONE* 18(5). – 2022.
189. Kaplunov, J.D. On the quasi-front in two-dimensional shell theories / J.D. Kaplunov // *C. R. Acad. Sci. Ser.* – 1991. – Vol. 313, N 2. – P. 731–736.
190. Kaplunov, J.D. Asymptotic corrections to the low-frequency theory for a cylindrical elastic shell / J.D. Kaplunov, N. Ege, B. Erbas, N. Noori // *Z. Angew. Math. Phys.* – 2023. – Vol. 74, N 2. – Article 43.
191. Kaplunov, J. D. Dynamics of thin walled elastic bodies / J.D. Kaplunov, L.Yu. Kossovich, E.V. Nolde. – San Diego: Academic Press, 1998. – 226 p.

192. Kaplunov, J. An explicit asymptotic model for the Bleustein-Gulyaev wave / J. Kaplunov, L. Kossovich, A. Zakharov // *C. R. Mecanique.* – 2004. – Vol. 332. – P. 487–492.
193. Kaplunov, J. Explicit Models for Surface, Interfacial and Edge Waves / J. Kaplunov, D. Prikazchikov // *CISM International Centre for Mechanical Sciences.* – 2013. – Vol. 547 – P. 73–114.
194. Kaplunov, J. A revisit to the plane problem for low-frequency scattering by an elastic cylindrical shell / J. Kaplunov, N. Ege, B. Erbas, H. Yucel // *Mathematics and Mechanics of Solids.* – 2024. – Vol. 29, N 8. – P. 1699–1710.
195. Kirillova, I.V. Asymptotic model of non-stationary processes in shells of revolution under the action of end impact loads of bending type / I.V. Kirillova // *Mechanics of Solids.* – 2024. – Vol. 59, N. 7, – P. 3756–3768.
196. Kirillova, I.V. Elliptic boundary layer in shells of revolution under normal edge shock loading / I.V. Kirillova, L.Y. Kossovich // *Strength, Durability, and Dynamics. Multiscale solid mechanics. Book series: Advanced Structured Materials.* – Vol. 141. – Springer Nature Switzerland AG. – 2021. – P. 249–260.
197. Kirillova, I.V. Analysis of solutions for elliptic boundary layer in cylindrical shells at edge shock loading / I.V. Kirillova, L.Y. Kossovich // *Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures. Book series: Advanced Structured Materials.* – Vol. 151. – Springer Nature Switzerland AG. – 2022. – P. 131–140.
198. Kirillova, I.V. An asymptotic model for the nonstationary waves in the shells of revolution initiated by the LT type edge shock loading / I.V. Kirillova, L.Y. Kossovich // *Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. Book series: Advanced Structured Materials.* – Vol. 223. – Springer Nature Switzerland AG. – 2025. – P. 315–342.

199. Kossovich, L.Yu. Non-Stationary asymptotic analysis of combined stiffened shells / L.Yu. Kossovich, I.V. Kirillova // Proceedings of the eleventh international conference on civil, structural and environmental engineering computing. Malta. Civil-Comp Press, Stirlingshire. UK. – 2007. – Paper 109.
200. Kossovich, L.Yu. Dynamics of shells under shock loading: An asymptotic approach / L.Yu. Kossovich, I.V. Kirillova // Proceedings of the ninth international conference on computational structures technology. Athens. Civil-Comp Press, Stirlingshire. UK. – 2008. – Vol. 88. – Paper 207.
201. Kossovich, L.Y. Transient waves in shells of revolution under normal shock loading / L.Yu. Kossovich, I.V. Kirillova // Topical problems in theoretical and applied mechanics. India: Elite Publishing House Pvt Lt. – 2013. – P. 186–200.
202. Kossovich, L.Yu. Asymptotic models for flexural edge wave propagation in thin isotropic plates / L.Yu. Kossovich, I.V. Kirillova, E.L. Kossovich // Proceedings of the twelfth international conference on computational structures technology. Naples. Civil-Comp Press, Stirlingshire. UK. – 2014. – Vol. 16. – Paper 160.
203. Kossovich, L.Yu. A. Flexural transient waves in shells of revolution: an asymptotic approach / L.Yu. Kossovich, Ya. A. Parfenova // ZAMP. – 2000. – Vol. 51, N 4. – P. 611–628.
204. Kusaeva, Z.M. Coupled non-stationary thermoelastic fields in a rigidly fixed round plate / Z.M. Kusaeva // Journal of Computational Applied Mechanics. – 2022. – Vol. 53, N 3. – P. 348–355.
205. Lin, T.C. A study of axisymmetric vibrations of cylindrical shells as affected by rotatory inertia and transverse shear / T.C. Lin, G.W. Morgan // J. Appl. Mech. – 1956. – Vol. 23, N 2. – P. 255–261.

206. Louhghalam, A. Dynamic characteristics of laminated thin cylindrical shells: Asymptotic analysis accounting for edge effect / A. Louhghalam, T. Igusa, M. Tootkaboni // Composite Structures. – 2014. – Vol. 112. – P. 22–37.
207. Lokteva, N. Non-stationary influence function for an unbounded anisotropic kirchhoff-love shell / N. Lokteva, D. Serdyuk, P. Skopintsev // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – Vol. 18, N 4. – P. 737–744.
208. Miclowitz, J. Transient comprassional waves in an infinite elastic plate or elastic layer overlying a rigid half-space / J. Miclowitz // J. Appl. Mech. – 1962. – Vol. 29, N 1. – P. 53–60.
209. Mikhasev, G.I. Free and parametric vibrations of cylindrical shells under static and periodic axial loads / G.I. Mikhasev // Technische Mechanik-European Journal of Engineering Mechanics. – Vol. 17, N 3. – 1997. – P. 209–216.
210. Mikhasev, G.I. Localized families of bending waves in a thin medium-length cylindrical shell under pressure / G.I. Mikhasev // Journal of sound and vibration. – 2002. – Vol. 253, N 4. – P. 833–857.
211. Mikhasev, G.I. Theory of thin adaptive laminated shells based on magnetorheological materials and its application in problems on vibration suppression / G.I. Mikhasev, M.G. Botogova, E.V. Korobko // Non-classical theories and applicatios: Advanced structured materials. Berlin: Springer. – Vol. 15. – 2011. – P. 727–750.
212. Mikhasev, G.I. On the influence of the magnetic field on the eigenmodes of thin laminated cylindrical shells containing magnetorheological elastomer / G.I. Mikhasev, H. Altenbach, E. A. Korchevskaya // Composite Structures. – 2014. – Vol. 113. N 1. – P. 186–196.

213. Mikhasev, G.I. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells / G.I. Mikhasev, H. Altenbach // *Advanced Structured Materials*. Springer Nature Switzerland AG. – Vol. 106. – 2019. – P. 157–198.
214. Mikhasev, G.I. Localized dynamics of thin-walled shells / G.I. Mikhasev, P.E. Tovstik. – CRC Press, 2020. – p. 366.
215. Mikhailova, E. Yu. Transient contact problem for liquid filled concentric spherical shells and a rigid barrier / E.Yu. Mikhailova, Tarlakovskii D.V., G.V. Fedotenkov // *Structural Integrity*. – 2019. – Vol. 5. – P. 389–391.
216. Nigul, U. Three-dimensional shell of axially symmetric transient wave in a semi-infinite cylindrical shell / U. Nigul // *Arch. Mechaniki Stosowanej*. – 1967. – Vol. 19, N 6. – P. 607–627.
217. Nigul, U. Regions of effective of application of the methods of 3D and 2D of analysis of transient of stress waves in shells and plates / U. Nigul // *Int. J. Solids Struct.* – 1969. – Vol. 54, N 6. – P. 839–856.
218. Okonechnikov, A.S. Variational Principle and Equations of Dynamics of Electromagnetoelastic Shells / A.S. Okonechnikov, M.Y. Ryazantseva, D.V. Tarlakovskii // *Advanced Structured Materials*. Springer Nature Switzerland AG. – Vol. 141. – 2021. – P. 347–362.
219. Polyanin, A.D. Handbook of integral equations 2nd ed / A.D. Polyanin, A.V. Manzhirov. Boca Raton: Chapman Hall/CRC, Taylor Francis Group, 2008. – 1109 p.
220. Reismann, H. Forced, axi-symmetric motions of cylindrical shells / H. Reismann, J. Padlog // *Journal of the Franklin Institute*. – 1967. – Vol. 284, N 5. – P. 308–319.

221. Rosenfeld, R.L. Wave fronts in elastic rods and plates / R.L. Rosenfeld, J. Miclowitz // Proc. 4-th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. – 1962. – Vol. 1. – P. 293–303.
222. Rossikhin, Yu.A. The method of ray expansions for investigating transient wave processes in thin elastic plates and shells / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Acta Mech. – 2007. – Vol. 189. – P. 87–121.
223. Rossikhin, Yu. A. The method of ray expansions for solving boundary-value dynamic problems for spatially curved rods of arbitrary cross-section / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Acta Mech. – 2008. – Vol. 200. – P. 213–238.
224. Rossikhin, Yu.A. Transient wave propagation in Cosserat-type shells / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Composites Part B: Engineering. – 2019. – Vol. 163. – P. 145–149.
225. Rossikhin, Yu.A. Transient waves propagation in the Mindlin microelastic medium / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2020. – Vol. 27, N 19. – P. 1653–1657.
226. Rossikhin, Yu.A. Surface wave propagation in 3D medium / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Encyclopedia of Continuum Mechanics. Berlin. Heidelberg. – 2020. – P. 2384–2393.
227. Rossikhin, Yu.A. Boundary-value dynamic problems of thin bodies, ray expansion approach / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Encyclopedia of Continuum Mechanics. Berlin. Heidelberg. – 2020. – P. 194–211.
228. Rossikhin, Yu.A. Analysis of free vibrations of a viscoelastic oscillator via the models involving several fractional parameters and relaxation/retardation times / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, T.A. Shcheglova // Computers and Mathematics with Applications. – 2010. – Vol. 59, N 5. – P. 1727–1744.

229. Safarov, I.I. Non Stationary interaction of elastic waves with cylindrical shells / I.I. Safarov, M.S. Akhmedov, Z.I. Boltaev, N.B. Otajonova // Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology. (JMEST). – 2015. – Vol. 2, N 1. – P. 251–254.
230. Safarov, I.I. Interaction of nonstationary waves on cylindrical body / I.I. Safarov, N.R. Kulmurov, M.Kh. Teshaev, N.U. Kuldashov // Applied Mathematics. – 2019. – Vol. 10. – P. 435–447.
231. Scott, R.A. Transient compressional waves in the infinite elastic plate with a circular cylindrical cavity / R.A. Scott, J. Miclowitz // J. Appl. Mech. – 1964. – Vol. 31, N 4. – P. 627–634.
232. Shitikova, M.V. Mathematical modeling of transient waves propagation in Cosserat-type thin shells and spatially curved beams of open profile / Shitikova M.V. // Mathematical Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Structures. – 2019. – P. 91–92.
233. Sorokin, S. Wave propagation in helically orthotropic elastic cylindrical shells and lattices / S. Sorokin, E. Manconi, L. Ledet, R. Garziera // International Journal of Solids and Structures. – 2019. – Vol. 170. – P. 11–21.
234. Strozzi, M. Applicability and limitations of simplified elastic shell theories for vibration modelling of double-walled carbon nanotubes / M. Strozzi, O.V. Gendelman, I.E. Elishakoff, F. Pellicano // Journal of Carbon Research. – 2021. – N 7(3), article 61.
235. Tang, S. Response of a finite tube to moving pressure / S. Tang // Journal of the Engineering Mechanics Division. – 1967. – Vol. 93, N 3. – P. 239–256.
236. Timoshenko, S.P. On the correction for shear of the differential equation for transvers vibrations of prismatic bars / S.P. Timoshenko // The London,

- Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science. – 1921.  
– Vol. 41, N 245. – P. 744–746.
237. Tovstik, P.E. Two-dimensional linear model of elastic shell made of anisotropic heterogeneous material / P.E. Tovstik, D. Alchibaev, T.P. Tovstik // COMPDYN 2015. 5th international conference on computational methods in structural dynamics and earthquake engineering. – 2015. – P. 933–945.
238. Tovstik, P.E. Generalized Timoshenko-Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction / P.E. Tovstik, T.P. Tovstik // ZAMM. – 2017. – Vol. 97, N 3. – P. 296–308.
239. Tomczyk, B. Tolerance and asymptotic modelling of dynamic problems for thin microstructured transversally graded shells / B. Tomczyk, P. Szczerba // Composite Structures. – 2017. – Vol. 162. – P. 365–373.
240. Vatulyan, A.O. A study of the waves processes in inhomogeneous cylindrical waveguides / A.O. Vatulyan, V.O. Yurov // Trends in mathematics Operator Theory and Differential Equations. – 2021. – P. 317–329.
241. Yu, Y.Y. Generalized Hamilton's principle and variational equation of motion in nonlinear elasticity theory with application to plate theory / Y.Y. Yu // J. Acoust. Soc. Am. – 1964. – Vol. 36, N 1. – P. 111–120.