



**14-Я ВСЕРОССИЙСКАЯ НАУЧНАЯ  
КОНФЕРЕНЦИЯ С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ**

**МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ  
МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ,  
СЛОЖНЫХ И ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД**

**им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского**

**23 октября – 25 октября 2024 года**

**Москва, Ленинградский проспект, 7**

**СБОРНИК ТРУДОВ**

МОСКВА  
2024

**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт прикладной механики Российской академии наук**

**Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов  
управления Российской академии наук**

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**

# **МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ, СЛОЖНЫХ И ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД**

**СБОРНИК ТРУДОВ  
14-Й ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ  
С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ  
им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского**

(23 – 25 октября 2024 года, г. Москва)

**МОСКВА  
2024**

«Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред».

Сборник трудов 14-й Всероссийской научной конференции с международным участием.

Москва, 23 – 25 октября 2024 г. – М.: ООО «Сам Полиграфист», 2024. – 324 с.

ISBN 978-5-00227-417-8

**Конференция проведена в рамках  
Празднования 300-летнего юбилея Российской академии наук  
и приурочена к 35-летию со дня основания  
Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института  
прикладной механики Российской академии наук**

**В Сборник трудов включены работы участников конференции по направлениям: «Механика гетерогенных сред, адаптивных материалов, композитов и конструкций», «Аэро-, гидромеханика, реология структурно-сложных сред», «Волновая динамика газообразных, жидких и твёрдых сред. Высокоскоростной удар» и «Геомеханика. Современные методы исследований».**

Составители сборника:

Власов А.Н., Карнет Ю.Н., Муковникова И.И.

© ФГБУН Институт прикладной  
механики РАН, 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Секция «Механика гетерогенных сред, адаптивных материалов, композитов и конструкций»</b> .....	7
<b>Критические усилия и частоты колебаний пологих скошенных панелей из гибридных материалов с разрушающимися слоями композита</b> Азиков Н.С., Зинин А.В. ....	9
<b>Особенности распространения SH-волн в пьезоэлектрической/ пьезомагнитной пластине из функционально градиентных материалов</b> Белянкова Т.И., Ворович Е.И., Калинин В.В. ....	15
<b>Численно-аналитические решения нелинейных задач теории гибких упругих мембран</b> Бородин А.К., Денисов Е.А., Фельдштейн В.А. ....	25
<b>Численное моделирование движения маятника под действием потока жидкости</b> Бородин А.К., Фельдштейн В.А. ....	35
<b>Изучение композитов на основе полиэтилена с частицами диоксида кремния</b> Валиев Х.Х., Корнев Ю.В., Муромцев Д.Н., Власов А.Н., Карнет Ю.Н. ....	43
<b>Моделирование множественных повреждений высокой плотности при ударном взаимодействии с поверхностью композитного пакета</b> Вестяк В.А., Занина Э.А., Мартиросов М.И., Хомченко А.В. ....	48
<b>Расчетно-экспериментальные исследования прочности ортотропных пластин с прямыми и зенкованными отверстиями</b> Вестяк В.А., Смагин Е.И., Мартиросов М.И. ....	59
<b>Исследование прочности однонаправленных стеклопластиков при растяжении</b> Жаринов М.Ю., Марасанов А.И. ....	67
<b>Исследование обтекания потоком воздуха перфорированных поверхностей в двумерных каналах под различными углами атаки</b> Захаров Н.Н., Макаров А.Ю., Уваров Т.Е. ....	77
<b>О решении некоторых задач безмоментной теории оболочек с эффектом памяти формы</b> Исаченко И.А., Курбатов А.С., Жаворонок С.И. ....	87
<b>Неоднородная задача для полосы с ребрами жесткости</b> Коваленко М.Д., Кержаев А.П., Меньшова И.В. ....	97
<b>Инкрементальные определяющие соотношения для тонкой оболочки с памятью, претерпевающей структурные переходы</b> Курбатов А.С., Жаворонок С.И. ....	103

<b>Вибропоглощающие свойства однородных преград различной конфигурации в грунте под воздействием гармонических волн</b>	
Локтева Н.А., Во Ван Дай .....	113
<b>Математическое моделирование и оптимизация измерителя деформаций образцов при одноосных испытаниях на растяжение или сжатие в диапазоне температур от 20°С до 2500°С</b>	
Миронихин А.Н.....	121
<b>Устойчивость при сжатии композитного стержня-полосы с концевыми участками одностороннего закрепления, имеющими конечную длину</b>	
Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Якубовский К.К. ....	131
<b>Оценка эффективного тензора жесткости композитного материала с периодическим расположением центров включений с одной или несколькими случайными характеристиками</b>	
Сорокин Г.С., Власов А.Н. ....	140
<b>Необратимое деформирование слоистых металлических композитов</b>	
Хайретдинова Д.Д., Селютин Н.С. ....	145
<b>Моделирование колебаний стержневых конструкций с применением нелокального подхода</b>	
Царев Р.О. ....	151
<b>Пятое асимптотическое приближение для неоднородных пластин</b>	
Шешенин С.В., Кузьмин М.А., Артамонова Н.Б. ....	159
<b>Влияние плёнки продуктов износа на разрушение поверхности трения волокнистого композита</b>	
Шпенев А.Г. ....	168
<b>Диагностика тонкостенных и тонкослойных композиций сложной структуры</b>	
Якупов С.Н., Якупов Н.М., Валиев Х.Х. ....	176
<b><i>Секция «Аэро-, гидромеханика, реология структурно-сложных сред»</i></b> .....	<b>183</b>
<b>Возникновение вихревых структур и турбулентности в следе за сферой</b>	
Бошнятов Б.В., Лебедь И.В. ....	185
<b>О механизме турбулентности для турбулентных течений в каналах и струях</b>	
Воротилин В.П. ....	192
<b>Влияние заряда на стабильность двумерных и трехмерных поверхностных нанопузырьков</b>	
Кошоридзе С.И. ....	199
<b>Механизмы стабильности объемных нанопузырей в воде</b>	
Левин Ю.К. ....	206
<b>Гидродинамика и теплообмен при натекании импактной ламинарной струи на каталитическую поверхность</b>	
Лукашов В.В., Леманов В.В., Тупикин А.В., Федоренко В.А., Шаров К.А.....	213

**Секция «Волновая динамика газообразных, жидких и твёрдых сред.  
Высокоскоростной удар» ..... 219**

<b>Уединенные волны и недиссипативные структуры разрывов в микрополярной магнитоупругой среде</b>	
Бахолдин И.Б. ....	221
<b>Трёхинвариантные критерии разрушения в задачах пробивания пластины жёстким телом</b>	
Вершинин В.В., Мондрус В.Л. ....	232
<b>Оценка размера осколков при фрагментации тонкой сферы при сильном взрыве</b>	
Головешкин В.А., Беклемишев С.А. ....	243
<b>Вибропоглощающие свойства трехслойных преград с материалом заполнителя из сталей со сверхвысоким демпфированием в грунте</b>	
Нгуен Зыонг Фунг, Локтева Н.А. ....	250
<b>К оценке защищённости корпусов космических аппаратов от воздействия космического мусора</b>	
Онучин Е.С. ....	257

**Секция «Геомеханика. Современные методы исследований» ..... 265**

<b>Свойства песчаного грунта на сжатие и сдвиг</b>	
Артамонова Н.Б., Шешенин С.В., Чистяков П.В. ....	266
<b>Оптимизация управляемого компенсационного нагнетания с помощью численного экспериментирования с расширенным количеством варьируемых факторов</b>	
Дейнеко А.В., Симутин А.Н. ....	275
<b>Влияние швов бетонирования траншейной стены котлована на напряженно-деформированное состояние системы «ограждающая конструкция – грунт»</b>	
Исаев А.В., Зерцалов М.Г. ....	286
<b>Инновационные разработки Лаборатории Геомеханики ИПРИМ РАН</b>	
Королев М.В. ....	294
<b>Численные и экспериментальные исследования деформационных характеристик скальных массивов</b>	
Митин В.В., Зерцалов М.Г. ....	302
<b>Нелинейная поверхность разжижения дисперсной среды в многомерном пространстве параметров</b>	
Тишин Н.Р., Озмидов О.Р., Гаврилович А.С., Селиванова О.С. ....	310
<b>Оценка деформаций повторно используемых подготовительных подземных горных выработок</b>	
Ягель Н.В., Закоршменный И.М., Блохин Д.И. ....	315



# **Механика гетерогенных сред, адаптивных материалов, композитов и конструкций**



УДК 539.432.5  
EDN YEZWVJ (<https://elibrary.ru/yezvwj>)  
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.1



## **КРИТИЧЕСКИЕ УСИЛИЯ И ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ СКОШЕННЫХ ПАНЕЛЕЙ ИЗ ГИБРИДНЫХ МАТЕРИАЛОВ С РАЗРУШАЮЩИМИСЯ СЛОЯМИ КОМПОЗИТА**

Азиков Н.С.<sup>1</sup>, Зинин А.В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, г. Москва, Россия*

<sup>2</sup>*ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный  
исследовательский университет)», г. Москва, Россия*

Гибридные композиционные материалы представляют собой композицию, сочетающую нескольких типов армирующих наполнителей с различными упругими и прочностными свойствами в одной матрице. Цель гибридации – синтезировать слоистую композитную среду, которая реализует преимущества компонентов и снижает влияние их недостатков. Представляется, что использование принципа гибридации расширит возможности управления эксплуатационными свойствами композиционных материалов за счет варьирования структурными параметрами гибридной композиции, в основном соотношением объемной доли наполнителей различного типа [1,2].

Для многослойных композитных элементов гибридация обычно представляет собой сочетание слоев с несколькими армирующими наполнителями (стеклянные – углеродные, углеродные – органические и др.) с различными прочностными и упругими характеристиками. Часто слоистые гибридные композиции представляют собой объединение слоев с более жестким высокомодульным наполнителем со слоями низко модульного, но более прочного компонента. Такие композиции успешно используются в авиационных обшивочных конструкциях, лопастях вертолетных винтов и ветрогенераторов, объектах строительной техники, корпусов автомобилей и яхт и др. [3,4].

Общие свойства такого слоистого пакета определяются исходными свойствами разнородных слоев, их объемным соотношением в пакете и ориентацией отдельных слоев. Простейшей моделью, используемой для прогнозирования упругих характеристик композита с несколькими видами армирующих элементов, является правило смесей [5], аддитивные соотношения которого получены без учета эффекта Пуассона в предположении идеальной связи между отдельными слоями. Однако упрощенные соотношения правила смесей, не учитывающие особенности совместной деформации слоев гибридной композиции и применяемые для приближенного прогнозирования упругих и прочностных свойств слоистых композитов, непригодны для анализа напряженно-деформированного состояния тонкостенных гибридных пластин в рамках классической механики слоистых композиционных материалов. Для анализа слоистых пластин с разнородными ортотропными слоями необходимо использовать матрицы жесткостей слоистой структуры, вычисляемые методами механики композиционных материалов [1].

Главная особенность механического поведения гибридных композитов связана с тем, что при монотонном нагружении в направлении армирования разнородные слои разрушаются неодновременно из-за различия в их предельных

деформациях, что приводит к особым механизмам перераспределения нагрузки и исчерпания несущей способности всей композиции.

Объектом анализа являются пологие композитные панели из гибридного композита, состоящие из 24 слоев углепластика КМУ и 24 слоев стеклопластика Т25-ВМ78, симметрично расположенных относительно срединной поверхности панели. Геометрия объектов определена с размерами сторон  $l$  и  $b$ , углом скоса длинных сторон  $\chi$  и радиусами кривизны  $R_\xi$ ,  $R_\eta$  (рис.1).

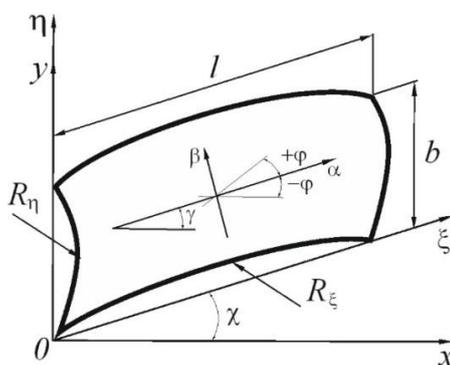


Рис.1. Пологая композитная панель.

В общем случае расчетная модель состоит из  $2k$  ортотропных однонаправленных слоев углепластика и стеклопластика с соответствующими толщинами  $\delta_i^{(1)}$ ,  $\delta_i^{(2)}$ , расположенных под углами  $\gamma \pm \varphi_i^{(1)}$  и  $\gamma \pm \varphi_i^{(2)}$  к выбранному направлению армирования  $\gamma$ .

Панель последовательно нагружается соответствующими контурными усилиями до момента, когда в наиболее нагруженном слое эквивалентное усилие достигает предельной величины в соответствии с заданным критерием прочности [1]. Для определения предельных усилий, при которых в наиболее нагруженном слое использован критерий прочности Цзя-Ву

$$F_p^{(i)} = \left( \frac{\sigma_1^{(i)}}{\sigma_{1\sigma}} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_1^{(i)} \sigma_2^{(i)}}{\sigma_{1\sigma} \sigma_{2\sigma}} \right) + \left( \frac{\sigma_2^{(i)}}{\sigma_{2\sigma}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}^{(i)}}{\tau_{12\sigma}} \right)^2 = 1.$$

При выполнении этого условия полагают, что в наиболее нагруженном слое разрушаются только отдельные волокна. Считается, что разрушение волокон в однонаправленном слое композита не нарушает состояния связующего и условия сплошности материала всего пакета панели. В расчетной модели после разрушения волокна в слое происходит замена свойств углепластика или стеклопластика на свойства связующего. Принято, что при такой замене выполнено условие сплошности поперечного пакета панели и остается справедливой гипотеза Кирхгофа-Лява. Далее рассчитывают измененные жесткостные характеристики с учетом свойств разрушенного слоя и увеличивают нагрузку. Вычисления продолжают до тех пор, когда не произойдет одновременное разрушение углепластиковых и стеклопластиковых слоев.

Анализ устойчивости и колебаний исследованных панелей сводится к решению задач на собственные значения [1,5]. Используя соотношения теории пологих оболочек для ортогонального базиса [6,7], производится замена координат  $\{x, y, z\}$  на косоугольные  $\{\eta, \xi, z\}$ , связанные с геометрией панели. Тогда основные соотношения в новом базисе будут иметь вид:

– уравнения равновесия

$$M_{\xi,\xi\xi} + 2M_{\xi\eta,\xi\eta} + M_{\eta,\eta\eta} + B_{22}^{\xi\eta}k_{\eta}^2w - N_{\xi}w_{,\xi\xi} - 2N_{\xi\eta}w_{,\xi\eta} - N_{\eta}w_{,\eta\eta} + \rho hw_{,\eta} = 0,$$

$k_{\xi} = 0, k_{\eta} = 1/R_{\eta},$  – кривизны панели;

– усилия в панели в ортогональном и косоугольном базисах

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \chi & 0 & 0 \\ \sin \chi \tan \chi & \sec \chi & 2 \tan \chi \\ \sin \chi & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{\xi} \\ N_{\eta} \\ N_{\xi\eta} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} N_{\xi} \\ N_{\eta} \\ N_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sec \chi & 0 & 0 \\ \sin \chi \tan \chi & \cos \chi & 2 \sin \chi \\ \tan \chi & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}.$$

– физические соотношения

$$[N]_{\xi\eta} = [N_{\xi} \ N_{\eta} \ N_{\xi\eta}]^T = [B]^{\xi\eta} [\varepsilon]_{\xi\eta}; \quad [M]_{\xi\eta} = [M_{\xi} \ M_{\eta} \ M_{\xi\eta}]^T = [D]^{\xi\eta} [\zeta]_{\xi\eta}.$$

Элементы матриц мембранных  $[B]^{\xi\eta}$  и изгибных  $[D]^{\xi\eta}$  жесткостей определяются через обобщенные жесткости композитного слоя  $A_i^{\xi\eta}$

$$B_{mn}^{\xi\eta} = 2 \sum_{i=1}^k A_i^{\xi\eta} (z_i - z_{i-1}) \cdots (mn = 11, 12 = 21, 22, 33, 13 = 31, 23 = 32);$$

$$D_{mn}^{\xi\eta} = 2/3 \sum_{i=1}^{k-2} A_i^{\xi\eta} (z_i^3 - z_{i-1}^3); \quad z_i = \sum_{i=1}^i \delta_i; \quad z_{i-1} = \sum_{i=1}^{i-1} \delta_i;$$

$$[A]^{\xi\eta} = [R^{(1)}]^{-1} [A]_{\alpha\beta} = [R^{(2)}] [A]_{\alpha\beta},$$

где  $[A]_{\alpha\beta}$  – обобщенные жесткости в ортогональном базисе  $\alpha\beta z$  [5].

Для определения минимальных собственных значений при решении задач устойчивости и колебаний при сжатии и сдвиге для пологих скошенных панелей воспользуемся принципом минимума полной потенциальной энергии системы. Полную потенциальную энергию  $E$  панели площадью  $S$  представим в форме Брайана [7]

$$E = \frac{1}{2} \iint_S \left\{ D_{11}^{\xi\eta} (w_{,\xi\xi})^2 + 2D_{12}^{\xi\eta} (w_{,\xi\xi})(w_{,\eta\eta}) + D_{22}^{\xi\eta} (w_{,\eta\eta})^2 + 4D_{33}^{\xi\eta} (w_{,\xi\eta})^2 + \right.$$

$$\left. + B_{22}^{\xi\eta} k_{\eta}^2 (w)^2 - N_{\xi} (w_{,\xi})^2 - N_{\eta} (w_{,\eta})^2 - 2N_{\xi\eta} (w_{,\xi})(w_{,\eta}) - \rho \omega^2 h w^2 \right\} d\xi d\eta.$$

Решение задачи на собственные значения четырехугольной панели выполним с помощью метода Релея-Ритца, для чего функцию перемещений представим в виде двойного ряда, образованного «балочными» функциями [8]

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \bar{w}_{1m}(\xi) \bar{w}_{2n}(\eta).$$

Подставляя в функционал энергии  $E$  прогиб и минимизируя получающееся после численного интегрирования выражение по каждому элементу неизвестного вектора амплитуд  $[A]$ , получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений, из которой исходя из равенства нулю определителя системы могут быть найдены собственные значения, соответствующие коэффициентам устойчивости  $k_x^*, k_y^*, k_{xy}^*$

$$\begin{bmatrix} k_x^* \\ k_y^* \\ k_{xy}^* \end{bmatrix} = \left( \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{D_{11}^{xy} D_{22}^{xy}} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \cos \chi & 0 & 0 \\ \sin \chi \tan \chi & \sec \chi & 2 \tan \chi \\ \sin \chi & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_\xi^* \\ N_\eta^* \\ N_{\xi\eta}^* \end{bmatrix}$$

и частотам собственных колебаний пологой панели

$$\omega = \frac{\pi^2}{lb} \sqrt{\frac{D_{11}^{\xi\eta} D_{22}^{\xi\eta}}{\rho_m h}}$$

Для анализа влияния угла скоса  $\chi$  пологих панелей на устойчивость при комбинированном нагружении рассмотрены прямоугольная панель ( $\chi = 0$ ) и косоугольные панели с углами скоса  $\chi = 15^\circ$  и  $\chi = 30^\circ$  и размерами сторон  $a = 2$  м,  $l = 4$  м и радиусами кривизны  $R_\xi = \infty$ ;  $R_\eta = 100, 50, 25$  м.

Результаты исследования влияния кривизны панелей на устойчивость при комбинированном нагружении усилиями сжатия и сдвига приведены на рис.2. Зависимость представлена в виде сечений поверхностей устойчивости. На оси ординат отмечены критические усилия сжатия, на оси абсцисс – критические усилия сдвига.

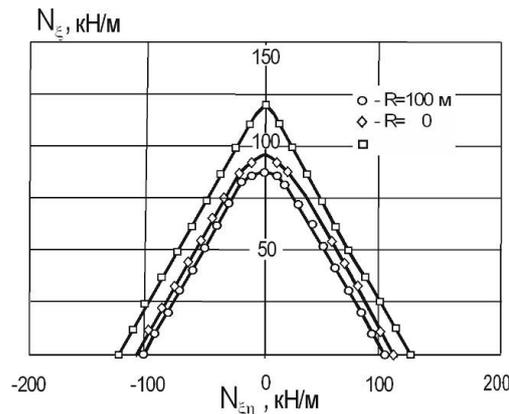


Рис.2. Влияние радиусов кривизны на устойчивость прямоугольной панели при комбинированном нагружении усилиями сжатия и сдвига.

Сечения поверхности устойчивости скошенных пологих панелей в зависимости от угла скоса приведены на рис.3.

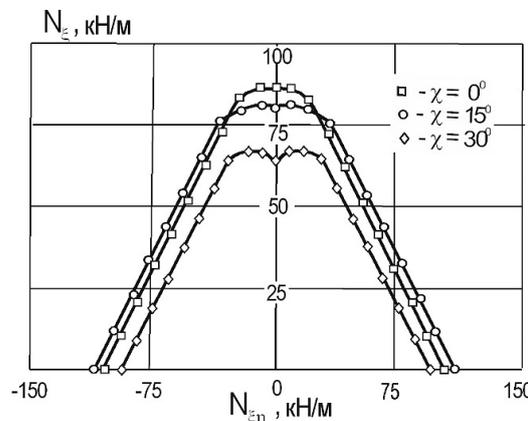


Рис.3. Влияние углов скоса  $\chi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$  на устойчивость пологой панели при комбинированном нагружении усилиями сжатия и сдвига.

Результаты исследования влияния кривизны панели в поперечном направлении на величину критической нагрузки потери устойчивости в зависимости от количества неразрушенных слоев приведены на рис.4.

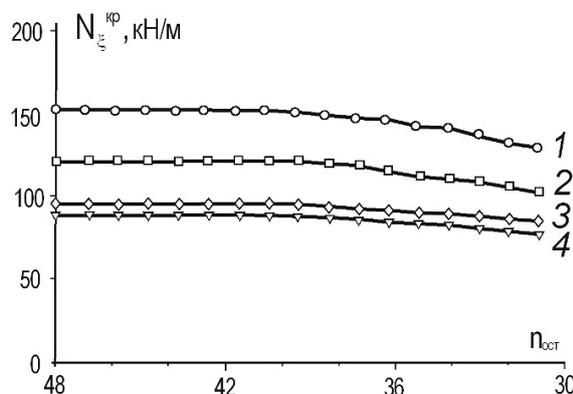


Рис.4. Изменение критических усилий сжатия в зависимости от количества целых слоев и кривизны панели: 1 –  $R = 100$  м; 2 –  $R = 50$  м; 3 –  $R = 25$  м; 4 –  $R = 15$  м.

В Таблице 1 приведены результаты влияния кривизны панели и количества неразрушенных слоев на собственные частоты колебаний пологой панели.

Таблица 1.  
Результаты расчета частот собственных колебаний гибридной пологой панели.

Количество слоев	Частота $\omega$ , Гц			
	$R = 100$ м	$R = 50$ м	$R = 25$ м	$R = 15$ м
48	141,66	156,61	200,76	290,99
46	141,66	156,63	200,46	291,085
44	141,65	156,64	200,45	291,17
42	141,63	156,64	200,41	291,25
40	141,38	156,64	200,06	291,33
38	141,11	156,43	198,77	291,26
36	140,74	156,19	197,06	291,20
34	140,37	155,87	194,76	291,17
32	140,08	155,52	192,21	291,06

## ВЫВОДЫ

1. Наиболее нагруженными слоями являются слои из углепластика. При осевом нагружении начальное разрушение происходит одновременно в двух симметрично расположенных относительно нейтральной поверхности слоях углепластика. Процесс дальнейшего повреждения также продолжается до тех пор, пока все слои из углепластика не разрушатся. При действии касательных усилий разрушение происходит последовательно в одном внутреннем слое углепластика. Исчерпание несущей способности панели возникает при разрушении всех слоев из углепластика, расположенных ниже нейтральной поверхности.

2. Собственная частота колебаний пологих гибридных панелей в значительной степени зависит от кривизны панели – с уменьшением радиуса

кривизны повышается жесткость элемента и увеличивается собственная частота колебаний. Влияния числа оставшихся целыми слоев в гибридном пакете на частоты колебаний при одинаковой поперечной кривизне пологой панели не выявлено.

3. Установлено, что устойчивость гибридных пологих панелей оказывают существенное влияние как поперечная кривизна, так и количество оставшихся целыми слоев в пакете. Анализ показывает, что с уменьшением радиуса кривизны происходит заметное увеличение критического усилия – в исходном состоянии гибрида, состоящего из 24 слоев углепластика и 24 слоев стеклопластика и кривизне  $R = 100$  м критическое усилие равно 87,34 кН/м при радиусе кривизны  $R = 100$  м и 120,92 кН/м при радиусе кривизны  $R = 25$  м. Для того же пакета после разрушения 10 слоев углепластика расчетные значения критического усилия снижаются до 80,39 кН/м при  $R = 100$  м и 108,04 кН/м при  $R = 25$  м.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. – М.: Машиностроение, 1988. – 270 с.
2. Alarifi I.M. *Hybrid Composite Materials and their Applications*. – Woodhead Publishing, 2023. – 322 p.
3. Swolfs Y., Gorbatikh L., Verpoest I. *Fibre hybridisation in polymer composites: A review* // Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2014. – Vol.67. – Pp.181-200.
4. Зинин А.В., Азиков Н.С. *Усталость и разрушение гибридных композиционных материалов при малоцикловом нагружении* / В кн. *Фундаментальные исследования и инновационные технологии в машиностроении: Научные труды VII Международной научной конференции*. – М.: ИМАШ РАН, 2021. – С.110-112.
5. Азиков Н.С., Зинин А.В. *Влияние гибридизации слоистого композита на несущую способность пластин из стеклоуглепластика при комбинированном нагружении сжатием и сдвигом* // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2024. – №2. – С.25-39.
6. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. *Линейная теория тонких оболочек*. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
7. Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
8. Azikov N.S., Zinin A.V. *Analysis of Free Vibrations of a Skew Orthotropic Composite Panel* // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2022. – Vol.51. – No.5. – Pp.406-418.

УДК 539.3  
EDN YPXLEJ (<https://elibrary.ru/ypxlej>)  
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.2



## ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ SH-ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ/ПЬЕЗОМАГНИТНОЙ ПЛАСТИНЕ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ\*

Белянкова Т.И.<sup>1</sup>, Ворович Е.И.<sup>2</sup>, Калинин В.В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН,  
г. Ростов-на-Дону, Россия

<sup>2</sup>Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

В квазистатическом приближении исследуются особенности распространения SH-ПАВ в составной магнитоэластичной пластине из неоднородных пьезоэлектрического и пьезомагнитного слоев. В качестве основных материалов пьезоэлектрического и пьезомагнитного слоев пластины использованы PZT-5Н и CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>. Включения пьезоэлектрического слоя представляет собой виды пьезокерамик на основе PZT с различными упругими, пьезоэлектрическими и диэлектрическими свойствами. Моделирование неоднородности пьезомагнитного слоя связано с взаимопроникновением материалов слоев в узкой переходной области у границы раздела. Распространение SH-ПАВ в пластине вызвано действием удаленного источника гармонических колебаний, режим которых полагается установившимся. На границе раздела неоднородных слоев выполнены условия сцепления. На внешних поверхностях при свободном контакте с вакуумом и отсутствии механических напряжений рассмотрены четыре типа электрических и магнитных условий. На примере задачи с электрически закороченными и открытыми магнитными поверхностными условиями исследовано влияние характера неоднородности пьезоэлектрического и пьезомагнитного слоев пластины на особенности поведения скоростей SH-ПАВ в широком частотном диапазоне.

**Ключевые слова:** магнитоэластичный материал; функционально градиентный пьезоэлектрический материал; функционально градиентный пьезомагнитный материал; распространение волн; сдвиговые горизонтально поляризованные поверхностные акустические волны (SH-ПАВ)

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача о распространении в направлении  $x_1$  сдвиговых горизонтально поляризованных поверхностных акустических волн (SH-ПАВ) в магнитоэластичной (МЭУ) пластине, представляющей собой неоднородный пьезоэлектрический (ПЭ) ( $0 < x_2 < H_1, |x_1|, |x_3| \leq \infty$ ) и неоднородный пьезомагнитный (ПМ) ( $H_2 < x_2 < 0, |x_1|, |x_3| \leq \infty$ ) слои, жестко сцепленные между собой, внешние поверхности свободно контактируют с вакуумом. Полагается, что неоднородные ПЭ и ПМ слои выполнены из функционально градиентного пьезоэлектрического материала (ФГПЭМ) и функционально

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда грант № 24-29-00773.

градиентного пьезомагнитного материала (ФГПММ), изменение свойств по толщине слоев определены выражениями ( $n = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} \rho^{(n)} &= \rho_0^{(n)} F_\rho^{(n)}(x_2), \quad c_{ij}^{(n)} = c_{ij}^{0(n)} F_c^{(n)}(x_2), \quad e_{ij}^{(n)} = e_{ij}^{0(n)} F_e^{(n)}(x_2), \\ \varepsilon_{ij}^{(n)} &= \varepsilon_{ij}^{0(n)} F_\varepsilon^{(n)}(x_2), \quad f_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{0(n)} F_f^{(n)}(x_2), \quad \mu_{ij}^{(n)} = \mu_{ij}^{0(n)} F_\mu^{(n)}(x_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\rho_0^{(n)}$  – плотность,  $c_{ij}^{0(n)}, e_{ij}^{0(n)}, f_{ij}^{0(n)}, e_{ij}^{0(2)} = 0, f_{ij}^{0(1)} = 0$  – компоненты тензоров упругих, пьезоэлектрических и пьезомагнитных констант,  $\varepsilon_{ij}^{0(n)}, \mu_{ij}^{0(n)}$  – компоненты тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости основных ПЭ ( $n = 1$ ) и ПМ ( $n = 2$ ) материалов пластины. Полагаем, что основные материалы пластины имеют симметрию класса бmm, оси симметрии и поляризации направлены вдоль оси  $x_3$ . Распространение волн вызвано действием удаленного источника гармонических колебаний, рассматривается установившийся режим, смещения  $u_k^{(n)}$ , электрический  $\varphi^{(n)}$  и магнитный  $\psi^{(n)}$  потенциалы удовлетворяют условиям ( $n = 1, 2; m = 0, 3$ )

$$\begin{aligned} u_1^{(n)} &= 0, \quad u_2^{(n)} = 0, \quad \mathbf{u}^{(m)} = \{u_1^{(m)}, u_2^{(m)}, u_3^{(m)}\} = 0, \quad \partial/\partial x_3 = 0, \\ u_3^{(n)} &= u_3^{(n)}(x_1, x_2), \quad \varphi^{(n)} = \varphi^{(n)}(x_1, x_2), \quad \psi^{(n)} = \psi^{(n)}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Значения верхнего индекса равные 1 и 2 отвечают ФГПЭМ и ФГПММ слоям соответственно, значения 0 и 3 – вакууму.

В квазистатическом приближении движение составной МЭУ среды описывается уравнениями [1-3] ( $n = 1, 2$ )

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^{(n)} = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}}{\partial t^2}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D}^{(n)} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}^{(n)} = 0 \quad (3)$$

и определяющими соотношениями [2,3]

$$\Sigma^{(n)} = \mathbf{L}^{(n)} \mathbf{Z}^{(n)}, \quad \Sigma^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{(n)} \\ \mathbf{D}^{(n)} \\ \mathbf{B}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}^{(n)} \\ -\mathbf{E}^{(n)} \\ -\mathbf{H}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^{(n)} & (\mathbf{e}^{(n)})^T & (\mathbf{f}^{(n)})^T \\ \mathbf{e}^{(n)} & -\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} & -(\boldsymbol{\alpha}^{(n)})^T \\ \mathbf{f}^{(n)} & -\boldsymbol{\alpha}^{(n)} & -\boldsymbol{\mu}^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Для вакуума справедливо ( $m = 0, 3$ )

$$\Delta \varphi^{(m)} = 0, \quad \Delta \psi^{(m)} = 0. \quad (5)$$

Здесь  $\nabla$  – оператор Гамильтона;  $\mathbf{T}^{(n)}, \mathbf{D}^{(n)}$  и  $\mathbf{B}^{(n)}$  – тензор напряжений, векторы индукции электрического и магнитного полей  $n$ -ой составляющей структуры;  $\mathbf{u}^{(n)}$  – вектор механических смещений;  $\mathbf{S}^{(n)}$  – тензор деформации с компонентами  $S_{ij}^{(n)} = 1/2(u_{i,j}^{(n)} + u_{j,i}^{(n)})$ ;  $\varphi^{(n)}$  и  $\psi^{(n)}$  – электрический и магнитный потенциалы;  $\mathbf{H}^{(n)} = -\nabla \psi^{(n)}$ ,  $\mathbf{E}^{(n)} = -\nabla \varphi^{(n)}$  – векторы напряженности магнитного и электрического полей;  $\rho^{(n)}$  – плотность,  $\mathbf{c}^{(n)}, \mathbf{e}^{(n)}, \mathbf{f}^{(n)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}, \boldsymbol{\mu}^{(n)}, \boldsymbol{\alpha}^{(n)}$  – тензоры упругих, пьезомагнитных констант, констант диэлектрической и магнитной проницаемости и магнитоэлектрических констант  $c_{lksp}^{(n)}, e_{lkr}^{(n)}, f_{lkr}^{(n)}, \varepsilon_{ij}^{(n)}, \mu_{ij}^{(n)}, \alpha_{ij}^{(n)}$  материалов  $n$ -ой составляющей пластины. Магнитоэлектрические константы ПЭ

и ПМ материалов  $\alpha_{ip}^{(n)} = 0$  [4]. В силу свойств материалов пластины для констант выполняются условия симметрии [5], далее используем сокращенную запись в нотации Фойгта. Верхним индексом «Т» в (4) отмечена операция транспонирования. Участвующий в (5)  $\Delta$  – оператор Лапласа с учетом (2) имеет вид  $\Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$ .

Замыкает постановку краевых задач о движении составной МЭУ среды задание граничных условий [2,3,6,7]:

на границе раздела ФГПЭМ и ФГПММ слоев

$$\begin{aligned} x_2 = 0: \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}^{(2)}, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}^{(2)}, \quad \mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{B}^{(2)}, \\ \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}, \quad \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)}, \quad \psi^{(1)} = \psi^{(2)}, \end{aligned} \quad (6)$$

механические условия на внешних поверхности

$$x_2 = H_1: \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}^{(1)} = 0; \quad x_2 = H_2: \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}^{(2)} = 0, \quad (7)$$

электрические и магнитные условия на внешних поверхностях [2,3]:

**I** – электрически закрытая, магнитно открытая задача (**so**)

$$x_2 = H_1: \quad \varphi^{(1)} = 0, \quad \psi^{(1)} = 0; \quad x_2 = H_2: \quad \varphi^{(2)} = 0, \quad \psi^{(2)} = 0. \quad (8)$$

**II** – электрически открытая, магнитно закрытая задача (**os**)

$$\begin{aligned} x_2 = H_1: \quad \varphi^{(1)} = \varphi^{(0)}, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}^{(0)}, \quad \psi^{(1)} = \psi^{(0)}, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{B}^{(0)}; \\ x_2 = H_2: \quad \varphi^{(2)} = \varphi^{(3)}, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}^{(2)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}^{(3)}, \quad \psi^{(2)} = \psi^{(3)}, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{B}^{(3)}. \end{aligned} \quad (9)$$

**III** – электрически и магнитно открытая задача (**oo**)

$$\begin{aligned} x_2 = H_1: \quad \varphi^{(1)} = \varphi^{(0)}, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}^{(0)}, \quad \psi^{(1)} = 0; \\ x_2 = H_2: \quad \varphi^{(2)} = \varphi^{(3)}, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}^{(2)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}^{(3)}, \quad \psi^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

**IV** – электрически закрытая, магнитно закрытая задача (**ss**)

$$\begin{aligned} x_2 = H_1: \quad \varphi^{(1)} = 0, \quad \psi^{(1)} = \psi^{(0)}, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{B}^{(0)}; \\ x_2 = H_2: \quad \varphi^{(2)} = 0, \quad \psi^{(2)} = \psi^{(3)}, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{B}^{(3)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $\mathbf{N}$  – вектор нормали к поверхностям и границе раздела. Далее используем безразмерные параметры [7]

$$\begin{aligned} \bar{l} = l / H, \quad \rho^{(n)} = \rho^{(n)} / \rho_0^{(2)}, \quad c_{ij}^{(n)} = c_{ij}^{(n)} / c_{44}^{0(2)}, \quad e_{ij}^{(n)} = e_{ij}^{(n)} \xi_e / c_{44}^{0(2)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(n)} \xi_e^2 / c_{44}^{0(2)}, \\ f_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(n)} \xi_m / c_{44}^{0(2)}, \quad \mu_{ij}^{(n)} = \mu_{ij}^{(n)} \xi_m^2 / c_{44}^{0(2)}, \quad \varphi^{(n)} = \varphi^{(n)} / (\xi_e H), \quad \psi^{(n)} = \psi^{(n)} / (\xi_m H). \end{aligned}$$

$H$  – характерный линейный размер,  $\xi_e = 10^{10} \text{ В/м}$ ,  $\xi_m = 10^7 \text{ А/м}$  – метрические множители,  $\kappa_2 = \omega H / V_s^{(2)}$  – безразмерная частота,  $V_s^{(2)} = \sqrt{c_{44}^{0(2)} / \rho_0^{(2)}}$  – скорость объемной сдвиговой волны основного пьезомагнитного материала. В работе рассматривается установившийся режим гармонических колебаний, поэтому далее экспоненциальный множитель и штрихи опущены.

Для прозрачности изложения введем расширенный вектор смещений  $\mathbf{u}^{em(n)} = \{u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}, u_4^{(n)} = \varphi^{(n)}, u_5^{(n)} = \psi^{(n)}\}$   $n$ -ой составляющей пластины. С учетом введенных обозначений, предположений (2), представлений (4) и свойств материалов структуры уравнения движения (3), (5) в безразмерных переменных принимают вид:

для неоднородного ПЭ слоя

$$\sum_{k=1}^2 \left[ c_{44}^{(1)} u_{3,kk}^{(1)} + e_{15}^{(1)} u_{4,kk}^{(1)} \right] + c_{44,2}^{(1)} u_{3,2}^{(1)} + e_{15,2}^{(1)} u_{4,2}^{(1)} = -\rho^{(1)} \kappa_2^2 u_3^{(1)},$$

$$\sum_{k=1}^2 \left[ e_{15}^{(1)} u_{3,kk}^{(1)} - \varepsilon_{11}^{(1)} u_{4,kk}^{(1)} \right] + e_{15,2}^{(1)} u_{3,2}^{(1)} - \varepsilon_{11,2}^{(1)} u_{4,2}^{(1)} = 0, \quad \sum_{k=1}^2 \left[ -\mu_{11}^{(1)} u_{5,kk}^{(1)} \right] - \mu_{11,2}^{(1)} u_{5,2}^{(1)} = 0,$$
(12)

для неоднородного ПМ слоя

$$\sum_{k=1}^2 \left[ c_{44}^{(2)} u_{3,kk}^{(2)} + f_{15}^{(2)} u_{5,kk}^{(2)} \right] + c_{44,2}^{(2)} u_{3,2}^{(2)} + f_{15,2}^{(2)} u_{5,2}^{(2)} = -\rho^{(2)} \kappa_2^2 u_3^{(2)},$$

$$\sum_{k=1}^2 \left[ -\varepsilon_{11}^{(2)} u_{4,kk}^{(2)} \right] - \varepsilon_{11,2}^{(2)} u_{4,2}^{(2)} = 0, \quad \sum_{k=1}^2 \left[ f_{15}^{(2)} u_{3,kk}^{(2)} - \mu_{11}^{(2)} u_{5,kk}^{(2)} \right] + f_{15,2}^{(2)} u_{3,2}^{(2)} - \mu_{11,2}^{(2)} u_{5,2}^{(2)} = 0,$$
(13)

для вакуума ( $m = 0, 3$ )

$$\sum_{k=1}^2 u_{4,kk}^{(m)} = 0, \quad \sum_{k=1}^2 u_{5,kk}^{(m)} = 0.$$
(14)

Граничные условия (6)-(11) принимают вид

$$x_2 = H_1: \tau_{23}^{(1)} = 0; \quad x_2 = H_2: \tau_{23}^{(2)} = 0;$$
(15)

$$x_2 = 0: \tau_{23}^{(1)} = \tau_{23}^{(2)}, \quad d_2^{(1)} = d_2^{(2)}, \quad b_2^{(1)} = b_2^{(2)},$$
(16)

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad u_4^{(1)} = u_4^{(2)}, \quad u_5^{(1)} = u_5^{(2)}.$$

**I – задача (so)**

$$x_2 = H_1: u_1^{(1)} = 0, \quad u_5^{(1)} = 0; \quad x_2 = H_2: u_4^{(2)} = 0, \quad u_5^{(2)} = 0.$$
(17)

**II – задача (os)**

$$x_2 = H_1: u_4^{(1)} = u_4^{(0)}, \quad d_2^{(1)} = d_2^{(0)}, \quad u_5^{(1)} = u_5^{(0)}, \quad b_2^{(1)} = b_2^{(0)};$$
(18)

$$x_2 = H_2: u_4^{(2)} = u_4^{(3)}, \quad d_2^{(2)} = d_2^{(3)}, \quad u_5^{(2)} = u_5^{(3)}, \quad b_2^{(2)} = b_2^{(3)}.$$

**III – задача (oo)**

$$x_2 = H_1: u_4^{(1)} = u_4^{(0)}, \quad d_2^{(1)} = d_2^{(0)}, \quad u_5^{(1)} = 0;$$
(19)

$$x_2 = H_2: u_4^{(2)} = u_4^{(3)}, \quad d_2^{(2)} = d_2^{(3)}, \quad u_5^{(2)} = 0.$$

**IV – задача (ss)**

$$x_2 = H_1: u_4^{(1)} = 0, \quad u_5^{(1)} = u_5^{(0)}, \quad b_2^{(1)} = b_2^{(0)};$$
(20)

$$x_2 = H_2: u_4^{(2)} = 0, \quad u_5^{(2)} = u_5^{(3)}, \quad b_2^{(2)} = b_2^{(3)}.$$

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение задач I – (12), (13), (15)-(17), II – (12)-(14), (15), (16), (18), III– (12)-(14), (15), (16), (19) и IV – (12)-(13), (15), (16), (20) строится в пространстве образов Фурье ( $\alpha$  – параметр преобразования по координате  $x_1$ ). Введением новых неизвестных [8]

$$\mathbf{Y}^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{\Sigma}^n \\ \mathbf{Y}_{\mathbf{u}}^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_{\Sigma}^n = \left\{ \Theta_{23}^{F(n)}, D_2^{F(n)}, B_2^{F(n)} \right\}^T, \quad \mathbf{Y}_{\mathbf{u}}^n = \left\{ U_3^{(n)}, U_4^{(n)}, U_5^{(n)} \right\}^T. \quad (21)$$

решение (12), (13) в трансформантах Фурье сводится к решению систем

$$\mathbf{Y}^{(n)'} = \mathbf{R}^{(n)}(\alpha, x_2) \mathbf{Y}^{(n)} \quad (22)$$

Уравнения (22) представляют собой системы ОДУ с переменными коэффициентами 1 рода 6 порядка, линейно независимые решения  $(y_{pk}^{(n)}(\alpha, x_2), p, k = 1, \dots, 6)$  которых строятся на основе численного решения набора задач Коши с начальными условиями  $y_{pk}^{(n)}(\alpha, 0) = \delta_{pk}$  при фиксированных значениях  $\alpha$ . Здесь  $\Theta_{23}^{F(n)}, D_2^{F(n)}, B_2^{F(n)}, U_p^{(n)}, p = 3, 4, 5$  – трансформанты Фурье компонент тензора напряжений, векторов электрической и магнитной индукции и расширенного вектора смещений;  $\delta_{pk}$  – символ Кронекера.

С учетом (21) смещение, электрический и магнитный потенциалы составляющих пластины и вакуума представим в виде разложения по совокупности линейно независимых решений (22) ( $p = 3, 4, 5; g = 4, 5, 6; s = 4, 5; n = 1, 2$ )

$$U_p^{(n)}(\alpha, x_2) = \sum_{k=1}^6 c_k^{(n)} y_{gk}^{(n)}(\alpha, x_2), \quad (23)$$

$$U_s^{(0)}(\alpha, x_2) = C_s^{(0)} e^{-\alpha x_2}, \quad U_s^{(3)}(\alpha, x_2) = C_s^{(3)} e^{\alpha x_2}.$$

Подставляя решения (23) в граничные условия задач I, II, III и IV для вычисления неизвестных коэффициентов  $c_k^{(n)}$  и  $C_s^{(m)}$  получаем однородные системы линейных алгебраических уравнений. После определения всех неизвестных применяя к (23) обратное преобразование Фурье получаем решение рассматриваемых задач.

Дисперсионные уравнения задач I, II, III и IV для МЭУ пластины представим в виде [7]

$$\det \mathbf{A}^r(\alpha, \kappa_2) = 0, \quad r = I, II, III, IV. \quad (24)$$

Структура и размерность матриц  $\mathbf{A}^r(\alpha, x_2)$  в новых переменных (21) определяется формой решения (23) и граничными условиями рассматриваемых задач (15)-(20). В случае задачи I (so) матрица  $\mathbf{A}^I$  представляется в виде

$$\mathbf{A}^I = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_e^I(H_1) & 0 \\ \mathbf{P}_e(0) & -\mathbf{P}_m(0) \\ 0 & \mathbf{P}_m^I(H_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_s^I = \begin{pmatrix} y_{11}^{(n)} & y_{12}^{(n)} & y_{13}^{(n)} & y_{14}^{(n)} & y_{15}^{(n)} & y_{16}^{(n)} \\ y_{51}^{(n)} & y_{52}^{(n)} & y_{53}^{(n)} & y_{54}^{(n)} & y_{55}^{(n)} & y_{56}^{(n)} \\ y_{61}^{(n)} & y_{62}^{(n)} & y_{63}^{(n)} & y_{64}^{(n)} & y_{65}^{(n)} & y_{66}^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Здесь матрица  $\mathbf{A}^I$  имеет размерность  $12 \times 12$ , матрицы  $\mathbf{P}_e(0)$  и  $\mathbf{P}_m(0)$ , в силу принятых условий (16), являются единичными матрицами  $\mathbf{I}$  размерности  $6 \times 6$   $\mathbf{P}_e(0) = \mathbf{P}_m(0) = \mathbf{I}$ , нижнему индексу  $s = e$  отвечает верхний индекс  $n = 1$ , индексу  $s = m$  – верхний индекс  $n = 2$ .

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Для исследования особенностей распространения SH-ПАВ в пластине из ФГПЭМ/ФГПММ использована двухкомпонентная модель функционально градиентных материалов [8], свойства которых немонотонным образом изменяются по толщине от параметров основного материала до параметров материала включения. В качестве основных материалов ПЭ и ПМ слоев рассмотрены пьезокерамика PZT-5Н ( $m_1$ ) [1] и высокоскоростной пьезомагнитный

материал  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  ( $m_4$ ) [4,6]. Материалы включений ПЭ слоя: высокоскоростное включение –  $m_2$  (PZT DL-61HD [9]); низкоскоростное включение –  $m_3$  (гипотетический материал). Неоднородность ПМ слоя моделировала проникновение ПЭ материала в узкой области у границы раздела поэтому параметры гипотетических материалов включений ПМ слоя  $m_{41}$ ,  $m_{42}$ ,  $m_{43}$  выбирались близкими к параметрам материалов ПЭ слоя и его включений. Скорости сдвиговых волн без учета и с учетом ПЭ и ПМ свойств и параметры материалов приведены в таблице.

Таблица.

Параметры материалов.

	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_{41}$	$m_{42}$	$m_{43}$
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	7500	8200	7560	5300	6150	7900	6160
$c_{44} \times 10^{10}$ , н/м <sup>2</sup>	2.3	3.9	1.32	4.53	2.3	3.9	1.32
$e_{15}$ , Кл/м <sup>2</sup>	17	33.1	6.46	0	0	0	0
$\epsilon_{11} \times 10^{-10}$ , Кл <sup>2</sup> /(н·м <sup>2</sup> )	151	249	80.6	0.8	24	45	16
$f_{15}$ , н/(А·м)	0	0		550	300	450	200
$\mu_{11} \times 10^{-6}$ , н·сек <sup>2</sup> /Кл <sup>2</sup>	5	5	5	-590	-150	-470	-80
$V_s$ [м/сек <sup>2</sup> ]	1751	2181	1321	2924	1934	2222	1464
$V_{se}$ , м/сек <sup>2</sup>	2370	3182	1559	0			
$V_{sm}$ , м/сек <sup>2</sup>	0			2907	1908	2210	1436

В таблице:  $V_s = \sqrt{c_{44}/\rho}$ ,  $V_{se} = \sqrt{(c_{44} + (e_{15})^2 / \epsilon_{11}) / \rho}$ ,  $V_{sm} = \sqrt{(c_{44} + (f_{15})^2 / \mu_{11}) / \rho}$ .

Исследованы следующие модели пластин из ФГПЭМ/ПММ:

$m_1$ - $m_2$ / $m_4$  – неоднородный ПЭ слой  $m_1$  с высокоскоростным включением  $m_2$  и однородный ПМ слой  $m_4$ ;

$m_1$ - $m_3$ / $m_4$  – неоднородный ПЭ слой  $m_1$  с низкоскоростным включением  $m_3$  и однородный ПМ слой  $m_4$ .

из ФГПЭМ/ФГПММ:

$m_1$ / $m_{41}$ - $m_4$  – однородный ПЭ слой  $m_1$  и неоднородный ПМ слой  $m_4$  с включением  $m_{41}$ ;

$m_1$ - $m_2$ / $m_{42}$ - $m_4$  – неоднородный ПЭ слой  $m_1$  с включением  $m_2$  и неоднородный ПМ слой  $m_4$  с включением  $m_{42}$ ;

$m_1$ - $m_3$ / $m_{43}$ - $m_4$  – неоднородный ПЭ слой  $m_1$  с включением  $m_3$  и неоднородный ПМ слой  $m_4$  с включением  $m_{43}$ .

Предполагалось, что в моделях пластин из ФГПЭМ/ПММ включения могут располагаться у поверхности ПЭ слоя, в середине и у границы раздела. В моделях пластин из ФГПЭМ/ФГПММ включения ПМ и ПЭ слоев расположены в окрестности границы раздела.

На рис. 1а,б представлены функциональные зависимости изменения свойств ПЭ слоя при отсутствии изменений материала ПМ слоя (рис.1а) и зависимости изменения свойств ПЭ и ПМ слоев пластины (рис.1б). Цифрами 1, 2, 3 на рисунках отмечены кривые с локализацией неоднородности ПЭ слоя в середине, у внешней поверхности и у границы раздела, кривая 4 отвечает изменению свойств ПМ слоя с локализацией неоднородности у границы раздела. Цифрой 0 отмечены кривые без изменения свойств материалов.

Влияние характера и локализации неоднородности пластины ФГПЭМ/ФГПММ на особенности распространения ШН-ПАВ показаны на примере задачи I (so) с электрически закрытыми и магнитно открытыми условиями на внешних поверхностях. На рисунках ниже приведены зависимости относительных фазовых скоростей  $V_F^I / V_S^{(2)}$  от частоты  $\kappa_2$ .  $V_F^r = \kappa_2 / \zeta^r$ ,  $r = I, II, III, IV$ ,  $\zeta^r$  – нули дисперсионного уравнения (24) с обозначениями (25).

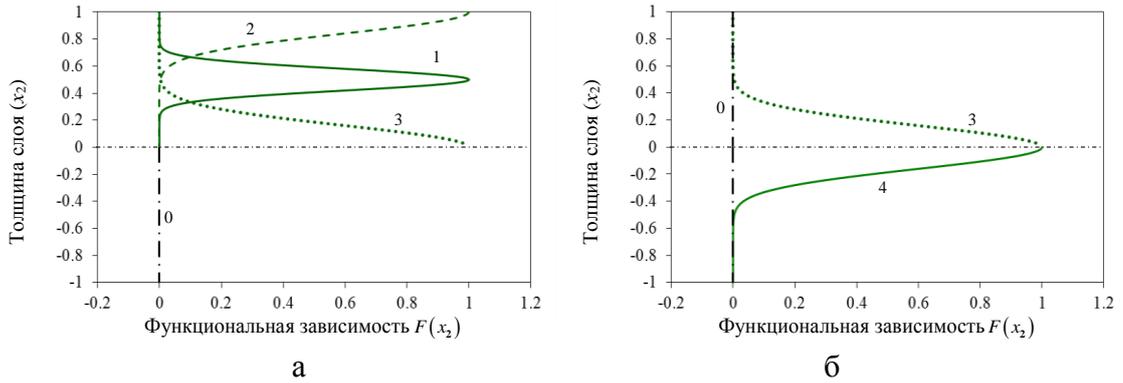


Рис.1. Графики функциональных зависимостей изменения свойств в пластине. (а) – изменение свойств в ПЭ слое, (б) – изменение свойств в ПЭ и ПМ слоях.

На рис.2а-г показано влияние локализации включений ПЭ слоя на фазовые скорости  $V_F^I$  ШН-ПАВ в случае  $m_1-m_2/m_4$  (рис.2а,в) и в случае  $m_1-m_3/m_4$  (рис.2б,г).

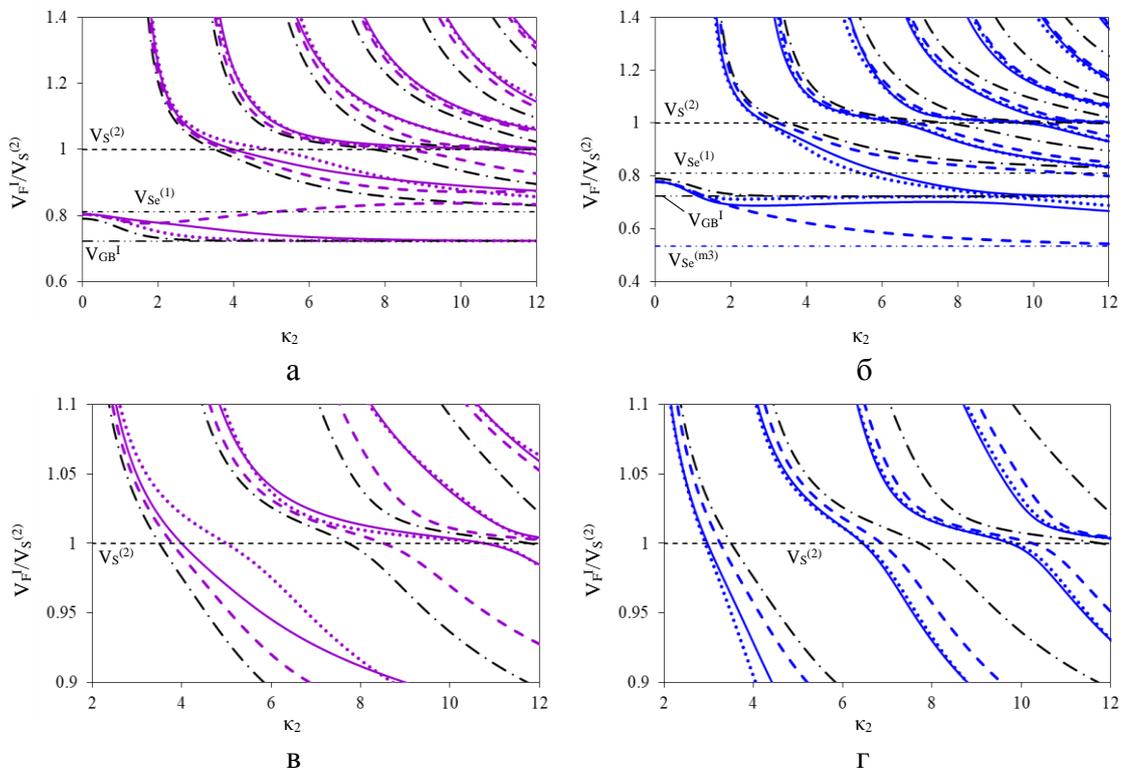


Рис.2. Влияние локализации высокоскоростного (а,в) и низкоскоростного (б,г) включений ПЭ слоя на скорости ШН-ПАВ.

Расположение неоднородности отмечено сплошными, штриховыми и пунктирными линиями, соответствующими кривым 1, 2, 3 на рис.1а, штрихпунктирная линия отвечает пластине PZT-5Н/CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>. На рис.2в,г приведены фрагменты рис.2а,б для скоростей 2-х, 3-х, 4-х и 5-х мод ПАВ в окрестности  $V_S^{(2)}$ .

Из рис.2а-г следует, что влияние локализации неоднородности носит сложный характер и по-разному сказывается на поведении скоростей в различных диапазонах частот. Наличие высокоскоростного включения ( $m_2$ ) сдвигает частоты выхода мод SH-ПАВ относительно пластины PZT-5Н/CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> в сторону более высоких, при низкоскоростном включении ( $m_3$ ) – в сторону более низких значений. Отмечается неравномерный характер сдвига частот выхода мод ПАВ, т.е. в зависимости от характера и расположения неоднородности меняется диапазон частот между выходом различных мод ПАВ. Для 1-х мод начальное значение  $V_F^I$  определяется характером включения и не зависит от его расположения. С ростом частоты поведение скоростей определяет не только характер включения, но и его расположение в слое (рис.2а,б). В окрестности  $V_S^{(2)}$  (рис.2в,г) отмечается появление «террасных» участков: в случае  $m_1$ - $m_2/m_4$  с приграничной или серединной локализацией включения «террасные» участки появляются на 3-й моде ПАВ, в случае  $m_1$ - $m_3/m_4$  такие участки появляются на 5-й моде, в случае пластины PZT-5Н/CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> – на 4-й моде ПАВ.

Рис.3 иллюстрирует поведение скоростей SH-ПАВ в зависимости от характера неоднородности у границы раздела ПЭ и ПМ слоев МЭУ пластины. Функциональные зависимости изменения свойств по толщине соответствуют зависимостям рис.1б. Сплошными линиями отмечены скорости в пластинах  $m_1/m_{41}$ - $m_4$  (кривые 1 на рис.3а,б),  $m_1$ - $m_2/m_{42}$ - $m_4$  (кривые 2 на рис.3в,г) и  $m_1$ - $m_3/m_{43}$ - $m_4$  (кривые 3 на рис.3д,е). Для сравнения пунктирными линиями на рис.3в,г отмечены скорости SH-ПАВ пластины с однородным ПМ слоем:  $m_1$ - $m_2/m_4$  (кривые 4), на рис.3д,е – пластины  $m_1$ - $m_3/m_4$  (кривые 5). Штрихпунктирные линии отвечают скоростям пластины PZT-5Н/CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>. На рис.3б,г,е представлены фрагменты рис.3а,в,д для скоростей 2-х, 3-х, 4-х и 5-х мод ПАВ в окрестности  $V_S^{(2)}$ .

Из рис.3а-е видно, что наличие неоднородностей ПЭ и ПМ слоев, расположенных у границы раздела в пластине из ФГПЭМ/ФГПММ, приводит к сдвигу частот выхода новых мод и частот пересечения скоростей ПАВ с  $V_S^{(2)}$  в сторону более низких значений (сплошные линии, кривые 1, 2, 3). С ростом частоты сдвиг увеличивается. Имеет место падение скоростей SH-ПАВ относительно пластин с однородным ПМ слоем (пунктирные линии, кривые 4, 5). В случае  $m_1$ - $m_2/m_{42}$ - $m_4$  асимптотическое значение скорости 2-й моды незначительно превышает  $V_{Se}^{(1)}$  (кривая 2, рис.3в). В случае  $m_1$ - $m_3/m_{43}$ - $m_4$  (кривая 3, рис.3д) отмечается появление «террасных» участков на первых модах в окрестности  $V_{GB}^I$ . Из анализа рис.3б,г,е, видно, что наличие в окрестности границы раздела включений, для которых  $V_S$  меньше  $V_S$  ПМ слоя (см. Таблицу), приводит к сглаживанию поведения кривых скоростей в окрестности  $V_S^{(2)}$ : появление «террасных» участков отмечается на модах с более высокими номерами.

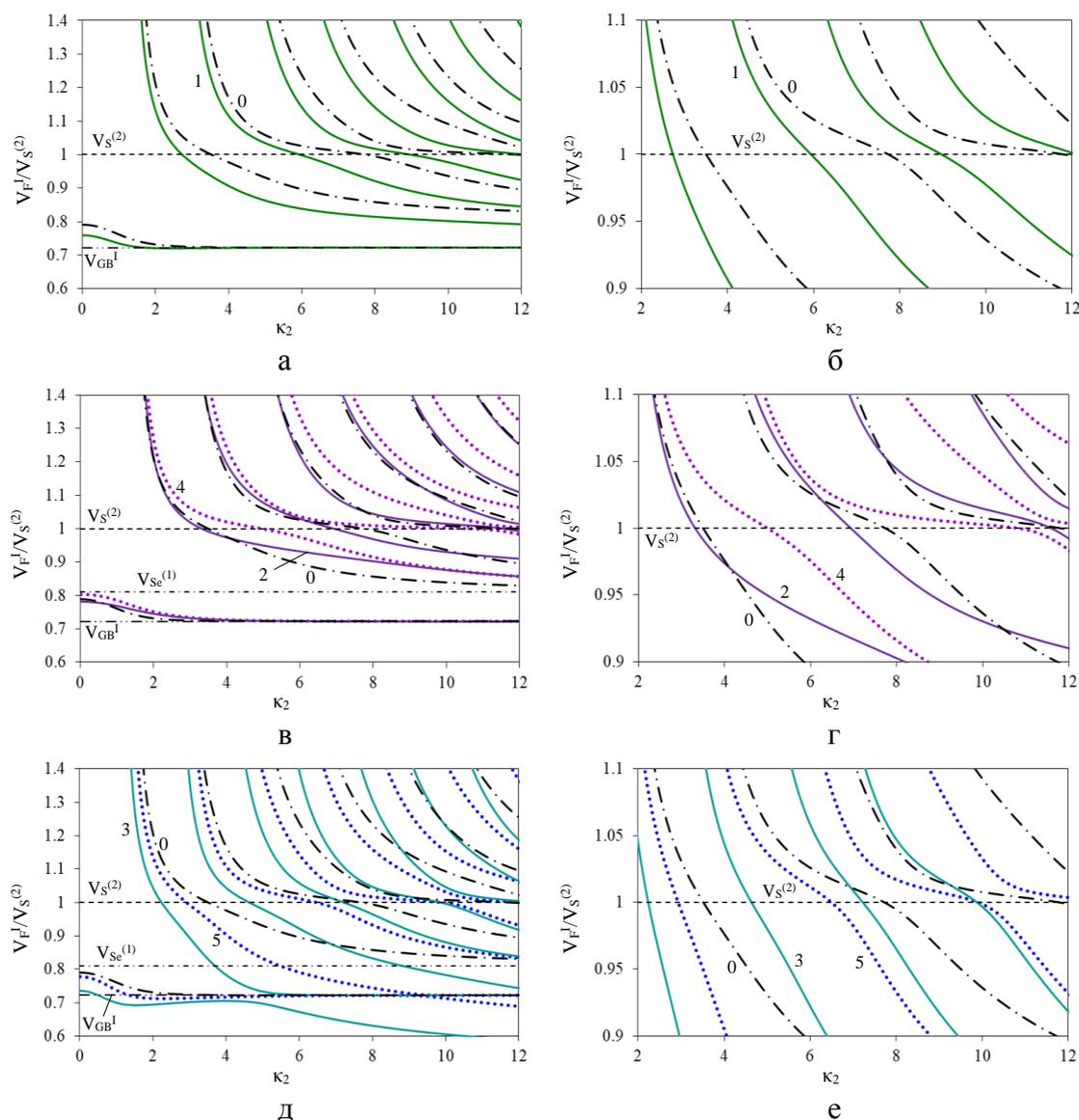


Рис.3. Поведение скоростей SH-ПАВ в зависимости от неоднородности ПЭ и ПМ слоев у границы раздела. (а), (б) – случай  $m_1/m_{41}-m_4$ , (в), (Г) – случай  $m_1-m_2/m_{42}-m_4$ , (д), (е) – случай  $m_1-m_3/m_{43}-m_4$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Фильтры на поверхностных акустических волнах (расчет, технология и применение)*. – М.: Радио и связь, 1981. – 472 с.
2. Maugin G. *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*. – North Holland, 1988 – 598 p.
3. Al'shits V.I., Darinskii A.N., Lothe J. *On the existence of surface waves in half-infinite anisotropic elastic media with piezoelectric and piezomagnetic properties // Wave Motion*. – 1992. – Vol.16. – Pp.265-283.
4. Chen Z., Yu S., Meng L., Lin Y. *Effective properties of layered magneto-electro-elastic composites // Composite Structures*. – 2002. – Vol.57. – Pp.177-182.
5. Най Дж. *Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц*. – М.: Мир, 1967. – 385 с.

6. Chen J.Y., Pan E., Chen H. *Wave propagation in magneto-electro-elastic multilayered plates* // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – Vol.44. – No.3-4. – Pp.1073-1085.
7. Бебянкoвa Т.И., Ворoвич Е.И., Турчин А.С. *SH-волны на поверхности биморфной магнитоэлектроупругой пластины* // Наука юга России. – 2024. – Т.20. – №2. – С.3-15.
8. Бебянкoвa Т.И., Ворoвич Е.И., Калинин В.В. *Особенности распространения SH-волн в двухслойной структуре из неоднородных пьезоэлектрического и диэлектрического слоев* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – №2. – С.98-109.
9. URL:[https://delpiezo.com/yahoo\\_site\\_admin/assets/docs/Material\\_Specification\\_Sheet.254613.pdf](https://delpiezo.com/yahoo_site_admin/assets/docs/Material_Specification_Sheet.254613.pdf).

УДК 531.252.3  
EDN ZFMHFT (<https://elibrary.ru/zfmhft>)  
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.3



## **ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ГИБКИХ УПРУГИХ МЕМБРАН\***

Бородин А.К.<sup>1</sup>, Денисов Е.А.<sup>2</sup>, Фельдштейн В.А.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

### **ВВЕДЕНИЕ**

Задача деформации круглой мембраны является одной из базовых задач в области механики деформируемых твердых тел. Ее решение имеет широкое применение в различных отраслях науки и техники, включая аэрокосмическую инженерию, биомедицинскую инженерию, гражданское строительство и многие другие. Верификация численных методов и программных комплексов является критически важным этапом в процессе разработки и применения инженерных решений. Точность и надежность численных моделей напрямую зависят от их способности воспроизводить результаты, полученные аналитическими методами. В этом контексте задача деформации круглой мембраны под действием постоянной силы выступает в роли эталонного теста, позволяющего оценить корректность и точность численных алгоритмов. Таким образом, аналитическое решение данной задачи служит важным инструментом для верификации численных программных комплексов, используемых для моделирования сложных инженерных систем.

Рассматривается задача о растяжении круглой мембраны при действии на нее внешнего давления. Под мембраной в техническом смысле понимается тонкая пластина, изгибной жесткостью которой можно пренебречь и объяснять ее сопротивление поперечной нагрузке проектированием на нормаль напряжений, действующих в плоскости мембраны, при потере ею плоской формы. Это возможно, если напряжения растяжения преобладают над напряжениями от изгиба, что реализуется в двух случаях: мембрана предварительно сильно растянута или ее прогибы достаточно велики.

Первый вариант обсуждается в традиционных курсах математической физики, где под мембраной понимают систему, описываемую уравнением Пуассона [1]

$$T\Delta w = p, \tag{1}$$

и условию на контуре  $L: w_L = 0$ . Здесь  $w$  – нормальное смещение (прогиб) мембраны [м],  $p$  – внешнее давление [Па],  $T$  – натяжение [Н/м] – внутренняя упругая сила, приходящаяся на единицу длины. Предполагается, что натяжение  $T$ , создаваемое в мембране внешними силами, приложенными по ее контуру, достаточно велико, так что его изменением под действием давления можно пренебречь, и считать его заданным по условию задачи. Таким образом, задача (1)

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (Соглашение 22-19-00678).

является линейной и ее решение для традиционных областей (круг, прямоугольник) не представляет трудностей.

Второй вариант существенно более сложен и приводит к нелинейным уравнениям, определяющим как прогиб мембраны  $w$ , так и внутренние напряжения растяжения, зависящие от прогиба. Эта задача была предметом многочисленных исследований, среди которых необходимо указать классические работы [2-7]. Авторами этих работ предложено и исследовано достаточно сложное решение в виде произведения степенных рядов, приводящее к процедуре последовательных приближений. В данной работе получено решение осесимметричной задачи о нелинейном напряженном состоянии упругой круглой мембраны, различным образом закрепленной по контуру. Путем совмещения аналитического и численного подхода получено и представлено в конечной замкнутой форме и может быть использовано как для прикладных технических расчетов, так и для верификации численных программных кодов.

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Уравнения равновесия круглой упругой мембраны при конечных прогибах, вызванных равномерным внешним давлением, имеют следующий вид [7]

$$p \frac{r}{2} + h \sigma_r \frac{dw}{dr} = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} - \sigma_\varphi = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dr}(\Delta\Phi) + \frac{E}{2r} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 = 0. \quad (4)$$

Здесь и далее:  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  – напряжения, зависящие от прогиба,  $E$ ,  $h$ ,  $c$  – модуль упругости материала, толщина и радиус мембраны. Первые два уравнения выражают условия статики в проекции на нормаль и на радиальную координату. Третье представляет собой уравнение неразрывности в напряжениях и определяет функцию напряжений  $\Phi$ , введенную таким образом, что выполняются соотношения

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr}, \quad \sigma_\varphi = \frac{d^2\Phi}{dr^2}$$

и оператор Лапласа над  $\Phi$  дает сумму напряжений:  $\Delta\Phi = \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} = \sigma_r + \sigma_\varphi$ .

Используя (2) и (3) можно привести (4) к виду, содержащему только радиальное напряжение

$$r \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 3 \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{Ep^2r}{8h^2\sigma_r^2} = 0. \quad (5)$$

Введением переменных

$$y = \frac{r^2}{c^2}, \quad z = r \frac{d\Phi}{dr} \sqrt{\frac{32}{qE^2c^4h^2}}$$

можно редуцировать систему (2)-(4) к единому нелинейному уравнению, использованному авторами цитированных выше работ

$$\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{y^2}{z^2} = 0. \quad (6)$$

Отметим, что уравнения вида (6) сыграли большую роль в физике: уравнение Томаса-Ферми  $\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{z^{3/2}}{y^{1/2}}$  – при изучении состояния вещества в условиях высокого сжатия (подробно – в [8]), уравнение Эмдена  $\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{z^n}{y^4}$  – в теории равновесия политропного газа в центральном гравитационном поле [9]. Подробный анализ этих уравнений приведен в [10].

Непосредственно проверяется, что существует степенная функция, удовлетворяющая уравнению (6). Однако этого недостаточно для решения двухточечной краевой задачи о равновесии мембраны. Ниже излагается решение задачи, представленное в замкнутой форме, удобное для практического применения и допускающее обобщение на случай произвольного осесимметричного распределения внешнего давления.

Преобразуем уравнения (5), (2), переходя к более удобным для решения задачи безразмерным переменным

$$s = \frac{\sigma_r}{Q}, \quad x = \frac{r}{c}, \quad W = w \sqrt[3]{\frac{Eh}{\rho c^4}}, \quad Q = \sqrt[3]{\frac{E\rho^2 c^2}{8h^2}}.$$

В результате получим

$$x \frac{d^2s}{dx^2} + 3 \frac{ds}{dx} + \frac{x}{s^2} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{x}{s(x)}. \quad (8)$$

Граничное условие в полюсе  $x=0$  отражает экстремальность радиального напряжения

$$\frac{ds}{dx} = 0. \quad (9)$$

Если на контуре  $x=1$  мембрана неподвижно закреплена, то есть отсутствует радиальное перемещение ( $u=0$ ), то, учитывая, что окружная деформация  $\varepsilon_\varphi = u/c$ , можно принять, что  $\varepsilon_\varphi = \frac{u}{c} = \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu\sigma_r) = 0$ . Это,

согласно (3), дает:  $(1-\nu)\sigma_r + c \frac{d\sigma_r}{dr} = 0$ , или в принятых безразмерных единицах

$$(1-\nu)s + \frac{ds}{dx} = 0. \quad (10)$$

В другом случае на контуре может быть задано радиальное напряжение  $s(1) = s_1$ .

Рассмотрим вначале первый вариант граничных условий, когда задача сводится к уравнению (7) при граничных условиях (9), (10), которые содержат всего один безразмерный параметр – коэффициент Пуассона. Если найти решение задачи с необходимой точностью, то оно при заданном значении  $\nu$  будет иметь универсальный характер. Это решение может быть получено численно, например, по методу установления, если представить (7) в следующем виде

$$x \frac{d^2 s}{dx^2} + 3 \frac{ds}{dx} + \frac{x}{s^2} = \frac{ds}{dt}, \quad (11)$$

где  $t$  – фиктивное «время». Его решение при начальном условии  $s = s_0$  при  $t = 0$  должно стремиться к решению исходного уравнения (7), подобно тому, как происходит установление стационарной температуры при решении нестационарного уравнения теплопроводности. В области  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$  на множестве точек:  $x_k = k\Delta$   $k = 0, \dots, K$ ,  $\Delta = 1/(K-1)$ ;  $t_n = n\tau$   $n = 0, 1, 2, \dots$  составляются конечноразностные аналоги уравнений (11) и условий (9), (10)

$$x_k \frac{s_{k+1}^n - 2s_k^n + s_{k-1}^n}{\Delta^2} + 3 \frac{s_{k+1}^n - s_{k-1}^n}{2\Delta} + \frac{x_k}{(s_k^n)^2} = \frac{s_k^{n+1} - s_k^n}{\tau}, \quad (12)$$

$$s_k^n = s(x_k, t_n), \quad k = 1, \dots, K-1,$$

$$s_0^{n+1} = \frac{1}{3}(4s_1^{n+1} - s_2^{n+1}), \quad s_K^{n+1} = \frac{1}{3+2\Delta(1-\nu)}(4s_{K-1}^{n+1} - s_{K-2}^{n+1}). \quad (13)$$

В качестве начального условия (начального приближения) примем равномерное распределение напряжения:  $s_k^0 = 1$ . Рис.1а иллюстрирует процесс сходимости решения от начального приближения  $s = 1$  к стационарному  $s(x)$  при  $K = 100$ ,  $N = 10^5$ ,  $\Delta = 0,01$ ,  $\tau = 10^{-5}$ . После определения напряжений интегрированием определяется прогиб по (9) с учетом граничного условия на контуре:  $W(1) = 0$ ; условие в полюсе  $W'(0) = 0$  выполняется согласно (8). Окончательно

$$W(x) = \int_x^1 \frac{z dz}{s(z)}. \quad (14)$$

На рис.1б показан прогиб мембраны, рассчитанный по (14) по установившемуся распределению напряжения.

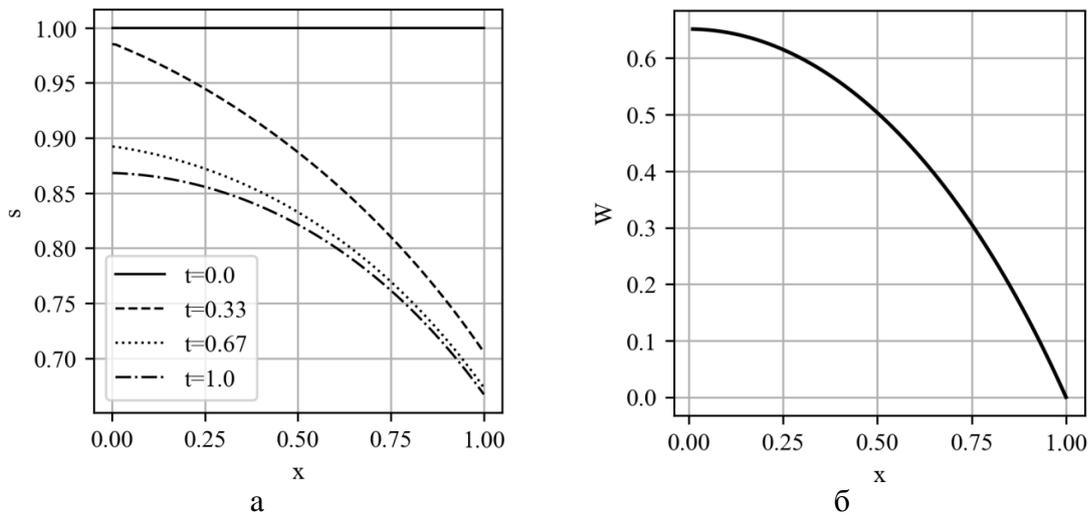


Рис.1. Графики напряжений и прогиба из численного решения закрепленной мембраны  $\nu = 0,3$ : а) сходимость решения по напряжению; б) прогиб, соответствующий установившемуся напряжению.

На основе изложенного решения получены решения для двух указанных выше граничных условий.

## 2. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД

### 2.1. Мембрана, неподвижно закрепленная по контуру.

Чтобы получить решение, соответствующее любому значению коэффициента Пуассона, рассмотрим семейство решений, полученных для различных значений  $\nu$  (рис.2).

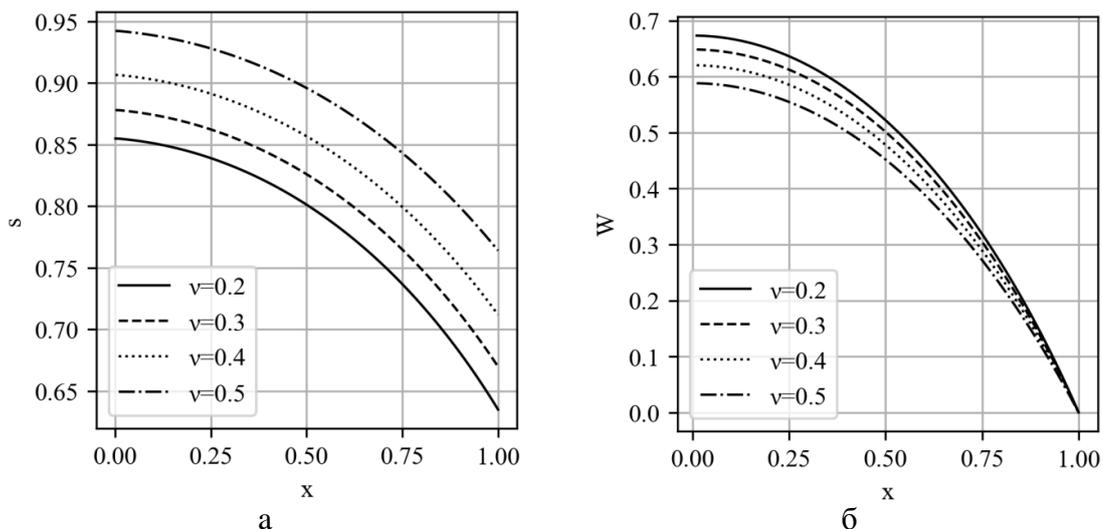


Рис.2. Численные решения закрепленной мембраны по напряжению и прогибу для различных значений коэффициента Пуассона: а) напряжение; б) прогиб.

Аппроксимируем полученное решение кубическим полиномом

$$\tilde{s}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad (15)$$

и определим его коэффициенты, требуя совпадения (15) и численного решения в полюсе и на контуре и выполнения граничных условий (штрихи – производные по  $x$ ):  $\tilde{s}(0) = s(0) = s_0$ ,  $\tilde{s}'(0) = 0$ ,  $\tilde{s}(1) = s(1) = s_1$ ,  $(1 - \nu)\tilde{s}(1) + \tilde{s}'(1) = 0$ .

Определенные таким образом коэффициенты

$$a = s(0), \quad b = 0, \quad c = (4 - \nu)s_1 - 3s_0, \quad d = 2s_0 - (3 - \nu)s_1 \quad (16)$$

выражаются через напряжения в полюсе и на контуре, которые также зависят только от коэффициента Пуассона материала и для физически допустимого диапазона его изменения  $0 < \nu < 0,5$  могут быть единожды рассчитаны (рис.3) и аппроксимированы полиномами

$$\begin{aligned} s_0(\nu) &= 0.246\nu^3 + 0.148\nu + 0.808 \\ s_1(\nu) &= 0.364\nu^3 + 0.262\nu + 0.577 \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, соотношения (15)-(17) определяют искомое распределение безразмерного радиального, а также, с помощью (3), и окружного напряжений. Возвращаясь к размерным величинам, приведем выражения для напряжений

$$\sigma_r = \sqrt[3]{\frac{Ep^2c^2}{8h^2}} \left\{ s_0 + A \left( \frac{r}{c} \right)^2 - B \left( \frac{r}{c} \right)^3 \right\}$$

$$\sigma_\varphi = \sqrt[3]{\frac{Ep^2c^2}{8h^2}} \left\{ s_0 + 3A \left( \frac{r}{c} \right)^2 - 4B \left( \frac{r}{c} \right)^3 \right\}$$
(18)

где

$$A = s_1(4 - \nu) - 3s_0 = -0.364\nu^4 + 0.721\nu^3 - 0.262\nu^2 + 0.029\nu - 0.118$$

$$B = s_1(3 - \nu) - 2s_0 = -0.364\nu^4 + 0.602\nu^3 - 0.262\nu^2 - 0.085\nu + 0.114$$

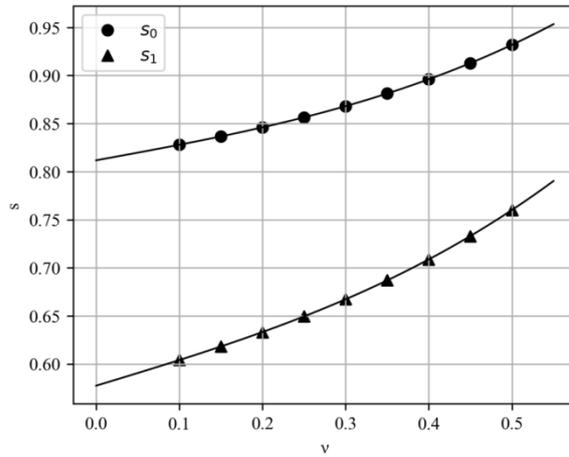


Рис.3. Зависимость напряжений в полюсе  $s_0$  и на контуре  $s_1$  от коэффициента Пуассона.

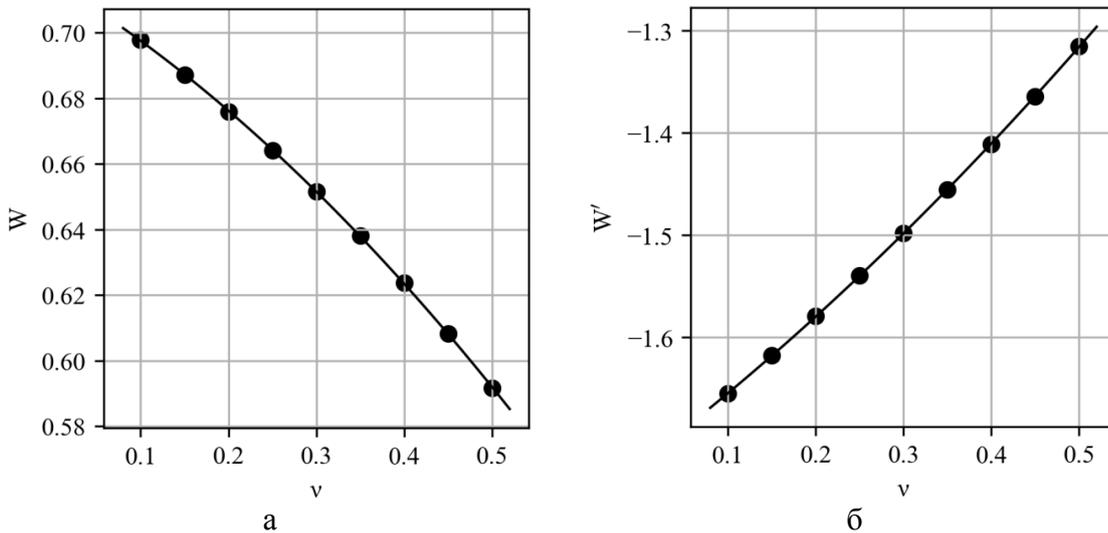


Рис.4. Зависимости прогиба в полюсе и производной прогиба на контуре от коэффициента Пуассона и их аппроксимации: а) прогиб в полюсе; б) производная прогиба на контуре.

По аналогии с напряжением аппроксимируем функцию прогиба кубическим полиномом, не содержащим линейного члена, и определим его коэффициенты, исходя из условий:  $w(0) = w_0$ ,  $w'(0) = 0$ ,  $w(1) = 0$ ,  $w'(1) = w'_1$ . Величины  $w_0$  и  $w'_1$ , как функции коэффициента Пуассона (рис.4), представим полиномами

$$W_0 = -0.142\nu^2 - 0.166\nu + 0.717$$

$$W_1' = 0.273\nu^2 + 0.658\nu - 1.725$$

Окончательное выражение для прогиба в размерной форме будет

$$w = \sqrt[3]{\frac{pc^4}{Eh}} \left( W_0 - (3W_0 + W_1') \left( \frac{r}{c} \right)^2 + (2W_0 + W_1') \left( \frac{r}{c} \right)^3 \right). \quad (19)$$

Таким образом, формулы (18) и (19) полностью решают задачу расчета нелинейных мембран, закрепленных по контуру, при равномерном давлении

## 2.2. Мембрана, растянутая заданным напряжением на контуре.

В случае мембраны с заданным на контуре растягивающим напряжением решение аналогично, но вместо коэффициента Пуассона единственным свободным параметром является заданное напряжение  $s(1) = s_1$ . Результаты расчета напряжения и прогиба для различных значений  $s_1$  показаны на рис.5.

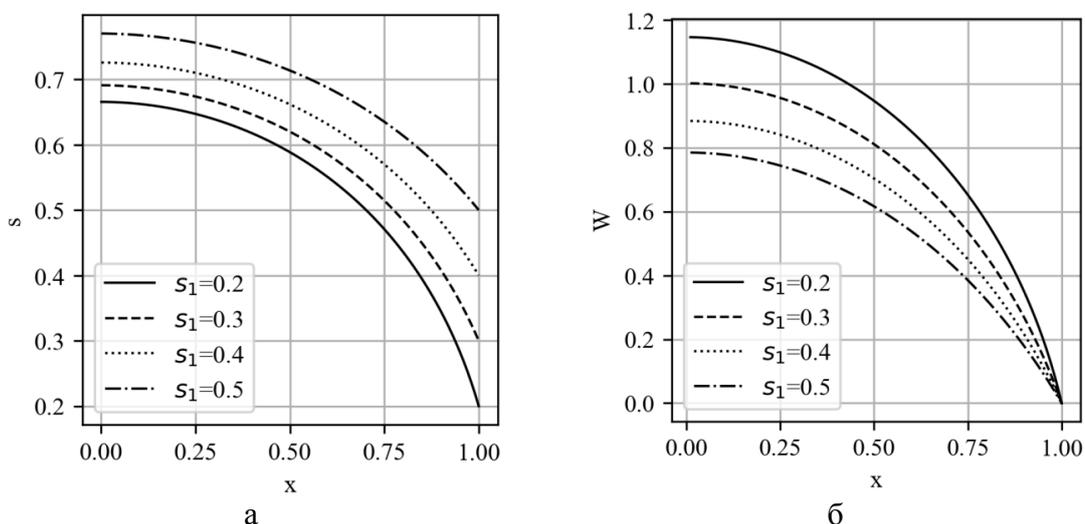


Рис.5. Напряжения и прогиб растянутой мембраны для различных напряжений на контуре: а) напряжения; б) прогиб.

Как и ранее, аппроксимируем полученное решение, приняв  $s = \sqrt{A - Bx^2}$ . Граничное условие в полюсе  $s'(0) = 0$  удовлетворяется автоматически, а коэффициенты  $A, B$  определяются по заданному напряжению на контуре  $s(1) = s_1$ , и напряжению в полюсе, которое аппроксимируется полиномом от напряжения на контуре:  $s(0) = s_0 = 0.5s_1^2 + 0.645$ .

Приведем окончательные выражения для напряжений и прогиба в размерной форме

$$\sigma_r = \sqrt[3]{\frac{Ep^2c^2}{8h^2}} \sqrt{A - B \left( \frac{r}{c} \right)^2},$$

$$\sigma_\varphi = \sqrt[3]{\frac{Ep^2c^2}{8h^2}} \frac{A - 2B \left( \frac{r}{c} \right)^2}{\sqrt{A - B \left( \frac{r}{c} \right)^2}},$$

$$w = \sqrt[3]{\frac{pc^4}{Eh} \frac{\sqrt{A - B(r/c)^2} - s_1}{B}},$$

где обозначено

$$A = (0.5s_1^2 + 0.645)^2,$$

$$B = 0.25s_1^4 - 0.355s_1^2 + 0.416.$$

Сравнение численного решения и его аппроксимации приведено на рис.6. Средняя относительная ошибка аппроксимации по напряжениям составляет 0.6%.

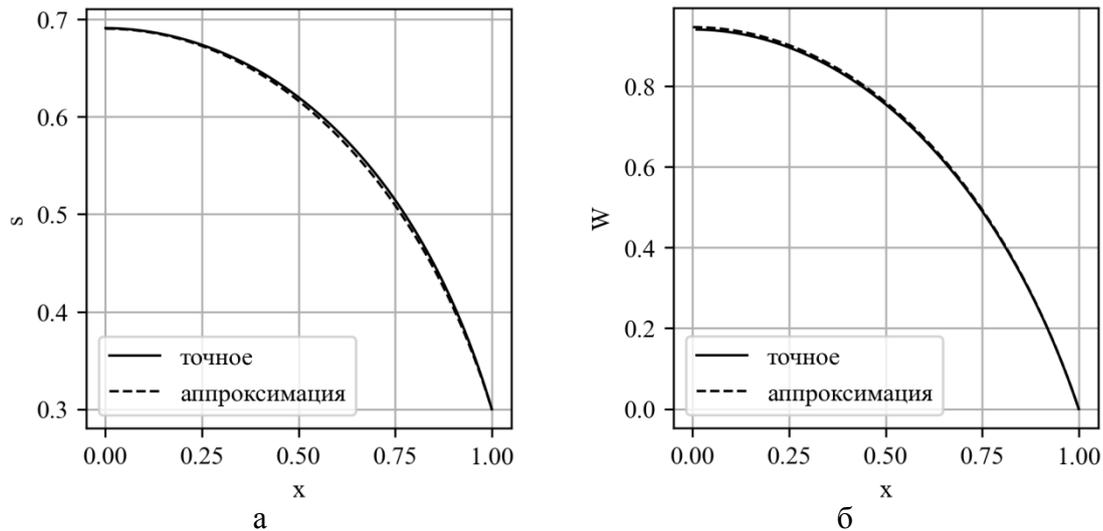


Рис.6. Сравнение численного решения и аппроксимаций для натянутой мембраны: а) сравнение напряжений; б) сравнение прогибов.

### 3. РАСЧЕТ МЕМБРАНЫ НА ОСНОВЕ SIMULIA ABAQUS

Для проведения верификации в программном комплексе SIMULIA Abaqus создана конечно-элементная (КЭ) модель упругой неподвижно закрепленной по контуру мембраны с параметрами:  $c = 0,51$  м,  $h = 0,01$  м,  $E = 0,7$  ГПа,  $\nu = 0,3$ ,  $p = 10$  кПа. Мембрана была разбита 22 узла по радиусу с использование трехмерных четырехузловых мембранных элементов.

Для решения использовалась неявная схема решения, критерием сходимости в которой является равенство внутренних и внешних сил.

Сравнение результатов, полученных на основе КЭ-модели и изложенного выше метода, приведено на рис.7, где показаны эпюры прогиба и напряжения по Мизесу. На рис.8 приведены также оценки относительной погрешности изложенного решения по отношению к результату расчета на основе пакета SIMULIA Abaqus.

Анализ точности полученного численно-аналитического решения показал, что погрешность определения напряжений при условиях решения, перечисленных ранее, не превосходит 1% по напряжениям и еще менее по прогибу.

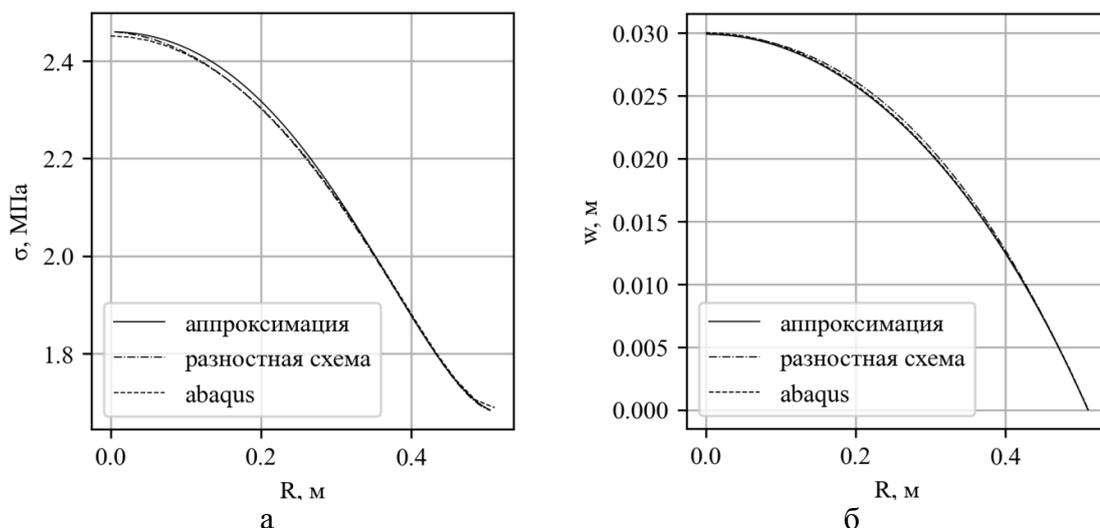


Рис.7. Сравнение результатов расчета по разностной схеме (12,13), с помощью аппроксимации (17) и на основе пакета SIMULIA Abaqus: а) сравнение напряжений; б) сравнение прогибов.

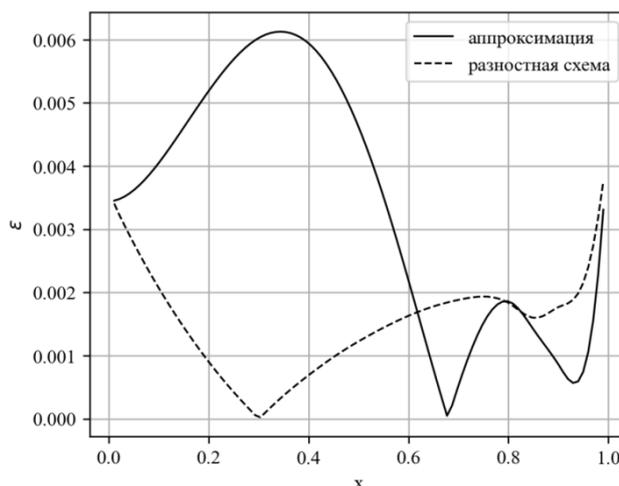


Рис.8. Относительные отклонения напряжения по аппроксимации и расчета по разностной схеме от результатов КЭ-моделирования.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе сочетания аналитических и численных методов получено решение задачи о нелинейном деформировании круговых упругих мембран при конечных прогибах, вызванных поперечной нагрузкой. При аналитическом решении задача сведена к нелинейному однородному уравнению относительно параметра, зависящего от радиального напряжения и давления и содержащему единственный безразмерный параметр. Рассмотрены два практически важных варианта граничных условий: неподвижное закрепление и заданное растягивающее напряжение по контуру. Аппроксимация его численного решения, полученного по методу установления, может рассматриваться, как универсальное и исчерпывающее решение поставленной задачи.

Полученное решение использовано для верификации численных пакетов. В качестве примера, проведено численное моделирование задачи на основе

конечно-элементного программного кода SIMULIA Abaqus, предназначенного для решения задач механики деформируемого твердого тела.

Проведено сравнение результатов аппроксимации, численного решения по разностной схеме и моделирования.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. *Уравнения в частных производных математической физики*. – М.: Высшая школа, 1970.
2. Hencky H. *Ueber den Spannungszustand in kraisrunden Platten [On the state of stress in circular plates]* // *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. – 1915. – Vol.63. – No.3. – Pp.311-317.
3. Prescott J. *Applied elasticity*. – London, 1924.
4. Папкович П.Ф. *Строительная механика корабля, ч. II* – Л.: Судпромгиз, 1939.
5. Алексеев С.А. *Круглая плоская упругая мембрана под равномерной поперечной нагрузкой* // *Инженерный сборник*. – 1953. – Т.14. – С.196-198.
6. Цянь Вэй-чан *Теория гибких круглых пластинок*. – М.: Изд. иностр. лит., 1957.
7. Вольмир А.С. *Гибкие пластины и оболочки*. – М.: ГИТТЛ, 1956.
8. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*. – М.: Наука, 1966.
9. Sansone G. *Equazioni differenziali nel campi reale [Ordinary differential equations]*. – Bologna, 1948.
10. Bellman R. *Stability theory of differential equations*. – New York, 1953.

УДК 534-141  
EDN ZFWXWC (<https://elibrary.ru/zfwxwc>)  
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.4



## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТОКА ЖИДКОСТИ\***

Бородин А.К.<sup>1</sup>, Фельдштейн В.А.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

В настоящее время интенсивно развиваются численные методы решения связанных (междисциплинарных) задач механики сплошной среды, в частности – задач о колебаниях упругих тел в жидкости. В связи с этим приобретает актуальность проблема верификации численных алгоритмов, составляющих основу программных комплексов. Принципиально под верификацией понимают сопоставление результатов, полученных численно, и аналогичных результатов, полученных на основе «эталонных» решений. В идеальном случае такими эталонами могут служить решения задачи, точные в математическом смысле или математическое обоснование корректности применяемого численного алгоритма (аппроксимация и устойчивость по Лаксу-Рихтмайеру, обеспечивающие сходимость). При этом возникают сложности, связанные с тем, что число таких решений и обоснований ограничено и они, как правило, получены в сильно идеализированной постановке, часто теряющей прикладную содержательность. Поэтому приходится использовать в качестве эталонных также приближенные или достаточно апробированные численные решения; таким образом процесс верификации вынужденно происходит «на встречах курсах» и требуется разработка методических основ верификации в широком смысле.

В данной статье рассматривается задача гидроупругости о нелинейных колебаниях упруго-инерционного осциллятора. Как известно, осциллятор является модельным объектом в приложениях. Нелинейность связана с тем, что при колебаниях тела в потоке гидродинамическая сила (коэффициент сопротивления) зависит от числа Рейнольдса, которое в течение одного цикла может существенно изменяться. В данном случае выбрано тело сферической формы, так как для него имеются точная асимптотика при  $Re \rightarrow 0$  и обоснованные аппроксимации в широком диапазоне  $Re$  [1-3]. Нахождение закона затухания амплитуды при возмущении начальных условий осуществляется по методу Крылова-Боголюбова [4], который, в приложении к задачам этого типа, может рассматриваться, как эталонный.

Полученное решение использовано для валидации численного решения, полученного с использованием программного комплекса FlowVision, основанного на конечно-объемном методе решения и позволяющего решать как задачи гидрогазодинамики, так и задачи о взаимодействии жидкости и конструкции. Принцип решения задачи взаимодействия жидкости и конструкции.

---

\* Работа выполнена по гранту Российского научного фонда (Соглашение 22-19-00678)

## Два подхода к задачам о взаимодействии жидкости/газа с деформируемым твердым телом

Колебания упругих систем в жидкости (Fluid-Structure interaction, или FSI) – междисциплинарная задача о взаимодействии между жидкостью и деформируемым телом. Несмотря на то, что задачи, связанные с гидродинамикой и механикой деформируемого твердого тела (МДТТ) – родственные разделы механики сплошных сред, численное моделирование задач этих разделов механики в середине прошлого века пошло по двум разным путям – в гидродинамике используются в основном конечно-объемные методы, в МДТТ – конечно-элементные.

### Взаимодействие расчетных сеток

Одной из существенных проблем разделенного подхода является использование разных сеток. Во FlowVision используется декартова сетка, в то время как в конечно-элементных пакетах используется структурированная сетка. Граница сеток представляется в виде плоских фасеток (поверхностной сетки). Поверхностная сетка образована набором внешних граней  $F_{i,j}$  конечно-элементной сетки, где  $i$  – номер поверхности элемента  $j$ .

Если граница КЭ-сетки пересекает ячейку сетки FlowVision, то ячейка FlowVision обрезается поверхностной сеткой, образуя многогранник. Форма ячейки  $S_m$  может быть представлена в виде суммы граней ячейки  $E_{l,m}$  и части  $i$  – поверхности  $j$  – элемента  $dF_{i,j,m}$ , обрезанного ячейкой

$$S_m = \sum_{l=1,L} E_{l,m} + \sum_{i=1,I} dF_{i,j,m},$$

где  $L$  – количество поверхностей ячейки,  $I$  – количество поверхностей элемента.

В итоге в ячейке FlowVision хранится информация об обрезанном объеме и нагрузках, возникающих в этом объеме. Также в ячейке хранится информация о том, с каким элементом из КЭ-сетки она граничит. По этим данным передаются данные в КЭ-программу и обратно. Например, давление жидкости  $P_{i,j}$  на поверхности  $F_{i,j}$  определяется путем интегрирования давления по всем ячейкам, содержащим данную поверхность элемента

$$P_{i,j} = \frac{1}{s(F_{i,j})} \sum_{m=1,M} P_m s(dF_{i,j,m}),$$

где  $s(F_{i,j})$  – площадь поверхности элемента.

### Численно-аналитическое решение

Рассматривается задача о колебаниях линейного осциллятора в потоке жидкости/газа (рис.1).

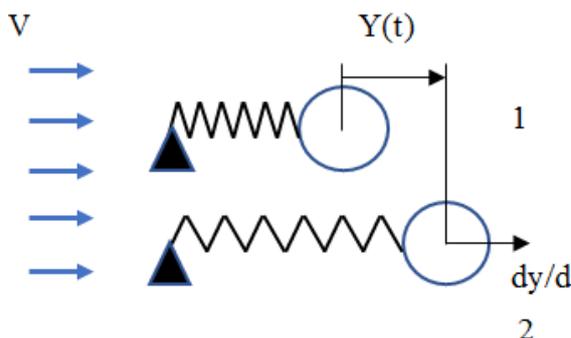


Рис.1.Схема колебаний упругого осциллятора в потоке жидкости.

Обозначения:

$V$  – скорость потока,

$\rho, \eta$  – плотность и динамическая вязкость жидкости,

$c_d$  – коэффициент лобового сопротивления,

$S$  – площадь мидела груза,

$d$  – диаметр груза,

$m$  – масса груза,

$k$  – жесткость пружины,

$\omega = \sqrt{k/m}$ ,  $T = 2\pi/\omega$  – частота и период собственных колебаний,

$A$  – амплитуда колебаний,

$Re = Vd\rho/\eta$ ,  $Re_v = |V - \dot{y}|d\rho/\eta$  – числа Рейнольдса,

$Sh = \omega d/V$  – число Струхалея.

## 1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается твердое тело сферической формы, связанное с линейно-упругой пружиной. В отсутствие потока пружина не деформирована, и неподвижный груз зафиксирован в положении 1. После освобождения груза начинаются колебания, которые, вследствие демпфирования, завершаются остановкой груза в положении  $y_0$ , при котором гидродинамическая сила

уравновешивается силой сжатия пружины:  $y_0 = \frac{1}{2k} c_d S \rho V^2$ . Уравнение колебаний имеет вид

$$m\ddot{y} + ky = Q(v). \quad (1)$$

Здесь  $Q(v)$  – гидродинамическая сила, зависящая от скорости потока относительно груза  $v = V - \dot{y}$ , и всегда направленная противоположно этой скорости:

$Q = \frac{\rho}{2} S c_d (V - \dot{y})^2 \text{sign}(V - \dot{y})$ . Таким образом, уравнение колебаний примет вид

$$\ddot{y} + \omega^2 y - \frac{\rho V^2 (1 - \dot{y}/V)^2 S}{2m} c_d \text{sign}(1 - \dot{y}/V) = 0. \quad (2)$$

Коэффициент сопротивления – функция числа Рейнольдса (рис.2 [1]). При обтекании неподвижного тела  $Re$ , при колебаниях тела в потоке  $Re_v = Re|1 - \dot{y}/V|$ . Приведенный график хорошо аппроксимируется зависимостью [3]

$$c_d = \frac{24}{Re} + \frac{4}{Re^{1/3}}, \quad (3)$$

которая в дальнейшем используется.

Если скорость потока и скорость груза сопоставимы, так что абсолютная величина относительной скорости может изменяться за цикл от нуля до максимального значения, необходимо учитывать зависимость коэффициента сопротивления от соотношения скоростей потока и груза. Оценим диапазон изменения относительной скорости в процессе колебаний, сравнив скорость потока и абсолютную скорость движения груза. Частота колебаний определяется соотношением массы груза и жесткости пружины и влиянием сопротивления среды, которое обычно слабо влияет на частоту, если только жидкость

не подбирается специально достаточно вязкой, так что движение осциллятора становится аperiodическим. Поэтому для оценок примем, что  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Амплитудное значение скорости груза пропорционально частоте:  $A\omega$ , однако увеличение частоты обеспечивается увеличением жесткости пружины, при котором статическое смещение груза  $y_0 = \frac{\rho}{2k} S c_d V^2$  уменьшается. Максимальная скорость груза достигается на первых циклах колебаний, когда  $y \approx y_0(1 - \cos \omega t)$  и равна  $\dot{y}_m = y_0 \omega = \frac{\rho V^2}{2\sqrt{km}} S c_d$ . Отсюда следует, что соотношение скоростей в дальнейшем не превосходит величины

$$\frac{\dot{y}_m}{V} \leq \frac{\rho V}{2\sqrt{km}} S c_d = \frac{3\rho}{4\rho_0} \frac{c_d(\text{Re})}{Sh} = \beta g(\text{Re}, Sh). \quad (4)$$

Здесь  $\rho_0$  – плотность материала груза,  $Sh = \omega d/V$  – безразмерная частота (число Струхаля),  $\beta = 3\rho/4\rho_0$ . На рис.3 приведены зависимости  $M$ , что соответствует плотности материала груза  $\rho_0 = 955 \text{ кг/м}^3$ .

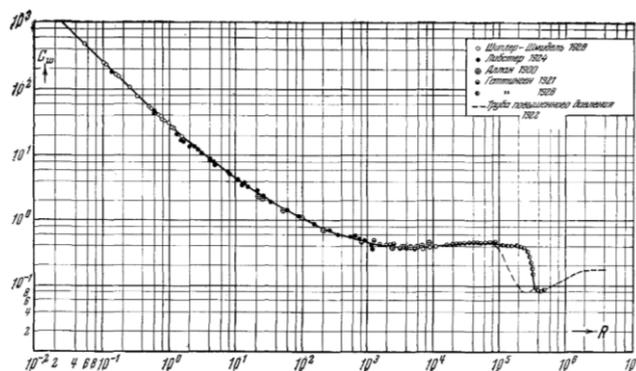


Рис.2. Зависимость коэффициента сопротивления от функции числа Рейнольдса.

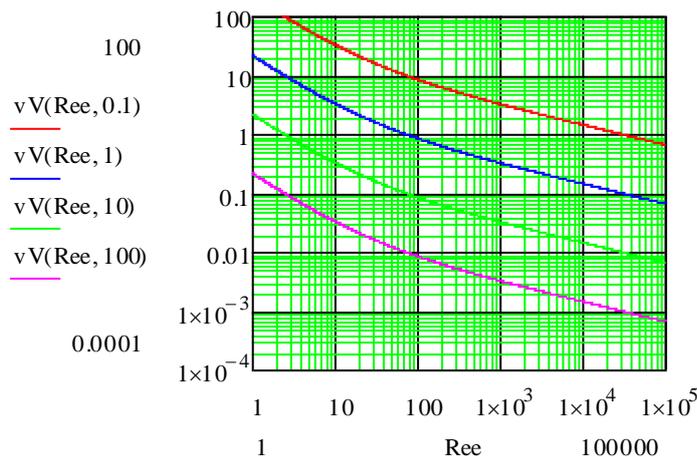


Рис.3.

Неравенству (5) можно придать иной эквивалентный вид

$$\frac{\dot{y}_m}{V} \leq \frac{\pi d \eta}{4m\omega} \text{Re} c_d(\text{Re}). \quad (5)$$

Если колебания достаточно медленные и картина обтекания за период колебаний успеваеет «отслеживать» изменение относительной скорости, то есть

при  $d/V < T$ , иначе говоря, при малых числах Струхалия применимо квазистационарное приближение.

Вернемся к исходному уравнению (1), в котором с учетом (2), под числом Рейнольдса следует понимать  $Re_r = Re|1 - \dot{y}/V|$ , и приведем его к виду

$$\ddot{y} + \omega^2 y - \frac{F(\dot{y})}{m} = 0, \tag{6}$$

где обозначено

$$F(\dot{y}) = \frac{1}{2} \rho S V^2 \left( \frac{24}{Re|1 - \dot{y}/V|} + \frac{4}{Re^{1/3}|1 - \dot{y}/V|^{1/3}} \right) (1 - \dot{y}/V)^2 \text{sign}(1 - \dot{y}/V) = 0$$

или

$$F(\dot{y}) = \frac{1}{2} \rho S V^2 \left( \frac{24|1 - \dot{y}/V|}{Re} + \frac{4|1 - \dot{y}/V|^{5/3}}{Re^{1/3}} \right) \text{sign}(1 - \dot{y}/V) = 0.$$

Установившееся статическое смещение равно

$$y_0 = \frac{\rho V^2 S}{m \omega^2} \left( \frac{12}{Re} + \frac{2}{Re^{1/3}} \right).$$

Полученное уравнение достаточно сложное, однако его можно упростить, если по условиям задачи, согласно (2), можно пренебречь отношением  $\dot{y}_m/V$  по сравнению с единицей. Неравенство (4) является основанием для такого упрощения.

## 1.2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Интегрирование уравнения (1) получено численным методом Рунге-Кутта в Mathcad. При расчете принято

$$d = 0,2 \text{ м}, \quad V = 0,1 \text{ м/с}, \quad \omega = 6,28 \text{ рад/с} = 1 \text{ Гц},$$

$$m = 4 \text{ кг}, \quad \rho = 1 \text{ кг/м}^3, \quad \eta = 0,001 \text{ Пас}.$$

Этим условиям соответствует число Рейнольдса  $Re = 2 \cdot 10^4$ , число Струхалия  $Sh = 12,6$ , а статическое отклонение составляет при этом 0,148 мм. Из графиков на рис.3 следует, что при этих значениях параметров максимальная скорость не превышает  $0,01V$ . На рис.4 приведены графики изменения смещения  $y/y_0$  и скорости  $\dot{y}/V$  во времени.

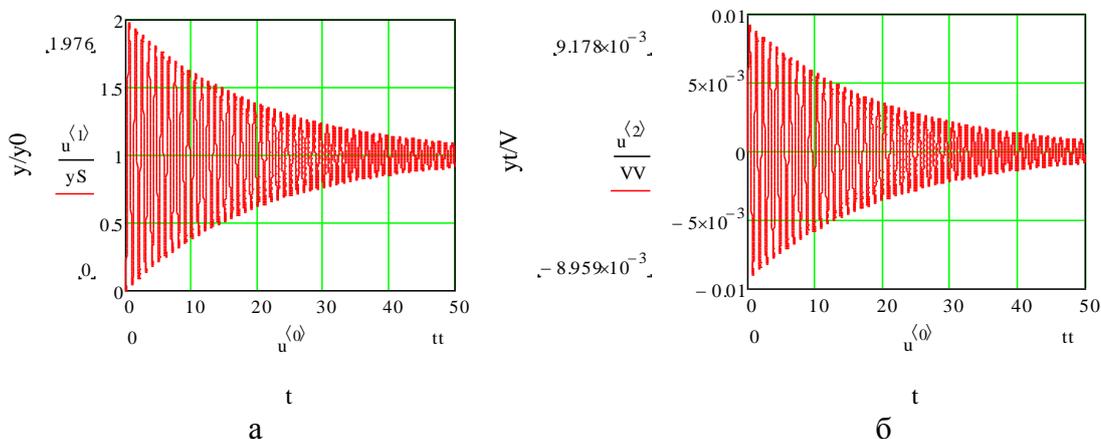


Рис.4. а) смещение, б) скорость.

### Аналитическое решение

Можно выделить две стадии колебаний маятника: первый короткий этап от начала движения до достижения максимального отклонения, и второй – последующие затухающие колебания. На первой стадии приближение  $y \approx y_0(1 - \cos \omega t)$  достаточно точное, как показывает сравнение с численным решением (рис.5). Из этого решения можно определить начальную амплитуду колебаний.

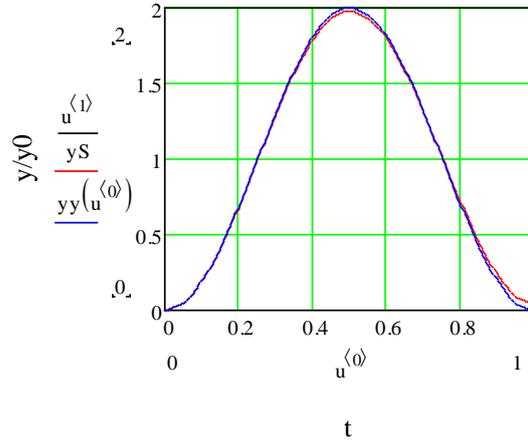


Рис.5. Колебания маятника (первая стадия).

Уравнение (7) – нелинейное. Применим для его решения метод гармонической линейаризации [4], согласно которому решение в первом приближении представляется в виде  $y = A(t) \cos \omega t$ , где медленно (по сравнению с периодом колебаний) меняющаяся амплитуда, имеющая наибольшее значение, определяется из уравнения

$$\dot{A} = -\frac{1}{2\pi\omega t} \int_0^{2\pi} F(-A\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi = F_0(A) \quad (8)$$

(при интегрировании  $\dot{y}$  заменяется на  $-A\omega \sin \psi$ ). На рис.6 показана зависимость правой части  $F_0(A)$  уравнения (5) от амплитуды и ее аппроксимация  $F_1(A) = -0,048A$ .

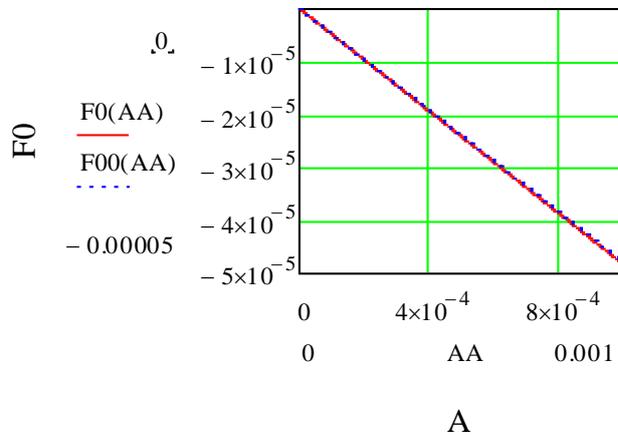


Рис.6. Зависимость правой части  $F_0(A)$  уравнения (5) от амплитуды.

Таким образом, уравнение (7) можно привести к виду:  $\dot{A} = -0,048t$ . Его решение

$$A(t) = A_0 \exp(-0,048t)$$

закон убывания амплитуды, а

$$y(t) = A_0 \exp(-0,048t) \sin \omega t$$

процесс колебаний.

Асимптотическое решение описывает установившийся режим колебаний и не привязано к начальным условиям, которые были заданы при численном решении. Они только определяют процесс убывания амплитуды со временем. Это несущественный недостаток, так как можно связать начальную амплитуду  $A_0$  с первым максимумом на рис.5. Как следует из рис.5, оба решения хорошо описывают процесс.

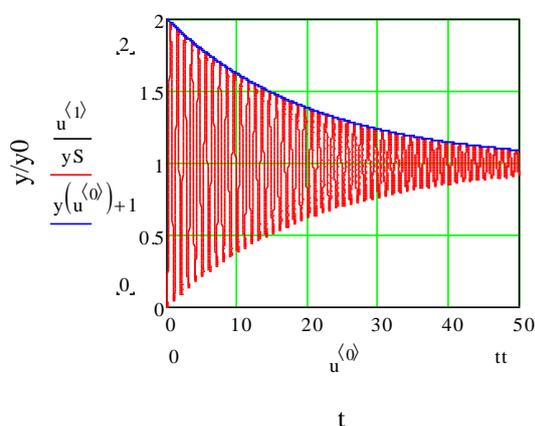


Рис.7. Сравнение численного и аналитического решений.

### **Решение с использованием программного комплекса FlowVison**

В программном комплексе FlowVison была разработана численная модель динамики пружинного маятника. Данная модель рассматривает поведение груза, выполненного в форме сферы, который находится в условиях течения воды с заданной скоростью 0,01 м/с. Параметры рассматриваемого маятника:

- Масса – 50 кг
- Жесткость – 19,74 Н/м
- Диаметр – 0.2 м

Расчетная область в данной численной модели представляет собой цилиндр. На образующей цилиндра установлено граничное условие «Неотражающее», на основаниях цилиндра применяются граничные условия, которые определяют поведение потока жидкости. На входной границе установлено условие входа с постоянной скоростью, на противоположной границе цилиндра реализовано условие свободного выхода.

На первом этапе расчетов сфера находится в состоянии покоя до момента установления устойчивого потока. После достижения режима установившегося потока коэффициент сопротивления ( $C_x$ ) для сферы составил 0.147, что демонстрирует отклонение от теоретически предсказанного значения на уровне 0.5%. С момента установления потока сфера начинает двигаться под воздействием сил, вызванных потоком, а также сил упругости.

В результате проведенного моделирования были получены данные о колебаниях сферы (рис.8). Колебания сферы происходят вокруг положения

равновесия и характеризуются затухающим поведением, с коэффициентом затухания, равным 0,0025, полученным экспериментально. Рассчитанный полуаналитически коэффициент затухания составляет 0,004. Несмотря на значительное расхождение между этими значениями, характер колебаний хорошо описывается аналитическим решением, а графики затухания (численный и полуаналитический) демонстрируют близость друг к другу. Расхождение между коэффициентами затухания может быть объяснено следующими факторами:

- сложность моделирования срыва потока на гладких поверхностях;
- аналитическая модель основана на устоявшемся потоке;
- в численном решении не учитывается влияние присоединенной массы жидкости.

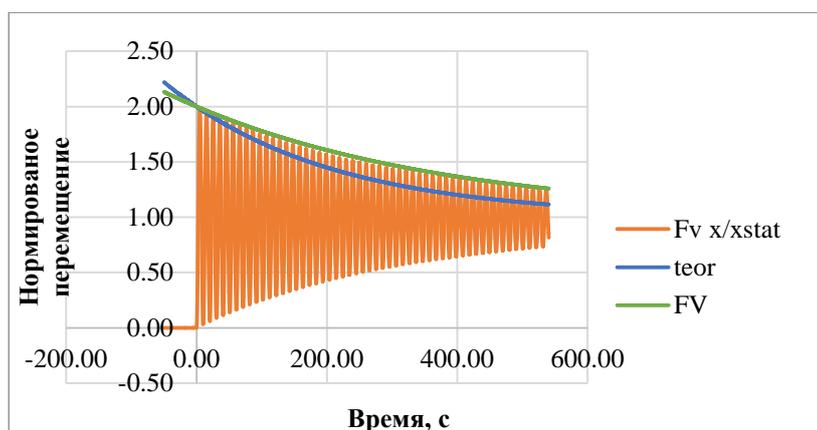


Рис. 8. Результаты моделирования.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана численно-аналитическая методика исследования колебаний нелинейного осциллятора в потоке жидкости. Аналитическое решение получено по методу Крылова-Боголюбова. Численные решения получены двумя способами:

- с применением метода Рунге – Кутты к уравнению колебаний осциллятора с известным законом сопротивления со стороны жидкости;
- с применением программного комплекса FlowVison.

Проведено сопоставление результатов, позволяющее оценить точность решений.

Разработанные методики могут использоваться для верификации численных методов решения междисциплинарных задач гидроупругости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И. *Методы подобия и размерности в механике*. – М.: Наука, 1981.
2. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. – М.: Наука, 1978.
3. Симаков Н.Н. *Расчет обтекания и сопротивления шара в ламинарном и сильнотурбулентном потоке // ЖТФ*. – 2013. – Т.83. – Вып.4.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. – М.: Физматгиз, 1958.

УДК 539.3  
EDN ZKYPVG (<https://elibrary.ru/zkypvg>)  
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.5



## **ИЗУЧЕНИЕ КОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ ПОЛИЭТИЛЕНА С ЧАСТИЦАМИ ДИОКСИДА КРЕМНИЯ\***

Валиев Х.Х., Корнев Ю.В., Муромцев Д.Н., Власов А.Н., Карнет Ю.Н.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

### **ВВЕДЕНИЕ**

Полиэтилен – один из наиболее крупнотоннажных и широко распространенных как в России, так и во всем мире полимерных материалов [1]. Он занимает лидирующую позицию на мировом рынке пластических масс – 32,5% от общего объема выпускаемых полимеров. Благодаря доступности сырья, сочетанию ценных свойств со сравнительно низкими затратами на его получение полиэтилен по объему производства занимает среди пластмасс первое место [2]. Высокие эксплуатационные свойства полиэтилена и его способность к переработке производительными методами дают возможность применять этот полимер практически во всех сферах промышленности и народного хозяйства. Большой интерес представляет исследование композитов полиэтилена низкой плотности (ПНП) с различными наполнителями. В работах [3-4] изучены нанокompозиты ПНП с графеном. Влияние термообработок на электрические свойства ПНП при наполнении окисью цинка исследовано в [5]. Зависимости механических и электрических свойств ПНП от наполнения углеродными нанотрубками изучены в [6]. Данные по усилению проводимости композитных мембран ПНП от наполнения многостенными углеродными нанотрубками получены в [7]. В данной работе исследованы композиты на основе полиэтилена низкой плотности с наполнителем аморфный диоксид кремния BC50 с помощью атомно-силовой микроскопии и с использованием измерительного комплекса NanoTest 600 методом наноиндентирования. Исследовалась взаимосвязь структура-свойства для полимерных композитов и их учёта при прогнозировании механических свойств данного класса материалов.

### **1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТОВ**

Синтезированы новые полимерные композиты полиэтилена низкой плотности с частицами наполнителя субмикронных размеров коллоидной кремнекислоты BC50. Получены образцы с различной объёмной концентрацией ( $\phi$ ) высокодисперсного наполнителя BC50: с  $\phi=0,5\%$ ,  $\phi=2,2\%$ ,  $\phi=4,4\%$ ,  $\phi=6,1\%$ ,  $\phi=8,8\%$ . Предельная степень наполнения полученных полимерных композитов рассчитывалась исходя из методики, предложенной в [8-9]. Структура поверхности синтезированных композитов изучалась на атомно-силовом микроскопе АСМ EasyScan (Nanosurf, Швейцария). Микроскоп работал в полу-контактном режиме на воздухе при комнатной температуре с дополнительным

---

\* Работа выполнена в рамках Государственного задания ФГБУН Института прикладной механики РАН.

использованием моды фазового контраста. При этом применялась защита АСМ от внешних возбуждений с помощью динамического антивибрационного столика TS-150 (Fabrik am Weiher, Швейцария). Исследование механических свойств поверхности на нано уровне проводилось на установке Nanotest 600 (Micro Materials Ltd, Великобритания).

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис.1-4 представлены АСМ снимки поверхности композитов с концентрацией частиц наполнителя  $\phi$  от 2.2% до 8.8%. Обработка полученных снимков проводилась с помощью алгоритмов программы SPIP.

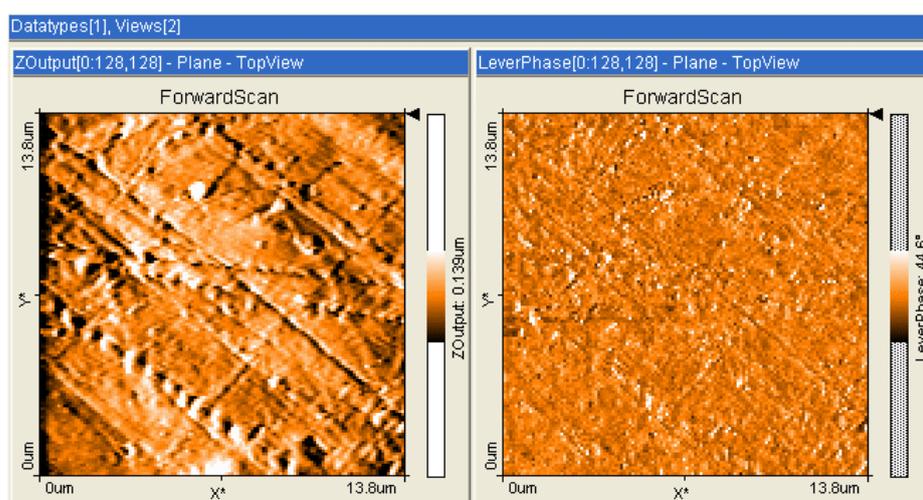


Рис.1. АСМ изображения структуры поверхности полиэтиленового композита ( $\phi=2,2\%$ ): (слева – топография, справа – фазовый контраст). Скан 13.8x13.8 мкм.

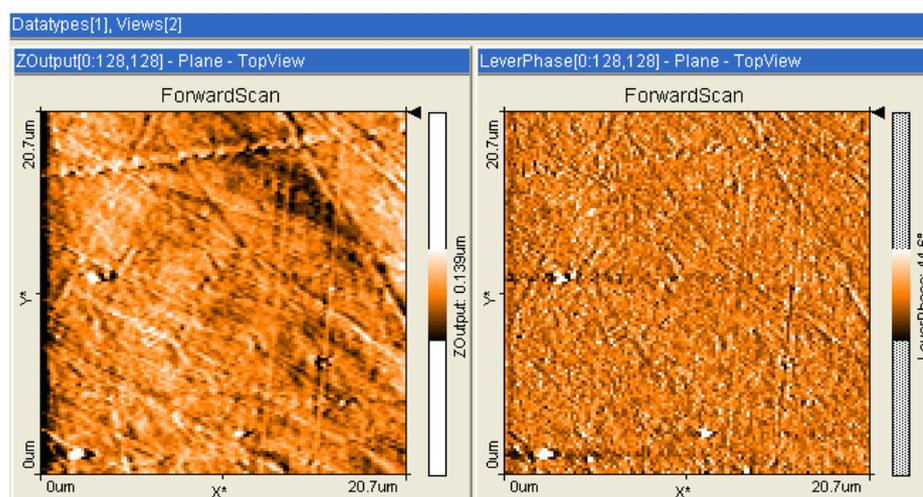


Рис.2. АСМ изображения структуры поверхности полиэтиленового композита ( $\phi=4,4\%$ ): (слева – топография, справа – фазовый контраст). Скан 20.7x20.7 мкм.

Светлые области – агломераты наполнителя БС50 на снимках топографии АСМ и на снимках фазового контраста размерами в диапазоне 100-2000 нм

визуализированы на фоне структуры поверхности полимерной матрицы – полиэтилена. Снимки АСМ на рис.1-4 показывают структуру наполнителя, образовавшейся в матрице полимера. Распределение наполнителя в композите при концентрации  $\phi=2,2-4,4\%$  довольно однородное с размерами агломератов порядка 100-300 нм. Определенно с ростом концентрации наполнителя увеличивается средний размер агломератов БС50, достигая величины порядка 600 нм для композита с  $\phi=8,8\%$ . Тем не менее, лучшее качество диспергирования в данном эксперименте было достигнуто для образца с  $\phi=8,8\%$  – здесь имеем минимальное значение среднего размера расстояний между агломератами – порядка 200 нм.

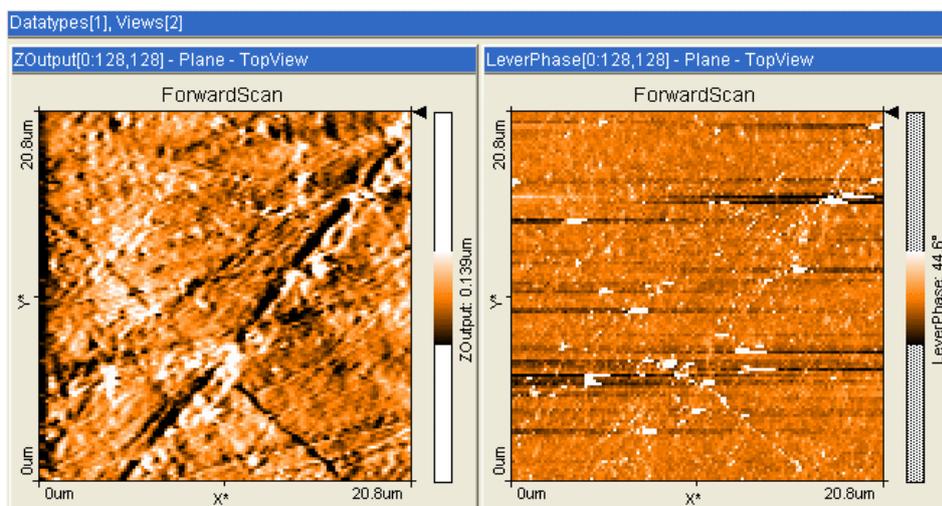


Рис.3. АСМ изображения структуры поверхности полиэтиленового композита ( $\phi=6,1\%$ ): (слева – топография, справа – фазовый контраст). Скан 20.8x20.8 мкм.

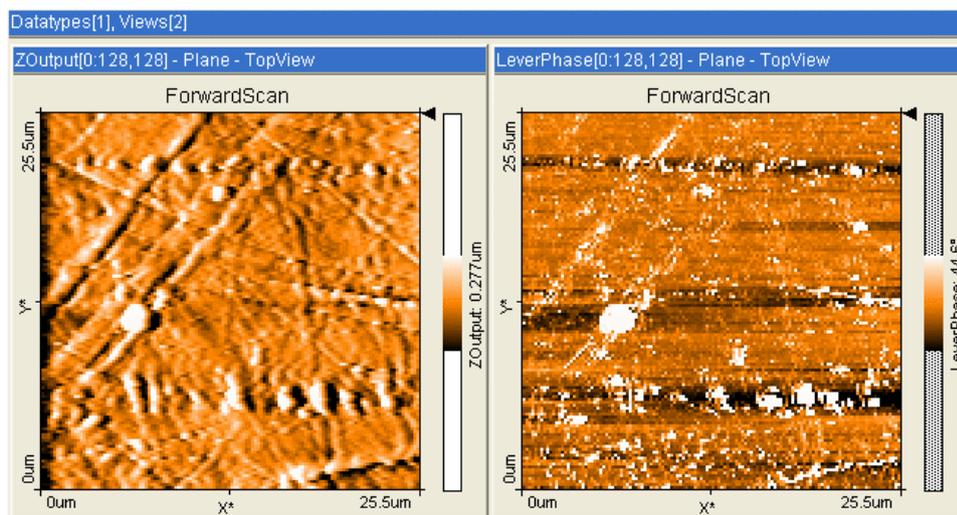


Рис.4. АСМ изображения структуры поверхности полиэтиленового композита ( $\phi=8,8\%$ ): (слева – топография, справа – фазовый контраст). Скан 25.5x25.5 мкм.

Все синтезированные образцы также испытывались на измерительном комплексе NanoTest 600 методом наноиндентирования с целью оценки их упруго-

гистерезисных свойств и выявления зависимости механических свойств данного класса материалов от степени наполнения высокодисперсными частицами и параметрами структуры.

Эксперименты проводились с применением сфероконического индентора с радиусом закругления 10 мкм, максимальной нагрузка при индентировании составляла 10 мН. Полученные данные показывают, что максимальное значение приведённого модуля упругости соответствует образцу с  $\phi=8,8\%$ , наполненного субмикрочастицами высокодисперсного диоксида кремния БС-50. Минимальное значение приведённого модуля упругости ожидаемо получено для образца с минимальной степенью наполнения  $\phi=0,5\%$ . В ходе экспериментов получен минимальный разброс показателей, не превышающий 2,8% для образца с  $\phi=6,1\%$ . Следует также отметить некоторое увеличение твердости и относительного гистерезиса при уменьшении податливости контакта в экспериментах по наноиндентированию с ростом степени наполнения для данного класса материалов. Увеличение значения приведённого модуля упругости при наноиндентировании составляет с 470 МПа для образца со степенью наполнения частицами БС-50  $\phi=0,5\%$  до 670 МПа для образца, где  $\phi=8,8\%$ , т.е. рост составил порядка 43%. С ростом степени наполнения частицами БС-50 в полимерных композитах на основе полиэтилена также отмечается рост значений относительного гистерезиса. Так, увеличение значения относительного гистерезиса при наноиндентировании составляет с величины 0,79 полученного для образца со степенью наполнения частицами БС-50  $\phi=0,5\%$  до 0,82 для образца 5, где  $\phi=8,8\%$ , т.е. рост составил порядка 3,8%.

Качественное распределение частиц оказывает влияние на механические свойства дисперсно-наполненных полимерных композиционных материалов.

Визуализированная структура наполнителя БС50, образующаяся в матрице полиэтилена, позволяет провести корреляцию с механическими свойствами синтезированных композитов. С ростом степени наполнения отмечается увеличение приведённого модуля упругости, твердости и относительного гистерезиса этих материалов.

## ВЫВОДЫ

Синтезированы новые композиты на основе полиэтилена низкой плотности с аморфным диоксидом кремния БС50.

Визуализированная с помощью АСМ структура наполнителя БС50, образующаяся в матрице полиэтилена позволила провести корреляцию с механическими свойствами синтезированных композитов. Выявлена зависимость упруго-гистерезисных свойств механических свойств данного класса материалов от степени наполнения высокодисперсными частицами аморфного диоксида кремния.

Результаты исследования важны при исследовании взаимосвязей структура-свойства для полимерных композитов и их учёта при прогнозировании механических свойств данного класса материалов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Уайт Дж.Л., Чойт Д.Д. *Полиэтилен, полипропилен и другие полиолефины* – СПб: Профессия, 2006. – 256 с.

2. Энциклопедия по машиностроению XXL / [Электронный ресурс] URL: <http://mash-xxl.info/info/128312/>.
3. Hyunwoo Kim, Shingo Kobayashi, Mohd A. AbdurRahim, Minglun J. Zhang, Albina Khusainova, Marc A. Hillmyer, Ahmed A. Abdala, Christopher W. Macosko. *Graphene/polyethylene nanocomposites: Effect of polyethylene functionalization and blending methods* // Polymer. – 2011. – Vol.52 – Iss.8. – Pp.1837-1846.
4. Рустамова Е.Г., Губин С.П. *Композиты графен-полиэтилен высокого давления и их свойства* // РЭНСИТ. – 2021. – Vol.13. – No.3. – Pp.369-376.
5. Tjong S.C., Liang G.D., Bao S.P. *Electrical properties of low-density polyethylene/ZnO nanocomposites.: The effect of thermal treatments* // Journal of Applied Polymer Science. – 2006. – Vol.102. – No.2. – Pp.1436-1444.
6. Maziyar Sabet, Hassan Soleimani. *Mechanical and electrical properties of low-density polyethylene filled with carbon nanotubes* // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2014. – Vol.64. – 012001.
7. Shi S., Xu W., Zhou B. et al. *Low-density polyethylene-multi-walled carbon nanotube nanocomposite membranes with enhanced conductivity for highly sensitive vapor sensing* // Adv. Compos. Hybrid. Mater. – 2023. – Vol.6. – Pp.168.
8. Симонов-Емельянов И.Д., Харламова К.И. *Технологическая классификация дисперсных наполнителей по размерам и проектирование полимерных композитов с разными типами структур* // Пластические массы. – 2022. – №9-10. – С.3-6.
9. Симонов-Емельянов И.Д., Харламова К.И., Дергунова Е.Р. *Маслоемкость дисперсных порошков и определение максимального содержания наполнителей в полимерных композиционных материалах* // Клеи. Герметики. Технологии – 2022. – №3. – С.18-24.



## МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОЖЕСТВЕННЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ ВЫСОКОЙ ПЛОТНОСТИ ПРИ УДАРНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ КОМПОЗИТНОГО ПАКЕТА

Вестяк В.А.<sup>1</sup>, Занина Э.А.<sup>2</sup>, Мартиросов М.И.<sup>1,2</sup>, Хомченко А.В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный  
исследовательский университет)», г. Москва, Россия

<sup>2</sup>ПАО «Яковлев», г. Москва, Россия

### ВВЕДЕНИЕ

Полимерные композиционные материалы (ПКМ) отличаются стойкостью к циклическим нагрузкам, малым удельным весом в сочетании с большой удельной прочностью и жёсткостью, а также возможностью изменять прочностные свойства в соответствии со схемой нагружения изготавливаемой конструкции. Это делает данный класс материалов заслуживающим существенного внимания при проектировании авиационных конструкций. Однако, чувствительность ПКМ к ударным нагрузкам из плоскости укладки является значительным препятствием для их повсеместного использования в основных силовых элементах авиационной техники. Такие нагрузки могут быть вызваны слабodeформируемыми – *твёрдыми* и сильнодеформируемыми – *мягкими* источниками. К твёрдым источникам можно отнести камни и металлические инструменты, к мягким – град, птиц, а также фрагменты пневматика, отделяющиеся при взрыве авиационной шины [1,2]. ПКМ требуют расчётно-экспериментальных работ по сертификации в части постударной прочности. Из-за наличия бесконечного количества комбинаций структур данные работы не могут быть ограничены только натурными испытаниями. Актуальна разработка методики конечно-элементного моделирования (КЭМ) ПКМ для расчёта ударных повреждений от различных источников.

В данной работе проводится численный анализ ударного взаимодействия множественных фрагментов авиационного пневматика и панели из ПКМ. Разработана методика послойного моделирования панели из ПКМ с помощью средств Simcenter 3D (Siemens PLM Software) и Simcenter Femap (Siemens PLM Software) с учётом межслоевого соединения. Рассмотрено подробное моделирование фрагмента авиационного пневматика, при котором принята во внимание его неоднородная структура. Расчёт выполнен в LS-Dyna (ANSYS Inc.). Анализ проведён для четырёх случаев нагружения: на панель воздействуют один, три, пять и семь хаотично расположенных фрагментов пневматика, скорости которых направлены по нормали к её поверхности. В работе [3] рассмотрено воздействие фрагментами протектора шины. Данная работа является продолжением работы [3], и здесь рассмотрено воздействие фрагментами, содержащими не только протектор, но и внутренние слои пневматика. Для случаев воздействия множественными фрагментами скорости фрагментов принимают значения от 15 до 21 м/с. Скорость одиночного фрагмента принята равной 100 м/с. Рассмотрено влияние числа фрагментов и их скорости

на повреждения монослоёв и межслоевого соединения. Получены зависимости кинетической энергии и перемещений фрагментов от времени, а также изучены повреждения монослоёв панели.

## 1. УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Цилиндрическая прямоугольная в плане панель размерами 540x480 мм со стрелой подъёма 7,5 мм подвергается воздействию от одного до семи фрагментами пневматика, отделяющимися при взрыве авиационной шины. Панель выполнена из однонаправленного углепластика на основе углеродного волокна T300 и эпоксидного связующего PRIME 20 LV [1,3]. Схема укладки панели симметричная, сбалансированная и смешанная с типовыми углами  $\pm 45^\circ$ ,  $0^\circ$  и  $90^\circ$ , всего в укладке 45 слоёв с толщиной монослоя  $\delta=0.1$  мм.

Панель расположена на стальном опорном столе толщиной 6 мм соответствующей цилиндрической формы и жёстко закреплена в четырёх местах крепления (рис.1). Стол имеет отверстие для того, чтобы панель могла перемещаться в направлении из плоскости укладки.

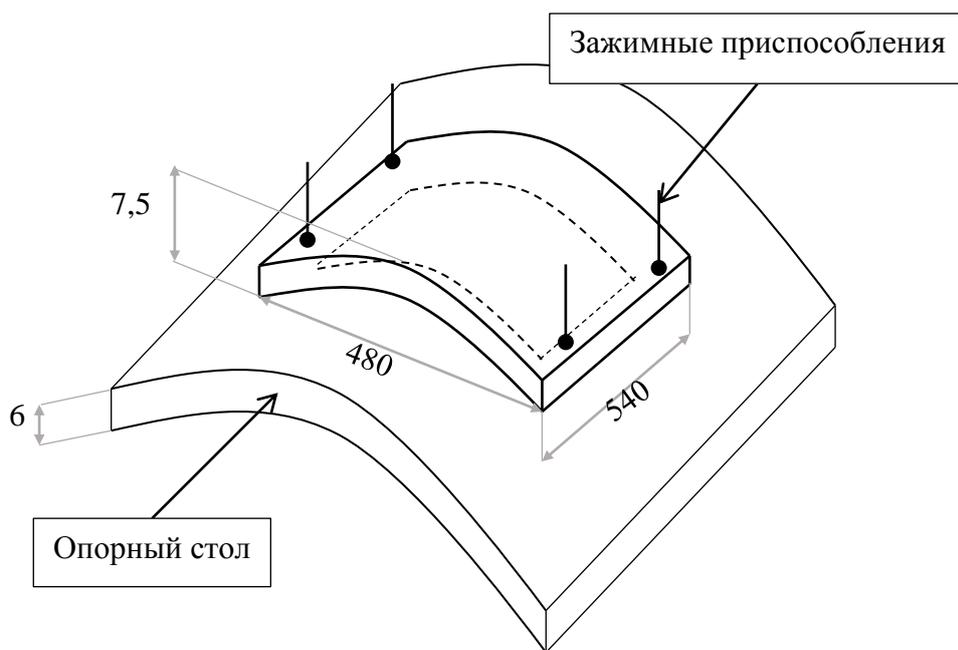


Рис.1. Панель из ПКМ, закреплённая на опорном столе (фрагменты пневматиков не показаны).

В панель ударяют от одного до семи фрагментов авиационной шины H41x16.0R20 компании Dunlop Aircraft Tyres Limited (DATL) [4]. Фрагменты состоят из трёх частей: протектора, брекера и внутренних слоёв (рис.2). Все фрагменты пневматика движутся по нормали к плоскости укладки панели и ударяют по ней стороной протектора. Примем высоту всех фрагментов равной толщине материала шины (приблизительно 66 мм), а длину и ширину фрагментов псевдослучайно изменяющимися от 30 до 60 мм. Как говорилось ранее, для случаев воздействия множественными фрагментами скорости фрагментов принимают значения от 15 до 21 м/с, а скорость одиночного фрагмента принята равной 100 м/с.

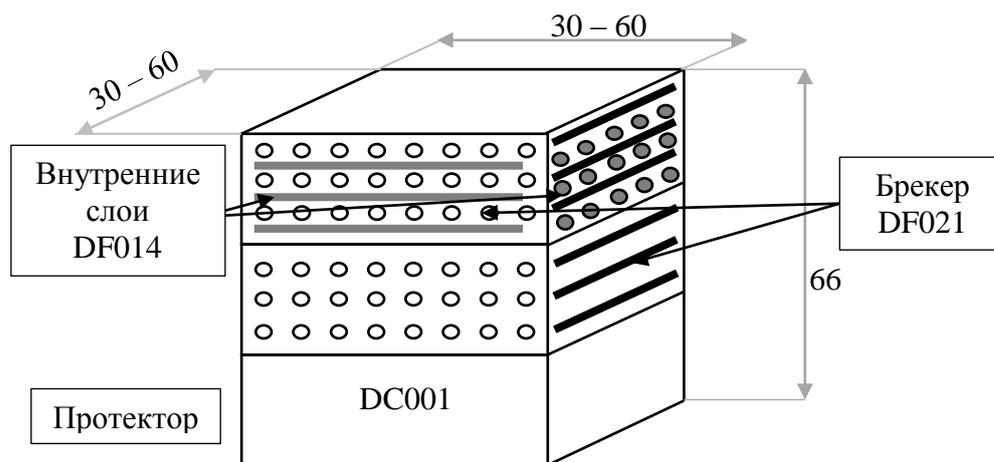


Рис.2. Фрагмент пневматика.

Кривые деформирования материалов, из которых изготовлен пневматик, приведены на рис.3.

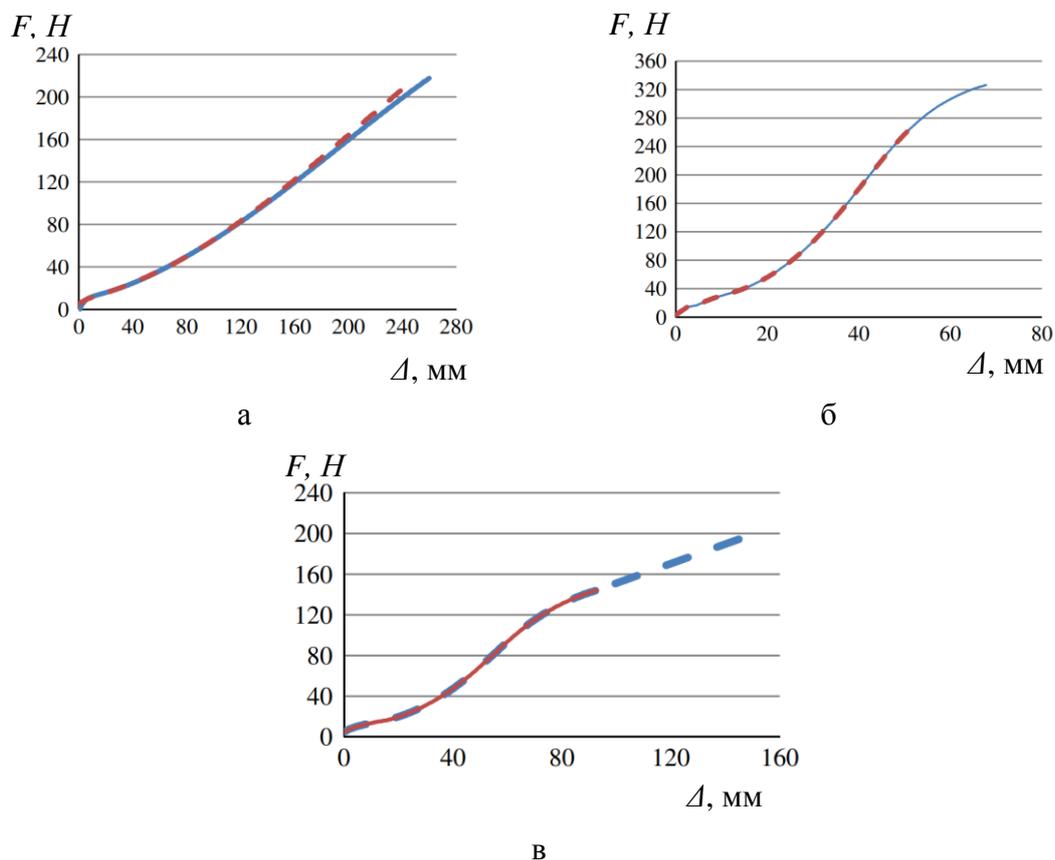


Рис.3. Кривые деформирования материалов пневматика [4]: а) резины DC001; б) волокон брекера DF021; в) поперечных волокон внутренних слоёв DF014.

## **2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

В работе [2] приведён общий подход к решению задачи о реакции изотропных материалов и ПКМ на скоростной удар. Его основными этапами являются: определение индуцированного ударником распределения давления по поверхности мишени; определение внутренних напряжений в мишени, вызванных давлением на поверхности; определение повреждений в монослоях и расслоений. При использовании программного комплекса LS-Dyna нет необходимости аналитически определять распределение давлений от воздействия фрагментами пневматика на поверхность панели, чтобы определить деформации в элементах. В работе [3] были подробно описаны подходы к моделированию конструкций из ПКМ: для моделирования монослоёв объёмными элементами использовалась модель материала «221\_MAT\_ORTHOTROPIC\_SIMPLIFIED\_DAMAGE», а для межслоевого соединения – «138\_MAT\_COHESIVE\_MIXED\_MODE». Обе модели материала предполагают зависимость повреждений от деформаций в элементе. Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо определить деформации каждого элемента.

При таком подходе с помощью явного метода необходимо решить уравнения движения панели и фрагментов пневматика – выражение (1), определяя перемещения узлов элементов  $X$

$$M\ddot{X} + CX = Q(t), \quad (1)$$

где  $M$  – матрица масс модели,  $C$  – матрица жёсткости,  $Q(t)$  – вектор внешних сил, зависящих от времени. В решении данной задачи демпфирование не учитывается.

## **3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ**

К фрагментам пневматика по нормали к поверхности панели приложены начальные скорости, значения которых псевдослучайно заданы до 100 м/с. Взаимодействие между всеми частями модели задано контактом типа «CONTACT\_ERODING\_SINGLE\_SURFACE». Отличительной особенностью данного типа контакта является то, что контактные поверхности пересчитываются при удалении элементов. Узлы панели в соответствии с рис.1 закреплены от перемещений по трём направлениям для моделирования зажимных приспособлений.

## **4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРАГМЕНТА ПНЕВМАТИКА**

В работе [3] сделано допущение, что удар по панели происходит фрагментом протектора, а волокна брекера и внутренних слоёв не моделировались. В данной работе принято решение о более подробном моделировании фрагмента пневматика в соответствии с подходом, предложенным в работе [4]. Он предполагает моделирование волокон брекера и внутренних волокон шины элементами типа Beam с формулировкой материала «067\_MAT\_NONLINEAR\_ELASTIC\_DISCRETE\_BEAM», а резины пневматика – гиперупругими объёмными элементами с формулировкой материала «077\_MAT\_HYPERELASTIC\_RUBBER». В работе [4] отмечено, что внутренние слои и брекер армируют пневматик и увеличивают его жёсткость и изготовлены из полиэфирного волокна. Кривые деформирования материалов пневматика

приведены на рис.3. В данном типе шины содержится четыре внутренних слоя, перпендикулярных бреккеру, и семь слоёв бреккера. Отсюда в работе [4] был выбран размер элемента, соответствующий трем элементам на слой пневматика (приблизительно 8 мм). Однако, в данной работе используется размер элемента приблизительно равный 3 мм, так как для корректного задания контактного взаимодействия панели и фрагмента размер элементов в них должен быть сопоставимым, а размер элемента в панели ограничен 3-4 мм из-за наличия когезионных элементов в ней. КЭМ фрагмента пневматика показана на рис.4.

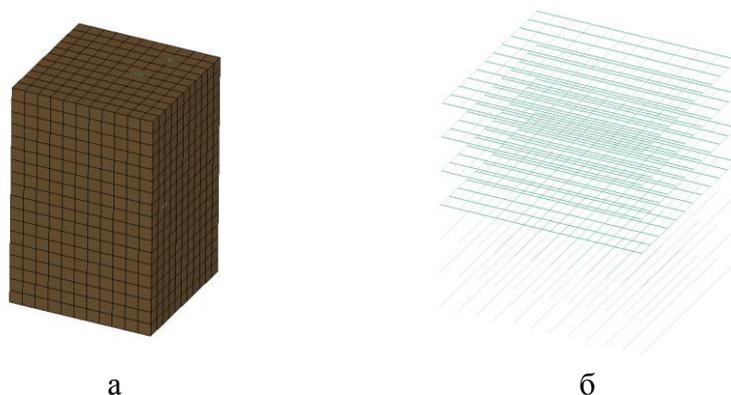
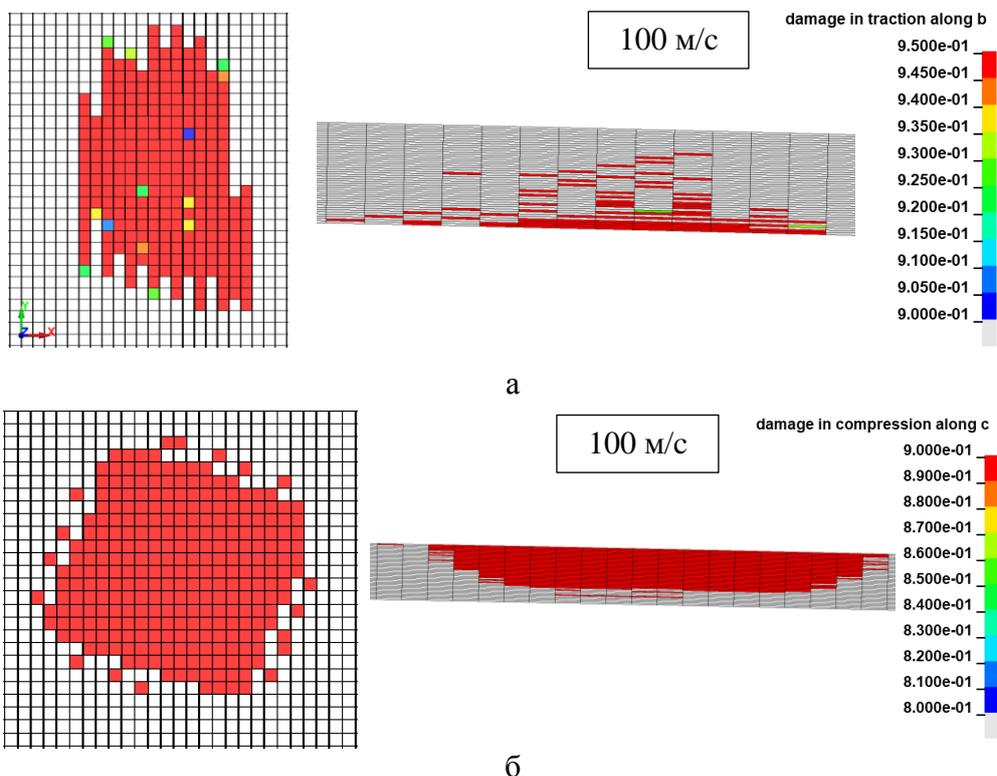
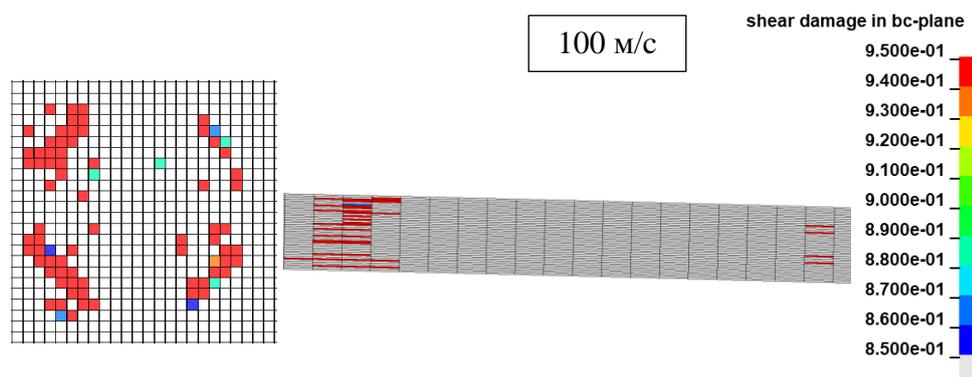


Рис.4. КЭМ фрагмента: а) объёмные элементы; б) подкрепление элементами типа Beam.

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис.5 показаны существенные повреждения в панели от фрагмента, воздействующего на неё со скоростью 100 м/с, без учёта краевых эффектов. Размеры фрагмента 42x41x66 мм.

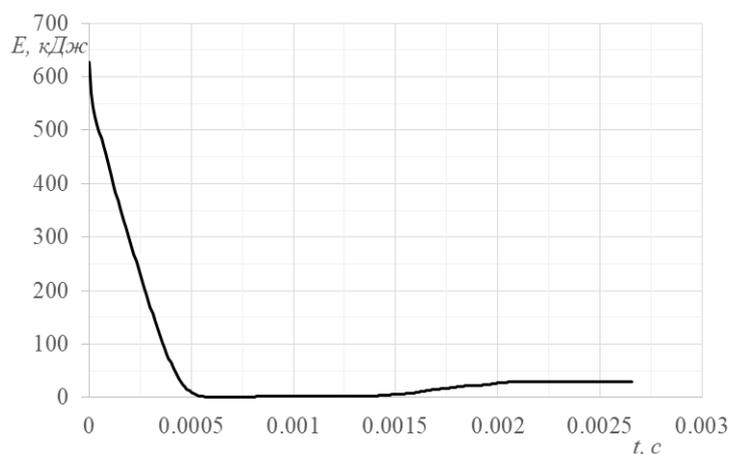




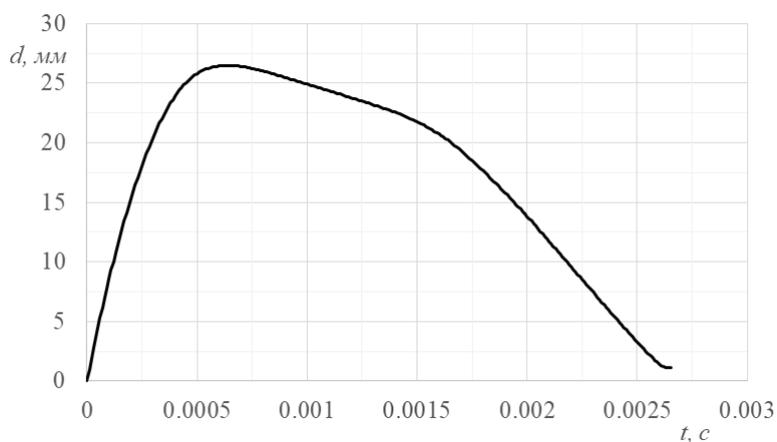
в

Рис.5. Повреждения в панели: а) растяжение поперёк волокон; б) сжатие по нормали к плоскости монослоя; в) сдвиг 23 (деформации панели не показаны).

На рис.6 представлены зависимости кинетической энергии и абсолютного перемещения фрагмента от времени.



а



б

Рис.6. Зависимости от времени: а) кинетической энергии фрагмента; б) полного перемещения фрагмента.

На рис.7 показаны существенные повреждения от воздействия фрагментов пневматика со скоростями 15, 18 и 21 м/с. Размеры фрагментов 42x41x66 мм, 55x57x66 мм и 58x56x66 мм соответственно.

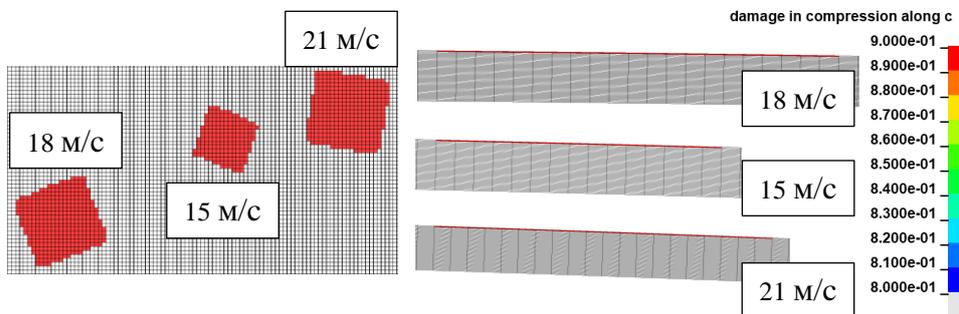
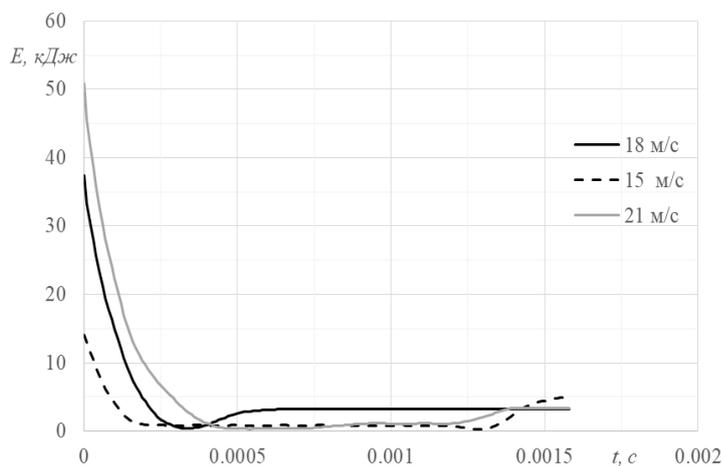
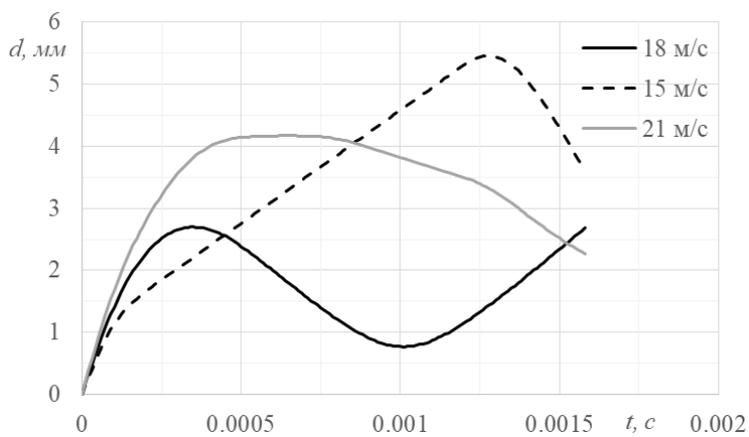


Рис.7. Повреждения в направлении сжатия по нормали к плоскости монослоя для случая воздействия тремя фрагментами (деформации панели не показаны).

На рис.8 даны зависимости кинетической энергии и абсолютных перемещений фрагментов от времени.



а



б

Рис.8. Зависимости от времени: а) кинетической энергии фрагментов; б) полных перемещений фрагментов.

На рис.9 показаны существенные повреждения от воздействия фрагментов пневматика со скоростями 15, 18, 21 и 17 м/с. Размеры фрагментов 42x41x66 мм, 55x57x66 мм, 58x56x66 мм и 34x43x66 мм соответственно.

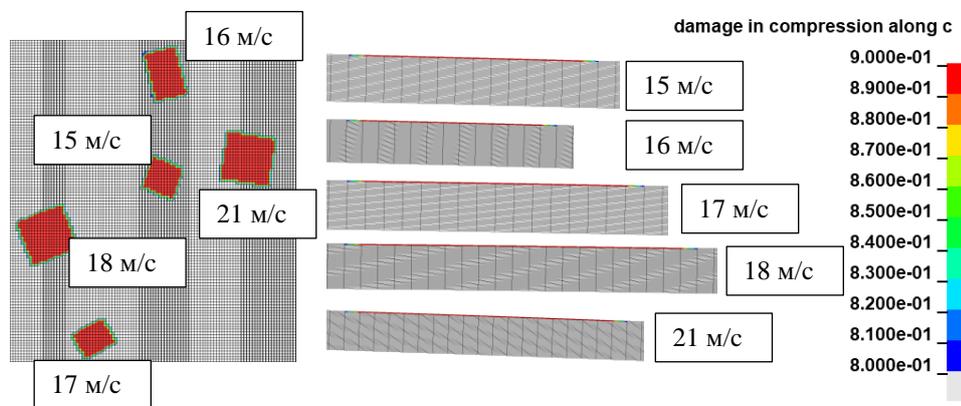


Рис.9. Повреждения в направлении сжатия по нормали к плоскости монослоя для случая воздействия пятью фрагментами (деформации панели не показаны).

На рис.10 представлены зависимости кинетической энергии и абсолютных перемещений фрагментов от времени.

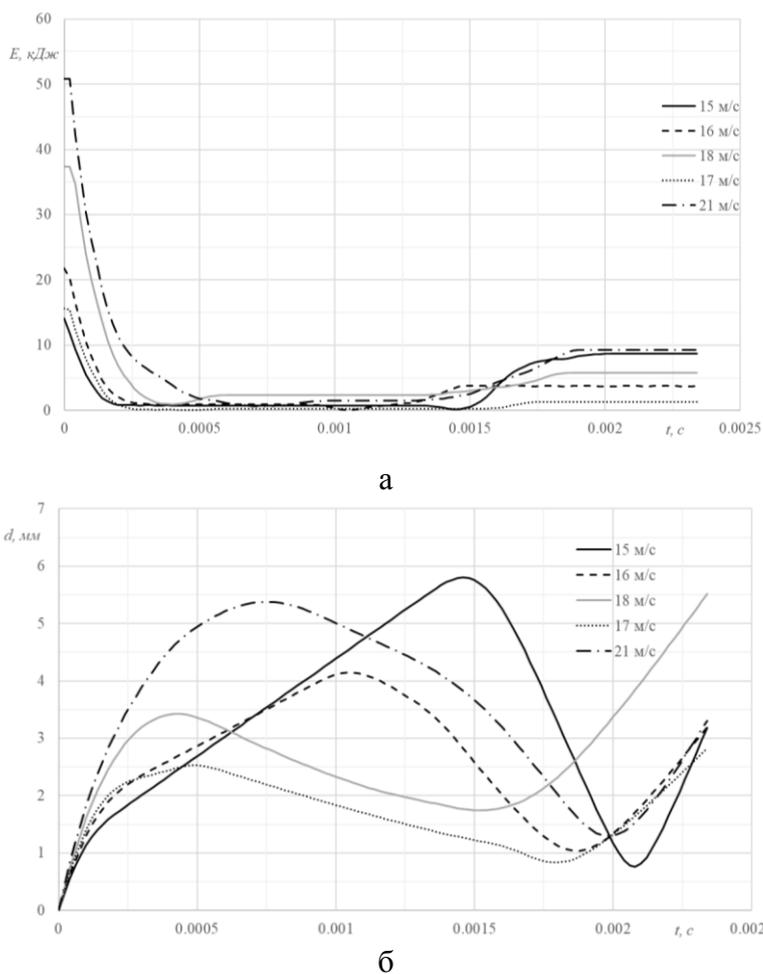


Рис.10. Зависимости от времени: а) кинетической энергии фрагментов; б) полных перемещений фрагментов.

На рис.11 показаны существенные повреждения от воздействия фрагментов пневматика со скоростями 16, 15, 18, 21, 17, 19 и 15,5 м/с. Размеры фрагментов 38x52x66 мм, 42x41x66 мм, 55x57x66 мм, 58x56x66 мм, 34x43x66 мм 45x47x66 мм соответственно.

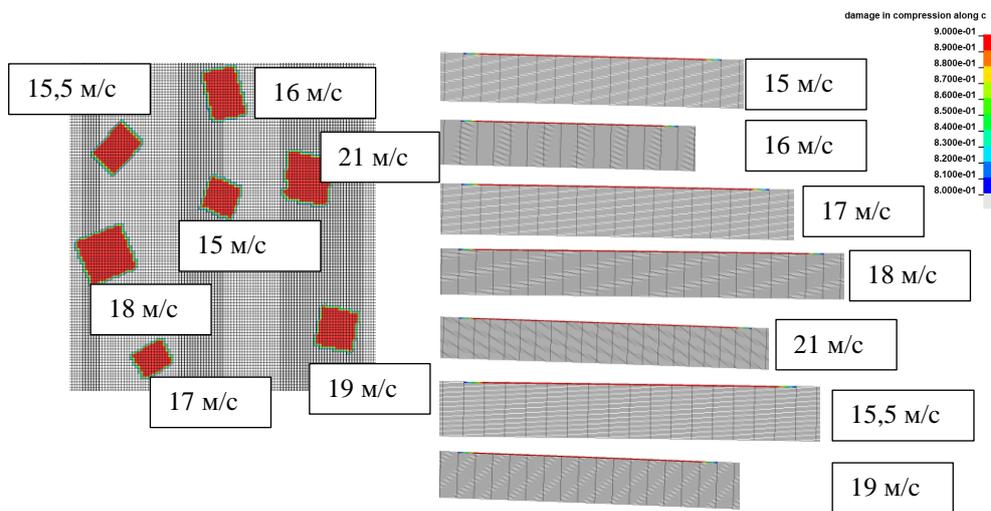
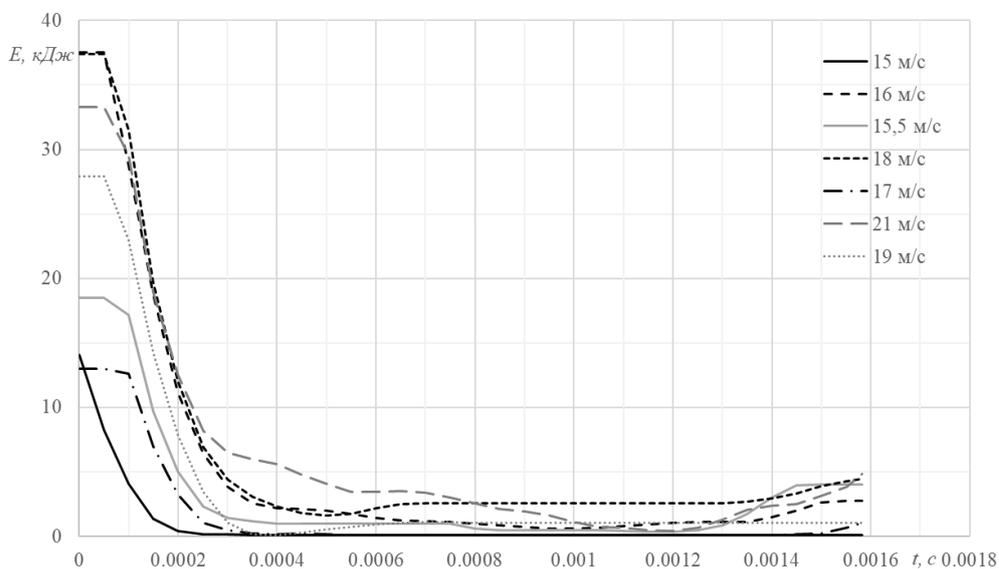
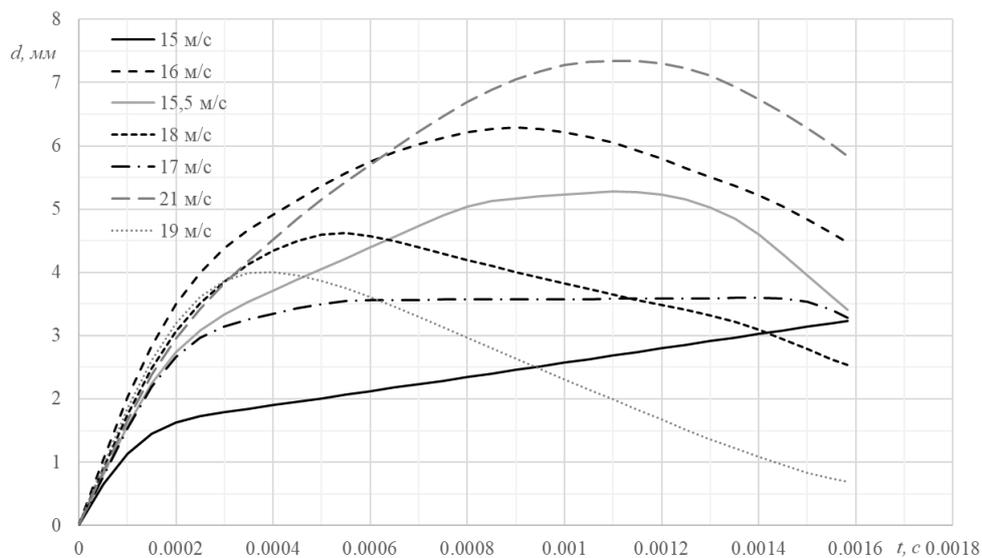


Рис.11. Повреждения в направлении сжатия по нормали к плоскости монослоя для случая воздействия семью фрагментами (деформации панели не показаны).

На рис.12 приведены зависимости кинетической энергии и абсолютных перемещений фрагментов от времени.



а



б

Рис.12. Зависимости от времени: а) кинетической энергии фрагментов; б) полных перемещений фрагментов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Разработана КЭМ панели из ПКМ и методика послойного моделирования панели на мезоуровне с использованием средств Siemens PLM Software. Разработан пакет макросов на языке VBA для автоматизации процесса моделирования. Применена методика моделирования фрагментов авиационного пневматика, разработанная в работе [4].

Проведено численное исследование ударного взаимодействия фрагментов авиационного пневматика с панелью из углепластика. Проведён анализ повреждений в панели. Также получены зависимости кинетической энергии и перемещений фрагментов от времени.

Сравнивая полученные результаты с результатами из работы [3], можно увидеть, что при скоростях ниже 35 м/с повреждения в направлении сдвига 23 перестают быть существенными. Однако важно отметить, что с увеличением размера фрагмента и скорости до 100 м/с становятся существенными повреждения в направлении растяжения поперёк волокон.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ле В.Т. Численное моделирование ударных повреждений льдом композитных панелей самолета // Вестник Московского авиационного института. – 2023. – №4. – С.120-129.
2. Lavoie M.-A., Nejad Ensan M., Gakwaya A. *Development of an efficient numerical model for hail impact simulation based on experimental data obtained from pressure sensitive film* // Mechanics Research Communications. – 2011. – Vol.38. – No.1. – Pp.72-76.
3. Медведский А.Л., Мартиросов М.И., Хомченко А.В., Занина Э.А. Численное исследование ударного взаимодействия фрагментов пневматика авиационной шины с панелью из углепластика // Труды МАИ. – 2024. – №137.

4. Guo H., Bastien C., Blandell M., Wood G. *Development of a detailed aircraft tyre finite element model for safety assessment* // Materials and Design. – 2014. – Vol.53. – Pp.902-909.
5. Aklilu G., Adali S., Bright G. *Tensile behavior of hybrid and non-hybrid polymer composite specimens at elevated temperatures* // Engineering Science and Technology, an International Journal. – 2019. – Vol.23. – No.4.
6. *Динамика удара*. – М.: Мир, 1985. – 296 с.

УДК 539.3

EDN AVJKAY (<https://elibrary.ru/avjkay>)

DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.7



## **РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ПРЯМЫМИ И ЗЕНКОВАННЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ**

Вестяк В.А.<sup>1</sup>, Смагин Е.И.<sup>2</sup>, Мартиросов М.И.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный  
исследовательский университет), г. Москва, Россия

<sup>2</sup>ПАО «Яковлев», г. Москва, Россия

### **ВВЕДЕНИЕ**

В настоящее время происходит интенсивное внедрение полимерных композиционных материалов (ПКМ) в силовые ответственные и несилловые элементы конструкции в различных областях промышленности, что способствует, в том числе, повышению весовой эффективности. ПКМ могут успешно применяться и замещать традиционно используемые металлы, в радиопрозрачных и конструкционных силовых элементах. Уникальное сочетание свойств ортотропных материалов, в частности ПКМ, способствует повышению прочности и жесткости современных конструкций и повышению их весовой эффективности [1]. При проектировании следует учитывать факторы, препятствующие широкому внедрению ПКМ. Во многих отраслях промышленности могут встречаться различные типы болтовых соединений ортотропных пластин с другими элементами конструкций [2-4]. Места нагруженных соединений, как правило, находятся в защищённых зонах и визуально обнаружить последствия действия нагрузок высокой интенсивности не всегда возможно, что в свою очередь может привести к растрескиванию и расслоению используемого ПКМ, а также вызывает снижение местной и общей прочности всей конструкции. Использование результатов механических испытаний образцов для проектирования и моделирования ответственных соединений в конструкциях далеко не всегда могут полностью отражать характер работы соединения.

### **1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ**

При проектировании соединений в современных металло-композитных конструкциях могут встречаться двухсрезные и односрезные соединения. Для анализа прочности односрезного соединения лабораторные образцы должны отражать основные конструктивные решения. К таким конструктивным решениям можно отнести: схему армирования, толщину пластин в соединении, тип крепежа, наличие зенковки, момент затяжки.

Учитывая, особенности соединения, а также теоретические закономерности, в работе [5] при растяжении ортотропной пластины распределения напряжений располагаются симметрично относительно главных направлений упругости. При проектировании конструкций с одними геометрическими параметрами, но различными значениями модулей Юнга значения коэффициентов концентрации напряжений изменяются.

Для экспериментальной оценки несущей способности в ортотропных пластинах с концентраторами [6] в виде свободных отверстий и отверстиями с зенковкой проводилось статическое нагружение образцов со схожей схемой армирования. Испытания проводились в соответствии с существующими стандартами [7-9], представленными в ГОСТ 33498-2015, ГОСТ Р 56788-2015 и ГОСТ 33375-2015.

Исследование прочности образцов из ортотропного материала, например углепластика, на основе эпоксидной матрицы и высокомодульного волокна с прямым и зенкованным  $90^\circ$  отверстиями с укладками монослоев из 50% слоев по направлению  $0^\circ$ , 38% слоев по направлению  $45^\circ$ , 13% слоев по направлению  $90^\circ$  (50/38/13) позволяет оценить изменение несущей способности от разных форм концентраторов напряжений (Рис.1).

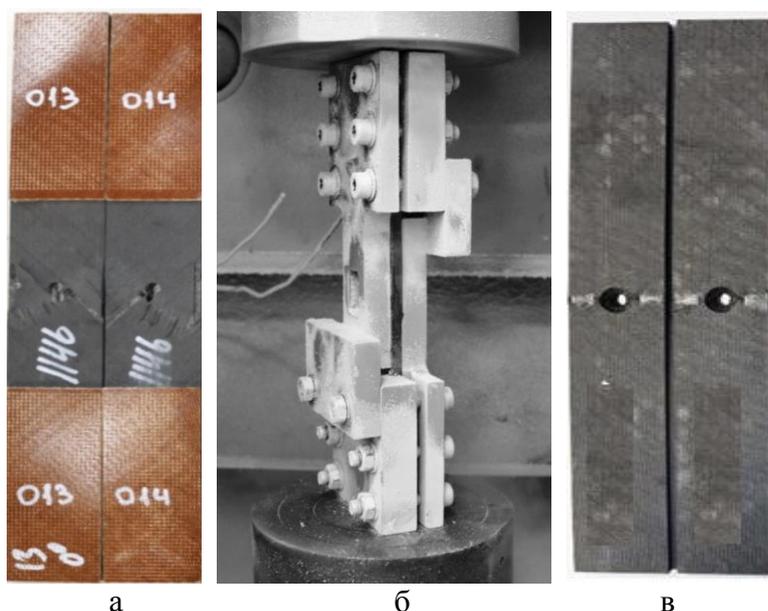


Рис.1. Типовая мода разрушения образцов на растяжение и сжатие со свободным отверстием а) образцы с прямым отверстием б) образец на сжатие, установленный в испытательную машину в) образцы с зенкованным  $90^\circ$  отверстием.

На основе эксперимента отмечена чувствительность ортотропных пластин на основе эпоксидной матрицы и высокомодульного волокна к геометрическим концентраторам напряжений. При анализе несущей способности образцов с различными концентраторами на отверстие с наличием зенковки в  $90^\circ$  и глубиной конуса 2,92 мм внутрь материала и прямым отверстием можно наблюдать падение прочности в 0,86 раза относительно прямого отверстия.

Для экспериментальной оценки влияния плоскости среза и зенковки проводят статические испытания, используя различные типы образцов с концентраторами в виде нагруженных отверстий. Испытания на статическое нагружение у нас в стране проводят по стандарту, описанному в ГОСТ 33498-2015.

Данный подход является консервативной оценкой несущей способности /при анализе совместного действия сминающей и проходящей нагрузки.

Для того, чтобы дополнить описанную выше схему оценки несущей способности предлагается провести дополнительные экспериментальные исследования по стандарту, описанному в ГОСТ Р 56790-2015 [10]. Метод

позволяет учесть различные варианты концентраторов напряжений в виде заполненных зенкованных, прямых отверстий, а также комбинации нагружения растяжения и сжатия.

Для учета влияния плоскости среза в ГОСТ Р 56790-2015 [10] предусмотрены различные схемы нагружения образца по методу А и методу В. Благодаря методу, описанному в ГОСТ Р 56790-2015, в образце реализуется сложное напряженное состояние, состоящее из растягивающих/сжимающих, а также сдвиговых напряжений в пластине и сминающего напряжения в отверстии. На рис.2 представлена технологическая оснастка и экспериментальные образцы, закреплённые в испытательной машине.

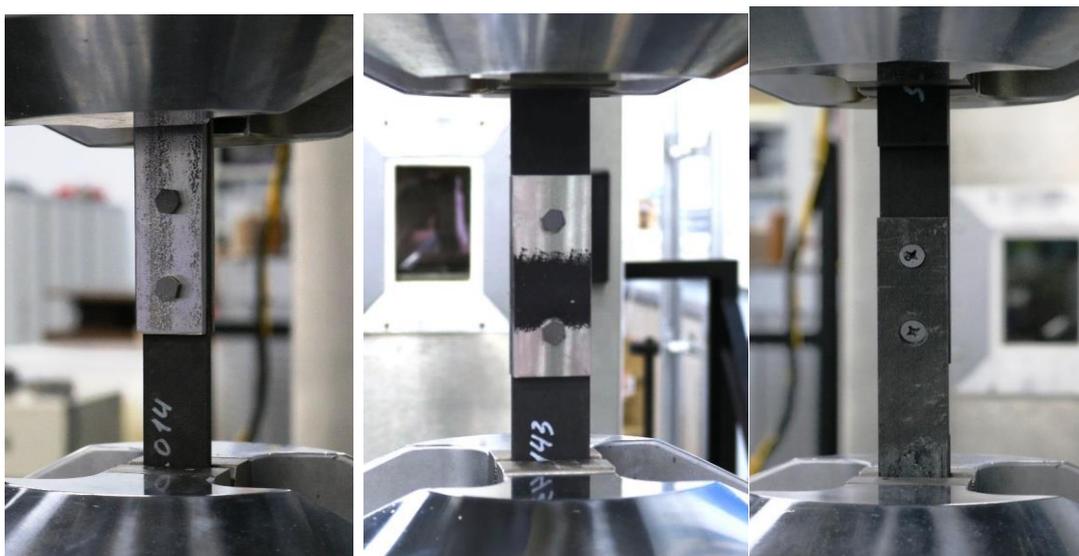


Рис.2. Оснастка и образцы при действии комбинации сминающей и проходящей нагрузок, установленные в испытательную машину.

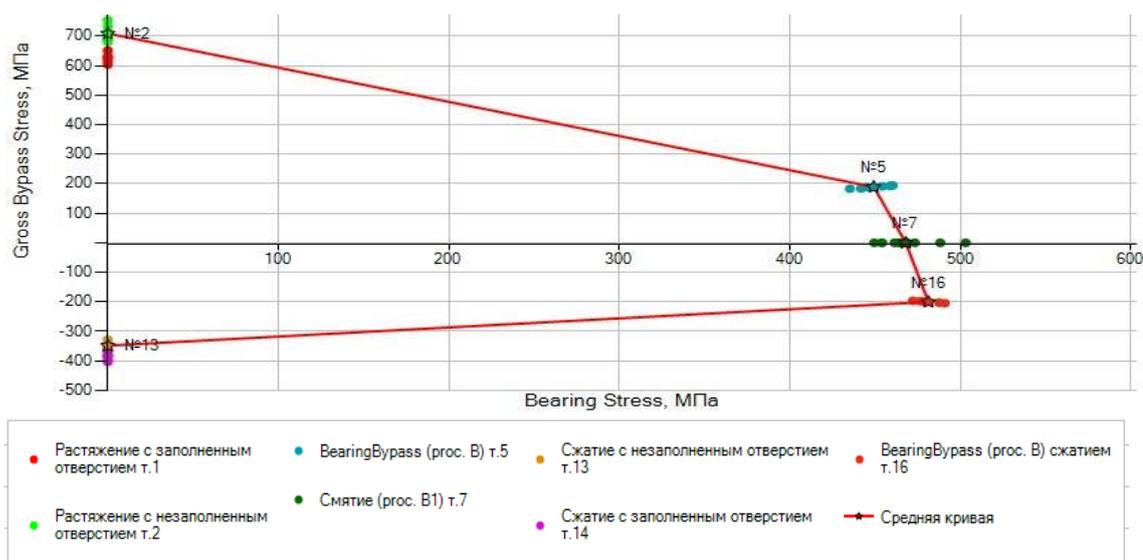


Рис.3. Диаграмма при совместном действии сминающей и проходящей нагрузки с учётом типа соединения.

По результатам дополнительных испытаний, реализующих комплексный подход по определению несущей способности: полосы с отверстием, смятия и серии вариантов комбинации смятия и проходящей нагрузок, показана

обновленная область применения материала с учетом типа соединения в конструкции (рис.3).

## 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИРТУАЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Для возможности распространения полученных данных для иных укладок проводится серия расчётов с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Расчеты проводятся при помощи программного комплекса LS-DYNA, сопоставляются результаты, полученные с проведенных испытаний, осуществляется моделирование. Для построения конечно-элементной модели (КЭМ) со свойствами ПКМ на основе эпоксидной матрицы и высокомодульного волокна используются восьмиузловые объёмные конечные элементы (КЭ) первого порядка. Базовые механические характеристики монослоя ПКМ приняты согласно Таблице 1.

Таблица 1.

Механические характеристики монослоя ПКМ.

$E_1$ , МПа	$E_2$ , МПа	$E_{-1}$ , МПа	$E_{-2}$ , МПа	$G_{12}$ , МПа	$\nu_{12}$	$\sigma_1$ , МПа	$\sigma_2$ , МПа	$\sigma_{-1}$ , МПа	$\sigma_{-2}$ , МПа	$\tau_{12}$ , МПа
158000	8010	146000	9170	4460	0,32	2725	60,1	1259	200	94

Здесь приняты следующие обозначения:  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_{-1}$ ,  $E_{-2}$  – модули упругости монослоя при растяжении и сжатии в направлениях осей ортотропии,  $G_{12}$  – модуль упругости при сдвиге в плоскости монослоя,  $\nu_{12}$  – коэффициент Пуассона (главный),  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  – пределы прочности монослоя при растяжении,  $\sigma_{-1}$ ,  $\sigma_{-2}$  – пределы прочности монослоя при сжатии,  $\tau_{12}$  – предел прочности при сдвиге в плоскости монослоя.

Для исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) типовых соединений ортотропных пластин с механическими крепежными элементами создавались серии КЭМ с различными схемами армирования.

Для односрезного соединения ортотропных пластин с металлическим крепежным элементом, имеющим потайное крепление с углом  $90^\circ$ , разработана соответствующая КЭМ. В местах соприкосновения ортотропных пластин и крепежного элемента задавались условия контакта. В разработанных КЭМ пластины имеют различные схемы армирования от 13 до 50 процентного содержания слоев вдоль  $0^\circ$ . Общий вид моделирования зенкованных отверстий представлен на рис.4.

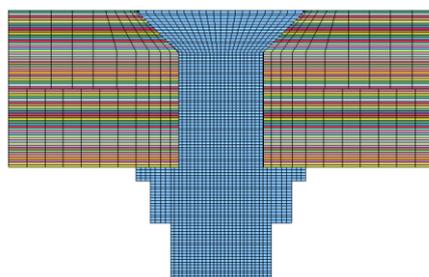


Рис.4. Общий вид односрезного соединения с потайным крепежным элементом.

Исследуя прочность двухсрезного соединения ортотропной пластины с пластинами из стали с выступающим крепежным элементом также разработана КЭМ. В данной модели в местах соприкосновения пластин и крепежных элементов задавались условия контакта. В разработанных КЭМ пластины имеют различные схемы армирования от 9 до 36 процентного содержания слоев вдоль  $0^\circ$ . Общий вид модели и граничные условия модели представлен на рис.5.

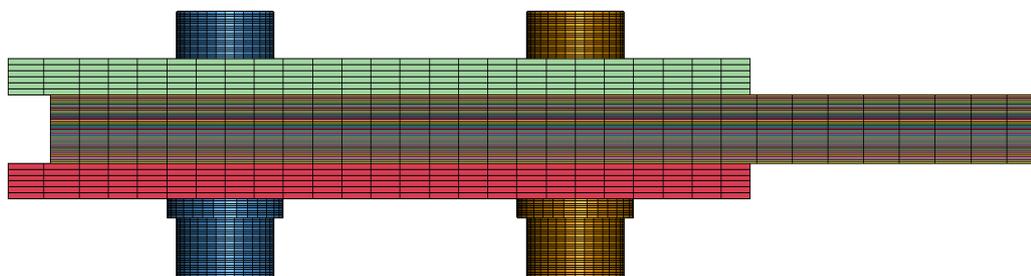


Рис.5. Общий вид и граничные условия модели двухсрезного соединения.

В расчётах используется модель материала ПКМ «MAT\_221\_ORTHOTROPIC\_SIMPLIFIED\_DAMAGE» (LS-DYNA), основанная на критерии разрушения максимальных деформаций. Согласно данному критерию, разрушение наступает, когда одна из компонент деформации достигает предельного значения, определяемого из механических испытаний на одноосное нагружение и чистый сдвиг (1)

$$\varepsilon_1 = e_1^\alpha, \quad \varepsilon_2 = e_2^\alpha, \quad \varepsilon_3 = e_3^\alpha, \quad \gamma_{12} = e_4, \quad \gamma_{23} = e_5, \quad \gamma_{31} = e_6. \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – деформация в направлениях осей ортотропии,  $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$  – деформация сдвига в плоскостях ортотропии,  $e_1^\alpha, e_2^\alpha, e_3^\alpha, e_4, e_5, e_6$  – предельная деформация монослоя, где  $\alpha = \pm$  («+» соответствует растяжению, «-» – сжатию).

По результатам расчёта определялись слои, получившие повреждения в результате достижения предельного значения согласно критерию разрушения, и значения нагрузки, при которой фиксируется потеря несущей способности образца.

Модель материала MAT\_221 основана на том, что зависимость напряжений от деформаций в ортотропном слоистом ПКМ имеет три участка: зона упругого поведения, зона повреждения, зона разрушения.

По полученным результатам расчета модели с односрезным соединением наглядно наблюдается совместное действие растягивающих и изгибающих усилий в центральной части. В связи с установкой потайного крепежа наблюдается высокая степень «подмятия» зонкованной области ортотропной пластины, которая в свою очередь провоцирует потерю несущей способности образца. В случае с моделью двухсрезного соединения наблюдается равномерное нагружение модели с выраженной сдвиговой модой разрушения (рис.6).

Учитывая различные схемы армирования ортотропных пластин, наблюдаются различные формы разрушения. Так для образца односрезного соединения, с укладкой монослоев из 13,3% слоев по направлению  $0^\circ$ , 40% слоев по направлению  $45^\circ$ , 46,7% слоев по направлению  $90^\circ$  (13,3/40/46,7), наблюдается малое количество поврежденных вдоль  $0^\circ$  слоёв и множественные повреждения слоев от сдвигающих деформаций. Данная мода проявляется в разной степени в зависимости от укладки образца. При анализе показателей критерия разрушения в образце двухсрезного соединения явно наблюдается высокая чувствительность

от схемы армирования. Так для модели с укладкой монослоев из 9% слоев по направлению  $0^\circ$ , 73% слоев по направлению  $45^\circ$ , 18% слоев по направлению  $90^\circ$  (9/73/18), т.е. состоящей из большого количества слоёв с ориентацией  $45^\circ$ , наблюдаются множественные повреждения слоев от сдвигающих и сжимающих деформаций.

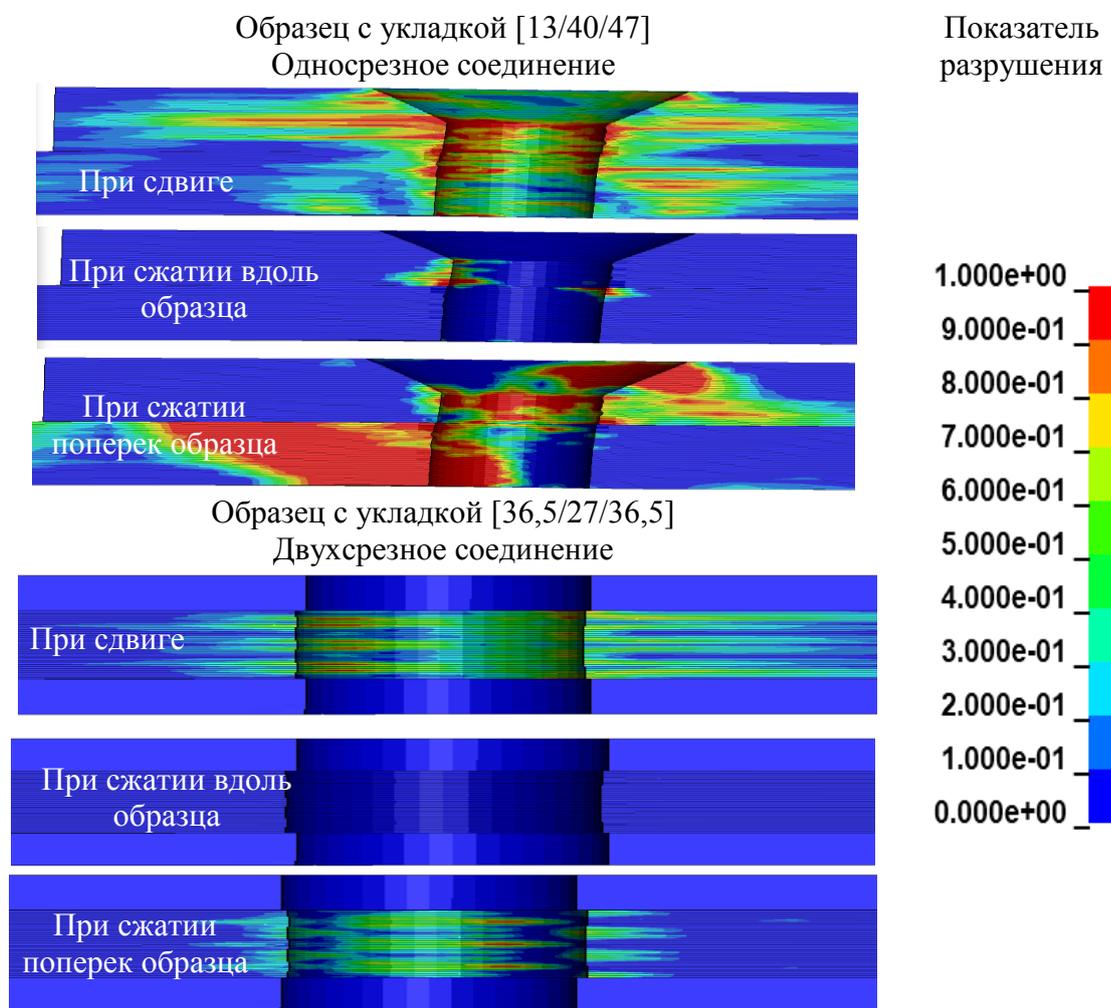


Рис.6. Повреждение монослоев в образце в ослабленном сечении.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные расчетно-экспериментальные исследования показывают, что ортотропные пластины подвержены сильному влиянию геометрических концентраторов и типа соединения. Введение потайного крепежа в односрезном соединении снижает несущую способность относительно прямого отверстия и не может быть учтена путем пропорционального пересчета на уменьшенную площадь сечения.

Данный подход на примере изучаемого ортотропного материала на основе эпоксидной матрицы и высокомодульного волокна (ПКМ типа углепластика) позволяет значительно увеличить площадь области несущей способности (рис.7).

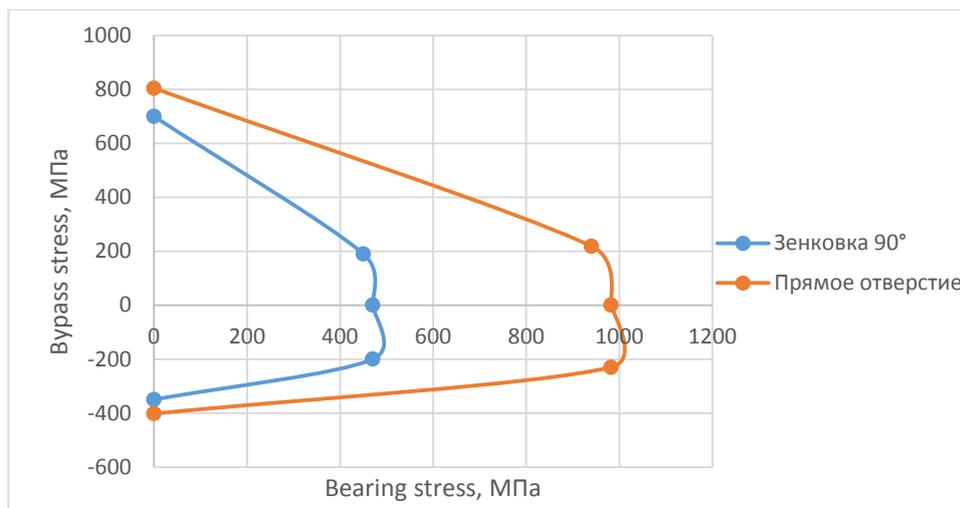


Рис.7. Область расширения несущей способности соединения на основе экспериментальных данных.

Выполненные расчеты несущей способности образцов показал, что моделирование эксперимента дает приемлемый уровень погрешности (около 15%) и может быть использован при проведении дальнейшей работы по оценке совместного влияния смятия и проходящей нагрузки на несущую способность соединения (рис.8).

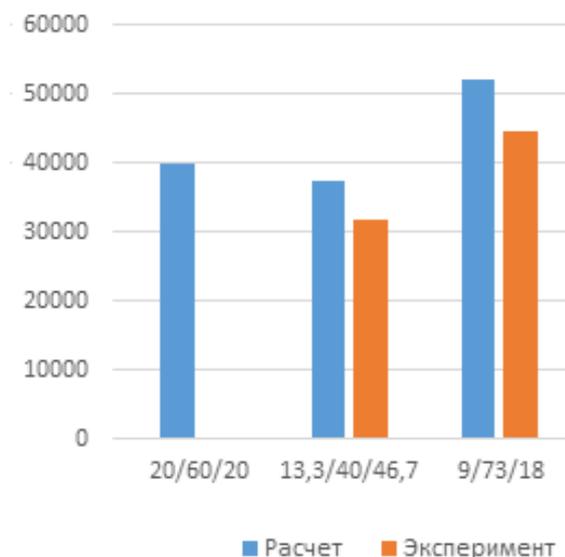


Рис.8. Сравнение результатов испытаний и численного эксперимента.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов* – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
2. Глебова М.А., Гришин В.И., Гусева Н.В. *Исследования видов разрушения болтовых соединений слоистых композитов* // Ученые записки ЦАГИ. – 2022. – Т.ЛIII. – №1. – С.66-74.

3. Глебова М.А., Гришин В.И., Гусева Н.В., Яшутин А.Г. *Оценка прочности многорядных металлокомпозитных соединений авиационных конструкций* // Ученые записки ЦАГИ. – 2020. – Т. LI. – №2. – С.57-66.
4. Ампилогов А.Ю., Дряницын Д.В., Петунина И.Н., Смагин Е.И. *Исследование деформированного состояния зоны ремонта панели из полимерного композиционного материала* // Труды ЦАГИ. – 2018. – Вып.2782. – С.143-144.
5. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела* – М.: Наука, 1977. – 417 с.
6. Tan S.C., Kim R.Y. *Strain and stress concentrations in composite laminates containing a hole* // Experimental Mechanics. – 1990. – Vol.30. – No.4. – Pp.345-351.
7. ГОСТ 33498-2015 *Метод испытания на смятие*. – М.: Стандартиформ, 2016. – 20 с.
8. ГОСТ Р 56788-2015 *Метод определения прочности при сжатии образцов ламинатов с открытым отверстием*. – М.: Стандартиформ, 2019. – 23 с.
9. ГОСТ 33375-2015 *Метод испытания на растяжение образцов с открытым отверстием*. – М.: Стандартиформ, 2016. – 11 с.
10. ГОСТ Р 56790-2015 *Метод определения прочности на смятие и трансферной прочности ламинатов, соединенных двумя болтами*. – М.: Стандартиформ, 2016. – 35 с.



## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ СТЕКЛОПЛАСТИКОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Жаринов М.Ю., Марасанов А.И.

*Российский университет транспорта, г. Москва, Россия*

Рассмотрены результаты экспериментальных исследований прочности стержней из однонаправленного стеклопластика на эпоксидном связующем при соотношении связующего и заполнителя 0,3:0,7 при растяжении вдоль волокон. Получены оценки средних значений и коэффициентов вариации для разрушающих напряжений при различных значениях диаметра и длины рабочей части образца. Исследовано влияние масштабного фактора на прочностные характеристики материала. Показано, что для описания распределения вероятностей случайной величины разрушающих напряжений можно использовать нормальный закон.

**Ключевые слова:** однонаправленный стеклопластик; разрушающее напряжение; масштабный фактор; нормальный закон

### ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальному исследованию прочности однонаправленных стеклопластиков при растяжении посвящено значительное число исследований (см., например, [1]-[4]). Вместе с тем, изменения в технологии изготовления стеклопластиков или изменения их характеристик (например, замена связующего или изменение степени наполнения стеклопластика) являются основанием для проведения новых экспериментальных исследований.

Представленная работа посвящена экспериментальному исследованию прочности стержней из однонаправленного стеклопластика на эпоксидном связующем при соотношении связующего и заполнителя 0,3:0,7 при растяжении.

Кратковременные испытания на растяжение вдоль волокон (диаметр волокна – несколько микрон) образцов однонаправленного стеклопластика при температуре  $T=20^{\circ}\text{C}$  были проведены в соответствии с методикой, приведенной в работе [1]. Согласно данной методике испытания однонаправленного стеклопластика на растяжение целесообразно проводить на цилиндрических образцах. Геометрическая форма и размеры образцов представлены на рис.1.

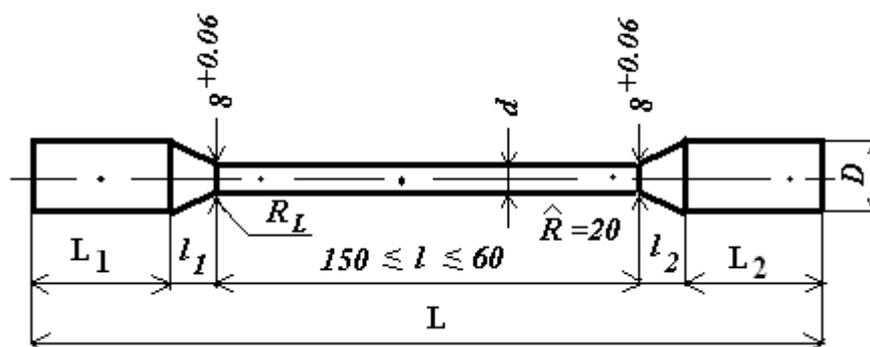


Рис.1. Геометрическая форма и размеры образцов для испытаний на растяжение.

Цилиндрические стержни диаметром 22 мм, из которых были изготовлены образцы, поступили в лабораторию «Испытания материалов» Российского университета транспорта из СКТБ (Специальное конструкторско-технологическое бюро по арматуре и изоляторам). Они были изготовлены методом непрерывной протяжки.

С целью недопущения разрушения образцов путем перерезания волокон у галтели образца при испытаниях использовались захваты, показанные на рис.2 и 3. Такие захваты позволяют произвести центровку образца и обеспечивают осевую передачу усилия на него без изгиба.

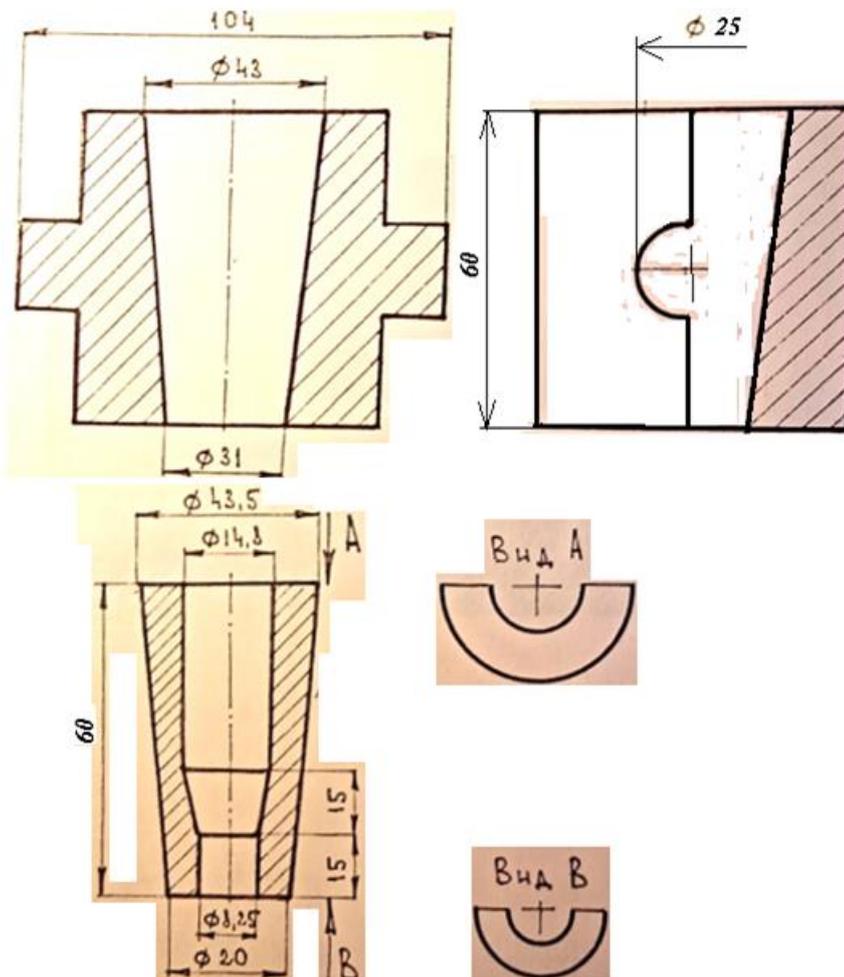


Рис.2. Захваты для испытаний на растяжение образцов однонаправленного стеклопластика.



Рис.3. Захваты и образец для испытаний на растяжение.

Испытания были проведены на испытательной машине Mohr und Federhaft А.-G. Скорость перемещения захватов принималась такой, при которой разрушение образцов происходило по истечении промежутка времени, считая от начала приложения нагрузки, равного примерно одной минуте (но более 30 секунд, как рекомендовано в [5]).

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В Таблицах 1-9 приведены результаты кратковременных испытаний образцов однонаправленного стеклопластика при растяжении вдоль волокон при температуре  $T=20^{\circ}\text{C}$  при различных значениях диаметра  $d$  и длины  $l$  рабочей части образцов.

Таблица 1.

Результаты кратковременных испытаний образцов  
диаметром  $d=6$  мм и длиной рабочей части  $l=60$  мм.

№ образца	Длина рабочей части $l$ , мм	Диаметр $d$ , мм	Разрушающая нагрузка $F$ , кН	Разрушающее напряжение $\sigma_{\text{разр}}$ , МПа
1	61	6,0	28,45	1006,18
2	58	6,1	33,35	1141,30
3	60	6,0	31,59	1117,20
4	57	5,9	31,78	1162,57
5	63	5,8	27,47	1039,64
6	62	6,0	30,41	1075,57
7	59	5,9	27,47	1004,69
8	58	6,0	29,63	1047,81
9	61	5,8	31,49	1191,87
10	59	6,0	27,47	971,48
11	57	6,1	24,03	822,41
12	58	6,1	24,53	839,19

Таблица 2.

Результаты кратковременных испытаний образцов  
диаметром  $d=6$  мм и длиной рабочей части  $l=100$  мм.

№ образца	Длина рабочей части $l$ , мм	Диаметр $d$ , мм	Разрушающая нагрузка $F$ , кН	Разрушающее напряжение $\sigma_{\text{разр}}$ , МПа
1	98	6,2	29,23	968,31
2	99	5,9	25,31	925,75
3	99	6,1	25,90	886,18
4	98	6,1	25,90	886,18
5	99	5,7	25,31	991,86
6	100	6,2	30,90	1023,54

7	97	5,7	22,07	864,99
8	96	5,9	29,63	1083,63
9	98	6,2	24,53	812,34
10	99	6,0	25,31	895,15
11	99	5,9	25,11	918,58
12	100	5,8	24,53	928,25
13	101	5,9	22,37	818,11
14	102	5,9	23,05	843,22
15	103	6,0	24,03	850,05
16	100	6,0	24,03	850,05

Таблица 3.

Результаты кратковременных испытаний образцов  
диаметром  $d=6$  мм и длиной рабочей части  $l=150$  мм.

№ образца	Длина рабочей части $l$ , мм	Диаметр $d$ , мм	Разрушающая нагрузка $F$ , кН	Разрушающее напряжение $\sigma_{\text{разр}}$ , МПа
1	144	5,7	15,21	595,88
2	145	5,7	19,82	776,57
3	149	6,0	20,11	711,26
4	149	5,5	18,64	784,53
5	148	5,4	12,26	535,43
6	145	5,7	12,16	476,71
7	148	5,8	17,07	646,06
8	153	6,0	19,42	686,98
9	151	6,0	23,35	825,76

Таблица 4.

Результаты кратковременных испытаний образцов  
диаметром  $d=8$  мм и длиной рабочей части  $l=100$  мм.

№ образца	Длина рабочей части $l$ , мм	Диаметр $d$ , мм	Разрушающая нагрузка $F$ , кН	Разрушающее напряжение $\sigma_{\text{разр}}$ , МПа
1	99	8,0	34,34	683,07
2	100	8,0	39,83	792,37
3	102	8,1	31,39	609,20
4	97	8,1	37,67	731,04
5	98	7,9	40,22	820,56
6	98	8,0	44,15	878,24
7	99	8,1	44,54	864,30
8	99	7,8	41,40	866,37
9	99	7,9	44,54	908,62

10	98	7,9	47,48	968,66
11	101	8,0	38,26	761,14
12	100	7,8	37,77	790,41
13	97	7,9	40,22	820,56
14	100	7,8	39,24	821,20

Таблица 5.

Результаты кратковременных испытаний образцов  
диаметром  $d=8$  мм и длиной рабочей части  $l=150$  мм.

№ образца	Длина рабочей части $l$ , мм	Диаметр $d$ , мм	Разрушающая нагрузка $F$ , кН	Разрушающее напряжение $\sigma_{\text{разр}}$ , МПа
1	150	7,6	33,06	728,76
2	148	7,6	19,91	438,98
3	148	7,6	12,75	281,12
4	154	7,8	26,78	560,47
5	151	7,6	20,60	454,12
6	150	7,9	31,39	640,44
7	148	8,1	40,22	780,54
8	150	7,1	17,46	441,04
9	148	8	43,65	868,48
10	155	7,6	37,18	819,58
11	149	7,9	41,20	840,57

Таблица 6.

Результаты кратковременных испытаний образцов  
диаметром  $d=8$  мм и длиной рабочей части  $l=60$  мм.

№ образца	Длина рабочей части $l$ , мм	Диаметр $d$ , мм	Разрушающая нагрузка $F$ , кН	Разрушающее напряжение $\sigma_{\text{разр}}$ , МПа
1	58	8,1	41,20	799,57
2	62	8,0	41,69	829,45
3	58	7,9	42,67	870,59
4	58	7,8	47,09	985,44
5	60	7,9	44,15	900,61
6	60	8,1	45,62	885,24
7	58	7,9	51,99	1060,72
8	59	8,1	49,05	951,87
9	58	7,9	45,13	920,63
10	58	8,2	45,62	863,78
11	60	8,1	44,64	866,21

12	58	7,7	32,37	695,20
13	59	8,1	42,18	818,61
14	60	7,9	31,88	650,44

Таблица 7.

Результаты кратковременных испытаний образцов  
диаметром  $d=12$  мм и длиной рабочей части  $l=60$  мм.

№ образца	Длина рабочей части $l$ , мм	Диаметр $d$ , мм	Разрушающая нагрузка $F$ , кН	Разрушающее напряжение $\sigma_{\text{разр}}$ , МПа
1	62	11,9	70,63	635,06
2	62,5	12,2	74,56	637,78
3	60,5	12,3	71,12	598,56
4	62,5	12,1	63,77	554,53
5	63	12,2	62,78	537,08
6	61,5	12,2	76,52	654,57
7	63	11,8	71,61	654,84
8	60,5	12,2	71,12	608,41
9	60	12,2	67,20	574,84
10	57	12,2	66,22	566,45
11	59	12,0	66,71	589,83
12	57	11,9	67,69	608,60
13	61	12,0	57,88	511,76
14	57	12,0	63,77	563,81
15	60	12,0	68,67	607,18

Таблица 8.

Результаты кратковременных испытаний образцов  
диаметром  $d=12$  мм и длиной рабочей части  $l=100$  мм.

№ образца	Длина рабочей части $l$ , мм	Диаметр $d$ , мм	Разрушающая нагрузка $F$ , кН	Разрушающее напряжение $\sigma_{\text{разр}}$ , МПа
1	98	12,2	59,84	511,91
2	98	12,0	65,73	581,15
3	101	12,0	72,59	641,87
4	100	12,1	65,24	567,32
5	100	11,9	68,67	617,42
6	98	12,1	66,22	575,85
7	103	11,9	66,71	599,78
8	97	12,0	61,31	542,12
9	101	12,1	71,12	618,51
10	101	12,1	72,59	631,31

11	100	12,1	73,58	639,84
12	100	12,0	65,24	576,82
13	101	11,9	63,77	573,32
14	100	12,2	74,56	637,78
15	101	12,2	58,86	503,51
16	100	11,9	60,82	546,86

Таблица 9.

Результаты кратковременных испытаний образцов  
диаметром  $d=12$  мм и длиной рабочей части  $l=150$  мм.

№ образца	Длина рабочей части $l$ , мм	Диаметр $d$ , мм	Разрушающая нагрузка $F$ , кН	Разрушающее напряжение $\sigma_{\text{разр}}$ , МПа
1	148	12,2	56,41	482,53
2	148	12,1	76,03	661,17
3	150	12,2	71,61	612,61
4	150	12,1	71,61	622,78
5	152	11,9	56,41	507,17
6	150	11,9	57,39	515,99
7	150	12,0	73,58	650,55
8	151	12,0	80,44	711,26
9	150	11,9	66,71	599,78
10	150	11,8	71,12	650,36
11	150	12,1	80,44	699,56
12	151	12,0	80,93	715,60

В Таблице 10 представлены результаты статистического анализа полученных экспериментальных данных.

Таблица 10.

Результаты статистического анализа экспериментальных данных.

№ партии образцов	Среднее значение диаметра рабочей части образца $d$ , мм	Коэффициент вариации $d$ , %	Среднее значение длины рабочей части $l$ , мм	Коэффициент вариации $l$ , %	Число испытаний	Среднее значение разрушающего напряжения $\sigma_{\text{разр}}$ , МПа	Коэффициент вариации $\sigma_{\text{разр}}$ , %	Вероятность непротиворечия гипотезы о нормальном распределении $\sigma_{\text{разр}}$ по критерию согласия Пирсона опытным данным, %
1	5,98	1,8	59,42	3,3	12	1035,00	11,3	11,5
2	5,97	2,7	99,25	1,8	16	909,14	8,4	18,1
3	5,76	3,8	148	2,0	9	671,02	17,7	10
4	7,95	1,4	99,07	1,5	14	808,27	11,5	56,7
5	7,71	3,6	150,09	1,6	11	623,10	32,1	8,3

6	7,98	1,8	59,00	2,1	14	864,17	12,3	24,5
7	12,08	1,2	60,43	3,5	15	593,55	7,1	21,8
8	12,04	0,9	99,94	1,5	16	585,74	7,6	2,0
9	12,02	1,1	150,00	0,8	12	619,11	12,9	2,6

Разрушение образцов  $d=6$  мм и 8 мм происходило либо в рабочей зоне образца, либо около захвата, что было очень редко (рис.4 и 5).



Рис.4. Разрушение в рабочей зоне образца.



Рис.5. Разрушение у захватов.

Испытания образцов  $d=12$  мм почти во всех случаях заканчивались сползанием хвостовой части образца с сердечника (рис.6). Поэтому к полученным значениям разрушающего напряжения для образцов  $d=12$  мм нужно относиться с некоторой осторожностью.

В последнем столбце таблицы 10 представлены значения вероятности непротиворечия гипотезы о нормальном распределении величины  $\sigma_{\text{разр}}$  экспериментальным данным, полученные на основе статистического анализа пятиразрядных гистограмм (одна из таких гистограмм вместе с графиком гауссовской плотности распределения вероятностей показаны на рис.7). На основании представленных данных можно сделать вывод о целесообразности использования нормального закона для описания распределения вероятностей случайной величины  $\sigma_{\text{разр}}$  для образцов с диаметром рабочей части  $d=6$  мм и 8 мм.



Рис.6. Характер разрушения образцов  $d=12$  мм.

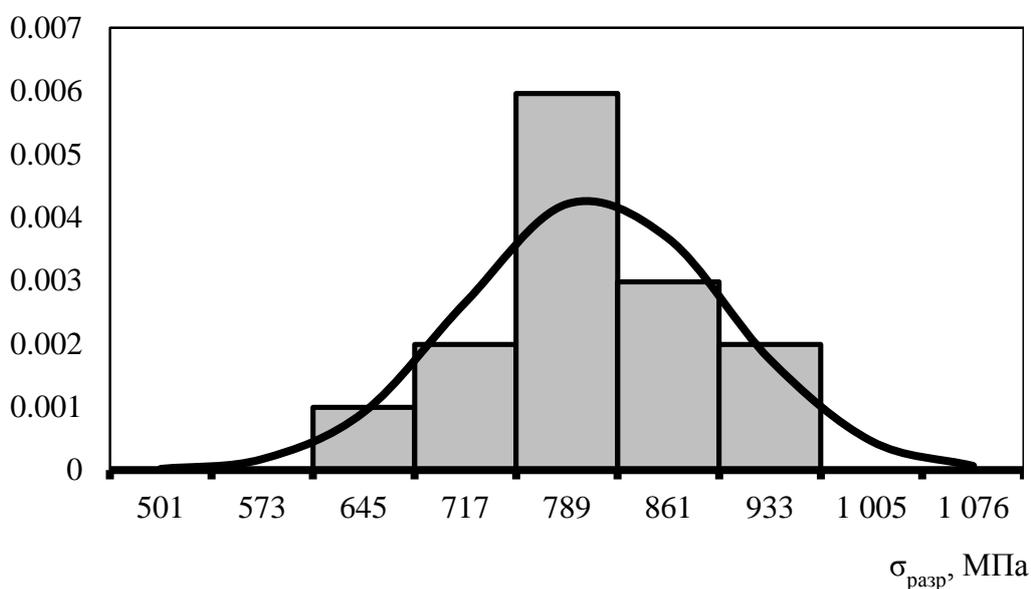


Рис.7. Гистограмма случайной величины разрушающего напряжения при растяжении для образцов стеклопластика  $d=8$  мм,  $l=100$  мм, а также плотность распределения вероятностей в предположении справедливости закона Гаусса.

На рис.8 показаны графики зависимости среднего значения разрушающего напряжения стеклопластика  $\langle \sigma_{\text{разр}} \rangle$  от величины диаметра рабочей части образца, полученные для различных значений длины рабочей части образца. Характер кривых и их взаимное расположение позволяют сделать вывод о существенном влиянии масштабного фактора на прочностные характеристики материала. Как видно, более стабильные значения  $\langle \sigma_{\text{разр}} \rangle$  получены на образцах с длиной рабочей части  $l \approx 150$  мм, хотя значение коэффициента вариации для таких образцов оказалось заметно выше, чем в других партиях.

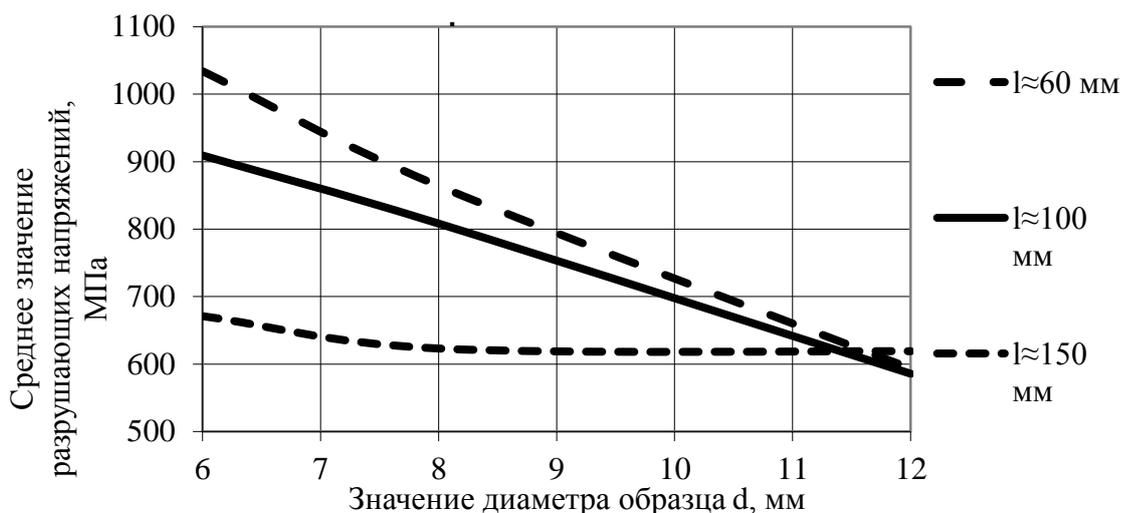


Рис.8. Зависимости среднего значения разрушающего напряжения стеклопластика при растяжении от длины и диаметра рабочей части образца.

## ВЫВОДЫ

1. Увеличение диаметра или длины рабочей части образца приводит к существенному снижению прочности однонаправленного стеклопластика при растяжении. Это можно объяснить увеличением количества дефектов в объеме образца при возрастании вышеуказанных характеристик.

2. Для описания распределения вероятностей случайной величины разрушающего напряжения стеклопластика  $\sigma_{\text{разр}}$  для образцов с диаметром рабочей части  $d=6$  мм и 8 мм можно использовать нормальный закон.

3. Из-за характера разрушения образцов  $d=12$  мм путем сползания хвостовой части образца с сердечника полученные оценки среднего значения разрушающих напряжений для таких образцов можно считать несколько заниженными.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Потапов В.Д., Горошков Ю.И., Лукьянов А.М. *Методика испытаний на прочность при растяжении и сжатии однонаправленных стеклопластиков для полимерных изоляторов*. // Труды ВНИИЖТ. «Повышение надежности контактной сети и токосъема». – 1982. – Вып.644. – С.37-42.
2. Потапов В.Д., Горошков Ю.И., Лукьянов А.М. и др. *Полимерные материалы в устройствах контактной сети*. – М.: Транспорт, 1988. – 224 с.
3. Лобанов Д.С., Бабушкин А.В. *Методика испытаний на одноосное растяжение однонаправленных композиционных материалов при пониженных температурах* // Вестник ПНИПУ. – 2012. – №4. – С.33-41.
4. Фролов Н.В., Полоз М.А., Колесникова Е.Г. *К вопросу об испытании стержневой полимеркомпозитной арматуры на осевое растяжение* // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. – 2016. – №11. – С.74-78.
5. *Пластмассы. Метод испытания на растяжение*. – ГОСТ 11262-2017.

УДК 532.656.56  
EDN AMQHJB (<https://elibrary.ru/amqhjb>)  
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.9



## ИССЛЕДОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ПОТОКОМ ВОЗДУХА ПЕРФОРИРОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ДВУМЕРНЫХ КАНАЛАХ ПОД РАЗЛИЧНЫМИ УГЛАМИ АТАКИ

Захаров Н.Н., Макаров А.Ю., Уваров Т.Е.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

Проведено математическое моделирование задачи обтекания потоком воздуха перфорированной поверхности (сетки), установленной в плоском канале под различными углами к вектору скорости и различных значениях модуля скорости. Численным расчётом по программе ANSYS Fluent найдены интегральные характеристики потока в двумерном канале с сеткой и определено влияния угла обтекания сетки на потери полного давления и коэффициент сопротивления сетки.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Настоящая работа является продолжением исследований начатых в [1]. Рассмотрим более подробно влияние определяющих параметров на потери полного давления при обтекании сетки в канале (рис.1) и получим аналитическую зависимость  $\sigma_c = f(\lambda, \bar{S}_c)$ . Здесь  $\sigma_c$  – коэффициент восстановления полного давления потока за сеткой,  $\lambda$  – коэффициент приведённой скорости набегающего потока,  $\bar{S}_c$  – относительная площадь затенения канала сеткой.

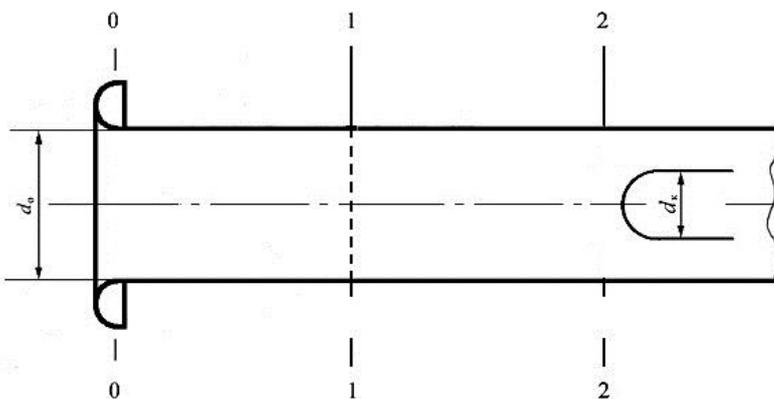


Рис.1. Схема канала с установленной сеткой в сечении 1-1.

Запишем уравнение количества движения для участка потока между сечениями 0 и 2 канала (рис.1), пренебрегая трением о стенки и учитывая, что при дозвуковых скоростях воздуха в канале статическое давление постоянно во всем сечении 2

$$(\rho_0 u_0^2 + p_0) S_0 - c_x S_0 \frac{\rho_1 u_1^2}{2} = (\rho_2 u_2^2 + p_2) S_0.$$

Здесь  $\rho$  – плотность,  $p$  – давление,  $S$  – площадь,  $c_x$  – коэффициент сопротивления сетки, индекс «0» – относится к параметрам потока и геометрическим размерам канала перед сеткой, индексы «1 и 2» – к параметрам потока в сечении сетки и за сеткой в сечении входа в двигатель соответственно.

Рассмотрим случай малых значений дозвуковых скоростей в канале имитатора, когда  $\lambda_2 \approx \lambda_0/\sigma$ , а  $\rho_0 \approx \rho_1 \approx \rho_2$ . Тогда используя уравнение неразрывности и уравнение Бернулли для определения полного давления в несжимаемой жидкости, найдем

$$\sigma_c = \frac{p_2^*}{p_0^*} = 1 - \frac{\kappa}{\kappa - 1} c_x \frac{\bar{S}_c}{(1 - \bar{S}_c)^2} \lambda_2^2. \quad (1)$$

Из анализа формулы (1) следует, что коэффициент полного давления  $\sigma$ , который определяет потери полного давления  $\Delta\sigma=1-\sigma$  за сеткой, зависит от коэффициента сопротивления сетки  $C_x$  и степени затенения сетки  $\bar{S}_c=S_c/S_0$ . Коэффициент сопротивления сетки  $C_x$  при изменении угла атаки  $\alpha$  от  $90^\circ$  до  $0^\circ$  по данным работ [2,3] уменьшается от  $C_{x_{\max}}$  до  $C_{x_{\min}}$ . Степень затенения канала сеткой  $\bar{S}_c$  зависит от угла атаки  $\alpha$  и определяется формулой (2)

$$\bar{S}_c = \frac{S_c}{S_0} = \frac{d}{a+d} \left( \frac{a}{a+d \sin \alpha} + 1 \right), \quad (2)$$

где  $S_c$  – площадь затенения канала сеткой,  $S_0$  – площадь канала,  $a$  – размер ячейки сетки по ГОСТ 3826-82,  $d$  – диаметр прутка сетки,  $\alpha$  – угол наклона сетки в канале относительно вектора скорости.

С уменьшением угла атаки сетки степень затенения  $\bar{S}_c$  увеличивается (рис.2) в соответствии с формулой (2).

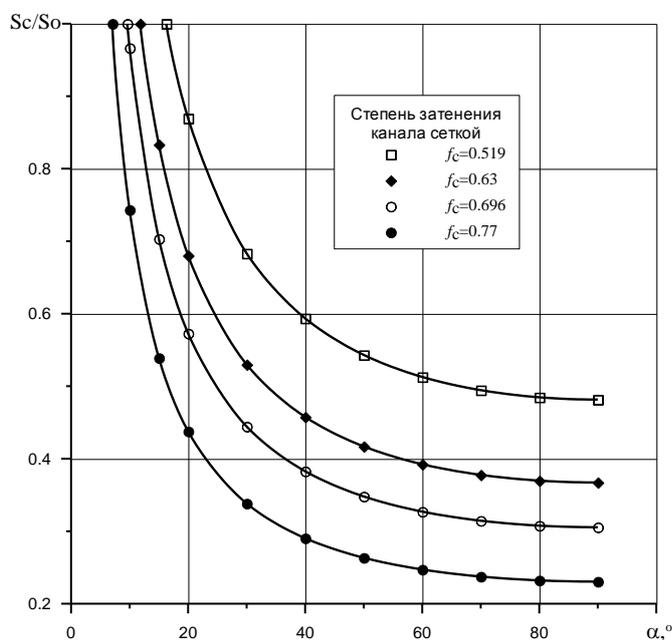


Рис.2. Зависимость степени затенения канала сетками от угла атаки  $\alpha$  и значения относительной проницаемости сетки  $f_c$ .

Таким образом, уменьшения угла обтекания решетки ведёт с одной стороны к уменьшению её сопротивления и, следовательно, к уменьшению потерь полного давления, а с другой стороны к росту степени затенения канала и увеличению

потерь полного давления. Поэтому при изменении угла установки решетки в канале можно ожидать оптимального значения  $\alpha$ , при котором потери полного давления  $\Delta\sigma$  будут минимальными.

## 2. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЁТ ОБТЕКАНИЯ СЕТОК В ДВУМЕРНОМ КАНАЛЕ ПОД РАЗНЫМИ УГЛАМИ АТАКИ

Первый этап расчёта включает в себя создание геометрической модели расчетной области. При численном расчете необходимо соблюсти проницаемость сетки, однако способ её изготовления не оказывает влияния на данный параметр. В связи с этим ограничимся рассмотрением простейшей геометрии, игнорируя переплетения прутьев сетки или сварные швы, соединяющие их. Сетка будет представлять собой цилиндрические поверхности, пересекающиеся между собой (см. рис.3). Параметры расчетной области: сечение канала квадратное со сторонами 50 мм, диаметры прутьев сетки 0,9 мм, размер ячейки сетки 4,5x4,5 мм, проницаемость сетки  $f_c=0,696$ . Длина расчетной области перед сеткой равна 10 мм (поток на входе однородный, длина начального участка выбрана, исходя из соображений отсутствия пограничного слоя на входе в канал), за сеткой – 50 мм (1 калибр).

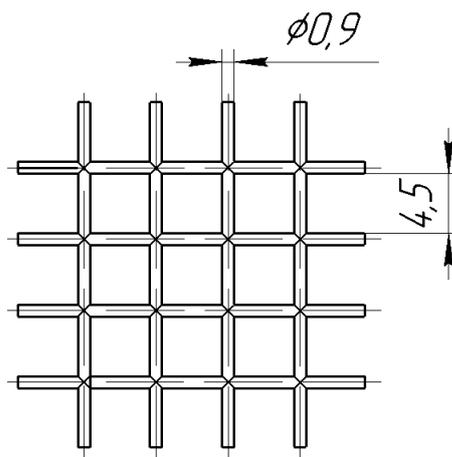


Рис.3. Фрагмент сетки.

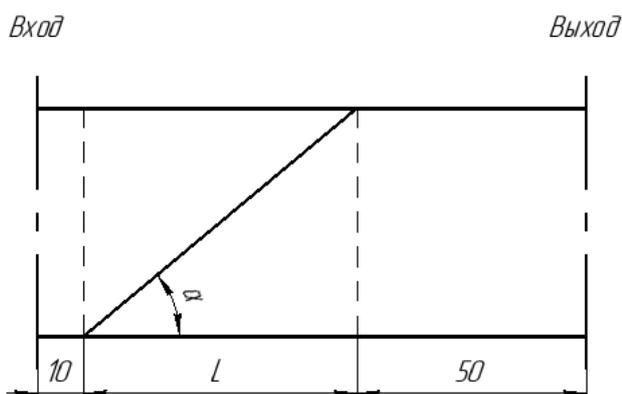


Рис.4. Схема расчетной области; здесь  $L$  – длина загромождения сеткой канала,  $\alpha$  – угол обтекания сетки.

На рис.4 и 5, соответственно, приведены схема расчетной модели и качественное изображение её геометрии в изометрии.

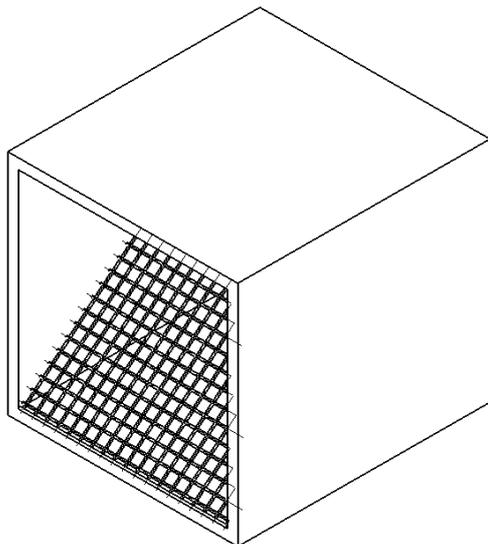


Рис.5. Фрагмент канала с исследуемой сеткой, установленной под углом 40 градусов.

### 2.1. Расчетная сетка.

В условиях данной задачи была построена стандартная неструктурированная расчётная сетка из ячеек, представляющих собой многогранники, с элементами структурированной расчётной сетки вблизи стенок для лучшего разрешения пограничного слоя.

Для определения потребных размера и количества ячеек расчетной сетки была проведена проверка на сходимость решения для перфорированной поверхности, установленной нормально к потоку, при различных значениях шага вычислительной сетки. Данная проверка проводится для того, чтобы в дальнейшем не делать вычислительную сетку слишком грубой, что может привести к неточным результатам, или наоборот, не делать её слишком мелкой, если в этом нет необходимости, тем самым упрощая вычислительный процесс [4].

На рис.6 представлены значения коэффициента восстановления полного давления на выходе расчетной области для перфорированной поверхности (сетки), установленной под углом 90 градусов, в зависимости от характерного размера расчетной сетки. Характерный размер в данном случае – размер одинаковых ячеек, составляющих большую часть расчетной области. Вблизи сетки размер ячеек (0,2 мм) обусловлен диаметром её прутка, и подобран таким образом, чтобы окружающая область была плавной, без ярко выраженных углов.

Видно, что сеточная сходимость имеет монотонный характер. Вычислительная сетка достаточно адаптирована под особенности течения. Ввиду этого расчет даже на сетке с относительно крупным размером ячейки (2 мм) будет довольно точно отражать характер влияния угла обтекания перфорированной поверхности на потери полного давления.

С целью определения степени разрешения пограничного слоя в условиях данной задачи была проведена проверка по критерию  $y^+$ , который представляет безразмерное расстояние от стенки до центра ячейки [5]. Данный критерий должен лежать на интервале  $0 < y^+ < 5$  или  $30 < y^+ < 300$ . На втором интервале

необходимо использовать пристеночные функции.

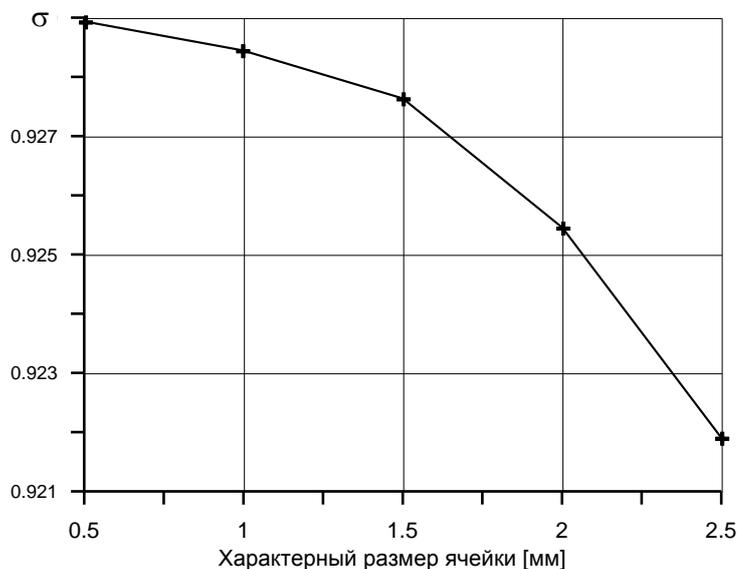


Рис.6. График сеточной сходимости для модели канала.

При толщине первой ячейки пристеночного слоя расчетной сетки, равной 0,015 мм для канала и для перфорированной поверхности получены значения  $y^+=4,74$  и  $y^+=4,98$ , соответственно. Следовательно, толщина первой ячейки пристеночного слоя подобрана удовлетворительно, использование пристеночных функций не требуется. Количество ячеек в пристеночном слое – 7.

## 2.2. Граничные условия.

Граничные условия на входе соответствуют типу «pressure – inlet», задаются полное давление, равное  $P^*=101325$  Па, и полная температура  $T^*=288$  К. На выходе задаётся расход, значения которого определяются, исходя из потребных значений приведенной скорости  $\lambda_0$  на входе

$$G = \rho^* \varepsilon(\lambda_0) \cdot a_{кр} \cdot \lambda_0 \cdot S_0,$$

где  $S_0=0,0025$  м<sup>2</sup> – площадь поперечного сечения канала,  $a_{кр}=310,55$  м/с – критическая скорость звука при  $T^*=288$  К,  $\rho^*=1,226$  кг/м<sup>3</sup> и  $\varepsilon(\lambda_0)$  – плотность заторможенного потока и газодинамическая функция плотности соответственно, которые при перемножении дают плотность газа  $\rho$  во входном сечении. В Таблице 1 приведены значения параметров при разных  $\lambda_0$ , определяющих граничные условия (массовый расход  $G$ ) на выходе.

Таблица 1.

Граничные условия на выходе.

$\lambda_0$	$\varepsilon(\lambda_0)$	$\rho$ [кг/м <sup>3</sup> ]	$G$ [кг/с]
0,2	0,9834	1,206	0,187
0,3	0,9629	1,181	0,275
0,4	0,9347	1,146	0,356

Так как задача симметрична, необходимо учитывать, что расчетная область становится вдвое меньше и, как следствие, в два раза уменьшается расход на выходе.

В условиях данной задачи стенки канала и прутьев исследуемой сетки

принимаются адиабатическими. На их поверхности выполняется условие прилипания, то есть скорость потока на них равна нулю.

### 3 ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ

В результате численного расчета требовалось найти средние значения коэффициента восстановления полного давления  $\sigma_c$ , коэффициента местного сопротивления  $\zeta$ , приведенной скорости  $\lambda_2$  на выходе из канала с сеткой и лобового сопротивления  $C_x$  сетки, устанавливаемой под различными углами обтекания  $\alpha$ .

На рис.7 представлено изображение расчётной математической модели для канала с сеткой, установленной под углом 40 градусов.

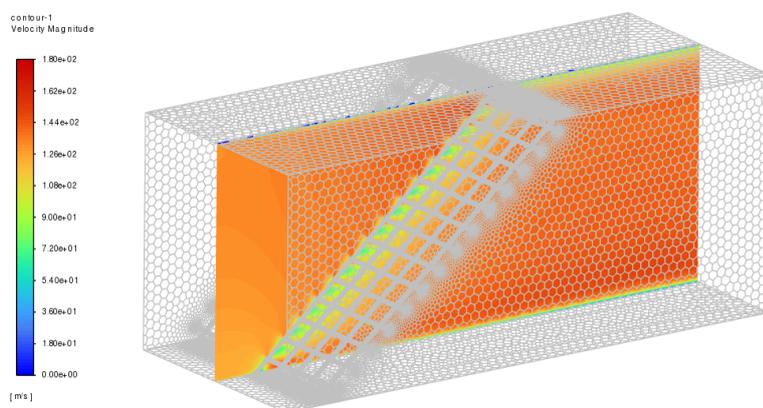


Рис.7. Расчётная модель канала с сеткой, установленной под углом 40 градусов.

Газ, подходя к решетке, поджимается в ее отверстиях и с повышенной скоростью отдельными струйками выходит из решетки в канал. Таким образом возникают потери, связанные как со входом в отверстия, так и с внезапным расширением на выходе из отверстий решетки. На изображениях выше видно увеличение скорости потока и уменьшение полного давления после решетки.

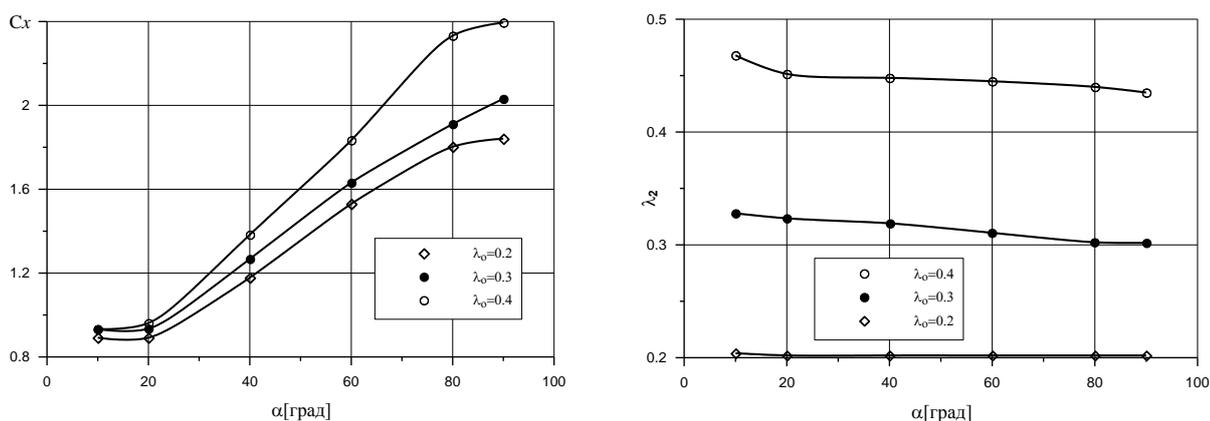


Рис.8. Зависимость коэффициента лобового сопротивления сетки (слева) и приведенной скорости на выходе (справа) от угла обтекания.

На рис.8 представлены зависимости коэффициента лобового сопротивления сетки  $C_x = \frac{F_x}{S_c q}$ , где  $F_x$  – значение силы, действующей на сетку вдоль оси  $x$ ,  $S_c$  –

миделева площадь сетки,  $q = \frac{\rho_o u_o^2}{2}$  – скоростной напор на входе в канал,

и приведенной скорости на выходе из канала  $\lambda_2$  от угла обтекания.

С уменьшением угла обтекания до 40 градусов уменьшается сила, действующая на сетку, площадь затенения возрастает незначительно (рис.2), и коэффициент лобового сопротивления падает. При малых углах наблюдается увеличение осевой силы, но, в то же время, площадь начинает увеличиваться быстрее (при уменьшении угла от 40 до 10 градусов сила возрастает меньше, чем в 2 раза, а площадь увеличивается практически втрое), соответственно коэффициент лобового сопротивления так же падает. Получается, что на всем интервале угла обтекания  $C_x$  убывает.

На рис.9 представлены зависимости коэффициента восстановления полного давления  $\sigma_c = \frac{P_2^*}{P_o^*}$  и коэффициента местного сопротивления  $\zeta = \frac{\Delta p}{q}$  от угла обтекания.

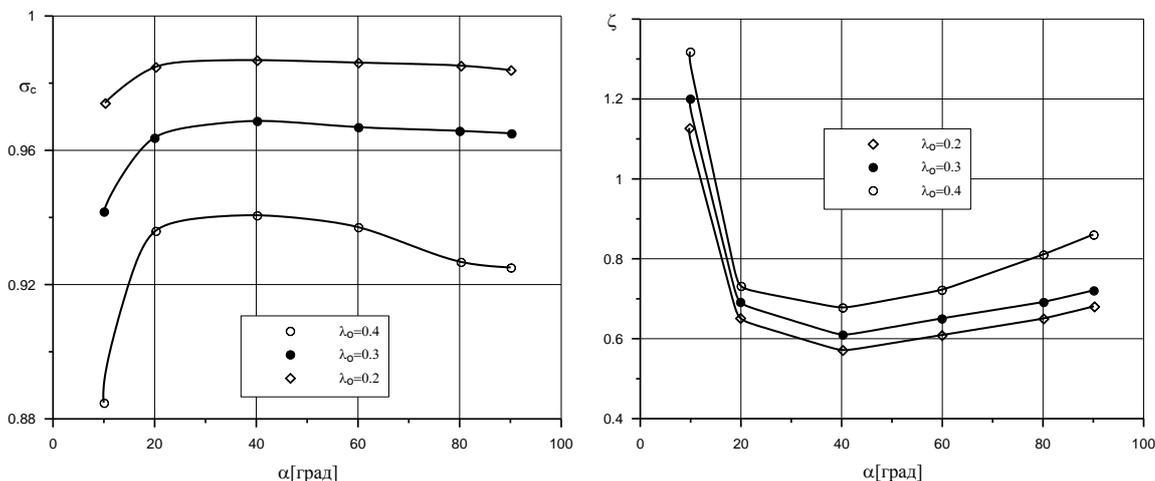


Рис.9. Зависимость коэффициента восстановления полного давления (слева) и коэффициента местного сопротивления (справа) от угла обтекания.

Видно, что с уменьшением угла обтекания потери полного давления убывают и достигают минимума при угле обтекания, равным 40 градусов. При дальнейшем уменьшении угла обтекания относительная площадь затенения канала сильно увеличивается (вплоть до единицы) (рис.2), возрастает коэффициент местного сопротивления; из-за значительного увеличения размера сетки вдоль оси  $x$  и связанного с этим возрастанием вязких потерь. Все это в сумме приводит к уменьшению коэффициента восстановления полного давления при малых углах обтекания.

На рис.10-15 представлены изображения полей коэффициента восстановления полного давления и скорости в плоскости симметрии для каналов с сеткой, установленной под углом 40 градусов (оптимум).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование параметров течения воздуха в плоском канале, загроможденном сеткой, устанавливаемой под различными углами обтекания при различных значениях приведенной скорости на входе.



Рис.10. Поле распределения коэффициента восстановления полного давления при значении  $\lambda_0=0,2$ .

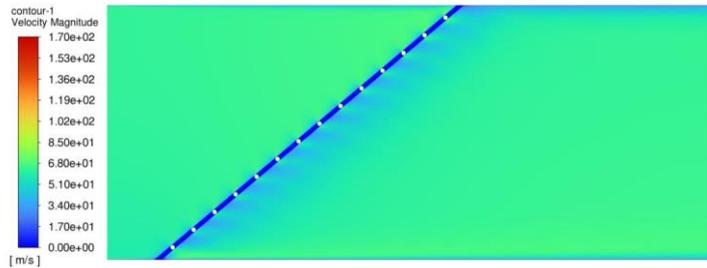


Рис.11. Поле распределения скорости при значении  $\lambda_0=0,2$ .

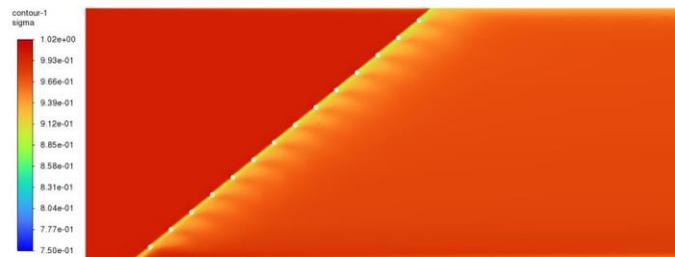


Рис.12. Поле распределения коэффициента восстановления полного давления при значении  $\lambda_0=0,3$ .

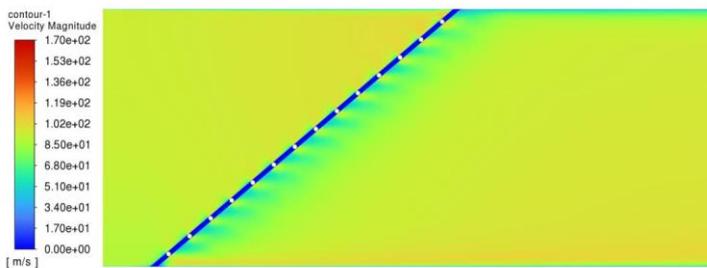


Рис.13. Поле распределения скорости при значении  $\lambda_0=0,3$ .

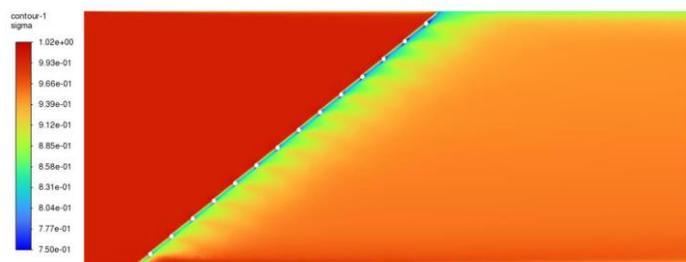


Рис.14. Поле распределения коэффициента восстановления полного давления при значении  $\lambda_0=0,4$ .

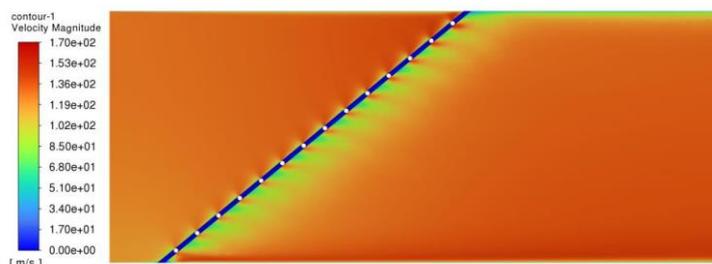


Рис.15. Поле распределения скорости при значении  $\lambda_0=0,4$ .

Построена геометрическая модель плоского канала квадратного сечения с сетками, расположенными под различными углами обтекания. Построена сеточная модель и проведена проверка расчетной сетки на сходимость с целью определения оптимального характерного размера элементов в расчетной области.

Численный расчет показал, что с уменьшением угла обтекания сетки наблюдается рост коэффициента восстановления полного давления, однако при малых углах  $\alpha < 20$  градусов значительно возрастают местные потери вследствие увеличения степени затенения канала сеткой и коэффициент восстановления полного давления уменьшается. Коэффициент лобового сопротивления сетки уменьшается на всем интервале исследуемых углов. Показано, что потери полного давления достигают минимума при угле обтекания, равным 40 градусов. Таким образом, для уменьшения потерь и сохранения интегральных характеристик потока, лучше устанавливать сетки под углом, близким к 40 градусам.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Большианов И.В., Захаров Н.Н., Уваров Т.Е. *Исследование обтекания потоком воздуха перфорированных поверхностей (сеток) установленных в двумерном канале под углом атаки и определение их газодинамических характеристик в зависимости от степени проницаемости сетки  $f_s$ , углов атаки  $\alpha$  и коэффициента скорости  $\lambda$*  / 13-я Всероссийская конференция с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных гетерогенных сред». Сборник трудов. – М.: ИПРИМ РАН, 2023. – С.177-188.
2. Фридман А.Л. *Теория и проектирование орудий промышленного рыболовства*. – М.: Легкая промышленность, 1981.
3. Недоступ А.А. *Методы расчёта сетных пассивных орудий внутреннего и прибрежного рыболовства*. – КГТУ, 2010.

4. Веретенников С.В., Баринов С.Н. *Исследование сеточной сходимости при численном моделировании процессов газодинамики и теплообмена в вихревой трубе* // Вестник ПНИПУ. – 2015. – С.5-12.
5. Гилева Л.В., Аксенов А.А., Кожухов Ю.В., Петров А.Ю. *Исследование влияния пристеночного параметра  $y^+$  на результаты численного моделирования конфузорного течения во входном устройстве центробежного компрессора* // Вестник международной академии холода. – 2020. – №1. – С 27-33.

УДК 539.3

EDN TVBPСА (<https://elibrary.ru/tvbpca>)

DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.10



## **О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ\***

Исаченко И.А., Курбатов А.С., Жаворонок С.И.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

### **ВВЕДЕНИЕ**

Одной из характерных особенностей тонкостенных конструкций из сплавов с памятью формы (СПФ) является их склонность к потере устойчивости равновесного состояния при аномально низких по сравнению с оценкой по наименьшей величине модуля упругости критических напряжениях [1,2]. Данное явление наблюдается как при фазовых превращениях в системе «мартенсит – аустенит», так и при структурном переходе хаотического мартенсита в ориентированный под действием напряжений [3]. Исследование устойчивости тонкостенных оболочек с памятью, являющихся рабочими элементами различных активных и адаптивных систем, требует решений задач о докритическом состоянии во многих практически важных случаях являющимся безмоментным. Кроме того, решение краевой задачи безмоментной теории оболочек при определенных условиях является частным решением задачи моментной теории [4]. Приложение однократно связанной феноменологической теории термоупругих фазово-структурных превращений [5] к решению задач безмоментной теории оболочек с памятью является несложным и эффективным, так как в силу статической определенности безмоментной оболочки не требуется обращения инкрементальных определяющих соотношений, разрешенных относительно малых превращений неупругих деформаций [5]. Постановка задачи безмоментной теории оболочек, претерпевающих неизотермические фазовые превращения, предложена в работе [6] как частный случай общей теории оболочек с памятью, сформулированной в обобщенных условиях [7]; приведены решения ряда задач о деформировании безмоментных оболочек вращения при фазовых превращениях, протекающих в процессе циклического изменения температуры под действием постоянного давления. В работе [8] осуществлен учет влияния параметра вида напряженного состояния на материальные константы модели термоупругого фазового превращения [9], построены решения задач о деформировании сферической оболочки, находящейся в неоднородном напряженном состоянии. В то же время структурные переходы в тонкостенных безмоментных оболочках ранее не рассматривались; обратные определяющие уравнения, приведенные в [10], были получены без учета влияния на физические постоянные вида параметра вида напряженного состояния. В данной работе предложены определяющие уравнения для тонкой безмоментной оболочки, претерпевающей изотермический структурный переход в состоянии мартенситной неупругости при монотонном пропорциональном нагружении,

---

\*Работа выполнена в рамках Государственного задания ИПРИМ РАН  
(номер гос. регистрации темы 1023032300192-8-2.3.2).

приведены решения некоторых задач, иллюстрирующие эффект вида напряженного состояния и зависимость диаграммы деформирования оболочки от выбора материальных функций модели.

## 1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ В СОСТОЯНИИ МАРТЕНСИТНОЙ НЕУПРУГОСТИ

Рассмотрим кинематически линейное деформирование тела  $V \subset \mathbb{R}^3$  из СПФ, такое, что тензор деформации допускает разложение (1.2) [3]

$$e_{ij} = e_{ij}^{E,T} + e_{ij}^{\pm} + e_{ij}^S, \quad i, j, k \dots = \overline{1,3}; \quad (1.1)$$

$$e_{ij}^{E,T} = E^{-1}(q) \Delta_{ijkl} \sigma^{kl} + \alpha(q)(T - T_0) g_{ij}, \quad \alpha(q) = q\alpha_M + (1-q)\alpha_A; \quad (1.2)$$

$$\Delta_{ijkl} = \frac{1+\nu}{2} (g_{ik} g_{jl} + g_{il} g_{jk}) - \nu g_{ij} g_{kl}; \quad E^{-1}(q) = qE_M^{-1} + (1-q)E_A^{-1},$$

$g_{ij}$  – метрика,  $e_{ij}^{E,T}$  – упругая и температурная деформация под действием напряжения  $\sigma^{ij}$  и приращения температуры  $T - T_0$ ,  $e_{ij}^{\pm}$  – деформация вследствие фазового превращения,  $e_{ij}^S$  – деформация, порождаемая структурным переходом [3]. Модуль упругости  $E$  и коэффициент линейного расширения  $\alpha$  зависят от объемной доли мартенситной фазы  $q \in [0,1]$ :  $q=1$  соответствует чистому мартенситу (М-фаза),  $q=0$  – аустениту (А-фаза);  $E_M$ ,  $\alpha_M$ ,  $E_A$ ,  $\alpha_A$  – модули и коэффициенты линейного расширения  $M$  и  $A$  фаз. Тогда как  $e_{ij}^{E,T}$  определяется конечным соотношением (1.2), фазовая  $e_{ij}^{\pm}$  и структурная  $e_{ij}^S$  деформации в общем случае определяются инкрементальными уравнениями [5]

$$\delta e_{ij}^{\pm} = \left\{ \frac{3}{2} \rho_{D1}(s) [1 - qf^{\pm}(q)] \varphi_1(\sigma_i) \Sigma_{ij} + f^{\pm}(q) (e_{ij}^{\pm} + e_{ij}^S - \varepsilon_0 q g_{ij}) + \varepsilon_0 g_{ij} \right\} \delta q; \quad (1.3)$$

$$\delta e_{ij}^S = \frac{3}{2} \rho_{D2}(s) q \varphi'_2(\sigma_i) \Sigma_{ij} \delta \sigma_i; \quad g^{ij} \delta e_{ij}^S \equiv 0; \quad \varphi'_2 \equiv \partial \varphi_2 / \partial \sigma_i; \quad (1.4)$$

$$\Sigma_{ij} = \sigma_i^{-1} s_{ij}; \quad s = \frac{27}{2} \sigma_i^{-3} \det(s_{ij}); \quad \sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} s^{ij} s_{ij}}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma g_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3} g_{ij} \sigma^{ij}; \quad (1.5)$$

$\Sigma_{ij}$  – направляющий тензор девиатора напряжения,  $s$  – параметр вида напряженного состояния [9] (для чистого растяжения  $s=1$ , для чистого сжатия –  $s=-1$ );  $\rho_{D1,2}(s)$  – точные верхние грани интенсивностей фазовой и структурной деформаций;  $\varphi_{1,2}(\sigma_i)$  – распределения интенсивности микронапряжений в представительных объемах  $A$  и  $M$  – фаз [9]. В качестве  $F(\sigma_i) = \varphi_1(\sigma_i) = \varphi_2(\sigma_i)$  вводятся распределения Вейбулла-Гнеденко (1.6) или  $\gamma$ -распределение (1.7) [9]

$$\varphi_2(\bar{\sigma}, \beta) = 1 - \exp(-\bar{\sigma}^{\beta}) \quad (\bar{\sigma} = \sigma_i / \sigma_2); \quad (1.6)$$

$$F(\bar{\sigma}_i, \beta) = [\Gamma(\beta)]^{-1} \int_0^{\bar{\sigma}_i} t^{\beta-1} e^{-t} dt. \quad (1.7)$$

зависимости  $\rho_{D2}(s)$ ,  $\sigma_2(s)$ ,  $\beta_2(s)$  в первом приближении – кусочно-линейные [7]

$$\rho_{D1,2}(s) = \rho_{D1,2}^1 \begin{cases} 1, & s \geq 0; \\ 1 + \rho_{D1,2}^{\Delta} s, & s < 0; \end{cases} \quad \sigma_{1,2}(s) = \sigma_{1,2}^1 \begin{cases} 1, & s \geq 0; \\ 1 + \sigma_{1,2}^{\Delta} s, & s < 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\beta_{1,2}(s) = \beta_{1,2}^1 \begin{cases} 1, & s \geq 0; \\ 1 + \beta_{1,2}^{\Delta} s, & s < 0, \end{cases}$$

величины  $\rho_{D_{1,2}}^1$ ,  $\sigma_{1,2}^1$ ,  $\beta_{1,2}^1$  соответствуют чистому растяжению.

## 2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Пусть  $S$  – соответствующее срединной поверхности гладкое многообразие с краем  $\partial S$  и определенными на нем координатами  $\xi^\alpha \in D_\xi \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha = 1, 2$

$$\forall M \in S \quad \mathbf{r}(M) = x^i(\xi^\alpha) \mathbf{e}_i, \quad x^i(\xi^\alpha) \in C^{(n)}(D_\xi), \quad i = \overline{1, 3}, \quad n \geq 2;$$

$x^i$  – декартовы координаты в  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{e}_i$  – декартов базис. Модель оболочки определена на расслоении  $TS$  (2.1) с метрикой  $a_{\alpha\beta}$  и кривизной  $b_{\alpha\beta}$ , связанными

$$TS = \prod_{M \in S} \left\{ c^\alpha \mathbf{r}_\alpha : \mathbf{r}_\alpha = \partial_\alpha x^i \mathbf{e}_i, c^\alpha \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad \partial_\alpha \equiv \partial / \partial \xi^\alpha, \quad (2.1)$$

$$\epsilon^{\beta\gamma} \nabla_\beta b_{\alpha\gamma} = 0; \quad \epsilon^{\beta\gamma} \left( \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma}^\delta - b_{\alpha\gamma} b_\beta^\delta \right) = 0; \quad (2.2)$$

$\Gamma_{\beta\gamma}^\delta = \frac{1}{2} a^{\alpha\delta} \left( -\partial_\alpha a_{\beta\gamma} + \partial_\beta a_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma a_{\alpha\beta} \right)$  – символы Кристоффеля II рода.

Пусть далее  $S'$  – актуальная конфигурация поверхности  $S$ , определенная метрикой  $a'_{\alpha\beta}$  и кривизной  $b'_{\alpha\beta}$ . Деформация  $S$  описывается симметричными тензорами тангенциальной деформации  $\epsilon_{\alpha\beta}$  и изменения кривизны  $\varkappa_{\alpha\beta}$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (a'_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}); \quad \varkappa_{\alpha\beta} = b'_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}. \quad (2.3)$$

Для достаточно тонкой оболочки  $h/\text{diam}(S) \ll 1$ , где  $h$  – толщина,

$$\text{diam}(S) = \inf_{M \in S} \left( k_\alpha^{-1}(M), l(S) \right), \quad l(S) = \sup_{M', M'' \in \partial S} \left| \overline{M'M''} \right| \quad (\partial S \neq \emptyset),$$

справедливо предположение  $-\varkappa_{\alpha\beta} - b_\alpha^\gamma \epsilon_{\gamma\beta} \approx -\varkappa_{\alpha\beta}$ , и линеаризованные уравнения совместности деформаций [10] могут быть представлены так [4,5]

$$\nabla_\delta \left( \epsilon^{\delta\gamma} \epsilon^{\alpha\beta} \varkappa_{\gamma\beta} \right) = b_\delta^\alpha \nabla_\nu \left( \epsilon^{\nu\gamma} \epsilon^{\delta\beta} \epsilon_{\gamma\beta} \right); \quad b_{\alpha\beta} \left( \epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon^{\delta\beta} \varkappa_{\gamma\beta} \right) = -\nabla_\alpha \nabla_\delta \left( \epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon^{\delta\beta} \epsilon_{\gamma\beta} \right). \quad (2.4)$$

Пусть  $\mathbb{R}^3 \supset V = S \times [-h/2, h/2]$ ,  $\zeta \in [-h/2, h/2]$  – нормальная координата. Компоненты тензора деформации  $e_{ij}$  тонкой оболочки определяются полями  $\epsilon_{\alpha\beta}$  и  $\varkappa_{\alpha\beta}$  [10], при этом  $e_{\alpha 3} = 0$ ,  $e_{33} \approx 0$  (2.5)

$$e_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} + \zeta \left( -\varkappa_{\alpha\beta} + b_\alpha^\gamma \epsilon_{\gamma\beta} + b_\beta^\gamma \epsilon_{\gamma\alpha} \right) + o(h^2) \approx \epsilon_{\alpha\beta} - \zeta \varkappa_{\alpha\beta}; \quad \epsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} \Big|_{\zeta=0}. \quad (2.5)$$

В свою очередь, тензор напряжения приближенно задается двумя полями на  $TS$  – тензорами тангенциальных сил  $N^{\alpha\beta}$  и моментов  $M^{\alpha\beta}$  [10]

$$\sigma^{\alpha\beta} = h^{-1} N^{\alpha\beta} + 12h^{-3} \zeta M^{\alpha\beta}; \quad N^{\alpha\beta} \approx \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\beta} d\zeta, \quad M^{\alpha\beta} \approx \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\beta} \zeta d\zeta. \quad (2.6)$$

При удовлетворении геометрии оболочки, полей главного вектора и момента внешних сил на  $S$  и  $\partial S$  условиям существования безмоментного напряженного состояния [10] (отсутствие бесконечно удаленных точек  $S$ , точек  $M^\times \in S$  с нулевыми главными кривизнами  $k_1(M^\times) = k_2(M^\times) = 0$ , медленном изменении  $b_\alpha^\beta$ ,  $q^\alpha$ ,  $p$ , а также краевых условиях  $M^{\alpha\beta} \nu_\beta \Big|_{\partial S_\sigma} = \nabla_\alpha M^{\alpha\beta} \nu_\beta \Big|_{\partial S_\sigma} = 0$  напряженное состояние оболочки – безмоментное [4,7]

$$\sup_{M \in S \setminus S_M} |\sigma^{\alpha\beta}(M^{\gamma\delta})| \sim h^{-1} \text{diam}(S) \inf_{M \in S \setminus S_M} |\sigma^{\alpha\beta}(N^{\gamma\delta})| \Rightarrow \sigma^{\alpha\beta} \approx h^{-1} N^{\alpha\beta}.$$

Уравнения равновесия безмоментного состояния оболочки и краевые условия на контуре  $\partial S = \partial S_\sigma \oplus \partial S_u$  приводятся к виду (2.7), (2.8)

$$\nabla_\beta N^{\alpha\beta} + q^\alpha = 0; \quad b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + p = 0; \quad (2.7)$$

$$N^{\alpha\beta} \nu_\beta \Big|_{\partial S_\sigma} = N^{*\alpha}; \quad u_\alpha \Big|_{\partial S_u} = u_\alpha^*; \quad (2.8)$$

$q^\alpha$ ,  $p$  – компоненты главного вектора внешних сил на  $S$ ,  $N^{*\alpha}$  – тангенциальные компоненты главного вектора внешних сил на  $\partial S_\sigma$  [4];  $u_\alpha^*$  – тангенциальные компоненты перемещения  $\partial S_u$ .

### 3. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ИЗ СПФ В СОСТОЯНИИ МАРТЕНСИТНОЙ НЕУПРУГОСТИ

#### 3.1. Общий случай: инкрементальные определяющие уравнения.

Рассмотрим оболочку, находящуюся в полностью мартенситном фазовом состоянии после  $A \rightarrow M$  перехода вследствие охлаждения через интервал температур  $[T_S^+, T_F^+]$  при  $N^{\alpha\beta} \equiv 0$  [4], так что  $\forall M \in S$ ,  $\forall \zeta \in [-h/2, h/2]$   $q(M, \zeta) \equiv 1$ , притом мартенсит полностью сдвойникован, и предположим, что после достижения  $q=1$   $T = \text{Const}$ , т.е. при действии напряжений осуществляется только структурный переход хаотического мартенсита в ориентированный:  $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^E + \varepsilon_{\alpha\beta}^S$ ,  $\varepsilon_{\alpha\beta}^\pm = 0$ . Тогда при учете (2.5) из (1.4) следует приращение структурной тангенциальной деформации  $\delta\varepsilon_{\alpha\beta}$  в виде

$$\delta\varepsilon_{\alpha\beta}^S = \frac{3}{2} \rho_{D2}(s) F'_{\sigma_i}(\sigma_i) \Sigma_{\alpha\beta} \delta\sigma_i; \quad (3.1)$$

здесь  $\Sigma_{\alpha\beta} = \sigma_i^{-1} h^{-1} \bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\gamma\delta}$ ,  $\sigma_i = h^{-1} \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\alpha\beta} N^{\gamma\delta}}$  – направляющий тензор и интенсивность девиатора безмоментного напряженного состояния,  $\bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} + a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma}) - \frac{1}{3} a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta}$ . Упругая тангенциальная деформация оболочки  $\varepsilon_{\alpha\beta}^E$  в соответствии с (1.2) определяется конечным соотношением (3.2)

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^E = E_M^{-1} h^{-1} \Delta_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\gamma\delta}; \quad \Delta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (1 + \nu) (a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} + a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma}) - \nu a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta}. \quad (3.2)$$

В соответствии с гипотезами канонической теории  $\sigma^{33} \rightarrow 0$ , т.е.

$$\det(s_{ij}) = -\sigma \det(s_{\alpha\beta}); \quad \sigma = \frac{1}{3} g_{ij} \sigma^{ij} = \frac{1}{3} h^{-1} a_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta}, \quad (3.3)$$

следовательно, параметр вида напряженного состояния  $s$  (1.5) имеет вид [7]

$$s = -\frac{9}{2} \sigma_i^{-3} h^{-3} a_{\alpha\beta} \epsilon^{\gamma\delta} \epsilon^{\lambda\mu} \bar{\Delta}_{\gamma\lambda\nu\pi} \bar{\Delta}_{\delta\mu\rho\sigma} N^{\alpha\beta} N^{\nu\pi} N^{\rho\sigma}. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.1) с учетом записи приращения интенсивности напряжения  $\delta\sigma_i = \frac{3}{2} h^{-2} \sigma_i^{-1} \bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\alpha\beta} \delta N^{\gamma\delta} = \frac{3}{2} h^{-1} \Sigma_{\gamma\delta} \delta N^{\gamma\delta}$  может быть представлено в виде (3.5)

$$\delta\varepsilon_{\alpha\beta}^S = A_{\alpha\beta\gamma\delta}^S \delta N^{\gamma\delta}; \quad A_{\alpha\beta\gamma\delta}^S = \frac{9}{4h} \rho_{D2}(s) F'_{\sigma_i}(\sigma_i) \Sigma_{\alpha\beta} \Sigma_{\gamma\delta} = A_{\beta\alpha\delta\gamma}^S = A_{\gamma\delta\alpha\beta}^S. \quad (3.5)$$

### 3.2. Случай пропорционального монотонного нагружения.

В случае пропорционального монотонного нагружения оболочки определяющее уравнение (1.4) интегрируемо [8], следовательно, интегрируемо также и соотношение (3.1) для  $\varepsilon_{\alpha\beta}^S$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^S = \varepsilon_{\alpha\beta}^{S(0)} + \frac{3}{2} \rho_{D2}(s) F_2(\sigma_i) \Sigma_{\alpha\beta}. \quad (3.6)$$

Здесь  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{S(0)}$  – компоненты тензора структурной деформации в начальной точке процесса структурного перехода; в том случае, когда переход осуществляется из состояния полностью сдвойникового мартенсита,  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{S(0)} = 0$ . Таким образом, в соответствии с (1.1), (3.2) и (3.6) тангенциальная деформация  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  тонкой безмоментной оболочки, претерпевающей структурный переход в состоянии мартенситной неупругости при монотонном пропорциональном нагружении, определяется компонентами тензора тангенциальных сил  $N^{\gamma\delta}$ , являющимися решением краевой задачи (2.7), (2.8) статики безмоментной теории

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \left[ E_M^{-1} h^{-1} \Delta_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{3}{2} \rho_{D2}(s) F(\sigma_i) \left( \frac{3}{2} \bar{\Delta}_{\lambda\mu\nu\pi} N^{\lambda\mu} N^{\nu\pi} \right)^{-1/2} \bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} \right] N^{\gamma\delta}. \quad (3.7)$$

Компоненты тензора изменения кривизны  $\varkappa_{\alpha\beta}$  определяются из решения уравнений совместности (2.4) по известным из (3.7) компонентам  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ .

## 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДЕФОРМИРОВАНИИ ОБОЛОЧКИ В СОСТОЯНИИ МАРТЕНСИТНОЙ НЕУПРУГОСТИ ПРИ МОНОТОННОМ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ

Рассмотрим цилиндрическую оболочку из никелида титана ТН-1, отнесенную к цилиндрической системе координат  $Oz\theta$ . Толщина оболочки  $h = 0,01$  м, радиус кривизны срединной поверхности  $R = 1$  м, ненулевые компоненты метрического тензора и тензора кривизны –  $a_{22} = R^2$ ,  $b_{22} = R$ .

Предположим, что оболочка находится в полностью мартенситном состоянии ( $q \equiv 1$ ) после  $A \rightarrow M$  фазового перехода, вызванного охлаждением при  $\sigma_i \equiv 0$ , дилатация фазового перехода не учитывается, отсчетная конфигурация – натуральная ( $\sigma^{\alpha\beta} = 0$ ,  $\varepsilon_{\alpha\beta}^E = 0$ ). Пусть далее нагружение оболочки происходит при  $T_F^+ > T = \text{Const}$ , где  $T_F^+$  – температура окончания  $A \rightarrow M$  перехода при  $\sigma_i = 0$  ( $\forall \sigma_i > 0 \quad T_F^+(\sigma_i) > T_F^+|_{\sigma_i=0}$ ). Для сплава ТН-1 при  $q \equiv 1$   $E_M = 30$  ГПа,  $\nu = 0.45$ . Материальные константы, введенные в (1.6), (1.7) в соответствии с аппроксимацией (1.8) [9], приведены в Таблице 1

Таблица 1.

Материальные константы, соответствующие распределению  
Вейбулла-Гнеденко (1.6) и  $\gamma$ -распределению (1.7).

–	$\rho_{D2}^1$	$\rho_{D2}^\Delta$	$\sigma_2^1$ , МПа	$\sigma_2^\Delta$	$\beta_2^1$	$\beta_2^\Delta$
(1.6)	0,0572	0,6678	180,1	–0,694	2,96	–0,657
(1.7)	0,0608	0,6711	27,4	0,343	6,45	–1,493

Пусть оболочка нагружена внутренним давлением  $p$ , т.е.  $N_{\theta\theta} = pR$ .

**Случай 1.** Рассмотрим случай одноосного напряженного состояния, т.е.  $N_{zz} = 0$  (нагружение через слабосжимаемый наполнитель без трения), следовательно, физические компоненты девиатора напряжения составляют  $s_{zz} = -\frac{1}{3}h^{-1}pR$ ,  $s_{\theta\theta} = \frac{2}{3}h^{-1}pR$ , интенсивность напряжения  $\sigma_i = h^{-1}pR$ , откуда  $s = 1$  (чистое одноосное растяжение в окружном направлении), и решение (3.6) приводит к следующим структурным деформациям (4.1)

$$\varepsilon_{zz}^S = -\frac{1}{2}\rho_{D2}^0 F_2(\sigma_i); \quad \varepsilon_{\theta\theta}^S = \rho_{D2}^0 F_2(\sigma_i). \quad (4.1)$$

Зависимости продольной  $\varepsilon_{zz}^S(p)$  и окружной  $\varepsilon_{\theta\theta}^S(p)$  структурных деформаций (4.1) от амплитуды давления  $p$  приведены на рис.1.

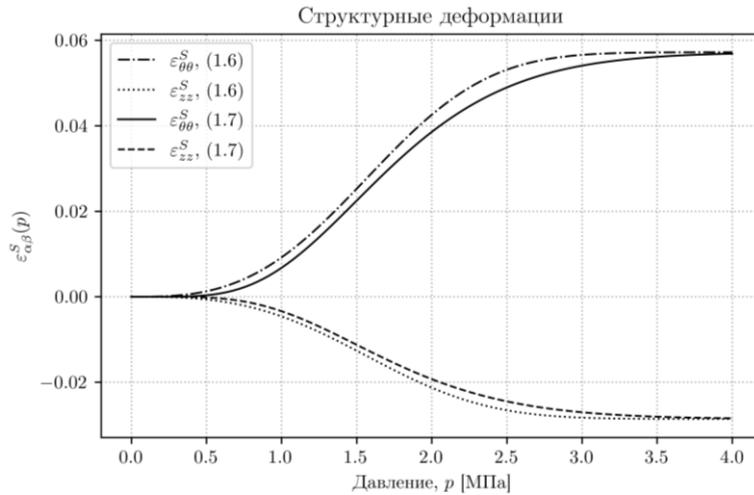


Рис.1. Продольная  $\varepsilon_{zz}^S(p)$  и окружная  $\varepsilon_{\theta\theta}^S(p)$  деформации структурного перехода в случае одноосного нагружения цилиндрической оболочки.

**Случай 2.** Рассмотрим далее двухосное напряженное состояние. Пусть оболочка нагружена в осевом направлении так, что  $N_{zz} = 0,55pR > 0$ ; компоненты девиатора напряжения в таком случае равны  $s_{zz} = 0,03h^{-1}pR$ ,  $s_{\theta\theta} = 0,48h^{-1}pR$ ,  $s_{33} = -0,52h^{-1}pR$ , интенсивность напряжения  $\sigma_i = 0,868h^{-1}pR$ , откуда параметр вида напряженного состояния  $s = -0,117 < 0$ . Решение для структурных деформаций, следующее из (3.6), имеет вид (4.2):

$$\varepsilon_{zz}^S = 0,035\rho_{D2}(-0,117)F_2(\sigma_i); \quad \varepsilon_{\theta\theta}^S = 0,553\rho_{D2}(-0,117)F_2(\sigma_i). \quad (4.2)$$

Зависимости продольной  $\varepsilon_{zz}^S(p)$  и окружной  $\varepsilon_{\theta\theta}^S(p)$  структурных деформаций (4.1) от амплитуды давления  $p$  приведены на рис.2.

Нормальные перемещения (прогибы) оболочки вследствие структурного перехода при одноосном (4.1) или двухосном (4.2) напряженных состояниях, вычисляемые с помощью известной формулы  $w^S = \varepsilon_{\theta\theta}^S R$ , приведены на рис.3. Зависимость деформации от параметра вида напряженного состояния ярко выражена: при двухосном нагружении и соответствующем ему параметре вида напряженного состояния  $s = -0,117$  максимальная величина прогиба составляет около 50% максимального прогиба при одноосном напряженном состоянии.

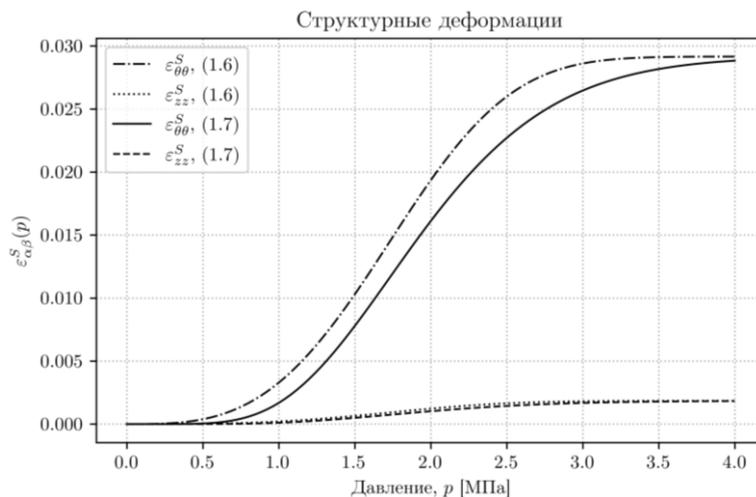


Рис.2. Продольная  $\varepsilon_{zz}^S(p)$  и окружная  $\varepsilon_{\theta\theta}^S(p)$  деформации структурного перехода в случае двухосного нагружения цилиндрической оболочки.

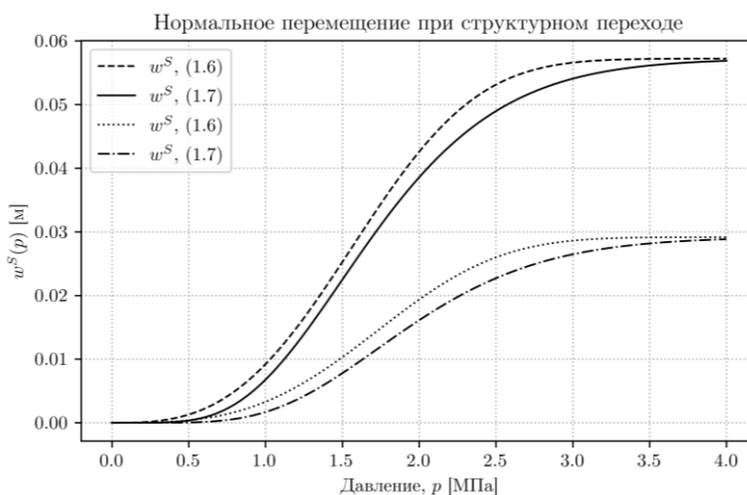


Рис.3. Нормальные перемещения  $w^S(p)$  цилиндрической оболочки при структурном превращении, соответствующие одноосному (решение (4.1)) и двухосному напряженному состоянию (решение (4.2)): распределение Вейбулла-Гнеденко (1.6),  $\gamma$ -распределение (1.7).

Рассмотрим далее сферическую оболочку из сплава ТН-1, отнесенную к сферической системе координат  $O\varphi\theta$ . Толщина оболочки  $h=0,01$  м, радиус кривизны срединной поверхности  $R=1$  м, ненулевые компоненты метрического тензора и тензора кривизны –  $a_{11}=a_{22}=R^2$ ,  $b_{11}=b_{22}=R$ . Условия, при которых осуществляется процесс структурного перехода – те же, что и в описанной выше задаче для цилиндрической оболочки в состоянии мартенситной неупругости. Оболочка нагружена равномерным давлением амплитудой  $p$  – внутренним, приводящим к двухосному растяжению, либо внешним, в свою очередь, приводящим к двухосному сжатию; задача обладает центральной симметрией.

Решение уравнений статики (2.7) для сферической оболочки имеет вид

$$N_{\varphi\varphi} = N_{\theta\theta} = \pm pR/2; \tag{4.3}$$

из (4.3) с учетом (3.3) и (3.4) следует  $\sigma = \pm \frac{1}{3} pRh^{-1}$ ,  $s_{\varphi\varphi} = s_{\theta\theta} = \pm \frac{1}{6} pRh^{-1}$ ,  $\sigma_i = \frac{1}{2} pRh^{-1}$ ,  $s = \mp 1$ ;  $\Sigma_{\varphi\varphi} = \Sigma_{\theta\theta} = \pm 1/3$ , и решение уравнений (3.6) имеет вид

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^S = \varepsilon_{\theta\theta}^S = \pm \frac{1}{2} \rho_{D2} (\mp 1) F_2(\sigma_i); \quad (4.4)$$

Зависимости структурных деформаций  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^S(p)$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}^S(p)$  (4.1) от амплитуды давления  $p$  приведены на рис.4.

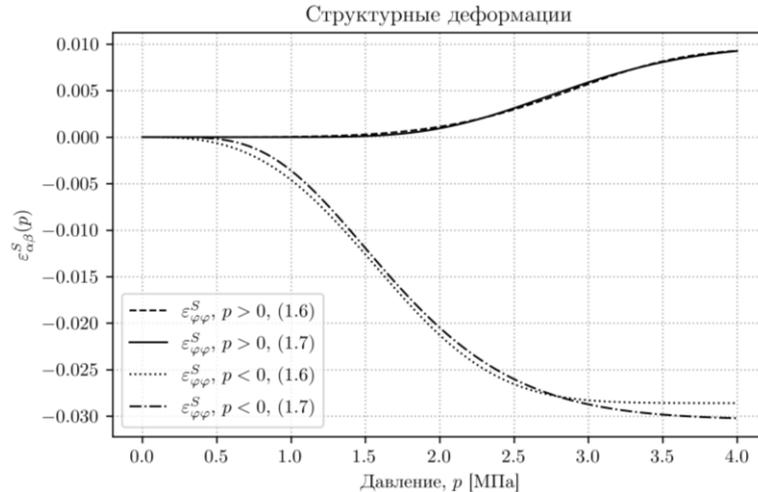


Рис.4. Деформации структурного перехода в случае нагружения сферической оболочки внутренним ( $p > 0$ ) и внешним ( $p < 0$ ) давлением (решение (4.3)): распределение Вейбулла-Гнеденко (1.6),  $\gamma$ -распределение (1.7).

В случае двухосного растяжения ( $s = -1$ ; нагружение сферической оболочки внутренним давлением,  $p > 0$ ) амплитуда структурных деформаций существенно меньше, чем в случае двухосного сжатия ( $s = 1$ ; нагружение внешним давлением,  $p < 0$ ) за счет выраженного эффекта вида напряженного состояния.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложены новые определяющие уравнения безмоментной теории тонких оболочек, выполненных из бинарного сплава с эффектом памяти формы, для частного случая изотермических структурных превращений в полностью мартенситном фазовом состоянии хаотического мартенсита в сдвойникованный под действием напряжений (явление мартенситной неупругости) [5] при учете эффекта вида напряженного состояния [9]. Уравнения следуют из инкрементальных определяющих соотношений для трехмерного криволинейного тела с одной вырождающейся размерностью, отнесенного к криволинейной системе координат, нормально связанной с гладкой опорной поверхностью, при удержании члена ряда Маклорена нулевого порядка для тангенциальных компонентов линейного тензора приращения деформации [6-8]. Зависимость материальных констант от параметра вида напряженного состояния аппроксимируется кусочно-линейной функцией. Полученная формулировка безмоментной теории оболочек ковариантна и, следовательно, обеспечивает моделирование структурных переходах в любых тонкостенных

конструкциях, геометрия, кинематические связи и нагружение которых удовлетворяют условиям существования безмоментного напряженного состояния или, как минимум, возможности использования решения краевой задачи безмоментной теории оболочек в качестве частного решения краевой задачи моментной теории [4]. Рассмотрен случай пропорционального монотонного нагружения оболочки давлением, приведенным к моделирующей поверхности, допускающем интегрирование определяющих уравнений и переходу к конечной форме записи. В силу статической определенности безмоментного напряженного состояния оболочки компоненты тензора тангенциальных сил определяются из уравнений статики; компоненты тензора тангенциальной структурной и упругой деформации вычисляются по известным тангенциальным силам из определяющих уравнений, компоненты тензора суммарного изменения кривизны при известных компонентах тензора тангенциальной деформации являются решением уравнений совместности [4]. Наконец, компоненты вектора перемещения могут быть определены из кинематических соотношений линейной теории оболочек по известным тензорам тангенциальной деформации и изменения кривизны.

Рассмотрено применение двух различных материальных функций, описывающих распределение микронапряжений в представительном объеме мартенситной фазы,  $\gamma$ -распределения и распределения Вейбулла-Гнеденко. Полученное аналитическое решение задачи для цилиндрической оболочки, нагруженной давлением и дополнительной осевой растягивающей силой, показывает, что распределение Вейбулла-Гнеденко приводит к большим по абсолютной величине значениям деформаций и перемещений; особенно выраженным данный эффект является при отрицательной величине параметра вида напряженного состояния (например, для цилиндрической оболочки, находящейся в состоянии двухосного растяжения); в случае одноосного напряженного состояния при  $s=1$  данный эффект менее заметен. Поскольку решение на основе  $\gamma$ -распределения показывает лучшую корреляцию с результатами экспериментов на чистое растяжение образцов ( $s=1$ ) также, как и на чистое сжатие  $s=-1$  [9], тогда как распределение Вейбулла-Гнеденко приводит к завышенным результатам, представляется целесообразным использование в теории тонких оболочек, как правило, находящихся в двухосном мембранном напряженном состоянии, именно  $\gamma$ -распределение. Пренебрежение существенным эффектом разносопротивляемости СПФ в случае тонкой безмоментной оболочки, деформируемой в режиме мартенситной неупругости, очевидно, приводит к существенному искажению результатов. Особенно заметен эффект на примере нагружения сферической оболочки внешним или внутренним давлением, где амплитуда структурных деформаций при двухосном растяжении составляет ~30% амплитуды, вычисляемой при двухосном сжатии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Sil'chenko L.G., Movchan A.A., Sil'chenko T.L. *Stability of a cylindrical shell made of a shape-memory alloy* // International Applied Mechanics. – 2014. – Vol.50. – No.2. – Pp.171-178.

2. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Abnormal buckling of thin-walled bodies with shape memory effects under thermally induced phase transitions* // *Advanced Structured Materials*. – 2019. – Vol.110. – Pp.493-524.
3. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Казарина С.А., Жаворонок С.И., Сильченко Т.Л. *Устойчивость стержней из никелида титана, нагружаемых в режиме мартенситной неупругости* // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. – 2012. – №3. – С.72-80.
4. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. *Линейная теория тонких оболочек*. – Л.: Политехника, 1990. – 656 с.
5. Мовчан А.А., Казарина С.А., Машихин А.Е., Мишустин И.В., Саганов Е.Б., Сафронов П.А. *Краевые задачи механики для сплавов с памятью формы* // *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. – 2015. – Т.157. – №3. – С.97-110.
6. Kurbatov A.S., Zhavoronok S.I. *On the theory of shape memory membrane shells undergoing thermoelastic phase transitions* // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2023. – Vol.44. – No.6. – Pp.2326-2335.
7. Zhavoronok S.I. *On the incremental constitutive relations and compatibility equations for thin shape memory alloy shells undergoing non-isothermal phase transitions* // *Composites: Mechanics, Computations, Applications. An Int. Journal*. – 2023. – Vol.14. – No.1. – Pp.1-27.
8. Курбатов А.С., Исаченко И.А., Жаворонок С.И. *О решении некоторых задач статики безмоментных оболочек с памятью формы при неизотермических фазовых переходах* // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2023. – Т.29. – №3. – С.402-423.
9. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Экспериментальная идентификация модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // *Деформация и разрушение материалов*. – 2018. – №12. – С.2-11.
10. Жаворонок С.И. *Обратные инкрементальные определяющие соотношения и уравнения совместности деформаций для сплава с памятью, претерпевающих структурные превращения* // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2021. – Т.27. – №4. – С.587-593.

УДК 539.3  
EDN TVXKBR (<https://elibrary.ru/tvxkbr>)  
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.11



## **НЕОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛОСЫ С РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ\***

Коваленко М.Д.<sup>1</sup>, Кержаев А.П.<sup>2</sup>, Меньшова И.В.<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН,  
г. Москва, Россия

<sup>3</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,  
г. Москва, Россия

### **ВВЕДЕНИЕ**

Рассматривается схема решения неоднородных (уравнения равновесия с правой частью) задач теории упругости в бесконечной полосе с какими-либо однородными граничными условиями на ее сторонах (свободные; жестко защемленные; стороны полосы подкреплены ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие и/или изгиб и т.д.). На последнем этапе коэффициенты разложений находятся с помощью соотношения ортогональности Папковича. Это позволяет существенно упростить процесс решения, а окончательные формулы представить в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля, коэффициенты которых записываются в простом явном виде.

Классическое соотношение ортогональности Папковича [1-4] справедливо только для тех случаев, когда стороны полосы свободны или жестко защемлены. В этой работе приводится соотношение ортогональности Папковича, не зависящее от вида однородных граничных условий на сторонах полосы. Затем с его помощью решается неоднородная задача для упругой полосы с ребрами жесткости, расположенными на ее сторонах, в предположении, что ребра жесткости работают только на растяжение-сжатие. Для построения систем собственных функций Папковича–Фадля используется символический метод начальных функций [5,6].

### **1. ПОСТАНОВКА НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛОСЫ С РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ**

Рассмотрим четно-симметричную относительно обеих переменных краевую задачу для упругой полосы  $\{P: |x| < \infty, |y| \leq 1\}$ , на сторонах  $y = \pm 1$  которой имеются ребра жесткости (рис.1). Граничные условия на сторонах полосы в том случае, когда ребра жесткости работают только на растяжение-сжатие, можно записать так

---

\* Исследование М.Д. Коваленко выполнено в рамках государственного задания ИПРИМ РАН. Исследование А.П. Кержаева и И.В. Меньшовой выполнено в рамках государственного задания ИТПЗ РАН.

$$\frac{E_1 f}{Gt} \frac{d^2 u(x, \pm 1)}{dx^2} - \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0, \quad \sigma_y(x, \pm 1) = 0. \quad (1.1)$$

Уравнение в (1.1) представляет собой условие равновесия элементарного участка ребра [5]. Здесь  $u(x, y)$  – продольное перемещение в пластине;  $E_1, f, t$  и  $G$  – соответственно модуль упругости ребра, площадь его поперечного сечения, толщина и модуль сдвига пластины.

Внутри полосы вдоль ее вертикальной оси симметрии на отрезке  $[-\alpha, \alpha]$  ( $\alpha < 0 \leq 1$ ) приложена нагрузка  $Y(y)$  (нечетная функция).

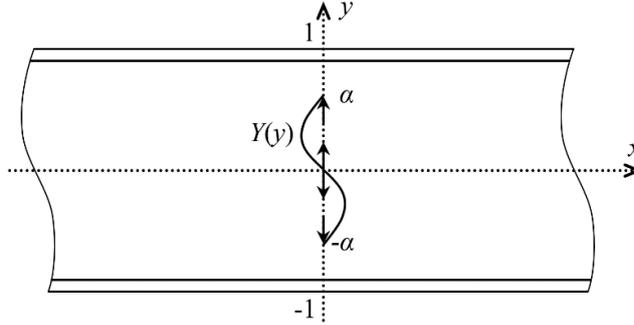


Рис.1. Схема неоднородной задачи для полосы с ребрами жесткости.

Удовлетворяя граничным условиям (1.1) с помощью метода начальных функций [5,6], получим характеристическое уравнение для рассматриваемой задачи и выражения для собственных функций Папковича–Фадля.

Будем рассматривать полосу  $\Pi$  как стык двух полуполос  $\{\Pi^+ : x \geq 0, |y| \leq 1\}$  и  $\{\Pi^- : x \leq 0, |y| \leq 1\}$ . В этом случае функция  $Y(y)$  равна взятому с обратным знаком скачку касательных напряжений на линии стыка полуполос

$$Y(y) = -[\tau_{xy}(+0, y) - \tau_{xy}(-0, y)] = -2\tau(y). \quad (1.2)$$

Пусть на торце правой полуполосы  $\Pi^+$  известны касательные напряжения, равные  $\tau(y)$ . Решение будем искать в виде рядов

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} [A_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}], \quad \sigma_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} [A_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}], \\ \tau_{xy}(x, y) &= \operatorname{sign} x \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} [A_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}], \\ U(x, y) &= \operatorname{sign} x \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} [A_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}], \quad V(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} [A_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|}] \end{aligned} \quad (1.3)$$

по собственным функциям Папковича–Фадля, удовлетворяющим граничным условиям (1.1)

$$\begin{aligned} s_x(\lambda_k, y) &= D \lambda_k^2 \left[ \left( \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k + \nu \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y \right] + \\ &\quad + (1+\nu) \lambda_k \left[ (\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y \right], \\ s_y(\lambda_k, y) &= D \lambda_k^2 \left[ \left( \cos \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k \right) \cos \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y \right] + \\ &\quad + (1+\nu) \lambda_k \left[ (\sin \lambda_k + \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_{xy}(\lambda_k, y) &= D\lambda_k^2 \left[ \left( \frac{1-\nu}{2} \cos \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k \right) \sin \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \cos \lambda_k y \right] + \\
 &\quad + (1+\nu) \lambda_k^2 (\cos \lambda_k \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y), \\
 \xi(\lambda_k, y) &= \frac{1+\nu}{4} D\lambda_k^2 (\sin \lambda_k \cos \lambda_k y - y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y) + \\
 &\quad + \left( \frac{1-\nu}{2} \sin \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\
 \chi(\lambda_k, y) &= D\lambda_k \left[ \left( \frac{3-\nu}{4} \cos \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k \right) \sin \lambda_k y - \frac{1+\nu}{4} \lambda_k y \cos \lambda_k \cos \lambda_k y \right] + \\
 &\quad + \left( \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k + \sin \lambda_k \right) \sin \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y.
 \end{aligned}$$

В формулах (1.3)  $U(x, y)$  и  $V(x, y)$  – умноженные на  $G$  продольное,  $u(x, y)$ , и поперечное,  $v(x, y)$ , перемещения соответственно;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $A_k$  – неизвестные коэффициенты разложений;  $\pm \lambda_k, \pm \bar{\lambda}_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) – четверки комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения

$$L(\lambda) = D\lambda^2 \cos^2 \lambda + (1+\nu)\lambda(\lambda + \sin \lambda \cos \lambda) = 0, \quad D = \frac{E_1 f}{Gt}, \quad (1.4)$$

отвечающего краевой задаче для бесконечной полосы  $\Pi$  с граничными условиями (1.1).  $L(\lambda)$  – целая функция экспоненциального типа [7]. Для краткости через  $2\text{Re}$  обозначены суммы соответствующих выражений при  $\lambda_k$  и  $\bar{\lambda}_k$ . Для затухающего на бесконечности решения считаем, что  $\text{Re} \lambda_k < 0$ .

## 2. СООТНОШЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ПАПКОВИЧА, НЕ ЗАВИСЯЩЕЕ ОТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Для определения коэффициентов  $A_k$  воспользуемся соотношением ортогональности Папковича. Приведем его без вывода

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \left\{ (1+\nu) \frac{\partial t_{xy}(\lambda_m, y)}{\partial y} \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k} - \left( \int t_{xy}(\lambda_m, y) dy \right) \left[ \lambda_k (s_x(\lambda_k, y) + s_y(\lambda_k, y)) \right] \right\} dy = \\
 = \begin{cases} M_k & (k = m), \\ 0 & (k \neq m). \end{cases} \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

Умножим левую и правую части (1.5) последовательно на  $A_m$  и  $\bar{A}_m$ , затем сложим получившиеся выражения и просуммируем их по индексу  $m=1, 2, \dots$

Обозначив через  $\tau(y) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m t_{xy}(\lambda_m, y) + \bar{A}_m t_{xy}(\bar{\lambda}_m, y)]$  значения рядов на торце правой полуполосы, на основании соотношения ортогональности (1.5) получим

$$A_k = \frac{1}{M_k} \int_{-1}^1 \left\{ (1+\nu) \tau'(y) \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k} - \left( \int \tau(y) dy \right) \left[ \lambda_k (s_x(\lambda_k, y) + s_y(\lambda_k, y)) \right] \right\} dy. \quad (1.6)$$

Штрихом обозначена производная функции (1.2).

Формулы для комплексно сопряженных чисел  $\bar{A}_k$  получаются из (1.6) при замене  $\lambda_k$  на  $\bar{\lambda}_k$ .

### 3. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПОЛОСЫ С РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ. СРАВНЕНИЕ С РЕШЕНИЕМ ДЛЯ СВОБОДНОЙ ПОЛОСЫ

Пусть  $Y(y) = -2y$  и  $\alpha = 1$ . Тогда  $\tau(y) = y$ . Примем  $D = 4$ ,  $\nu = 1/3$  и найдем комплексные корни  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) уравнения (1.4). Подставив соответствующие выражения в формулу (1.6), определим коэффициенты разложений и тем самым найдем решение (1.3) рассматриваемой задачи. Решение для свободной полосы получается из решения (1.3) при  $D = 0$ . В этом случае комплексные числа  $\lambda_k$  являются корнями уравнения  $\lambda + \sin \lambda \cos \lambda = 0$ , как это следует из (1.4), а  $M_k = -4(1 + \nu)^2 \lambda_k^4$ .

На рис.2-4 последовательно показаны распределения нормальных напряжений  $\sigma_x(0.001, y)$ ,  $\sigma_y(0.001, y)$  и касательных напряжений в сечении  $y = 0.99$ .

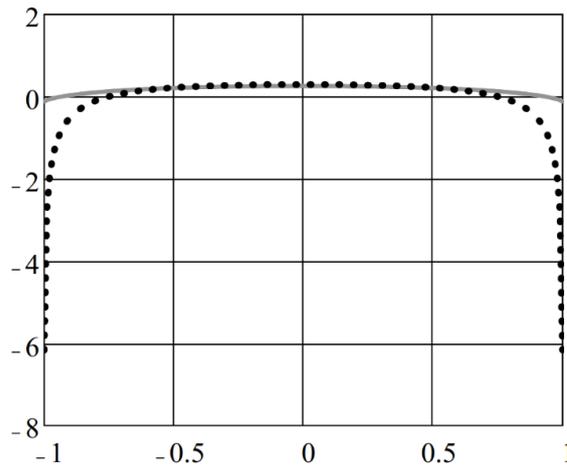


Рис.2. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x(0.001, y)$ .

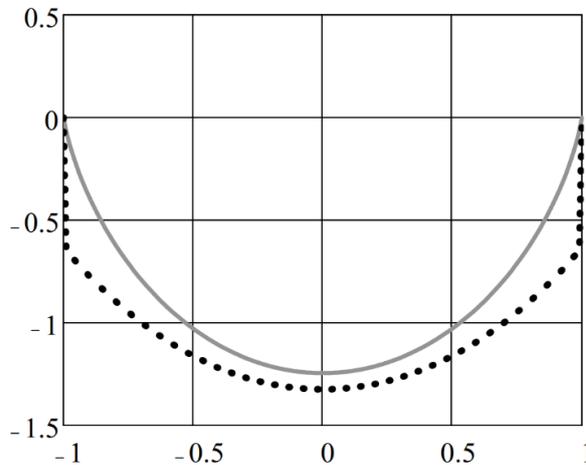


Рис.3. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y(0.001, y)$ .

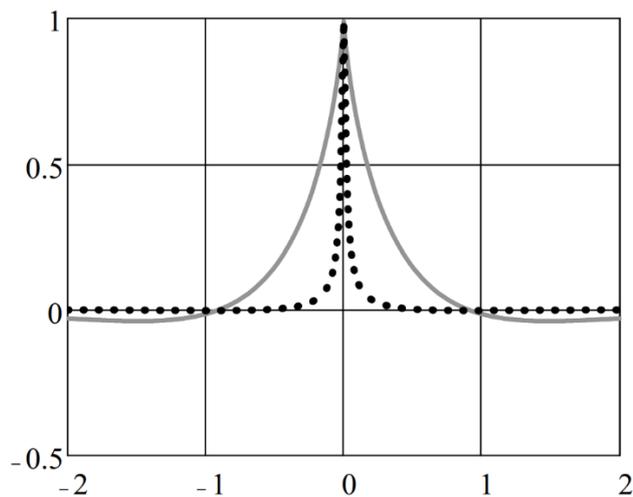


Рис.4. Распределение касательных напряжений  $\tau_{xy}(x, 0.99)$ .

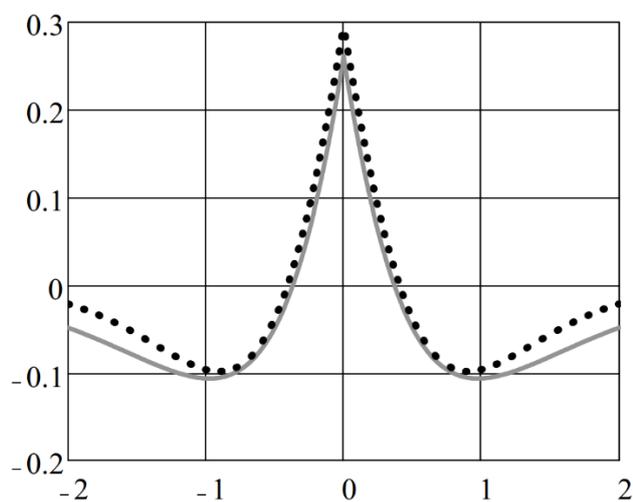


Рис.5. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x(x, 0)$ .

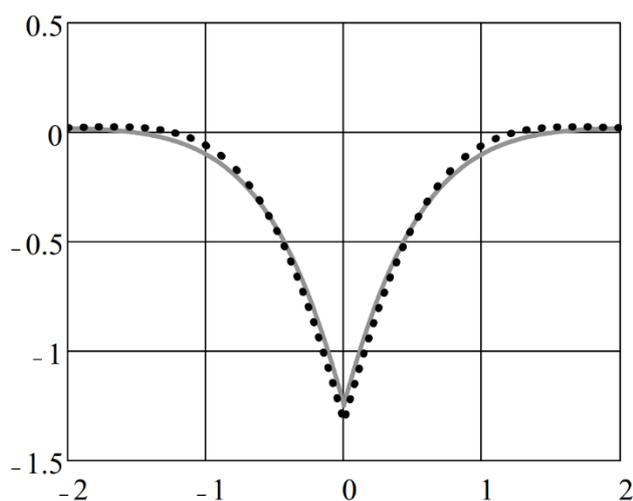


Рис.6. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y(x, 0)$ .

На рис.5,6 показаны распределения нормальных напряжений  $\sigma_x(x,0)$ ,  $\sigma_y(x,0)$  соответственно. Сплошным кривым отвечает решение для полосы с ребрами жесткости, точечным – для свободной полосы.

Значения напряжений в свободной полосе при приближении к точкам  $x=0, y=\pm 1$  логарифмически возрастают (из-за нарушения закона парности касательных напряжений). Однако для напряжений  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  они остаются конечными, т.к. собственные функции  $s_y(\lambda_k, y)$  и  $t_{xy}(\lambda_k, y)$  равны нулю при  $y = \pm 1$  для свободной полосы, т.е. при  $D = 0$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье построено соотношение ортогональности Папковича, не зависящее от вида однородных граничных условий на сторонах полосы, и приведен пример его использования при решении неоднородной задачи для упругой полосы, стороны которой подкреплены ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие. Примерами таких задач могут служить не только собственно неоднородные задачи, но задачи с упругими накладками, расположенными внутри пластины, задачи с трещинами в упругой полосе и др. Решения этих задач строятся в явном виде как разложения по тем или иным системам собственных функций Папковича-Фадля, вид которых зависит от однородных граничных условий на сторонах полосы. На последнем этапе коэффициенты разложений находятся с помощью соотношения ортогональности Папковича.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Папкович П.Ф. *Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы* // Докл. АН СССР. – 1940. – Т.27. – №4. – С.335-339.
2. Гринберг Г.А. *О методе, предложенном П.Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях* // ПММ. – 1953. – Т.17. – №2. – С.211-228.
3. Коваленко М.Д., Шуляковская Т.Д. *Разложения по функциям Фадля–Папковича в полосе. Основы теории* // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – №5. – С.78-98.
4. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Yu G. *An inhomogeneous problem for an elastic half-strip: an exact solution* // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2021. – Vol.26. – No.11. – Pp.1565-1580.
5. Власов В.В. *Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики*. – М.: Стройиздат, 1975. – 224 с.
6. Matrosov A.V., Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P. *Method of initial functions and integral Fourier transform in some problems of the theory of elasticity* // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. – 2020. – Vol.71. – No.1. – Art.24. – 19 p.
7. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций*. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.

УДК 539.3  
EDN UHDMVQ (<https://elibrary.ru/uhdmvq>)  
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.12



## **ИНКРЕМЕНТАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПАМЯТЬЮ, ПРЕТЕРПЕВАЮЩЕЙ СТРУКТУРНЫЕ ПЕРЕХОДЫ\***

Курбатов А.С., Жаворонок С.И.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

### **ВВЕДЕНИЕ**

Некоторые изделия из сплавов с эффектом памяти формы (СПФ), например, демпферы, виброгасители, различные актуаторы и т.п., допускают выполнение рабочего элемента в виде тонкостенной конструкции [1]. Расчет активных и адаптивных элементов подобного класса, как правило, сводится к формулировке модели, имеющей вид существенно нелинейной краевой или начально-краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярным вырождением, характерным для теории тонких оболочек [2]. Численное решение таких задач сопряжено с известными трудностями, порождаемыми краевым эффектом. Для качественного анализа процессов деформирования тонкостенных конструкций с памятью и обоснованного выбора конструктивных решений необходима теория оболочек, претерпевающих фазовые и структурные переходы, описывающая основные явления, наблюдаемые в СПФ [3]. Наиболее развитая феноменологическая теория термомеханического поведения СПФ, способная описывать большинство экспериментально обнаруженных эффектов, имеет ограниченное приложение к моделированию тонких оболочек (известные решения получены для толстостенных оболочек канонической геометрии в трехмерной постановке задачи [4]), кроме того, требует обращения инкрементальных определяющих соотношений, разрешенных относительно приращений деформаций [5]. В то же время постановка задачи теории оболочек в обобщенных усилиях, сводящаяся к уравнениям статики и совместности [2], позволяет избежать необходимости обращения определяющих соотношений. В работе [6] были получены определяющие уравнения для тонкой оболочки, претерпевающей обратный фазовый переход, а в [7] и [8] – инкрементальные определяющие соотношения для неизотермического прямого и обратного фазовых переходов и соответствующие уравнения совместности. Формулировка инкрементальных деформационных краевых условий теории тонких оболочек с памятью приведена в [7]. В то же время обратные определяющие уравнения для изотермического структурного перехода в СПФ были получены в работе [9] только для трехмерной постановки задачи, причем без учета зависимости материальных констант от вида напряженного состояния [10]. Ниже предложены новые инкрементальные определяющие соотношения для тонкой оболочки Кирхгоффа, претерпевающей изотермический структурный переход, с учетом параметра вида напряженного состояния, в общем виде, аналогичном [7] и [8].

---

\* Работа выполнена в рамках Государственного задания ИПРИМ РАН  
(номер гос. регистрации темы 1023032300192-8-2.3.2).

# 1. МОДЕЛЬ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ ВО ВНУТРЕННИХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Моделью тонкой оболочки является материальная поверхность, оснащенная приведенными физическими постоянными, порождаемыми редукцией пространственной размерности трехмерной модели деформируемого твердого тела. Геометрическая модель оболочки – двумерное многообразие  $S$  с определенными на нем криволинейными координатами  $\xi^\alpha : S \rightarrow D_\xi \subseteq \mathbb{R}^2$  и двумя симметрическими тензорными полями, метрикой  $a_{\alpha\beta} : TS \otimes TS \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$  и кривизной  $b_{\alpha\beta} : TS \otimes NS \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$ ,  $TS$  – касательное,  $NS$  – касательное расслоение  $S$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \dots = 1, 2$ . Пусть  $\forall M \in S \setminus S^\times$   $a = |a_{\alpha\beta}| \equiv \det(a_{\alpha\beta}) \neq 0$ ,  $\mu(S^\times) = 0$ , притом для тензоров  $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$  справедливы соотношения Петерсона-Кодацци [2]

$$\epsilon^{\alpha\beta} \nabla_\alpha b_{\beta\gamma} = 0, \quad \epsilon^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma, \delta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda, \delta}) = \epsilon^{\alpha\beta} b_{\alpha\delta} b_{\beta\gamma}, \quad (1.1)$$

$\epsilon_{\alpha\beta}$  – компоненты дискриминантного тензора,  $\Gamma_{\alpha\beta, \gamma} = \frac{1}{2} (-\partial_\gamma a_{\alpha\beta} + \partial_\alpha a_{\beta\gamma} + \partial_\beta a_{\gamma\alpha})$  – символы Кристоффеля; тогда  $S$  погружено в аффинное пространство,  $S \subset \mathbb{R}^3$

$$\forall M \in S \quad \exists \mathbf{r} : D_\xi \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r} = x^i (\xi^\alpha) \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3;$$

$x^i \in C^{(n)}(D_\xi)$ ,  $n \geq 2$  – прямоугольные декартовы координаты,  $\mathbf{e}_i$  – декартов базис;

$$TS = \bigcup_{M \in S} M \times T_M S; \quad NS = \bigcup_{M \in S} M \times N_M S;$$

$$T_M S = \{d\xi^\alpha \mathbf{r}_\alpha : \mathbf{r}_\alpha = \partial_\alpha \mathbf{r} = \partial_\alpha x^i \mathbf{e}_i\}; \quad N_M S = N_M^* S = \{d\zeta \mathbf{n} : \mathbf{n} = \epsilon^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\alpha \wedge \mathbf{r}_\beta\};$$

$\mathbf{r}(\xi^\alpha)$  – радиус-вектор,  $T_M S, N_M S$  – касательное и нормальное пространство в точке  $M \in S$ , определяемые локальным базисом  $\mathbf{r}_\alpha$  и единичной нормалью  $\mathbf{n}$ , задающей ориентацию  $S$  в  $\mathbb{R}^3$ . В силу  $a(S \setminus S^\times) \neq 0 \quad \forall M \in S \setminus S^\times \quad \exists! a^{\gamma\beta} : a_{\alpha\beta} a^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\gamma$  – контравариантные компоненты метрического тензора, так что

$$\forall M \in S \setminus S^\times \quad \exists \mathbf{r}^\beta = a^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\alpha : T_M^* S = \{\eta_\beta \mathbf{r}^\beta : \eta_\beta \in \mathbb{R}^2\}, \quad T^* S = \bigcup_{M \in S} M \times T_M^* S$$

– кокасательное расслоение  $S$ ;  $a_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta$ , компоненты тензора кривизны и символы Кристоффеля определяются соотношениями Гаусса и Вайнгартена [2]

$$b_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_\beta; \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \partial_\alpha \mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}^\gamma,$$

Пусть  $S'$  – некоторая актуальная конфигурация поверхности  $S$  с соответствующими ей метрикой  $a'_{\alpha\beta}$  и кривизной  $b'_{\alpha\beta}$ , тогда деформирование поверхности определяется двумя симметрическими тензорными полями на  $T^* S$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (a'_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}); \quad \varkappa_{\alpha\beta} = b'_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} \quad (1.2)$$

$\epsilon_{\alpha\beta}$  – тангенциальная деформация,  $\varkappa_{\alpha\beta}$  – изменение кривизны  $S$ . Если  $\epsilon_{\alpha\beta}$  и  $\varkappa_{\alpha\beta}$  удовлетворяют уравнениям совместности деформаций [2]

$$\begin{aligned} \nabla_\beta (\epsilon^{\gamma\beta} \epsilon^{\alpha\delta} \mu_{\gamma\delta}) + b_\lambda^\alpha \nabla_\beta (\epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\delta} \epsilon_{\gamma\delta}) &= 0; \\ \nabla_\alpha \nabla_\beta (\epsilon^{\beta\gamma} \epsilon^{\alpha\delta} \epsilon_{\gamma\delta}) - b_{\alpha\beta} (\epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon^{\beta\delta} \mu_{\gamma\delta}) &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

то  $S' \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\forall M' \in S' \exists \mathbf{r}'(\xi^\alpha) = \mathbf{r} + \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} = u_\beta \mathbf{r}^\beta + w \mathbf{n}$  – вектор перемещения точки  $S$ .

Соотношения (1.2) и (1.3) определяют внутреннюю кинематику поверхности.

Оболочка как деформируемое твердое тело  $V \in \mathbb{R}^3$  обладает толщиной  $h$ . В том случае, когда толщина достаточно мала, т.е.  $h^{-1} \max k_\alpha \gg 1$ ,  $k_\alpha : |b_{\beta\gamma} - ka_{\beta\gamma}| = 0$  – главные кривизны  $S$ ,  $V \in \mathbb{R}^3$  – малая  $h$ -окрестность реперной поверхности:  $\forall M_S \in V \exists \mathbf{R} = \mathbf{r} + \zeta \mathbf{n}$ ,  $\zeta \in [-h/2, h/2]$  – нормальная координата. Тогда деформация оболочки  $V \rightarrow V'$  задается линейным тензором деформации с компонентами  $e_{ij}$ , в случае канонической теории оболочек определенным деформациями  $S$  [2]

$$e_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \zeta \kappa_{\alpha\beta} + \bar{o}(h^2) \approx \varepsilon_{\alpha\beta} - \zeta \chi_{\alpha\beta}, \quad e_{\alpha 3} \rightarrow 0, \quad |e_{33}| \ll \|e_{\alpha\beta}\|, \quad (1.4)$$

причем тангенциальная деформация  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  и изменение кривизны  $\chi_{\alpha\beta}$  являются коэффициентами ряда Маклорена для  $e_{\alpha\beta}$  в окрестности поверхности  $S : \zeta = 0$ ,

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}|_{S=0}; \quad -\chi_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} e_{\alpha\beta} \Big|_{\zeta=0}, \quad \kappa_{\alpha\beta} = -\chi_{\alpha\beta} + b_\alpha^\gamma \varepsilon_{\beta\gamma} + b_\beta^\gamma \varepsilon_{\alpha\gamma}. \quad (1.5)$$

Соотношения (1.4) и (1.5) являются ключевыми для построения определяющих уравнений теории оболочек с памятью путем редукции пространственной размерности трехмерной модели термоупругих переходов [10].

Напряжённое состояние оболочки, в свою очередь, определяется двумя тензорными полями на  $TS$  – тензором тангенциальных сил  $N^{\alpha\beta}$  и моментов  $M^{\alpha\beta}$

$$\sigma^{\alpha\beta} = h^{-1} N^{\alpha\beta} + 12\zeta h^{-3} M^{\alpha\beta} + \bar{o}(h^2), \quad \|\sigma^{\alpha 3}\| \ll \|\sigma^{\alpha\beta}\|, \quad \sigma^{33} \rightarrow 0; \quad (1.6)$$

$$N^{\alpha\beta} \approx \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\beta} d\zeta; \quad M^{\alpha\beta} \approx \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\beta} \zeta d\zeta. \quad (1.7)$$

Равновесному состоянию оболочки соответствуют тензоры  $N^{\alpha\beta}$  и  $M^{\alpha\beta}$ , удовлетворяющие уравнениям статики и соответствующим краевым условиям [2]

$$\nabla_\beta N^{\alpha\beta} - b_\gamma^\alpha \nabla_\beta M^{\gamma\beta} - q^\alpha \approx 0; \quad \nabla_\alpha \nabla_\beta M^{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} - p \approx 0; \quad (1.8)$$

Постановка во внутренних переменных краевой задачи статики тонкой оболочки в рамках канонической теории сводится к уравнениям статики (1.8), уравнениям совместности (1.3), статическим краевым условиям и деформационным краевым условиям [2,7]. Замыкают постановку задачи определяющие уравнения, соответствующие модели материала оболочки.

## 2. ИНКРЕМЕНТАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

В случае линейного деформирования деформация СПФ допускает представление в виде суммы  $e_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}^E + e_{\alpha\beta}^T + e_{\alpha\beta}^\pm + e_{\alpha\beta}^S$ , где, в свою очередь [3],

$$e_{ij}^E = E^{-1}(q) \left[ \frac{1+\nu}{2} (g_{ik} g_{jl} + g_{il} g_{jk}) - \frac{\nu}{3} g_{ij} g_{kl} \right] \sigma^{kl}; \quad e_{kl}^T = \alpha(q) (T - T_0) a_{\alpha\beta}; \quad (2.1)$$

– упругая и температурная составляющие. Зависимость модуля упругости и коэффициента линейного расширения от фазового состава СПФ, заданного

скалярным полем  $q \in [0,1]$  – объемной долей мартенсита ( $q=1$  соответствует чистому мартенситу,  $q=0$  – аустениту), определяется правилом смеси (2.2) [3]

$$E^{-1}(q) = qE_M^{-1} + (1-q)E_A^{-1}; \quad \alpha(q) = q\alpha_M + (1-q)\alpha_A; \quad (2.2)$$

$T$  – текущая,  $T_0$  – референсная температуры,  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Конечные соотношения для  $e_{\alpha\beta}^{\pm}$  и  $e_{\alpha\beta}^S$  – деформаций, порождаемых фазовым превращением и структурным переходом – в общем случае не существуют, но для малых приращений известны следующие определяющие уравнения [10]

$$\delta e_{ij}^{\pm} = \left\{ \frac{3}{2} \rho_{D1}(s) [1 - qf^{\pm}(q)] \varphi_1(\sigma_i, \beta_k) \Sigma_{ij} + f^{\pm}(q) \left[ e_{ij}^{\pm} + e_{ij}^S - \frac{1}{3} \varepsilon_0 q g_{ij} \right] + \frac{1}{3} \varepsilon_0 g_{ij} \right\} \delta q; \quad (2.3)$$

$$\delta e_{ij}^S = \frac{3}{2} \rho_{D2}(s) q_S \varphi_2'(\sigma_i, \beta_k) \Sigma_{ij} \delta \sigma_i, \quad g^{ij} \varepsilon_{ij}^S \equiv 0; \quad (2.4)$$

$$s = \frac{27}{2} |\Sigma_{ij}|, \quad |\cdot| \equiv \det(\cdot); \quad (2.5)$$

$$\Sigma_{ij} = \sigma_i^{-3} s_{ij}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma g_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3} g_{kl} \sigma^{kl}, \quad \sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} s^{ij} s_{ij}}; \quad (2.6)$$

$\rho_{D1,2}(s)$  – точные верхние грани фазовой ( $D1$ ) и структурной ( $D2$ ) деформации изменения формы;  $s$  – параметр вида напряжённого состояния;  $\sigma g^{ij}$ ,  $\Sigma_{ij}$  – шаровой тензор и направляющий тензор девиатора напряжения  $s_{ij}$ ;  $q_S$  – объемная доля мартенсита, участвующая в структурном переходе;  $\beta_k = \beta_k(s)$ ,  $k=1,2,\dots$  – материальные константы, зависящие от вида напряженного состояния [10].

### 3. ИНКРЕМЕНТАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ В РЕЖИМЕ МАРТЕНСИТНОЙ НЕУПРУГОСТИ

Инкрементальные определяющие уравнения для тонкой оболочки, претерпевающей фазовое превращение (2.3) в отсутствие структурного перехода, получены в [7,8]. Рассмотрим оболочку, находящуюся в полностью мартенситном фазовом состоянии при  $T_F^+ > T = \text{Const}$ , где  $T_F^+$  – температура завершения прямого фазового перехода, и предположим, что  $M$ -фазовое состояние  $\forall M \in V$   $q \equiv 1$  достигнуто вследствие  $A \rightarrow M$  превращения при  $\delta T < 0$ ,  $\sigma_i \equiv 0$ , так что весь мартенсит является разориентированным,  $q_S = q = 1$ . Тогда возникающие при действии на оболочку поля главного вектора внешних сил  $\mathbf{q} = q^{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} + p \mathbf{n}$ , приведенного к  $S$ , главного вектора и главного момента внешних сил на контуре  $\Gamma_{\sigma}$ , а также наложении кинематических связей на контуре  $\Gamma_{\varepsilon}$  напряжения (1.6) приводят к изолированному структурному переходу с деформациями (2.4), сопровождаемыми упругими деформациями (2.2), в случае тонкой оболочки в состоянии мартенситной неупругости имеющими вид [7]

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^E = A_{\alpha\beta\gamma\delta}^E N^{\gamma\delta}; \quad \varkappa_{\alpha\beta}^E = -12h^{-2} A_{\alpha\beta\gamma\delta}^E M^{\gamma\delta}; \quad A_{\alpha\beta\gamma\delta}^E = h^{-1} E_M^{-1} \Delta_{\alpha\beta\gamma\delta}; \quad (3.1)$$

$$\Delta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1+\nu}{2} (a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} + a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma}) - \frac{\nu}{3} a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta},$$

$A_{\alpha\beta\gamma\delta}^E$  – ковариантные компоненты тензора упругой податливости на  $T^*S$ .

В соответствии с (1.4), (1.5) приращения составляющих тангенциальной деформации и изменения кривизны вследствие структурного перехода имеют вид

$$\delta \varepsilon_{\alpha\beta}^S = \delta e_{\alpha\beta}^S \Big|_{\zeta=0}; \quad -\delta \varkappa_{\alpha\beta}^S = \frac{\partial}{\partial \zeta} \delta e_{\alpha\beta}^S \Big|_{\zeta=0}, \quad (3.2)$$

где  $\delta e_{\alpha\beta}^S$  определяется соотношением (2.4) в форме (3.3) [10]

$$\delta e_{\alpha\beta}^S = \frac{3}{2} \rho_{D2}(s) \Phi_2'(\sigma_i, \beta_k) \Sigma_{\alpha\beta} \delta \sigma_i; \quad (3.3)$$

направляющий тензор, девиатор, среднее напряжение и интенсивность напряжения (2.6) в тонкой оболочке определяются соотношениями

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sigma_i} \bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma^{\gamma\delta}; \quad s_{\alpha\beta} = \bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma^{\gamma\delta}; \quad \sigma = \frac{1}{3} a_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}; \quad \sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\gamma\delta}}, \quad (3.4)$$

$$\bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} + \frac{1}{2} a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma} - \frac{1}{3} a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta}.$$

С учетом предположений (1.6) о величине компонентов  $\sigma^{ij}$  тензора напряжения в достаточно тонкой оболочке для компонентов девиатора  $s_{ij}$  и, следовательно, параметра  $s$  (2.5) справедливы следующие соотношения (3.5)

$$s_{ij} = \begin{cases} s_{\alpha\beta}, & i = \alpha, j = \beta; \\ -\sigma, & i = j = 3; \end{cases} \quad s = -\frac{27}{2} \frac{\sigma}{\sigma_i} |\Sigma_{\alpha\beta}|; \quad \Sigma_{\alpha\beta} = \frac{s_{\alpha\beta}}{\sigma_i}. \quad (3.5)$$

Согласно (3.2) и (3.3) приращение тангенциальной структурной деформации оболочки в состоянии мартенситной неупругости определяется уравнением

$$\delta \varepsilon_{\alpha\beta}^S = \frac{3}{2} \rho_{D2}(s^0) \Phi_2'(\sigma_i^0, \beta_k(s^0)) \Sigma_{\alpha\beta}^0 \delta \sigma_i^0; \quad (3.6)$$

здесь введены параметр вида мембранного напряженного состояния  $s^0$

$$s^0 = s \Big|_{\zeta=0} = -\frac{27}{2} \frac{\sigma^0}{\sigma_i^0} |\Sigma_{\alpha\beta}^0|; \quad (3.7)$$

среднее мембранное напряжение  $\sigma^0$  и интенсивность мембранного напряжения

$$\sigma^0 = \frac{1}{3} a_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} \Big|_{s=0} = \frac{1}{3h} a_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta}; \quad \sigma_i^0 = \sigma_i \Big|_{s=0} = h^{-1} \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\alpha\beta} N^{\gamma\delta}}; \quad (3.8)$$

а также направляющий тензор девиатора мембранного напряжения  $\Sigma_{\alpha\beta}^0$

$$\Sigma_{\alpha\beta}^0 = \sigma_i^{-1} \bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma^{\gamma\delta} \Big|_{\zeta=0} = h^{-1} (\sigma_i^0)^{-1} \bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\gamma\delta}; \quad (3.9)$$

С учетом (3.9) квадратичный инвариант направляющего тензора имеет вид

$$|\Sigma_{\alpha\beta}^0| \equiv \det(\Sigma_{\alpha\beta}^0) = \frac{1}{2} (\sigma_i^0)^{-2} \epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon^{\beta\delta} s_{\alpha\beta}^0 s_{\gamma\delta}^0 = h^{-2} (\sigma_i^0)^{-2} \tilde{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\alpha\beta} N^{\gamma\delta}; \quad (3.10)$$

$$\tilde{\Delta}_{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon^{\beta\delta} \bar{\Delta}_{\alpha\beta\lambda\mu} \bar{\Delta}_{\gamma\delta\nu\rho} = \frac{1}{4} (\epsilon_{\lambda\nu} \epsilon_{\mu\rho} + \epsilon_{\lambda\rho} \epsilon_{\mu\nu}) - \frac{2}{9} a_{\lambda\mu} a_{\nu\rho}.$$

Из определения приращения интенсивности напряжения в оболочке  $\delta \sigma_i$

$$\delta \sigma_i = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma^{\alpha\beta}} \delta \sigma^{\alpha\beta} = \frac{3}{2} \Sigma_{\alpha\beta} \delta \sigma^{\alpha\beta} \quad (3.11)$$

вытекает интенсивность мембранного напряженного состояния  $\delta \sigma_i^0 = \frac{3}{2h} \Sigma_{\alpha\beta}^0 \delta N^{\alpha\beta}$ , откуда с учетом (3.6) следует общий вид (3.12) инкрементального определяющего уравнения для тангенциальной деформации структурного перехода

$$\delta \varepsilon_{\alpha\beta}^S = A_{\alpha\beta\gamma\delta}^S \delta N^{\gamma\delta}, \quad (3.12)$$

$A_{\alpha\beta\gamma\delta}^S$  – тангенциальная податливость тонкой оболочки, претерпевающей структурный переход в состоянии мартенситной неупругости

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta}^S = \frac{9}{4h} \rho_{D2}(s^0) \Phi_2'(\sigma_i^0, \beta_k(s^0)) \Sigma_{\alpha\beta}^0 \Sigma_{\gamma\delta}^0; \quad (3.13)$$

Так как  $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}$ , то  $\Sigma_{\alpha\beta} = \Sigma_{\beta\alpha}$ ; следовательно,  $A_{\alpha\beta\gamma\delta}^S = A_{\delta\gamma\beta\alpha}^S$ .

Далее для определенности примем кусочно-линейную аппроксимацию зависимости точной верхней грани структурной деформации и материальных констант  $\rho_{D2}(s)$ ,  $\beta_k(s)$  в виде (3.14) и (3.15)

$$\rho_{D2}(s) = \rho_{D2}(1) \begin{cases} 1, & s \in [0, 1]; \\ 1 + s_{\Delta} \rho_{D2}, & s \in [-1, 0]; \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\beta_k(s) = \beta_k(1) \begin{cases} 1, & s \in [0, 1]; \\ 1 + s_{\Delta} \beta_k, & [-1, 0]. \end{cases} \quad (3.15)$$

Согласно (3.2) и (3.3) приращение изменения кривизны моделирующей поверхности оболочки  $S$  определяется следующим образом

$$\begin{aligned} -\delta \chi_{\alpha\beta}^S &= \frac{9}{4h} \left\{ \left[ \frac{\partial \rho_{D2}(s)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \varphi'_2(\sigma_i^0, \beta_k(s^0)) + \rho_{D2}(s^0) \times \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left( \varphi''_2(\sigma_i, \beta_k(s^0)) \frac{\partial \sigma_i}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} + \sum_{k=0}^m \frac{\partial \varphi'_2(\sigma_i, \beta_k(s))}{\partial \beta_k(s^0)} \frac{\partial \beta_k(s)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \right) \right] \Sigma_{\alpha\beta}^0 \Sigma_{\gamma\delta}^0 + \\ &\quad + \rho_{D2}(s^0) \varphi'_2(\sigma_i, \beta_k(s^0)) \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \Sigma_{\alpha\beta} \Big|_{\zeta=0} \Sigma_{\gamma\delta} \Big|_{\zeta=0} + \Sigma_{\alpha\beta} \Big|_{\zeta=0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \Sigma_{\gamma\delta} \Big|_{\zeta=0} \right) \Big\} \delta N^{\gamma\delta} + \\ &\quad + \frac{9}{4h} \rho_{D2}(s^0) \varphi'_2(\sigma_i, \beta_k(s^0)) \Sigma_{\alpha\beta}^0 \Sigma_{\gamma\delta}^0 \frac{12}{h^2} \delta M^{\gamma\delta}. \end{aligned}$$

Здесь с учетом (3.14) и (3.15)

$$\frac{\partial \rho_{D2}(s)}{\partial s} \Big|_{\zeta=0} = \Theta(-s^0) \rho_{D2}(1) \Delta \rho_{D2}; \quad \frac{\partial \beta_k(s)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = \Theta(-s^0) \beta_k(1) \Delta \beta_k;$$

из определения параметра вида напряженного состояния (2.5) и (3.5) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} &= -\frac{27}{2} \left( \frac{1}{\sigma_i^0} \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} - \frac{\sigma^0}{\sigma_i^0} \frac{\partial \sigma_i}{\sigma_i \partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \right) \Big|_{\Sigma_{\alpha\beta}^0} - \\ &\quad - \frac{27}{2} \frac{\sigma^0}{\sigma_i^0} \left[ \frac{1}{(\sigma_i^0)^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \tilde{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\gamma\delta} \Big|_{\zeta=0} - \Big|_{\Sigma_{\alpha\beta}^0} \frac{\partial \sigma_i^2}{\sigma_i^2 \partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \right] = s^0 \Delta s, \\ \Delta s &= \frac{\sigma^1}{\sigma^0} + \left( \frac{\sigma_i^{10}}{\sigma_i^0} \right)^2 \left( \frac{|\Sigma_{\alpha\beta}^{10}|}{|\Sigma_{\alpha\beta}^0|} - 2 \right), \end{aligned}$$

здесь аналогично (3.9) определяется квадратичный инвариант направляющего тензора (3.16), интенсивность  $\sigma_i^{10}$  мембранно-моментного и  $\sigma_i^1$  моментного напряженных состояний оболочки (3.17) и среднее моментное напряжение (3.18)

$$\Big|_{\Sigma_{\alpha\beta}^{10}} = \frac{12 \tilde{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\alpha\beta} M^{\gamma\delta}}{h^4 (\sigma_i^{10})^2}. \quad (3.16)$$

$$\sigma_i^{10} = \frac{2\sqrt{3}}{h^2} \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\alpha\beta} M^{\gamma\delta}}; \quad \sigma_i^1 = \frac{12}{h^3} \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\alpha\beta} M^{\gamma\delta}}; \quad (3.17)$$

$$\sigma^1 = \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = \frac{1}{3} \frac{12}{h^3} a_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}. \quad (3.18)$$

С учетом (3.17)

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \Sigma_{\alpha\beta} \Big|_{\zeta=0} = \frac{12}{h^3} \bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} M^{\gamma\delta} - \frac{1}{h \sigma_i^0} \bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\gamma\delta} \frac{\partial \sigma_i}{\sigma_i \partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = \frac{\sigma_i^1}{\sigma_i^0} \Sigma_{\alpha\beta}^1 - \left( \frac{\sigma_i^1}{\sigma_i^0} \right)^2 \Sigma_{\alpha\beta}^0.$$

Инкрементальное определяющее уравнение для изменения кривизны поверхности  $S$  оболочки вследствие структурного перехода имеет общий вид

$$-\delta \chi_{\alpha\beta}^S = 12h^{-2} A_{\alpha\beta\gamma\delta}^S \delta M^{\gamma\delta} + B_{\alpha\beta\gamma\delta}^S \delta N^{\gamma\delta}, \quad (3.19)$$

где  $B_{\alpha\beta\gamma\delta}^S$  – тангенциально-изгибная податливость оболочки с памятью при структурном переходе в состоянии мартенситной неупругости

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta\gamma\delta}^S &= \frac{9}{4h} \rho_{D2}(s^0) q^0 \varphi_2'(\sigma_i^0, \beta_k(s^0)) \frac{\sigma_i^1}{\sigma_i^0} (\Sigma_{\alpha\beta}^0 \Sigma_{\gamma\delta}^1 + \Sigma_{\alpha\beta}^1 \Sigma_{\gamma\delta}^0) + \\ &+ \left[ \Theta(-s^0) \Delta s \left( \frac{s^0 \Delta \rho_{D2}}{1 + s^0 \Delta \rho_{D2}} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_2'(\sigma_i, \beta_k)}{\varphi_2'(\sigma_i, \beta_k(s^0)) \partial \beta_k} \frac{s^0 \Delta \beta_k}{1 + s^0 \Delta \beta_k} \right) + \right. \\ &\left. + \left( \frac{\varphi_2''(\sigma_i, \beta_k(s^0)) \sigma_i^0}{\varphi_2'(\sigma_i, \beta_k(s^0))} - 1 \right) \left( \frac{\sigma_i^{10}}{\sigma_i^0} \right)^2 + \frac{\sigma_i^1}{\sigma_i^0} \right] A_{\alpha\beta\gamma\delta}^S. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Приращение изгибной деформации  $\delta \mu_{\alpha\beta}^S$  записывается следующим образом

$$\begin{aligned} \delta \mu_{\alpha\beta}^S &= -\chi_{\alpha\beta}^S + b_{\alpha}^{\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma}^S = 12h^{-2} A_{\alpha\beta\gamma\delta}^S \delta M^{\gamma\delta} + \bar{B}_{\alpha\beta\gamma\delta}^S \delta N^{\gamma\delta}, \\ \bar{B}_{\alpha\beta\gamma\delta}^S &= B_{\alpha\beta\gamma\delta}^S + b_{\alpha}^{\lambda} A_{\lambda\beta\gamma\delta}^S. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Для упругой изгибной деформации  $\mu_{\alpha\beta}^E \approx 12h^{-2} A_{\alpha\beta\gamma\delta}^E M^{\gamma\delta} + b_{\alpha}^{\lambda} A_{\lambda\beta\gamma\delta}^E N^{\gamma\delta}$ .

#### 4. ИНКРЕМЕНТАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОВМЕСТИМОСТИ ДЛЯ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ В СОСТОЯНИИ МАРТЕНСИТНОЙ НЕУПРУГОСТИ

Пусть компоненты поля главного вектора внешних сил, приведенных к срединной поверхности оболочки  $S$ , разложены в сумму накопленных в процессе последовательных нагружений величин  $q_{\Sigma}^{\alpha}$ ,  $p_{\Sigma}$  и малых приращений  $\delta q^{\alpha}$ ,  $\delta p$

$$q^{\alpha} = q_{\Sigma}^{\alpha} + \delta q^{\alpha}; \quad p = p_{\Sigma} + \delta p,$$

как и соответствующие компоненты тензоров тангенциальных сил и моментов

$$N^{\gamma\delta} = N_{\Sigma}^{\gamma\delta} + \delta N^{\gamma\delta}; \quad M^{\gamma\delta} = M_{\Sigma}^{\gamma\delta} + \delta M^{\gamma\delta},$$

удовлетворяющие инкрементальным уравнениям статического равновесия (4.1)

$$\nabla_{\delta} \delta N^{\gamma\delta} - b_{\beta}^{\gamma} \nabla_{\alpha} \delta M^{\alpha\beta} = \delta q^{\alpha}; \quad \nabla_{\gamma} \nabla_{\delta} \delta M^{\gamma\delta} + b_{\gamma\delta} \delta N^{\gamma\delta} = \delta p \quad (4.1)$$

и соответствующим им инкрементальным краевым условиям [7]  $\Gamma_{\sigma} \cap \partial S$

$$\begin{aligned} v_{\alpha} v_{\beta} \delta N^{\alpha\beta} + \eta_{\tau} v_{\alpha} \tau_{\beta} \delta M^{\alpha\beta} &= \delta T_{\nu}^*; \quad v_{\alpha} \tau_{\beta} \delta N^{\alpha\beta} - \sigma_{\tau} v_{\alpha} \tau_{\beta} \delta M^{\alpha\beta} = \delta T_{\tau}^*; \\ v_{\alpha} v_{\beta} \delta M^{\alpha\beta} &= \delta M_{\nu}^*; \quad v_{\alpha} \nabla_{\beta} \delta M^{\alpha\beta} + (v_{\alpha} \tau_{\beta} \delta M^{\alpha\beta})^{\cdot} = \delta Q^*; \quad (\cdot)^{\cdot} \equiv \partial_t(\cdot), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$T_{\tau\Sigma}^* + \delta T_{\tau}^*$ ,  $T_{\nu\Sigma}^* + \delta T_{\nu}^*$ ,  $Q_{\Sigma}^* + \delta Q^*$  – касательный, бинормальный и нормальный компоненты главного вектора внешних сил на  $\Gamma_{\sigma}$ , разложенные в суммы

накопленных величин и их малых приращений;  $\tau_\alpha$ ,  $\nu_\beta$  – компоненты касательного и бинормального векторов на  $\partial S$ ,  $\sigma_\tau$  – нормальная кривизна,  $\eta_\tau$  – геодезическое кручение контура  $\partial S$ ,  $t \in [0, l]$  – лонгальный параметр кривой  $\partial S$ .

Инкрементальные уравнения совместности деформаций тонкой оболочки с памятью, претерпевающей структурный переход в состоянии мартенситной неупругости, записанные относительно приращений контравариантных компонентов тензора тангенциальных сил  $\delta N^{\alpha\beta}$  и тензора моментов  $\delta M^{\alpha\beta}$ , следуют из уравнений (1.3) при учете аддитивного представления деформации

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^\Sigma + \varepsilon_{\alpha\beta}^E + \delta\varepsilon_{\alpha\beta}^S; \quad \mu_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta}^\Sigma + \mu_{\alpha\beta}^E + \delta\mu_{\alpha\beta}^S, \quad (4.3)$$

$\varepsilon_{\alpha\beta}^\Sigma$ ,  $\mu_{\alpha\beta}^\Sigma$  – накопленные в течение структурного перехода деформации, являющиеся совместными, определяющих соотношений (3.1) и (3.21)

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\cdot\cdot\gamma\delta}^{\alpha\beta\cdot} \nabla_\alpha \delta M^{\gamma\delta} + \nabla_\alpha \bar{A}_{\cdot\cdot\gamma\delta}^{\alpha\beta\cdot} \delta M^{\gamma\delta} - \frac{1}{12} h^2 \left[ \left( \bar{B}_{\cdot\cdot\gamma\delta}^{\alpha\beta\cdot} + b_\lambda^\beta \bar{A}_{\cdot\cdot\gamma\delta}^{\alpha\beta\cdot} \right) \nabla_\alpha \delta N^{\gamma\delta} - \right. \\ \left. - \left( \nabla_\alpha \bar{B}_{\cdot\cdot\gamma\delta}^{\alpha\beta\cdot} + b_\lambda^\beta \nabla_\alpha \bar{A}_{\cdot\cdot\gamma\delta}^{\alpha\beta\cdot} \right) \delta N^{\gamma\delta} \right] = 0; \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\cdot\cdot\gamma\delta}^{\alpha\beta\cdot} \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta N^{\gamma\delta} + 2 \nabla_\alpha \bar{A}_{\cdot\cdot\gamma\delta}^{\alpha\beta\cdot} \nabla_\beta \delta N^{\gamma\delta} + \left( \nabla_\alpha \nabla_\beta \bar{A}_{\cdot\cdot\gamma\delta}^{\alpha\beta\cdot} - b_{\alpha\beta} \bar{B}_{\cdot\cdot\gamma\delta}^{\alpha\beta\cdot} \right) \delta N^{\gamma\delta} - \\ - 12 h^{-2} b_{\alpha\beta} \bar{A}_{\cdot\cdot\gamma\delta}^{\alpha\beta\cdot} \delta M^{\gamma\delta} = 0; \end{aligned} \quad (4.5)$$

здесь введены следующие обозначения обобщенных податливостей оболочки

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\cdot\cdot\gamma\delta}^{\alpha\beta\cdot} &= \varepsilon^{\alpha\lambda} \varepsilon^{\beta\mu} \left( A_{\lambda\mu\gamma\delta}^E + A_{\lambda\mu\gamma\delta}^S \right); \\ \bar{B}_{\cdot\cdot\gamma\delta}^{\alpha\beta\cdot} &= \varepsilon^{\alpha\lambda} \varepsilon^{\beta\mu} \left[ B_{\lambda\mu\gamma\delta}^S + b_\lambda^\nu \left( A_{\mu\nu\gamma\delta}^E + A_{\mu\nu\gamma\delta}^S \right) \right]. \end{aligned}$$

Инкрементальные уравнения совместности (4.4), (4.5) и инкрементальные уравнения статики (4.1) образуют полную систему инкрементальных уравнений теории тонких оболочек, претерпевающих структурное превращение в состоянии мартенситной неупругости. Краевую задачу замыкают инкрементальные статические краевые условия (4.2) и инкрементальные деформационные краевые условия (4.6) на контуре  $\Gamma_\varepsilon \cap \partial S$ , по форме аналогичные деформационным краевым условиям [7] для оболочки, претерпевающей фазовые превращения

$$\begin{aligned} A_{\gamma\delta}^\tau \delta N^{\gamma\delta} &= \delta\varepsilon_\tau^*; \\ A_{\gamma\delta}^\tau \delta M^{\gamma\delta} + \frac{1}{12} h^2 \left( B_{\gamma\delta}^\tau + \eta_\tau A_{\gamma\delta}^\nu \right) \delta N^{\gamma\delta} &= \frac{1}{12} h^2 \delta\kappa_\tau^*; \\ A_{\gamma\delta}^\nu \delta M^{\gamma\delta} + \frac{1}{12} h^2 \left( B_{\gamma\delta}^\tau + \sigma_\tau A_{\gamma\delta}^\nu \right) \delta N^{\gamma\delta} &= \frac{1}{12} h^2 \delta\kappa_\nu^*; \\ 2 \left( A_{\gamma\delta}^\nu \delta N^{\gamma\delta} \right)' - \nu^\alpha \partial_\alpha \left( A_{\gamma\delta}^\tau \delta N^{\gamma\delta} \right) + \left[ 2\rho_\nu A_{\gamma\delta}^\nu + \rho_\tau \left( A_{\gamma\delta}^n - A_{\gamma\delta}^\tau \right) \right] \delta N^{\gamma\delta} &= \delta\kappa_n^*; \end{aligned} \quad (4.6)$$

$\rho_\tau$  – геодезическая кривизна контура  $\partial S$ ,  $\delta\varepsilon_\tau^*$ ,  $\delta\kappa_\tau^*$ ,  $\delta\kappa_\nu^*$  и  $\delta\kappa_n^*$  – приращения деформаций изменения длины, изменения кривизны в плоскости и вне плоскости нормального краевого элемента и его кручения, соответственно [2]. В отличие от [7], для контурных жесткостей введены следующие обозначения, связанные с упругой и структурной податливостями (3.1) и (3.21)

$$\begin{aligned} A_{\gamma\delta}^\tau &= \tau^\alpha \tau^\beta \left( A_{\alpha\beta\gamma\delta}^E + A_{\alpha\beta\gamma\delta}^S \right); \quad A_{\gamma\delta}^\nu = \tau^\alpha \nu^\beta \left( A_{\alpha\beta\gamma\delta}^E + A_{\alpha\beta\gamma\delta}^S \right); \\ A_{\gamma\delta}^n &= \nu^\alpha \nu^\beta \left( A_{\alpha\beta\gamma\delta}^E + A_{\alpha\beta\gamma\delta}^S \right); \quad B_{\gamma\delta}^\tau = \tau^\alpha \tau^\beta \left[ B_{\lambda\mu\gamma\delta}^S + b_\lambda^\nu \left( A_{\mu\nu\gamma\delta}^E + A_{\mu\nu\gamma\delta}^S \right) \right]. \end{aligned}$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены новые обратные инкрементальные определяющие уравнения для тонких оболочек, находящихся в полностью мартенситном фазовом состоянии и претерпевающих превращение хаотической кристаллической структуры мартенсита в ориентированную под действием напряжения, основанные на однократно связной феноменологической модели термоупругих фазово-структурных переходов. Уравнения разрешены относительно малых приращений тангенциальной деформации и изменения кривизны, и представлены в виде, схожем с теорией анизотропных оболочек, при этом тензоры податливости, соответствующие деформациям, порождаемым структурным переходом, образованы прямым произведением направляющих тензоров девиаторов напряженного состояния, накопленного в процессе последовательных малых нагружений. В отличие от традиционных формулировок теории оболочек, сводящихся к краевой задаче для компонентов вектора перемещения, представленные уравнения обеспечивают построение теории оболочек во «внутренних» кинематических переменных – обобщенных деформациях, и не требуют обращения инкрементальных определяющих уравнений и их разрешения относительно приращений обобщенных усилий. Получены также инкрементальные уравнения совместности деформаций, записанные относительно приращений тензоров тангенциальных сил и моментов, и соответствующие им деформационные краевые условия, аналогичные уравнениям для оболочек, претерпевающих фазовые переходы с точностью до физических постоянных.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Vahidi H., Rahmani Hanzaki A., Shahgholi M., Mohamadi A. *Stability behavior of rotating axially moving conical shell made of shape memory alloy* // Acta Mechanica. – 2023. – Vol.234. – Pp.5725-5748.
2. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. *Линейная теория тонких оболочек*. – Л.: Политехника, 1990. – 656 с.
3. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач* // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.
4. Мовчан А.А., Шарунов А.В. *Эффект перераспределения напряжений в толстостенной сфере из сплава с памятью формы при прямом фазовом превращении под действием постоянного давления* // Прикладная математика и механика. – 2024. – Т.88. – №2. – С.228-244.
5. Мовчан А.А., Шарунов А.В. *Обращение определяющих соотношений модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы с учетом влияния изменения вида напряженного состояния* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2024. – Т.30. – №2. – С.268-684.
6. Zhavoronok S.I. *Constitutive relations and compatibility equations for thin shape memory alloy shells* // AIP Confer. Proceedings. – 2022. – Vol.2611. – 100004.
7. Zhavoronok S.I. *On the incremental constitutive relations and compatibility equations for thin shape memory alloy shells undergoing non-isothermal phase transitions* // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An Int. Journal. – 2023. – Vol.14. – No.1. – Pp.1-27.

8. Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S. *On the incremental intrinsic equations for thin shape memory alloy shells undergoing austenite-to-martensite and martensite-to-austenite thermoelastic phase transitions* // AIP Confer. Proceedings. – 2024. – Vol.3030. – 080003.
9. Жаворонок С.И. *Обратные инкрементальные определяющие соотношения и уравнения совместности деформаций для сплавов с памятью, претерпевающих структурные превращения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №4. – С.587-593.
10. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Экспериментальная идентификация модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Деформация и разрушение материалов. – 2018. – №12. – С.2-11.

УДК 539.31  
EDN VBZPQF (<https://elibrary.ru/vbzpqf>)  
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.13



## **ВИБРОПОГЛОЩАЮЩИЕ СВОЙСТВА ОДНОРОДНЫХ ПРЕГРАД РАЗЛИЧНОЙ КОНФИГУРАЦИИ В ГРУНТЕ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН\***

Локтева Н.А.<sup>1</sup>, Во Ван Дай<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный  
исследовательский университет)», г. Москва, Россия*

<sup>2</sup>*Технический университет Ле Куи Дона, г. Ханой,  
Социалистическая республика Вьетнам*

В данной статье представлен подход к решению связанных задач о взаимодействии волны в грунте с преградой, где в качестве преграды используется сегмент цилиндрической оболочки или же пластина. Движение грунта моделировалась с помощью модели упругой среды, в качестве модели преграды была взята оболочка Кирхгофа-Лява для сегмента оболочки и Кирхгофа для пластины. Задачи решались в бесконечной постановке. Для пластины бралась бесконечная пластина. Для сегмента оболочки рассматривается бесконечный вдоль собственной оси цилиндр. В ходе решения было рассмотрено движение грунта, найдены поверхностные функции влияния для него, а также перемещения и напряжения в набегающей гармонических плоской и цилиндрической волнах, которые непосредственно воздействовала на преграду. На основании метода компенсирующих нагрузок было обеспечено выполнение граничных условий в точках, соответствующих креплению преграды. После чего были получены значения нормальных перемещений на границе преграды и грунта при любых граничных условиях, соответствующих реальным способам закрепления преграды.

**Ключевые слова:** оболочка Кирхгофа-Лява; пластина Кирхгофа; функция влияния; стационарный случай; виды закрепления пластин и оболочек; гармоническое воздействие

### **ВВЕДЕНИЕ**

Постоянное уплотнение городской застройки и внедрение инфраструктуры в уже существующую городскую среду остро ставит вопрос о защите как населения, так и зданий, и сооружений от негативного техногенного воздействия. Существуют различные способы снижения влияния вибраций как непосредственно на сами здания и их фундаменты, так и находящихся в них людей. Например, возможно усиление конструкций, которое закладывается непосредственно при проектировании зданий и сооружений. Или же внесение изменений в конструкции уже существующих зданий и сооружений при изменении вибрационной нагрузки вследствие появления новых источников колебаний. Однако далеко не всегда возможно проведение таких мероприятий, кроме того, при появлении нового источника колебаний в усилении конструкций может нуждаться большое количество объектов. Тогда становится более рациональным установка вибропоглощающих преград, изолирующих непосредственно сам источник.

---

\*Работа выполнена при поддержке гранта РФФ 24-19-00845.

Для организации эффективных вибропоглощающих преград предлагается использовать аналитические методы, позволяющие рассчитывать движение пластин и оболочек, моделирующих поведение вибропоглощающих препятствий, в грунте при различных воздействиях на них. Актуальность данной работы заключается в получении универсального подхода к решению связанных задач о взаимодействии гармонических волн, индуцированных в упругой среде, с преградами, закрепленными различным способом. Полученные результаты позволяют реализовывать весь спектр граничных условий, соответствующих реальным способам крепления вибропоглощающих преград в грунте. Данный подход позволяет строить математические модели движения преград в упругой среде, моделирующей грунт, являющиеся более близкими по своим параметрам к реальным физическим объектам, что дает возможность добиваться наибольшей эффективности вибропоглощающих преград в заданных точках грунта.

Основной целью данной работы является разработка аналитических способов оценки виброзащитных свойств преград различной геометрии и способов крепления в грунте. Для чего было изучено движение упругой среды под воздействием гармонических волн различной формы. Далее были определены стационарные функции влияния для бесконечной пластины и цилиндрической оболочки Кирхгофа-Лява. Была решена связанная задача о движении бесконечной преграды в грунте и о движении цилиндра в грунте под воздействием гармонических волн. На основании метода компенсирующих нагрузок было обеспечено выполнение граничных условий в точках, соответствующих креплению преграды. После чего были получены значения нормальных перемещений на границе преграды и грунта при любых граничных условиях, соответствующих реальным способам крепления преграды.

## **1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ**

Рассматривается взаимодействие однородной преграды со стационарной волной в грунте. Преграда в данной задаче рассматривается как однородная и обладает постоянными физическими свойствами по всему объему. Преграда может быть представлена в виде пластины или сегменты оболочек.

### **1.1. Взаимодействие гармонической плоской волны с преградой в виде однородной пластины с разными граничными условиями.**

Изучается движение однородной преграды в виде пластины, ограниченной по оси  $x$  и бесконечной по оси  $y$ , что позволяет пренебрегать параметрами, зависящими от  $y$ . Пластина помещена в упругую среду, моделирующую движение грунта, и делит ее на два полупространства – среду «1», в которой индуцируется гармоническая волна с давлением  $p_*$  и среду «2». Основная задача заключается в определении перемещения пластины на границе со средой «2».

Изучается движение преград, имеющих различные способы крепления по краям. В первом случае это шарнирно опертая пластина (рис.1а), во втором пластина с жестко защемленными краями (рис.1б). В целом, предлагаемый подход позволяет реализовывать любой вид крепления вибропоглощающей преграды.

Для реализации поставленной задачи предлагается универсальный подход, заключающийся в нахождении решения для бесконечной преграды  $w^\infty(x, \omega)$

(рис.1в), а далее выполнения граничных условий в точках закрепления с помощью метода компенсирующих нагрузок [0].

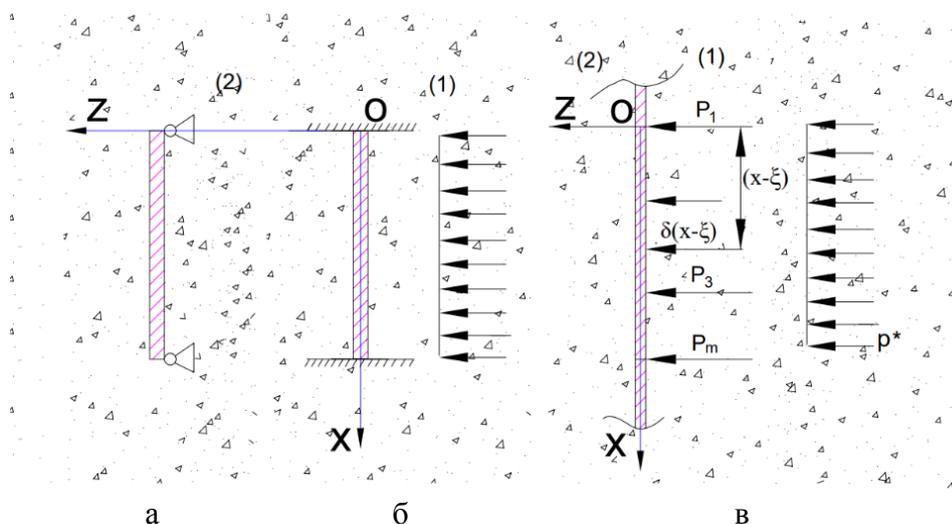


Рис.1. Модель взаимодействия плоской гармонической волны, индуцированной в среде «1», с преградами, закрепленными различным образом: а) шарнирно опертая преграда; б) жестко закрепленная преграда; в) бесконечная преграда с системой сил, обеспечивающей выполнение требуемых граничных условий (в рамках данной работы – жесткого закрепления)

Для данного вида преграды будут рассматриваться следующие граничные условия:

- шарнирное опирание

$$w|_{x=0,l} = 0, w''|_{x=0,l} = 0. \quad (1)$$

- жесткое закрепление

$$w|_{x=0,l} = 0, w'|_{x=0,l} = 0. \quad (2)$$

## 1.2. Взаимодействие гармонической цилиндрической волны с преградой в виде однородного сегмента цилиндра с разными граничными условиями.

Как известно, наиболее эффективной формой преграды, выполняющей вибропоглощающую функцию, является форма, повторяющая геометрию набегающей волны. Таким образом, для цилиндрической волны наиболее рационально устанавливать вибропоглощающие преграды, представляющие из себя сегмент цилиндра.

В данном разделе рассматривается модель взаимодействия цилиндрической волны с давлением на границе фронта  $p_*$  с сегментом цилиндра, бесконечным вдоль оси  $z$ , совпадающей с осью цилиндра и ограниченного по угловой координате  $\alpha$ . Источник колебаний совпадает с центром цилиндра. Изучаются два варианта закрепления преграды:

- шарнирное опирание

$$\begin{aligned} w(r, 0) = 0, w''(r, 0) = 0; \\ w(r, \alpha)|_{\alpha=\frac{\pi}{6}} = 0, w''(r, \alpha)|_{\alpha=\frac{\pi}{6}} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

– жесткое закрепление

$$\begin{aligned} w(r, 0) = 0, w'(r, 0) = 0; \\ w(r, \alpha) \Big|_{\alpha=\frac{\pi}{6}} = 0, w'(r, \alpha) \Big|_{\alpha=\frac{\pi}{6}} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия также обеспечиваются с помощью метода компенсирующих нагрузок.

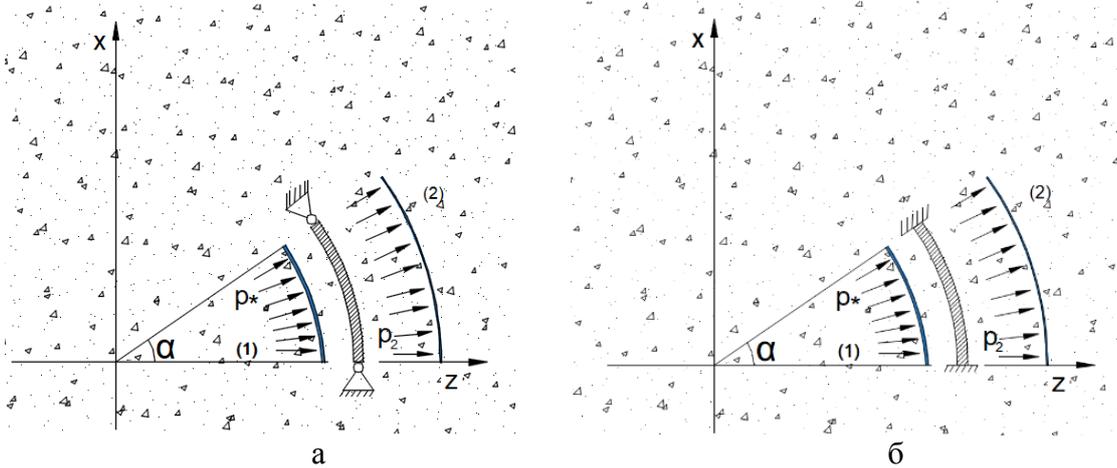


Рис.2. Модель взаимодействия цилиндрической гармонической волны, индуцированной в среде «1», с преградами, закрепленными различным образом: а – шарнирно опертая преграда; б – жестко закрепленная преграда

### 1.3. Общий подход к решению задач о взаимодействии волн с преградами в грунте.

Решение задачи с произвольными граничными условиями будет складываться фактически из объединения решений двух задач.

Первая задача заключается в определении бесконечной перемещений преграды под воздействием гармонической волны в грунте. В случае преграды в виде сегмента цилиндра сначала находится деформация полного цилиндра под воздействием гармонической волны. В результате определяется перемещение средней линии пластины или цилиндрической оболочки  $w^\infty(x, \omega)$ .

Далее строятся функции влияния для каждой задачи в отдельности. После чего перемещения средней линии плоской преграды или сегмента оболочки определяется по одному и тому же принципу, как суперпозиция (5) решения для бесконечной постановки задачи и суммы свертков функция влияния с неизвестными компенсирующими нагрузками. Величины компенсирующих нагрузок находятся исходя из конкретных граничных условий.

Для преграды в виде пластины решение выглядит как

$$w(x, \omega) = w^\infty(x, \omega) + \sum_1^j G_w(x - \xi, \omega) * P_n, \quad (5)$$

где  $n$  – порядковый номер граничного условия,  $j$  – количество граничных условий на краях ограниченной пластины,  $P_n$  – силы, приложенные к бесконечной пластине таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия.

Для преграды в виде сегмента цилиндрической оболочки

$$w(r, \alpha, \omega) = w^p(r, \alpha, \omega) + [P_1 * G_w^v(r, a_1, \omega) + P_2 * G_w^v(r, a_2, \omega)] + \\ + [P_3 * G_w^r(r, a_3, \omega) + P_4 * G_w^r(r, a_4, \omega)]. \quad (6)$$

где  $w(r, \alpha, \omega)$  – нормальное перемещение среды «2» на границе с оболочкой, совпадающее с перемещением ее средней линии;  $w^p(r, \alpha, \omega)$  – перемещение средней линии оболочки под воздействием цилиндрической волны;  $P_n$  – величины приложенных сосредоточенных сил, где  $n = 1, 2, 3, 4$ ;  $G_w^v(r, a_n, \omega)$  – функция влияния, приложенной по нормали к оболочке;  $G_w^r(r, a_n, \omega)$  – функция влияния, приложенной по касательной к оболочке;  $a_n$  – угловая координата точки приложения соответствующей силы  $P_n$ .

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ С ПРЕГРАДОЙ В ВИДЕ ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ

### 2.1. Взаимодействие волны с бесконечной преградой в грунте.

В качестве модели грунта будем использовать однородную упругую изотропную среду. Замкнутая система уравнений будет включать соотношения Коши, физический закон, систему уравнений относительно скалярного потенциала  $\phi$  и компонент  $\psi$  векторного потенциала перемещений и уравнения в перемещениях для однородной пластины Кирхгофа [2,3]. Все функции в данных выражениях меняются по гармоническому закону.

Уравнение движения однородной пластины Кирхгофа в перемещениях с учетом гармоничности всех функций

$$-\omega^2 \rho_{II} h w(x) = -D \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} + p, \quad (7)$$

где  $\rho_{II}, E_{II}, \nu$  – плотность, модуль упругости первого рода, коэффициент Пуассона материала пластины;  $h$  – длина, толщина пластины,  $w(x, t)$  – прогиб середины поверхности (линии) пластины;  $D = E_{II} h^3 / 12(1 - \nu^2)$  – жёсткость пластины на изгиб;  $p = p_1 + p_2$ ;  $p_1, p_2$  – амплитуды давлений в средах «1» и «2».

Условия контакта преграды и сред записываются следующим образом

$$p_1 = \left( -\sigma_{33}^{(1)} + \sigma_{33}^{(2)*} \right) \Big|_{z=0}, \quad p_2 = -\sigma_{33}^{(2)} \Big|_{z=0}; \\ \left( w^{(1)} + w_* \right) \Big|_{z=0} = w^{(2)} \Big|_{z=0} = w_0; \\ \sigma_{13}^{(1)} \Big|_{z=0} = \sigma_{13}^{(2)} \Big|_{z=0} = 0. \quad (8)$$

Как к уравнениям движения среды, так и к уравнению движения пластины применяется преобразование Фурье по координате  $x$  [4]. Для сред «1» и «2» в качестве граничных условий на бесконечности используется условие Зоммерфельда [2]. Перемещения сред записываются через скалярный и векторный потенциалы. Для определения констант интегрирования решается вспомогательная задача о перемещении границ сред под воздействием

единичного поля перемещений. В результате определяются поверхностные функции влияния для нормальных и сдвиговых перемещений на границе сред.

На основании соотношений Коши и физического закона находятся значения функций влияния для напряжений, которые на основании (8) совпадают с амплитудой давления волн в средах. Напряжения определяются как свертки функция влияния с перемещением средней линии (9).

$$\sigma_{33}^{(1)F} = G_{\sigma_{33}}^F(q, z, \omega) * w^F; \quad \sigma_{33}^{(2)F} = G_{\sigma_{33}}^F(q, z, \omega) * w^F. \quad (9)$$

Тогда, на основании выражения (7) и (8) в пространстве изображений, а также (9), находится нормально перемещение средней линии преграды под воздействием плоской гармонической волны. С учетом независимости параметров от параметра преобразования  $q$  в силу бесконечной постановки задачи, выражение примет вид

$$w^\infty(\omega) = \frac{\sigma_{33}^*}{-\omega^2 \rho_{II} h + G_{\sigma_{33}}^{(1)F}(0, 0, \omega) + G_{\sigma_{33}}^{(2)F}(0, 0, \omega)}, \quad (10)$$

где  $\sigma_{33}^*$  – напряжения в набегающей волне [5].

## 2.2. Взаимодействие волны с преградой с заданными граничными условиями в грунте в грунте.

Для реализации заявленного подхода необходимо определить функции влияния нормальных перемещений для бесконечной пластины Кирхгофа. Для этого к пластине прикладывается нагрузка в виде дельта-функции  $\delta(x - \xi)$ , где  $\xi$  – расстояние до точки приложения нагрузки. Тогда уравнение (7) принимает вид

$$-\rho h \frac{d^2 G_w}{dt^2} = -D \frac{\partial^4 G_w}{\partial x^4} + \delta(x, t). \quad (11)$$

К данному выражению также применяется преобразование Фурье по координате  $x$ , определяются значения функций влияния и выполняется обратное преобразование Фурье [6,7]. На основании (1), (2) и (5), определяются значения компенсирующих нагрузок для соответствующих граничных условий. После чего на основании (5) построены перемещения для шарнирно опертой и жестко закрепленной преград (рис.3).

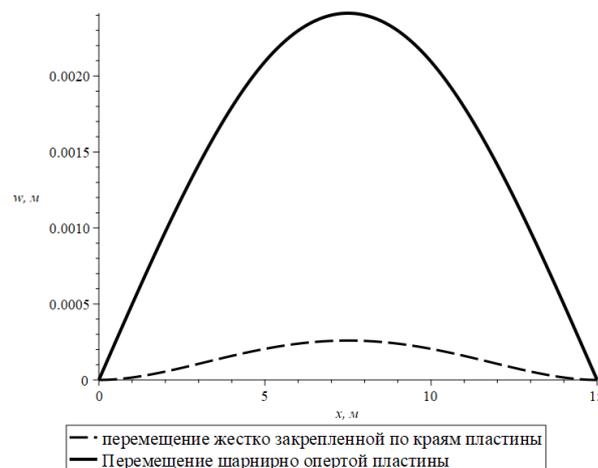


Рис.3. Перемещение пластины под воздействием плоской гармонической волны в грунте при различных видах закрепления.

Для верификации предложенного подхода был выполнен проверочный расчет для ограниченной по координате  $x$  преграды в грунте. Для решения задачи было применено разложение в ряды Фурье. Была получена хорошая сходимость результатов, демонстрируемая на рис.4.

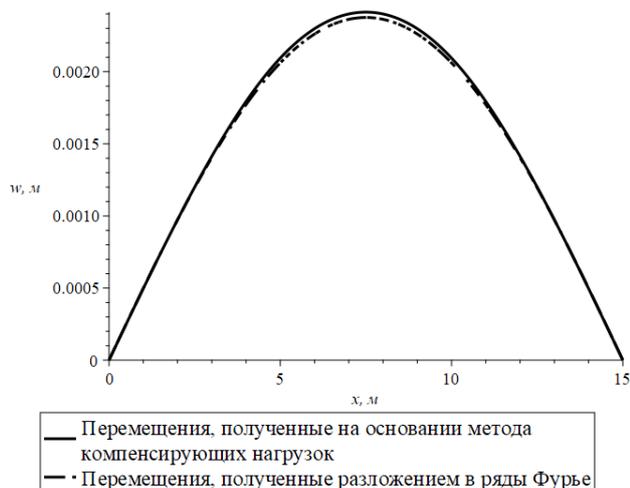
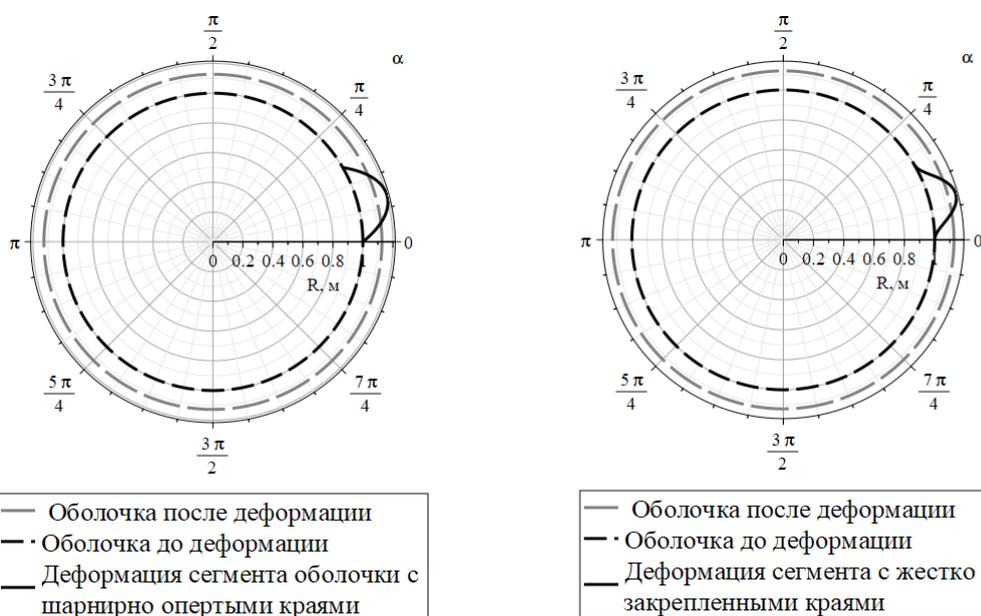


Рис.4. Графики нормальных перемещений, полученных различными методами.

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ С ПРЕГРАДОЙ В ВИДЕ СЕГМЕНТА ОБОЛОЧКИ



а) Шарнирно опертый сегмент

б) Сегмент, жестко закрепленный по краям

Рис.5. Перемещения сегмента оболочки при различных способах закрепления.

Ход решения совпадает с решением для пластины. Рассматривается система уравнений, описывающих движение оболочки Кирхгофа-Лява [2]. Выполняется разложение в ряды Фурье по угловой координате и преобразование Фурье по координате  $z$ . Задается движение среды в цилиндрической системе координат и с помощью вспомогательной задачи определяются константы интегрирования.

После чего находится движение полного цилиндра под воздействием цилиндрической волны.

Далее находятся функции влияния для нормальных и сдвиговых перемещений. После чего на основании граничных условий (3), (4) и выражения (6) определяются величины компенсирующих нагрузок для заявленных граничных условий. На основании (6) строятся графики нормальных перемещений для различных условий закрепления (рис.5).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача о прохождении волн через бесконечную преграду, в качестве модели которой использована пластина Кирхгофа. Найдены стационарные функции влияния для бесконечной пластины и цилиндрической оболочки Кирхгофа. На основании метода компенсирующих нагрузок выполнены граничные условия в точках, соответствующих креплению преграды. Найдены напряжения, перемещения среды после прохождения преграды. Выполнена верификация предложенного подхода путем сравнения результатов, полученных при решении методом компенсирующих нагрузок и методом разложения в тригонометрические ряды для шарнирно опертой пластины.

Решена задача о прохождении цилиндрических волн через преграду в виде сегмента цилиндра в грунте. Также на основании метода компенсирующих нагрузок осуществлено выполнение граничных условий в точках крепления сегмента оболочки. Найдены перемещения среды после прохождения преграды.

Приведены примеры расчетов для плоской преграды и преграды в виде сегмента оболочки при различных способах их крепления.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Венцель Э.С., Джан-Темиров К.Е., Трофимов А.М., Негольша Е.В. *Метод компенсирующих нагрузок в задачах теории тонких пластинок и оболочек.* – Харьков: б. и., 1992. – 92 с.
2. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
3. Чернина В.С. *Статика тонкостенных оболочек вращения.* – М.: Наука, 1968. – 456 с.
4. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров.* – М.: Наука, 1974. – 832 с.
5. Vo Van Dai, N.A. Lokteva, Nguyen Minh Tuan, Nguyen Duong Phung, Nguyen Thi Cam Nhung *Problem on the interaction between plane harmonic waves and a uniform steel plate in soil elastic environment // HaUI Journal of Science and Technology* (<https://jst-hau.vn>). – Vol. 60 – No.8. – Pp.73-79.
6. Слепян Л.И., Яковлев Ю.С. *Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики.* – Ленинград: Судостроение, 1980. – 344 с.
7. Митин А.Ю., Федотенков Г.В., Тарлаковский Д.В. *Нестационарное пространственное движение цилиндрической оболочки типа Тимошенко под воздействием внешнего давления / XIX Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды». Тезисы докладов.* – Ростов-на-Дону, 2018 – С.123.

УДК 539.3:53.08  
EDN PFCBGQ (<https://elibrary.ru/pfcbgq>)  
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.14



## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ИЗМЕРИТЕЛЯ ДЕФОРМАЦИЙ ОБРАЗЦОВ ПРИ ОДНООСНЫХ ИСПЫТАНИЯХ НА РАСТЯЖЕНИЕ ИЛИ СЖАТИЕ В ДИАПАЗОНЕ ТЕМПЕРАТУР ОТ 20°С ДО 2500°С**

Миронихин А.Н.

*АО «Композит», г. Королёв, Россия*

### **ВВЕДЕНИЕ**

Измерение деформаций образцов при проведении одноосных испытаний на растяжение или сжатие в диапазоне температур до 2500°С и выше является технически сложным и трудоёмким процессом. На текущий момент общемировая тенденция связана с внедрением оптических средств измерений [1-3], в частности, с использованием лазерных измерителей деформаций. Вместе с тем, остаётся актуальной задача разработки и применения электромеханических контактных датчиков высокотемпературных деформаций [4,5]. Каждое подобное устройство проектируется с учётом функциональных и конструктивных особенностей конкретных термомеханических установок, в составе которых предполагается его эксплуатация.

В АО «Композит» имеется многолетний опыт исследований термомеханических свойств материалов и несколько поколений специальных установок [6], позволяющих осуществлять испытания образцов на растяжение, сжатие, сдвиг и изгиб при температурах до 2500°С и выше. При этом долгое время основным методом определения упругих свойств материалов являлся расчётный метод [7,8], основанный на использовании показаний датчика перемещений подвижной траверсы испытательной машины с учётом податливости нагружающей системы, фактического распределения температуры, формы и размеров образцов. Нагрев и последующее механическое нагружение образца при заданной температуре проводятся в рабочей камере, в среде инертного газа. В процессе испытания реализуется локальный нагрев рабочей области образца. Главными проблемами при создании измерителя высокотемпературных деформаций являлись обеспечение его надёжного контакта с образцом во всём диапазоне рабочих температур и защита чувствительных элементов датчика от высокоинтенсивного теплового воздействия.

Разработанный автором датчик высокотемпературных деформаций состоит из трёх основных частей (рис.1):

- измерительной металлической скобы с двумя чувствительными областями для наклейки тензорезисторов;
- щупов-удлинителей из жаростойкого углерод-углеродного композиционного материала;
- переходного элемента, соединяющего измерительную скобу с щупами-удлинителями и являющегося тепловым барьером, в частности, теплосъёмником.

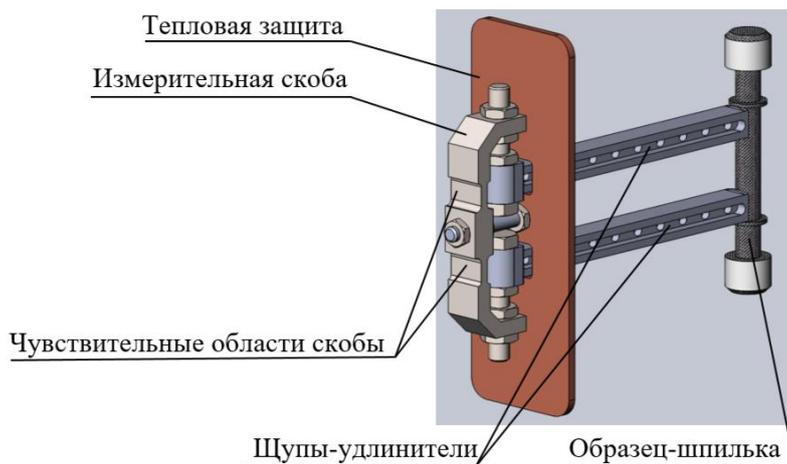


Рис.1. Модель разработанного датчика высокотемпературных деформаций.

Наиболее теплонагруженными являются углеродные щупы-удлинители, жаростойкий материал которых сочетает малые значения технических коэффициентов линейного расширения и высокие модули упругости, обеспечивает стабильность формы и размеров данных деталей при высоких температурах. Измерительная скоба располагается вне рабочей камеры и закрывается многослойной тепловой защитой. Центральная часть скобы жёстко закреплена на силовом кронштейне. Для решения проблемы надёжного контакта датчика деформаций и образца были предложены оригинальные образец-шпилька и образец-лопатка, имеющие в рабочей части буртики для установки щупов датчика враспор. Каждый щуп-удлинитель, соединённый с соответствующим чувствительным элементом скобы, измеряет абсолютное перемещение буртика (рис.2а).

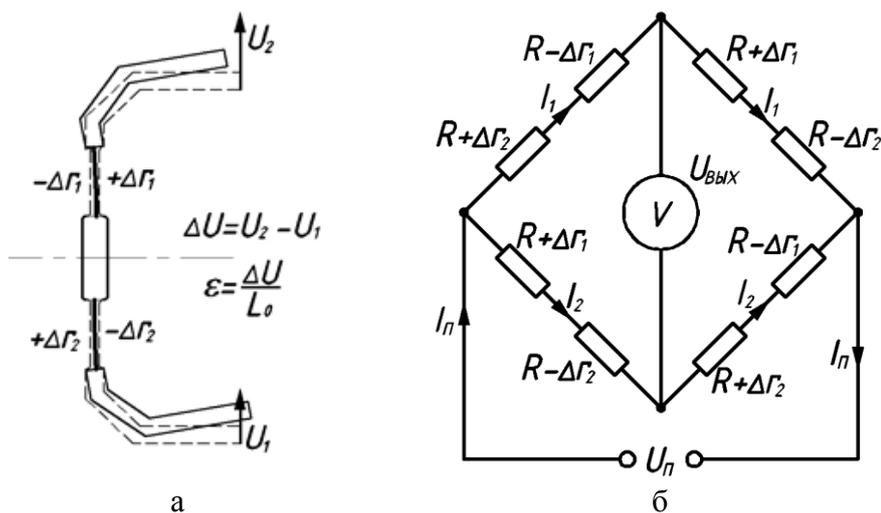


Рис.2. Описание электромеханического устройства датчика: а) деформирование чувствительных элементов измерительной скобы; б) схема подключения тензорезисторов.

Подключение тензорезисторов, наклеенных на чувствительные области измерительной скобы, в общую мостовую схему (рис.2б) приводит к пропорциональности выходного электрического сигнала относительному

перемещению буртиков, определяющему деформацию рабочей части образца. Также это позволяет исключить перемещения образца как абсолютно жёсткого тела. Выходное электрическое напряжение  $U_{ВЫХ}$  определяется следующим образом

$$U_{ВЫХ} = I_{П} \cdot (\Delta r_2 - \Delta r_1), \quad (1)$$

где  $I_{П}$  – ток, питающий мостовую схему;  $\Delta r_1$  и  $\Delta r_2$  – изменения сопротивлений тензорезисторов, наклеенных соответственно на первую и вторую чувствительные области измерительной скобы.

## 1. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗМЕРИТЕЛЯ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Предполагается, что все участки проектируемого датчика деформаций имеют пренебрежимо малую податливость по сравнению с чувствительными областями измерительной скобы. Тогда для описания механического поведения датчика можно использовать модель защемлённой балки в качестве чувствительного элемента скобы и записать краевую задачу (рис.3)

$$\begin{aligned} EI \cdot v'' &= M = P \cdot L, \\ v'(0) &= 0, \quad v'(l) = \frac{U}{L}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $EI$  и  $l$  – жёсткость и длина чувствительного элемента измерительной скобы соответственно;  $v$  – прогиб чувствительного элемента скобы;  $P$  – контактное усилие;  $U$  – абсолютное перемещение буртика;  $L$  – общая длина плеча датчика.

Из решения (2) получаются следующие выражения:

- для контактного усилия  $P$

$$P = \frac{EI}{L^2 \cdot l} \cdot U; \quad (3)$$

- для продольной деформации  $\varepsilon_x$  на поверхности чувствительного элемента измерительной скобы

$$\varepsilon_x = \frac{h}{2 \cdot L \cdot l} \cdot U, \quad (4)$$

где  $h$  – толщина чувствительного элемента измерительной скобы.

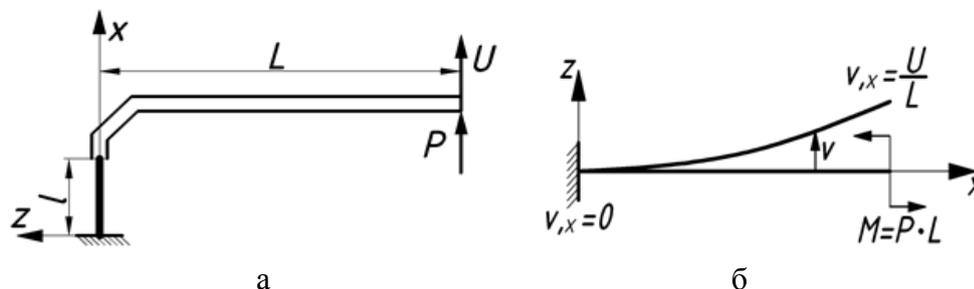


Рис.3. Расчётная модель деформирования датчика: а) схема механического нагружения скобы; б) расчётная схема чувствительного элемента.

Продольная деформация  $\varepsilon_x$  тензорезистора связана с изменением его электрического сопротивления  $\Delta r$  с помощью выражения

$$\varepsilon_x = \frac{1}{k} \cdot \frac{\Delta r}{R}, \quad (5)$$

где  $k$  и  $R$  – коэффициент тензочувствительности и номинальное сопротивление тензорезистора соответственно.

Используя (4) и (5), находится выражение, связывающее  $U$  и  $\Delta r$

$$\Delta r = \frac{k \cdot R \cdot h}{2 \cdot L \cdot l} \cdot U. \quad (6)$$

С использованием (1) и (6) определяется зависимость измеряемого относительного перемещения буртиков  $\Delta U$  от выходного электрического напряжения  $U_{ВЫХ}$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{2 \cdot L \cdot l}{I_{II} \cdot k \cdot R \cdot h} \cdot U_{ВЫХ} = K_{ТЕОР} \cdot U_{ВЫХ}, \quad (7)$$

где  $K_{ТЕОР}$  – расчётное значение градуировочного коэффициента датчика.

После выбора всех конструктивных параметров разрабатываемого измерителя деформаций был изготовлен экспериментальный прототип датчика, вычислено  $K_{ТЕОР}$

$$K_{ТЕОР} \approx 0,35 \left[ \frac{мм}{мВ} \right].$$

Первым этапом экспериментальной отработки прототипа датчика деформаций была его градуировка при нормальной температуре с помощью эталонного калибратора. Полученная градуировочная характеристика (рис.4) является линейной в широком диапазоне перемещений как при растяжении, так и при сжатии датчика. В то же время экспериментально определённое значение градуировочного коэффициента  $K_{ЭКСП}$  составляет 0,70 мм/мВ и существенно (в 2 раза) отличается от расчётного значения.

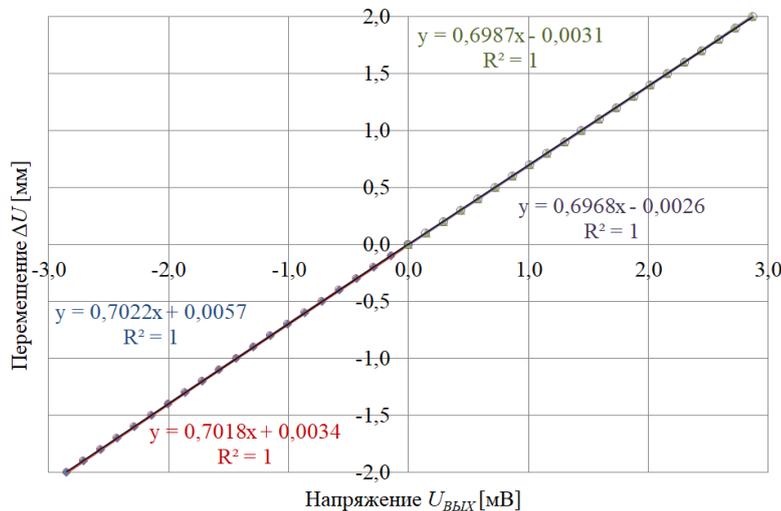


Рис.4. График градуировочной характеристики датчика деформаций.

В дальнейшем была разработана уточнённая расчётная модель деформирования измерителя высокотемпературных деформаций, учитывающая податливости всех участков датчика (рис.5). Здесь 1, 2, 3, 4, 7 – участки измерительной скобы, отличающиеся друг от друга геометрическими размерами, 2 – чувствительный элемент скобы ( $l_2=l$ ;  $E_2I_2=EI$ ), 5 – щуп-удлинитель, 6 – переходный элемент. Датчик деформаций представляется как плоская система,

состоящая из упругих стержней. Скорректированная зависимость измеряемого относительного перемещения буртиков  $\Delta U_{\Sigma}$  от выходного электрического напряжения  $U_{ВЫХ}$  имеет следующий вид

$$\Delta U_{\Sigma} = K_{ТЕОР}^* \cdot U_{ВЫХ} = K_{ТЕОР} \cdot K_{\Pi} \cdot U_{ВЫХ}, \quad (8)$$

где  $K_{\Pi}$  – поправочный коэффициент, характеризующий вклады податливостей всех участков датчика в общую податливость

$$K_{\Pi} = 1 + \frac{EI}{E_1 I_1} \cdot \frac{l_1}{l} + \frac{EI}{E_3 I_3} \cdot \frac{l_3}{l} + \frac{EI}{E_4 I_4} \cdot \frac{l_4}{l} \cdot \left( \frac{l_4^2}{3L^2} + \frac{l_4 l_5}{L^2} + \frac{l_5^2}{L^2} \right) + \frac{EI}{3E_5 I_5} \cdot \frac{l_5}{l} \cdot \frac{l_5^2}{L^2} + \frac{EI}{E_6 I_6} \cdot \frac{l_6}{l} \cdot \frac{l_5^2}{L^2} + \frac{EI}{E_7 I_7} \cdot \frac{l_7}{l} \cdot \left( \frac{l_7^2 \cos^2 \alpha}{3L^2} + \frac{l_7 L_{45} \cos \alpha}{L^2} + \frac{L_{45}^2}{L^2} \right), \quad (9)$$

где  $E_i I_i$  и  $l_i$  – жёсткость и длина  $i$ -ого участка датчика;  $l_4 + l_5 + l_7 \cdot \cos \alpha = L$ ;  $l_4 + l_5 = L_{45}$ .

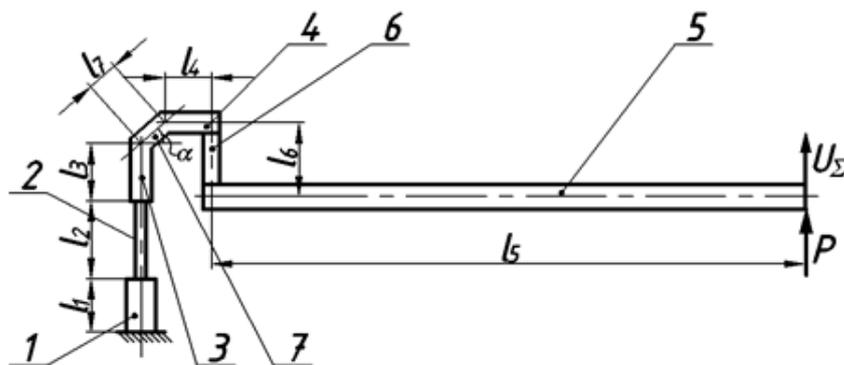


Рис.5. Уточнённая расчётная модель деформирования датчика.

Вычисленное с использованием уточнённой модели деформирования датчика значение градуировочного коэффициента  $K_{ТЕОР}^*$  составило 0,66 мм/мВ. Данное расчётное значение удовлетворительно согласуется с экспериментальным. Небольшое расхождение обуславливается погрешностью моделирования переходного крепёжного элемента.

Выражение для контактного усилия  $P$  в соответствии с уточнённой расчётной моделью деформирования датчика имеет вид

$$P = \frac{EI}{L^2 \cdot l} \cdot \frac{U_{\Sigma}}{K_{\Pi}}. \quad (10)$$

## 2. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДАТЧИКА ДЕФОРМАЦИЙ

Дальнейшим этапом экспериментальной отработки изготовленного прототипа датчика было измерение модуля упругости при испытании на растяжение образцов, вырезанных из модельного углерод-углеродного композиционного материала, в диапазоне температур от 20°C до 2250°C. Одновременно с этим модуль упругости определялся с применением расчётного метода, о котором упоминалось ранее. Из анализа и сравнения полученных данных (рис.6) были сделаны выводы об удовлетворительной сходимости результатов измерений модуля упругости различными способами и, как следствие, корректной работе созданного измерителя высокотемпературных деформаций. Однако, были выявлены некоторые конструктивные недостатки устройства,

для устранения которых была сформулирована и решена задача векторной оптимизации со следующими локальными критериями эффективности проекта

$$K_{II}(\mathbf{X}_{OPT}) \rightarrow \min K_{II}(\mathbf{X}) = 1, \quad (11)$$

$$P(\mathbf{X}_{OPT}) \rightarrow \min P(\mathbf{X}), \quad (12)$$

$$\frac{1}{K_{TEOP}^*(\mathbf{X}_{OPT})} \rightarrow \max \frac{1}{K_{TEOP}^*(\mathbf{X})}. \quad (13)$$

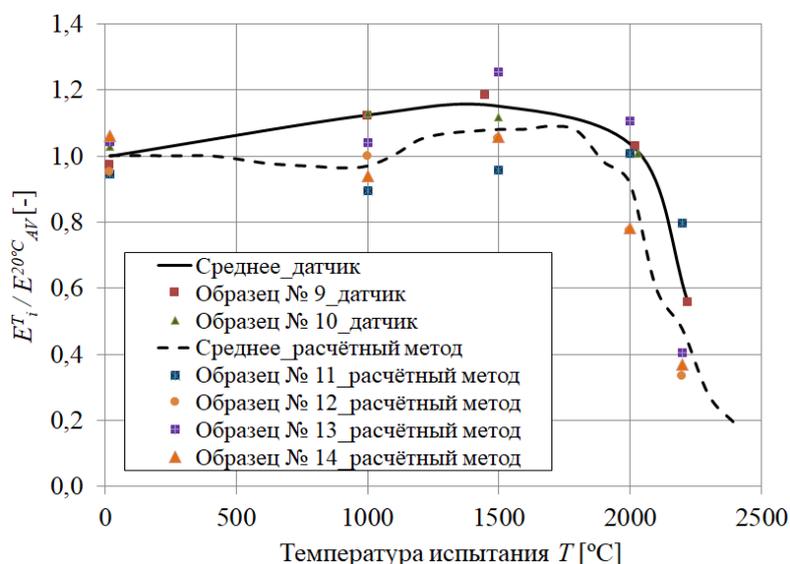


Рис.6. Нормированная зависимость модуля упругости от температуры.

Последний критерий (13) обуславливает увеличение разрешающей способности датчика, расширение нижней границы диапазона измерений. При решении задачи оптимизации варьировались геометрические формы некоторых элементов измерителя деформаций. В явном виде вектор проектных параметров  $\mathbf{X}$  включал размеры  $b_i$  и  $h_i$  поперечных сечений всех участков датчика, номинальное сопротивление применяемых тензорезисторов  $R$ , силу тока  $I_{II}$

$$\mathbf{X} = \{b_1, \dots, b_7, h_1, \dots, h_7, R, I_{II}\}. \quad (14)$$

Приоритетным являлось снижение поправочного коэффициента  $K_{II}$  (11), так как это способствует стабильности градуировочной характеристики и повышению надёжности показаний датчика во всём его температурном диапазоне. В процессе измерений деформаций некоторые элементы датчика, в частности, шупы-удлинители из углерод-углеродного композиционного материала подвергаются воздействию неравномерного нагрева до высоких температур. Это приводит к изменению упругих свойств материалов датчика и согласно (9) значению поправочного коэффициента  $K_{II}$ . В соответствии с (8) изменяется и значение градуировочного коэффициента  $K_{TEOP}^*$ , появляются дополнительные систематические погрешности при измерении деформаций при высоких температурах.

Оптимизация конструкции датчика начиналась с критерия (11) и на этом этапе проводилась независимо от двух других критериев. Был выполнен анализ вкладов податливостей всех участков датчика в общую податливость. С целью удовлетворения критерию (11) были увеличены жёсткости всех участков датчика, кроме чувствительных элементов, путём увеличения размеров поперечных

сечений, а для переходного элемента была изменена форма. Результаты расчётов приведены в Таблице 1.

Таблица 1.

Результаты анализа податливостей всех элементов измерителя деформаций.

№ участка	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Исходный вариант – прототип								
$K_{II}$ :	0,03	1,00	0,12	0,12	0,27	0,23	0,12	1,89
Оптимальный вариант								
$K_{II}$ :	0,0035	1,00	0,0157	0,0000	0,0432	0,0027	0,0113	1,08

Критерии (12) и (13) были переписаны в эквивалентных формах

$$\lambda(X_{OPT}) \rightarrow \min \lambda(X) = \min \left( \frac{\partial P}{\partial U_{\Sigma}} \right) = \min \left( \frac{EI}{L^2 \cdot l} \cdot \frac{1}{K_{II}} \right), \quad (15)$$

$$K_{TEOP}^*(X_{OPT}) \rightarrow \min K_{TEOP}^*(X) = \min \left( \frac{2 \cdot L \cdot l}{I_{II} \cdot k \cdot R \cdot h} \cdot K_{II} \right). \quad (16)$$

Исключив  $K_{II}$  из (15) и (16), получается следующее выражение

$$K_{TEOP}^* \cdot \lambda = K_{TEOP}^* \cdot \frac{\partial P}{\partial U_{\Sigma}} = \frac{E}{6 \cdot L \cdot k} \cdot \frac{b \cdot h^2}{I_{II} \cdot R}. \quad (17)$$

Уравнение (17) описывает области компромиссов (рис.7) для критериев (12) и (13) и позволяет получить условия для варьируемых параметров

$$K_{TEOP}^* \cdot \frac{\partial P}{\partial U_{\Sigma}} \rightarrow \min \Rightarrow \begin{cases} b \rightarrow \min, & h \rightarrow \min, \\ I_{II} \rightarrow \max, & R \rightarrow \max. \end{cases} \quad (18)$$

На основании условий (18), с учётом конструктивных ( $b \geq b_{min}$ ;  $h \geq h_{min}$ ) и материально-технических, дискретных ( $I_{II} = I_{II1}, I_{II2}, I_{II3}, \dots$ ;  $R = R_1, R_2, R_3, \dots$ ) ограничений было выбрано рациональное сочетание проектных параметров конструкции датчика. Результаты расчёта приведены в Таблице 2.

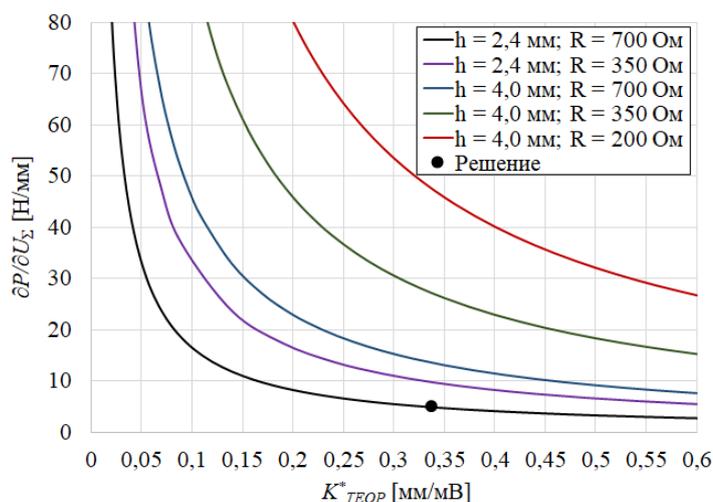


Рис.7. Области компромиссов.

Таблица 2.

Результаты решения задачи оптимального проектирования датчика деформаций.

Параметр	Исходный вариант – прототип	Оптимальный вариант
Расчётный градуировочный коэффициент $K_{TEOP}^*$ [мм/мВ]:	0,66	0,338
Расчётная чувствительность $1/K_{TEOP}^*$ [мВ/мм]:	1,52	2,96
Экспериментальный градуировочный коэффициент $K_{ЭКСП}$ [мм/мВ]:	0,70	0,348
Жёсткость датчика $\partial P/\partial U_{\Sigma}$ [Н/мм]:	12,9	4,87

### 3. СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

При изготовлении и замене деталей, сборке датчика реальные значения конструктивных параметров могут отличаться от расчётных. С помощью построенной модели (8) измерителя деформаций проведено исследование влияния случайных отклонений данных параметров от их номинальных значений на работоспособность датчика, в частности, на статистические разбросы градуировочного коэффициента. Был введён вектор случайных переменных  $Y$

$$Y = Y_R \oplus Y_N, \quad (19)$$

где  $Y_R$  – часть вектора  $Y$ , компоненты которой подчиняются равномерному распределению  $R(a; b)$ ; включает длину  $l_i$ , ширину  $b_i$ , толщину  $h_i$  каждого элемента датчика, коэффициент тензочувствительности  $k$  и электрическое сопротивление  $R$  тензорезисторов, силу тока  $I_{II}$ ;  $Y_N$  – часть вектора  $Y$ , компоненты которой подчиняются нормальному закону распределения  $N(Y_{AV}; S_Y^2)$ ; содержит модули упругости  $E_i$  материалов деталей датчика.

При решении рассматриваемой задачи выполнялось компьютерное имитационное моделирование в соответствии со следующей расчётной схемой:

1. для каждого вычислительного эксперимента с помощью датчика псевдослучайных чисел выполняется разыгрывание  $N$  случайных векторов  $\xi_R^{(+)}$  с равномерно распределёнными на интервале  $(0; 1)$  компонентами

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_R^{(+)} &= \{ \xi_{R(1)}^{(+)}, \xi_{R(2)}^{(+)}, \dots, \xi_{R(k)}^{(+)} \}, \quad \xi_{R(k)}^{(+)} \in R(0; 1), \\ \dim \xi_R^{(+)} &= \dim Y_R + 12 \cdot \dim Y_N; \end{aligned} \right. \quad (20)$$

2. для каждого случайного вектора  $\xi_R^{(+)}$  строится парный вектор  $\xi_R^{(-)}$

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_R^{(-)} &= \{ 1 - \xi_{R(1)}^{(-)}, 1 - \xi_{R(2)}^{(-)}, \dots, 1 - \xi_{R(k)}^{(-)} \}, \\ \dim \xi_R^{(-)} &= \dim \xi_R^{(+)}; \end{aligned} \right. \quad (21)$$

3. вычисляются компоненты векторов  $Y_R^{(+)}$  и  $Y_R^{(-)}$

$$\left\{ \begin{aligned} Y_{R(k)}^{(+)} &= a_k + (b_k - a_k) \cdot \xi_{R(k)}^{(+)}, \\ Y_{R(k)}^{(-)} &= a_k + (b_k - a_k) \cdot \xi_{R(k)}^{(-)}; \end{aligned} \right. \quad (22)$$

4. рассчитываются компоненты векторов  $Y_N^{(+)}$  и  $Y_N^{(-)}$

$$\begin{cases} Y_{N(k)}^{(+)} = Y_{AV(k)} + S_{Y(k)} \cdot (\xi_{R(1)}^{(+)} + \xi_{R(2)}^{(+)} + \dots + \xi_{R(12)}^{(+)} - 6), \\ Y_{N(k)}^{(-)} = Y_{AV(k)} + S_{Y(k)} \cdot (\xi_{R(1)}^{(-)} + \xi_{R(2)}^{(-)} + \dots + \xi_{R(12)}^{(-)} - 6); \end{cases} \quad (23)$$

5. с использованием математической модели (8) определяются  $N$  парных значений градуировочного коэффициента датчика  $K_{TEOP}^*(Y^{(+)})$  и  $K_{TEOP}^*(Y^{(-)})$ ;

6. вычисляется случайная реализация градуировочного коэффициента  $K_{TEOP}^*$  как результат одного вычислительного эксперимента

$$K_{TEOP}^* = \frac{1}{2 \cdot N} \sum_{i=1}^N [K_{TEOP(i)}^*(Y^{(+)}) + K_{TEOP(i)}^*(Y^{(-)})]; \quad (24)$$

7. повторяется  $M$  раз вычислительный эксперимент, полученные результаты обрабатываются с использованием стандартных методов математической статистики.

Результаты вычислительного и физического экспериментов приведены в Таблице 3.

Таблица 3.

Результаты решения задачи стохастического моделирования.

Параметр	Вычислительный эксперимент	Физический эксперимент
Объём выборки $M$ :	16	16
Среднее арифметическое значение градуировочного коэффициента [мм/мВ]:	0,338	0,348
Коэффициент вариации градуировочного коэффициента [%]:	0,001	0,84

Полученные расчётные и экспериментальные данные хорошо согласуются, более высокие статистические разбросы в реальном эксперименте обуславливаются влиянием неучтённых факторов. В то же время построенная стохастическая расчётная модель может быть использована для теоретических и прикладных исследований влияния случайных разбросов отдельных конструктивных параметров датчика и их совокупностей.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенная математическая модель позволила получить данные, хорошо согласующиеся с результатами экспериментальной отработки измерителя деформаций. Однако, область задач, для решения которых может быть использована рассматриваемая модель, не ограничивается примерами, приведёнными в настоящей работе. Градуировка спроектированного датчика деформаций во всём диапазоне его рабочих температур является чрезвычайно сложной и дорогостоящей процедурой. Таким образом, возникает целесообразность замены реального эксперимента виртуальным и применения расчётной модели в качестве цифрового двойника измерителя деформаций. В этом случае необходимо располагать температурными зависимостями

коэффициентов теплопроводности, технических коэффициентов линейного расширения и модулей упругости материалов датчика деформаций.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Экспериментальные исследования свойств материалов при сложных термомеханических воздействиях. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 204 с.
2. Guo X., Liang J., Tang Z, Cao B., Yu M. *High-temperature digital image correlation method for full-field deformation measurement captured with filters at 2600°C using spraying to form speckle patterns* // Optical Engineering. – 2014. – Vol.53. – No.6. – Pp.1-12.
3. Song J., Yang J., Liu F., Lu K., Yao Y. *Ultra-high temperature mechanical property test of C/C composites by a digital image correlation method based on an active laser illumination and background radiation suppressing method with multi-step filtering* // Applied Optics. – 2019. – Vol.58. – No.24. – Pp.6569-6580.
4. Дзюба В.С., Окснюк С.В. *Исследование прочности углерод-углеродных композиционных материалов в условиях температур 293...3300К при высокоскоростном нагреве* // Проблемы прочности. – 2005. – №1. – С.136-143.
5. Мостовой Г.Е., Карпов А.П. *Особенности механических испытаний углеродных и углерод-углеродных композиционных материалов при температурах до 3000°C* // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2017. – Т.83. – №5. – С.56-61.
6. Белов Н.В., Вагин В.П., Дворецкий А.Э., Квитка Е.В., Магнитский И.В, Миронихин А.Н., Пономарёв К.А., Тащилов С.В. *Установка для механических испытаний композиционных материалов при высоких температурах* // Материалы X Всероссийской конференции «Новые технологии». – Миасс: РАН, 2013. – Т.2. – С.45-51.
7. Бакулин А.А., Магнитский И.В., Пономарёв К.А., Тащилов С.В. *Определение упругих свойств углерод-углеродных композиционных материалов с пространственными схемами армирования* // Конструкции из композиционных материалов. – 2015. – №2. – С.46-51.
8. Пономарёв К.А. *Расчётно-экспериментальный метод определения эффективных характеристик упругости углеродных композиционных материалов при нормальной и высоких температурах* // Конструкции из композиционных материалов. – 2017. – №2. – С.62-67.

УДК 539.3

EDN PSPIWF (<https://elibrary.ru/pspiwf>)

DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.15



## УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ СЖАТИИ КОМПОЗИТНОГО СТЕРЖНЯ-ПОЛОСЫ С КОНЦЕВЫМИ УЧАСТКАМИ ОДНОСТОРОННЕГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ, ИМЕЮЩИМИ КОНЕЧНУЮ ДЛИНУ\*

Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Якубовский К.К.

ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева», г. Казань, Россия

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим стержень-полосу, имеющий концевые участки одностороннего закрепления длиной  $l$ , находящийся в условиях сжатия за счет кинематического нагружения абсолютно жестких опорных элементов перемещением  $V_0$  в направлении оси  $x$  (рис.1).

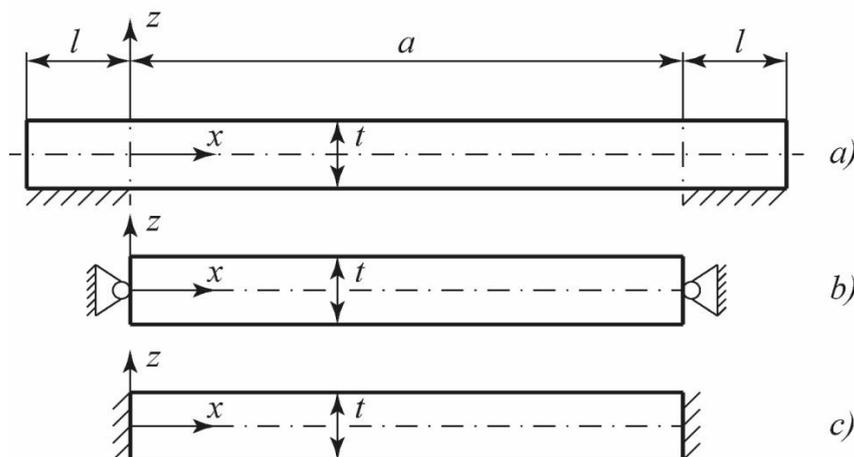


Рис.1. Схемы закрепления стержня при плоском изгибе: а) закрепление концевых участков граничной плоскости  $z = -t/2$ ; б) шарнирное закрепление; в) защемление.

По модели С.П. Тимошенко для незакрепленного участка пластины будут иметь место геометрически нелинейные уравнения равновесия

$$T_{11,x} = 0, \quad M_{11,x} - T_{13} = 0, \quad (T_{13} + T_{11}w_{,x})_{,x} = 0; \quad 0 \leq x \leq a, \quad (1)$$

где в рассматриваемом приближении

$$T_{11} = B_{11} \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right), \quad T_{13} = B_{13} (w_{,x} + \gamma), \quad M_{11} = D_{11} \gamma_{,x}. \quad (2)$$

Здесь  $B_{11} = E_1 t$ ,  $B_{13} = G_{13} t$ ,  $D_{11} = B_{11} t^2 / 12$  – жесткости стержня на растяжение-сжатие, поперечный сдвиг и изгиб.

\* Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект FZSU-2024-0010).

Исходя из результатов работ [1,2], на участке закрепления можно составить уравнение равновесия

$$T_{11,x}^0 - T_{13}^0 = 0, \quad -l \leq x \leq 0, \quad (3)$$

где

$$T_{11}^0 = \frac{4E_1 t}{3} u_{0,x}, \quad T_{13}^0 = \frac{4G_{13}}{t} (u_0 - V_0). \quad (4)$$

В силу симметрии задачи при  $x = a/2$  для уравнений (1) будут иметь место граничные условия

$$T_{13} + T_{11} w_{,x} = 0, \quad u = 0, \quad \gamma = 0, \quad (5)$$

а для уравнения (3) в торцевом сечении  $x = -l$  – статическое граничное условие

$$T_{11}^0(-l) = 0. \quad (6)$$

Решения уравнений (1) и (3) в сечении  $x = 0$  должны быть подчинены условиям сопряжения участков

$$u(0) = u_0(0), \quad \gamma(0) = \frac{2}{t} (u_0(0) - V_0), \quad (7)$$

$$T_{11}^0(0) - T_{11}(0) - \frac{2}{t} M_{11}(0) = 0$$

при обязательном удовлетворении решений уравнений (1) кинематическому условию закрепления

$$w(0) = 0. \quad (8)$$

Интегралом первого уравнения системы (1) является равенство

$$T_{11} = -P, \quad (9)$$

где  $P$  – формирующееся на участке  $0 \leq x \leq a/2$  осевое усилие, являющееся положительным в случае сжатия при  $V_0 > 0$  и отрицательным (растягивающим) при  $V_0 < 0$ . Интегрирование третьего уравнения системы (1) и удовлетворение первому условию (5) при учете (9) приводит к зависимости

$$T_{13} = P w_{,x}, \quad (10)$$

и при этом в силу первых двух соотношений (2) приходим к уравнениям

$$u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 = -\frac{P}{B_{11}}, \quad (B_{13} - P) w_{,x} + B_{13} \gamma = 0. \quad (11)$$

Из второго уравнения системы (11) следуют зависимости

$$\gamma = -\left(1 - \frac{P}{B_{13}}\right) w_{,x}, \quad \gamma_{,xx} = -\left(1 - \frac{P}{B_{13}}\right) w_{,xxx}, \quad (12)$$

а второе уравнение системы (1) при учете (2), (10) и (12) преобразуется в уравнение

$$\left(1 - \frac{P}{B_{13}}\right) w_{,xxx} + \frac{P}{D_{11}} w_{,x} = 0,$$

имеющее первый интеграл

$$w_{,xx} + \frac{PB_{13}}{D_{11}(B_{13} - P)} w = c_1, \quad (13)$$

где  $c_1$  – постоянная интегрирования. В случае сжатия пластины при введении обозначения

$$k_c^2 = \frac{PB_{13}}{D_{11}(B_{13} - P)}, \quad (14)$$

в котором  $P$  является величиной положительной, уравнение (13), записываемое в виде

$$w_{,xx} + k_c^2 w = c_1, \quad (15)$$

будет иметь решение

$$w = c_2 \sin(k_c x) + c_3 \cos(k_c x) + \frac{c_1}{k_c^2}. \quad (16)$$

Подчинив его условию  $w(0) = 0$ , получим алгебраическое уравнение

$$c_3 + \frac{c_1}{k_c^2} = 0. \quad (17)$$

В соответствии с (12) при использовании (16) найдем функцию

$$\gamma = -\frac{(B_{13} - P)}{B_{13}} k_c (c_2 \cos(k_c x) - c_3 \sin(k_c x)), \quad (18)$$

подчинение которой условию  $\gamma(a/2) = 0$  приводит к уравнению

$$c_2 \cos\left(\frac{k_c a}{2}\right) - c_3 \sin\left(\frac{k_c a}{2}\right) = 0. \quad (19)$$

Используя полученное решение (16), первый интеграл (9) первого уравнения системы (1) в случае сжатия пластины приведем к виду

$$u_{,x} = -\frac{P}{B_{11}} - \frac{k_c^2}{2} (c_2^2 \cos^2(k_c x) - 2c_2 c_3 \cos(k_c x) \cdot \sin(k_c x) + c_3^2 \sin^2(k_c x)). \quad (20)$$

Интегрируя (20) в пределах от  $x$  до  $a/2$ , при удовлетворении условию  $u(a/2) = 0$  получим функцию

$$u = \frac{P}{B_{11}} \left(\frac{a}{2} - x\right) + \frac{k_c^2}{2} \int_x^{a/2} (c_2^2 \cos^2(k_c \zeta) - 2c_2 c_3 \cos(k_c \zeta) \sin(k_c \zeta) + c_3^2 \sin^2(k_c \zeta)) d\zeta = \frac{P}{B_{11}} \left(\frac{a}{2} - x\right) + \frac{k_c^2}{2} [c_2^2 F_2(x) - 2c_2 c_3 F_{23}(x) + c_3^2 F_3(x)], \quad (21)$$

где

$$F_2(x) = \int_x^{a/2} \cos^2(k_c \zeta) d\zeta = \frac{1}{4k_c} \left[ 2 \cos\left(\frac{k_c a}{2}\right) \sin\left(\frac{k_c a}{2}\right) - 2 \cos(k_c x) \sin(k_c x) + k_c a - 2k_c x \right],$$

$$F_{23}(x) = \int_x^{a/2} \cos(k_c \zeta) \sin(k_c \zeta) d\zeta = \frac{1}{2k_c} \left[ \sin^2\left(\frac{k_c a}{2}\right) - \sin^2(k_c x) \right],$$

$$F_3(x) = \int_x^{a/2} \sin^2(k_c \zeta) d\zeta = -\frac{1}{4k_c} \left[ 2 \cos\left(\frac{k_c a}{2}\right) \sin\left(\frac{k_c a}{2}\right) - 2 \cos(k_c x) \sin(k_c x) - k_c a + 2k_c x \right].$$

Таким образом, найденное решение (16), (18), (21) системы уравнений (1) содержит в качестве неизвестных постоянные интегрирования  $P$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ , для определения которых полученных двух алгебраических уравнений (17), (19) недостаточно.

В соответствии с (2), (14) и (18) приходим к соотношению

$$M_{11} = \frac{D_{11}(B_{13} - P)}{B_{13}} k_c^2 (c_2 \sin(k_c x) + c_3 \cos(k_c x)) = \quad (22)$$

$$= c_2 \sin(k_c x) + c_3 \cos(k_c x),$$

следовательно, в силу (9), (18), (21) и (22) при  $x=0$  будут иметь место зависимости

$$M_{11}(0) = c_3, \quad T_{11}(0) = -P, \quad \gamma(0) = -\frac{(B_{13} - P)}{B_{13}} k_c c_2, \quad (23)$$

$$u(0) = \frac{Pa}{2B_{11}} + \frac{k_c^2}{2} [c_2^2 F_2(0) - 2c_2 c_3 F_{23}(0) + c_3^2 F_3(0)],$$

где

$$F_2(0) = F_2|_{x=0} = \frac{1}{4k_c} \left[ 2 \cos\left(\frac{k_c a}{2}\right) \sin\left(\frac{k_c a}{2}\right) + k_c a \right],$$

$$F_{23}(0) = F_{23}|_{x=0} = \frac{1}{2k_c} \sin^2\left(\frac{k_c a}{2}\right),$$

$$F_3(0) = F_3|_{x=0} = -\frac{1}{4k_c} \left[ 2 \cos\left(\frac{k_c a}{2}\right) \sin\left(\frac{k_c a}{2}\right) - k_c a \right].$$

В соответствии с результатами работ [1,2], уравнение (3), выраженное через функцию  $u_0$ , в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$u_{0,xx} - k_u^2 u_0 = -k_u^2 V_0, \quad k_u^2 = \frac{3G_{13}}{E_1 t^2}.$$

При удовлетворении его решения ( $d_1, d_2$  – постоянные интегрирования)

$$u_0 = d_1 e^{k_u x} + d_2 e^{-k_u x} + V_0$$

граничному условию (6) получают следующие соотношения

$$d_1 = d_2 e^{2k_u l}, \quad u_0 = d_2 (e^{k_u(x+2l)} + e^{-k_u x}) + V_0, \quad (24)$$

$$u_0(0) = d_2 (1 + e^{2k_u l}) + V_0,$$

$$T_{11}^0 = \frac{4E_1 t}{3} u_{0,x} = \frac{4E_1 t k_u}{3} d_2 (e^{k_u(x+2l)} - e^{-k_u x}),$$

$$T_{11}^0(0) = T_{11}^0|_{x=0} = -\frac{4E_1 t k_u}{3} d_2 (1 - e^{2k_u l}).$$

Подчинив теперь полученные зависимости (23) и (24) условиям сопряжения участков (7), в дополнение к (17) и (19) получим еще три алгебраических уравнения

$$\frac{Pa}{2B_{11}} + \frac{k_c^2}{2} [c_2^2 F_2(0) - 2c_2 c_3 F_{23}(0) + c_3^2 F_3(0)] - (1 + e^{2k_u l}) d_2 = V_0, \quad (25)$$

$$\frac{(B_{13} - P)}{B_{13}} k_c c_2 + \frac{2}{t} (1 + e^{2k_u l}) d_2 = 0,$$

$$-\frac{4E_1 t k_u}{3} (1 - e^{2k_u l}) d_2 + P - \frac{2}{t} c_3 = 0,$$

служащие для определения пяти неизвестных  $P, c_1, c_2, c_3$  и  $d_2$  при заданном  $V_0$ .

Следует отметить, что наиболее предпочтительным, по-видимому, является алгоритм решения системы уравнений (17), (19), (25), когда в ней заданной является величина сжимающего усилия  $P$ , а подлежащей определению величиной – положительное значение перемещения  $V_0$ .

Из уравнений (17) и (19) следуют зависимости

$$c_1 = -k_c^2 c_3, \quad (26)$$

$$c_2 = tg\left(\frac{k_c a}{2}\right) c_3, \quad (27)$$

а уравнения (25) при использовании (27) перепишем в виде

$$a_{11}d_2 + a_{12}c_3 = 0, \quad a_{21}d_2 + a_{22}c_3 = P, \quad (28)$$

$$V_0 = \frac{Pa}{2B_{11}} - d_2(1 + e^{2k_u l}) + \frac{k_c^2}{2} c_3^2, \quad (29)$$

где

$$a_{11} = \frac{2}{t}(1 + e^{2k_u l}), \quad a_{12} = \frac{(B_{13} - P)k_c}{B_{13}} tg\left(\frac{k_c a}{2}\right), \quad (30)$$

$$a_{21} = \frac{4E_1 t k_u}{3}(1 - e^{2k_u l}), \quad a_{22} = \frac{2}{t}.$$

Решением системы (28) из двух уравнений устанавливаются зависимости

$$d_2 = -\frac{a_{12}}{A} P, \quad c_3 = \frac{a_{11}}{A} P, \quad (31)$$

где  $A$  – функция, определяемая по формуле  $A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  и являющаяся существенно нелинейной относительно  $P$  в силу формул (14) и (30). При подстановке (31) из уравнения (29) следует зависимость

$$V_0 = \frac{Pa}{2B_{11}} + \frac{(1 + e^{2k_u l})a_{12}}{A} P + \frac{k_c^2 F a_{11}^2}{2A^2} P^2, \quad (32)$$

где

$$F = F_3(0) - 2F_{23}(0)tg\left(\frac{k_c a}{2}\right) + F_2(0)tg^2\left(\frac{k_c a}{2}\right). \quad (33)$$

Заметим, что наличие в (32) двух последних слагаемых обусловлено реализацией внецентренного сжатия стержня при рассматриваемом виде нагружения. При их отбрасывании зависимость (32) становится линейной

$$V_0 = Pa/(2B_{11}) \quad (34)$$

и она соответствует кинематическому нагружению пластины по схемам закрепления в соответствии с рис.1b и рис.1c.

И, наконец, преобразуя (16) путем использования выражений (26), (27) и (31), находим функцию прогиба на незакрепленном участке стержня

$$w = \frac{a_{11}P}{A} \left[ -1 + \cos(k_c x) + tg\left(\frac{k_c a}{2}\right) \sin(k_c x) \right]. \quad (35)$$

Заметим, что в случае сжатия стержня по схемам рис.1b и 1c существуют критические значения усилия  $P_{cr}$ , соответствующие потере устойчивости по изгибно-сдвиговой форме и определяемые по формуле

$$P_{cr} = m \frac{D_{11}}{a^2}. \quad (36)$$

В ней  $m$  – безразмерный параметр критического усилия, зависящий от условий закрепления торцевых сечений  $x = 0$ ,  $x = a$ , равный

$$m = \frac{\pi^2}{1 + D_{11}\pi^2/(a^2 B_{13})} \quad (37)$$

при шарнирном опирании (рис.1b) и

$$m = \frac{4\pi^2}{1 + 4D_{11}\pi^2/(a^2 B_{13})} \quad (38)$$

при защемлении (рис.1c).

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Численные результаты получены для тест-образцов, выполненных из однонаправленного волокнистого композита на основе углеродной ЭЛУР-П и эпоксидного связующего ХТ-118. Предварительно на экспериментах при растяжении были определены физико-механические характеристики  $E_1 = 160$  ГПа,  $E_2 = 5.6$  ГПа,  $\nu = 0.31$ . Модуль упругости и предел прочности при сдвиге определялся в работе [3].

Предельная нагрузка  $P$  по формуле (32) вычислялась итерационным способом путём варьирования значением  $P$  от меньшего к большему. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что функция перемещения  $V_0$  на начальном этапе увеличивается по линейному закону, а по мере приближения к критическому значению асимптотически стремится к бесконечности (рис.2).

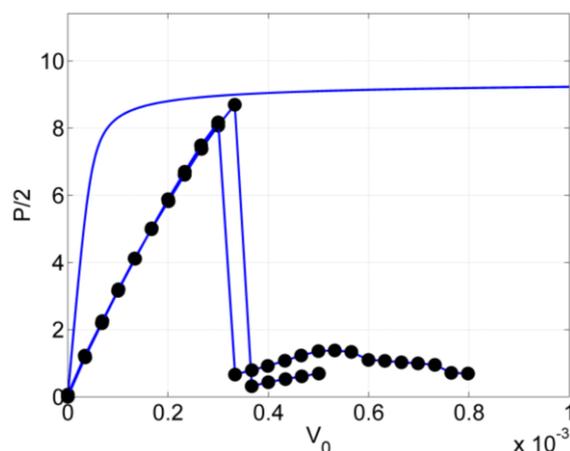


Рис.2. Зависимость сжимающей нагрузки  $P$  от перемещения  $V_0$  для тест-образца с рабочей частью  $a = 60$  мм, толщиной  $t = 1.60$  мм (сплошная линия – теоретическая зависимость, полученная по формуле (32), линии с круглыми маркерами – экспериментальные данные двух образцов).

Можно видеть, что при достижении нагрузки  $P = 9514$  Н зависимость  $P = P(V_0)$  становится сильно нелинейной, что прямо свидетельствует о потере устойчивости тест-образца.

Для проведения экспериментов на сжатие были спроектированы и изготовлены тест-образцы, состоящие из двух пластин 5 (рис.3а) шириной  $b = 25$  мм, между которыми установлена стальная закладная деталь 6. Пластины во избежание возможности разрушения клеевого шва имели торцевой упор. Ширина закладной части  $h$  в месте крепления пластин составляла 10 мм, длина участка закрепления пластин  $l$  во всех экспериментах была равной 40 мм. Такая симметричная относительно продольной плоскости конструкция из двух пластин была выбрана для предотвращения внецентренного приложения нагрузки на динамометр испытательной машины. На лицевых поверхностях рабочей части пластин были наклеены тензорезисторы 1-4 для фиксации деформаций сжатия, а также деформаций изгиба в момент потери устойчивости. Собранный тест-образец закреплялся за захватную часть закладной детали 6 в гидравлических клиновых захватах (рис.3б). Тест-образцы были изготовлены с четырьмя длинами рабочей части:  $a = 40, 60, 120, 180$  мм.

Испытания на сжатие проводились на сервогидравлической испытательной машине MTS Landmark с предельной нагрузкой  $\pm 100$  кН. Для фиксации деформаций использовались тензорезисторы с базой 10 мм и тензометрическая станция National Instruments. Образец нагружался кинематическим способом со скоростью перемещения штока испытательной машины 2 мм/мин, при этом записывалась диаграмма « $P - V_0$ » и показания четырёх тензорезисторов. Диаграммы деформирования двух образцов « $P - V_0$ » обозначены на рис.2 круглыми маркерами.

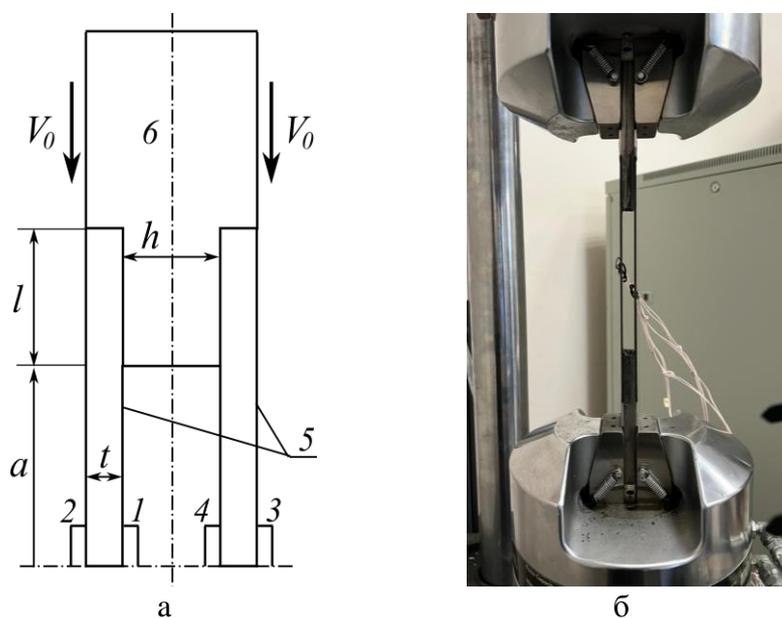


Рис.3. а) схема тест-образца для испытаний на сжатие (1-4 – тензорезисторы, 5 – композитные пластины, 6 – закладной элемент для закрепления); б) установка образца в захваты испытательной машины.

Можно отметить, что первые производные экспериментальных кривых производной теоретической кривой получены с помощью формулы (32). Различие можно объяснить деформацией захватов, некоторым проскальзыванием закладной детали в клиновых захватах, а также в целом податливостью конструкции испытательной машины.

При сжатии тест-образца происходит изгиб пластин, что можно видеть на диаграммах рис.4. На нём деформации  $\varepsilon_1 \div \varepsilon_4$  соответствуют показаниям тензорезисторов 1-4 на рис.3. Можно заметить, что при приближении  $P$  к критическому значению деформации  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  на внешних лицевых поверхностях получают растягивающие значения, а деформации  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_4$  – сжимающие. По такой картине деформации можно судить о процессе потери устойчивости обеих пластин тест-образца.

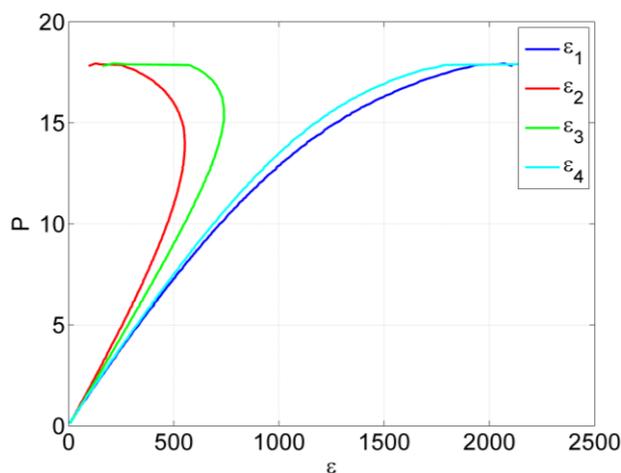


Рис.4. Диаграмма «нагрузка (кН)-деформация ( $10^6$ )» центральных точек лицевых поверхностей пластин для тест-образца с  $l = 60$  мм.

На графиках рис.5а,б и в Таблице 1 представлены сводные данные расчётов по формуле (32) (линии с треугольными маркерами), значения критических нагрузок  $P_E$  по формуле (38), соответствующих критической нагрузке Эйлера стержня с защемлением концевых сечений (линии с круглыми маркерами), а также нагрузок  $P_{exp}$ , полученных экспериментально (квадратные маркеры). Значения нагрузок по формуле (32) получены для трёх значений модуля сдвига  $G_{13}$  ввиду их физически нелинейного поведения в районе захвата [3].

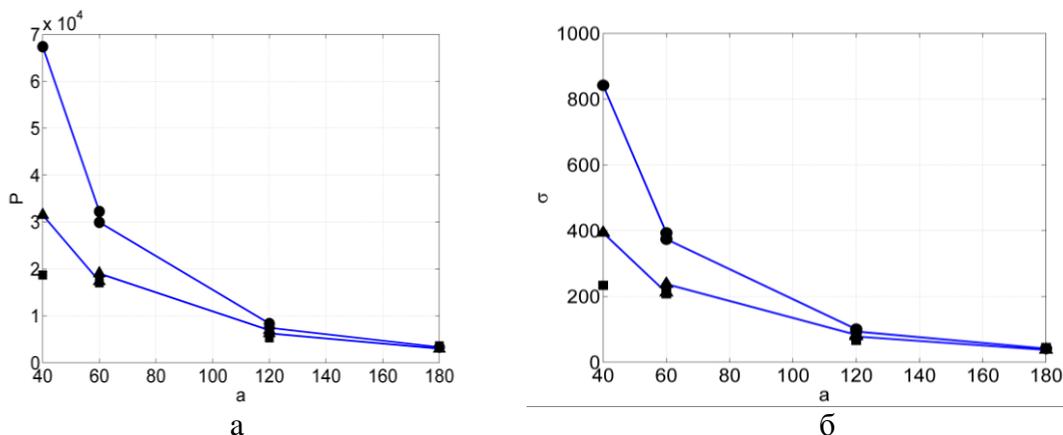


Рис.5. Зависимость критической сжимающей нагрузки  $P$ , Н (а) и сжимающих напряжений  $\sigma$ , МПа (б) от длины рабочей части образца  $a$ , мм (круглые маркеры – формула Эйлера для жёсткого защемления, треугольные – аналитическое решение, квадратные – экспериментальные значения).

Таблица 1.

Результаты расчётов и экспериментальных исследований.

№ образца	Толщина пластины $t$ , мм	Длина $a$ , мм	$2P_E$ , Н (38)	$2P$ , Н $G_{13} = 3$ ГПа	$2P$ , Н $G_{13} = 2$ ГПа	$2P$ , Н $G_{13} = 1$ ГПа	$P_{exp}$ , Н	$\sigma_{exp}$ , МПа
1	1,60	180	3327	3168	3118	3004	3591	44,89
2	1,60	120	7483	4396	4315	6276	5293	66,16
3	1,66	120	8361	7652	7446	6945	6480	78,07
4	1,60	60	29945	16020	15243	19029	17947	224,34
5	1,64	60	32248	17160	16299	17362	17045	207,87
6	1,60	40	67376	46371	41282	31487	18693	233,66

Анализируя полученные значения, можно отметить, что значения критических нагрузок и сжимающих напряжений, вычисленные по формулам (38), (32) и полученных экспериментально совпадают только для двух относительно длинных рабочих участков  $a$  тест-образца. При уменьшении длины до  $a = 60$  значения нагрузок  $P_E$  по формуле (38) и  $P$  при  $G_{13} = 1$  ГПа отличаются уже в 1.6 раза, а при  $a = 40$  – в 2.15 раза.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M., Gazizullin R.K. *Transformational deformation models of continuous thin-walled structural elements with support elements of finite sizes: Theoretical foundations, computational, and physical experiments* // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 2023. – Vol.103. – No.11. – Pp.1-32.
2. Паймушин В.Н., Шишкин В.М. *Моделирование вынужденных изгибных колебаний стержня-полосы, имеющего участок закрепления конечной длины, с учетом заданных перемещений упругого опорного элемента* // Прикладная механика и техническая физика. – 2024 (препринт).
3. Паймушин В.Н., Холмогоров С.А. *Физико-механические характеристики волокнистого композита на основе углеродной ЭЛUR-II и связующего XT-118* // Механика композитных материалов. – 2018. – Т.54. – №1. – С.5-20.



## **ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОГО ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ЦЕНТРОВ ВКЛЮЧЕНИЙ С ОДНОЙ ИЛИ НЕСКОЛЬКИМИ СЛУЧАЙНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

Сорокин Г.С., Власов А.Н.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

Массовое использование в настоящее время композитов в авиакосмической и автомобильной промышленности, в строительстве и машиностроении требует знания их механических характеристик. Также для расчётов связанных с производством геотехнических и горных работ необходимо определять механические свойства грунтов и горных пород, которые по существу являются композитами природного образования. Отметим, что в геомеханике определение механических характеристик часто трудоёмко и весьма затратно, а для скальных грунтов экспериментальными методами, как правило, невозможно в силу ярко выраженного масштабного эффекта. Таким образом, определение механических характеристик композитных материалов является актуальной.

Цель работы – определение тензора жёсткости композитных материалов с периодическим расположением их центров и случайными значениями деформационных свойств аналитико-численными методами из решения задачи на ячейке периодичности, а не на представительном элементе объёма.

В работе рассматриваются следующие варианты определения эффективных деформационных характеристик композитных материалов на примере композитных материалов со случайным коэффициентом Пуассона включения и случайным модулем упругости включения:

1. По заданному закону распределения независимых деформационных характеристик как случайных величин определяются их средние значения. В результате задача сводится к нахождению эффективного тензора жёсткости композитного материала периодической структуры со средними значениями деформационных характеристик матрицы и включений. Затем компоненты эффективного тензора жёсткости определяются методом асимптотического усреднения Бахвалова [1]. Данная процедура повторяется для обеих варьируемых характеристик (модуль деформации и коэффициент Пуассона). Итоговые значения вычисляются как среднее.

2. Методом асимптотического усреднения определяются значения эффективных компонентов тензора жёсткости в зависимости от значений компонентов тензора жесткости включений. В результате получаем параметрическую зависимость эффективного тензора жёсткости от деформационных характеристик включения. При этом следует заметить, что каждому фиксированному тензору жёсткости отвечает свой эквивалентный композитный материал с периодической структурой, которому соответствует свой эффективный тензор жёсткости. В результате мы получаем две функции плотности вероятности, перемножив которые получаем кумулятивную функцию. Применяв к данной функции метод подгонки кривых Пирсона [2,3] подбирается

распределение из данного семейства, наиболее точно описывающее рассматриваемую кумулятивную функцию.

Далее, по определенному закону распределения компонентов деформационных характеристик включений определяются законы распределения компонентов эффективного тензора жёсткости, а потом уже находятся средние их значения и три их момента – дисперсия, асимметрия и эксцесс.

3. Определение эффективного тензора жёсткости композитного материала методом Монте-Карло [4], используя который компоненты эффективного тензора жёсткости находятся из решения задачи на ячейке. Свойства фаз периодической ячейки композитного материала при этом генерируются датчиком (датчиками) псевдослучайных чисел в соответствии с их законами распределения. При использовании этого метода модель периодической ячейки многократно обчисляется, и на основе полученных данных вычисляются средние значения компонентов эффективного тензора жёсткости и три их центральных момента – дисперсия, асимметрия и эксцесс.

4. Определение эффективного тензора жёсткости композитного материала на представительном элементе объёма.

В рамках данного доклада хотелось бы сконцентрироваться на задаче номер 2. Для решения задачи рассмотрим некий композитный материал периодической структуры, часть деформационных характеристик включений которого постоянна, а часть принимает случайные значения в определенном диапазоне. Ячейка периодичности  $\Pi$  (рис.1) данного материала имеет включение постоянного размера, зафиксированное в геометрическом центре.



Рис.1. Периодическая ячейка композитного материала с включением.

Определим геометрические и деформационные характеристики матрицы и включения в отдельности. Пусть характеристики матрицы являются константами: размер ячейки  $l_{cell} = 1.1$  м модуль общей деформации матрицы равен  $E_s = 6000$  МПа, а коэффициент Пуассона  $\nu_s = 0.15$ . Пусть радиус включения  $r$  равен 0,25 м, а его коэффициент Пуассона и модуль деформации являются переменными значениями и в пределах от 0,15 до 0,3 и от 500 МПа до 1100 МПа соответственно.

На первом этапе применим методiku, изложенную в статьях [5,6], а именно решив периодические задачи

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( A_{ij}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} (N_i(\xi) + \xi_i I) \right) = 0, \quad (1)$$

$$\left[ N_i \right]_{\xi \in \Sigma} = \left[ n_i A_{ij}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} (N_i(\xi) + \xi_i I) \right]_{\xi \in \Sigma} = 0, \quad (2)$$

где в одном случае  $A_{ij}(E_i)$  есть матрицы-функции, составленные из компонент тензора жёсткости и параметрически зависящие от модуля упругости, где модуль упругости принимает значения на отрезке  $E_{\min} < E_i < E_{\max}$ , а в другом зависящие от коэффициента Пуассона принимающего значения от  $\nu_{\min} < \nu_i < \nu_{\max}$ . Как результат решения такой задачи получаем две свободные зависимости эффективного тензора жесткости от модуля упругости включения  $E$  и от коэффициента Пуассона  $\nu$ .

Далее считая, что модуль упругости включения  $E$  является случайной величиной распределенной по закону с плотностью вероятности  $f(E)$ , находим закон распределения компонентов тензора жесткости, который будет иметь следующий вид

$$F(\bar{c}_{ijkl}) = F(C_{ijkl} \leq \bar{c}_{ijkl}(E_i)) = F(E \leq E_i) = \int_E^{E_i} f(E) dE. \quad (3)$$

Проведя аналогичные преобразования с коэффициентом Пуассона  $\nu_i$  мы получим два закона распределения вероятности  $F(E_i)$  и  $F(\nu_i)$ .

При этом каждая плотность вероятности распределения компонентов тензора напряжений будет определяться как производная от функции закона распределения по соответствующим компонентам тензора жесткости  $\bar{c}_{ijkl}$ , т.е.

$$g(\bar{c}_{ijkl}) = \frac{d}{d\bar{c}_{ijkl}} F(\bar{c}_{ijkl}). \quad (4)$$

Далее перемножим законы распределения и применим к результату Метод Кривых Пирсона, модифицированный Большевым. Метод подгонки кривой Пирсона к некоторому эмперическому распределению состоит в следующем. По независимым результатам наблюдений вычисляют первые четыре выборочных момента, затем определяется тип подходящей кривой Пирсона.

Зная подходящую кривую из семейства Кривых Пирсона получаем функции распределения компонентов эффективного тензора жёсткости  $\bar{c}_{ijkl}$ , четыре основных их первых момента (начальный момент первого порядка и три центральных момента – со 2-го по 4-й порядок, соответственно) будут определяться по следующим формулам:

- Первый момент (математическое ожидание) – среднее значение (компоненты эффективного тензора жёсткости)

$$M[\bar{c}_{ijkl}] = \hat{c}_{ijkl} = \int_{\bar{c}_{ijkl}^{\min}}^{\bar{c}_{ijkl}^{\max}} \bar{c}_{ijkl} g(\bar{c}_{ijkl}) d\bar{c}_{ijkl}. \quad (5)$$

- Второй центральный момент – дисперсия

$$D[\bar{c}_{ijkl}] = \sigma^2 = \int_{\bar{c}_{ijkl}^{\min}}^{\bar{c}_{ijkl}^{\max}} (\bar{c}_{ijkl} - \hat{c}_{ijkl})^2 g(\bar{c}_{ijkl}) d\bar{c}_{ijkl}. \quad (6)$$

- Третий центральный момент

$$\mu_3 = \int_{\bar{c}_{ijkl}^{\min}}^{\bar{c}_{ijkl}^{\max}} (\bar{c}_{ijkl} - \hat{c}_{ijkl})^3 g(\bar{c}_{ijkl}) d\bar{c}_{ijkl}. \quad (7)$$

- Четвёртый центральный момент

$$\mu_4 = \int_{\bar{c}_{ijkl}^{\min}}^{\bar{c}_{ijkl}^{\max}} (\bar{c}_{ijkl} - \hat{c}_{ijkl})^4 g(\bar{c}_{ijkl}) d\bar{c}_{ijkl}. \quad (8)$$

По третьему и четвёртому моментам определяются два важных показателя функций распределения случайных величин. Это асимметрия и эксцесс, соответственно

$$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \quad (9)$$

Зная функции распределения компонентов эффективного тензора жёсткости  $\bar{c}_{ijkl}$ , четыре основных их первых момента могут быть легко определены по приведённым выше формулам (5)-(8).

Изложенная методика позволяет определять среднее значение эффективного тензора жёсткости  $\hat{A}_{ij}$ , его возможные минимальные и максимальные значения  $\hat{A}_{ij}^{\min}$  и  $\hat{A}_{ij}^{\max}$ , среднее квадратическое отклонение  $\sigma$  и, если необходимо, то асимметрию  $Sk$  и эксцесс  $Ex$  для композитных материалов с периодической структурой включений, модуль упругости и коэффициент Пуассона которых является случайной величиной.

Для более глубокого и предметного анализа рассмотрим несколько комбинаций для законов распределения, описывающих варьирование независимых друг от друга модуля упругости и коэффициента Пуассона (см. Таблицу 1).

Таблица 1.

Комбинации законов распределения относительно варьируемых переменных.

Задача 2.1.1	Коэффициент Пуассона – Нормальный закон распределения
	Модуль упругости – Нормальный закон распределения
Задача 2.1.2	Коэффициент Пуассона – Вейбулла
	Модуль упругости – Вейбулла
Задача 2.2.1	Коэффициент Пуассона – Нормальный закон распределения
	Модуль упругости – Вейбулла
Задача 2.2.2	Коэффициент Пуассона – Вейбулла
	Модуль упругости – Нормальный закон распределения

Таблица 2.

Результаты расчетов вышеуказанных комбинаций

№ задачи	Вероятностные параметры	$\hat{c}_{1111}$ , МПа	$\hat{c}_{2222}$ , МПа	$\hat{c}_{1122}$ , МПа	$\hat{c}_{2233}$ , МПа	$\hat{c}_{1212} = G_{\perp}$ , МПа
2.1.1.	M	2550,725	5008,545	450,128	818,801	1050,299
	$\sigma$	197,735	27,061	34,894	9,292	81,42
	Sk	-0,029	0,078	-0,029	0,018	-0,029
	Ex	-0,688	-0,673	-0,688	-0,684	-0,688
2.1.2.	M	2590,668	5017,545	473,038	829,552	1042,167
	$\sigma$	208,754	32,506	59,275	24,97	82,757
	Sk	-0,116	0,136	0,335	0,498	-0,078
	Ex	-0,301	-0,232	-0,314	-0,465	-0,46

2.2.1.	M	2540,434	5006,449	448,312	818,214	1046,0661
	$\sigma$	45,438	6,144	8,018	2,124	18,71
	Sk	-1,24	-1,189	-1,24	-1,217	-1,24
	Ex	2,353	2,144	2,353	2,261	2,353
2.2.2.	M	2535,388	5005,45	446,136	817,248	1045,931
	$\sigma$	42,057	5,824	8,3	2,714	17,298
	Sk	-0,839	-0,737	-0,627	-0,517	-0,873
	Ex	1,09	0,806	0,492	0,196	1,181

Из сравнения результатов, полученных в ходе расчетов, следует вывод о применимости предложенного вероятностного подхода (Задача 2), не основанного на Методе Монте-Карло к определению эффективного тензора жёсткости на ячейке периодичности. Такой подход позволяет получать не только средние значения (эффективный тензор жёсткости), но и три основных центральных момента – со 2-го по 4-й порядок, которые характеризуют случайную природу эффективного тензора жёсткости. Таким образом, оценка эффективных деформационных характеристик композитных материалов периодической структуры со случайными значениями компонентов тензоров и исследование их вероятностных характеристик сводится к решению на области периодичности, а именно на ячейке периодичности.

Важно отметить, что на данный момент разработка методики определений эффективных характеристик еще не завершена. Предстоит завершить еще ряд расчетов. Итогом работы предполагается создание расчетной программы, в которой на вход будут подаваться массивы данных, отражающие распределение величин варьируемых переменных (характеристик матрицы и включения). Затем для них будут определяться законы распределения и по вышеописанному алгоритму вычисляться эффективные характеристики изучаемого материала.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С. *Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами* // Доклады АН СССР. – 1975. – Т.221. – №3. – С.516-519.
2. Большев Л.Н. *Теория вероятностей и ее применение. Том 8.* – Изд-во Академии наук СССР, 1963. – №2. – С.129-155.
3. Elderton Sir W.P, Johnson N.L. *Systems of Frequency Curves.* – Cambridge University Press, 1969.
4. Соболев И.М. *Метод Монте-Карло.* – М.: Наука, 1968. – 64 с.
5. Власов А.Н., Власов Д.А., Сорокин Г.С., Карнет Ю.Н. *Оценка эффективного тензора жесткости композитного материала с периодическим расположением центров включений со случайным радиусом* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т.29. – №4. – С.502-519.
6. Власов А.Н. *Сведение уравнения теории упругости со случайными коэффициентами на области с периодической структурой к усредненному уравнению теории упругости с постоянными коэффициентами. Эффективный тензор жесткости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №3. – С.309-322.

УДК 539.375.5  
EDN RELVQO (<https://elibrary.ru/relvqo>)  
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.17



## **НЕОБРАТИМОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СЛОИСТЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОМПОЗИТОВ\***

Хайретдинова Д.Д., Селютина Н.С.

*Санкт-Петербургский государственный университет,  
г. Санкт-Петербург, Россия*

### **ВВЕДЕНИЕ**

При динамических и статических нагрузках деформационные отклики слоистых композитов имеют многостадийный характер, изменяющийся в зависимости от скорости деформации, толщины слоев и входящих в композит материалов. Для численного моделирования нелинейной деформации слоистых металлических композитов при статических нагрузках используются две основные теории: первая рассматривает композит как комбинацию двух однородных материалов, совмещая зависимости деформации полимерных и металлических слоев [1]; вторая, классическая теория ламинатов, определяет деформацию через плоское напряженное состояние с использованием матрицы жесткости и закона Гука [2].

Исследования показывают, что нет единой модели для однородных материалов при динамических нагрузках, параметры которой не зависят от скорости нагружения. Основная трудность заключается в тесной связи материала к модели и ее применимости в определенных диапазонах скоростей деформации. Разработка единой динамической модели деформирования многослойных композитов остается актуальной задачей и сегодня.

В данной работе продолжается развитие ранее предложенной модели необратимого деформирования разрушения слоистых композитов [3,4]. Предлагается новая численная схема на этапе продолжающегося пластического деформирования пластических слоев после разрушения хрупких слоев композита. Проведена валидация модели для различных композитов, испытанных в динамических и статических условиях. Построенная смешанная модель основана на релаксационной модели пластичности и критерии инкубационного времени для однородных материалов [5,6]. Особенности модели являются переход в рамках единой модели от статического к динамическому нагружению и использование инвариантных параметров к истории деформирования. На основе предлагаемой модели прогнозируется зависимость деформации для хрупких разрушений и пластично-хрупких переходов, что подтверждает эффективность единого набора характеристик для прогнозирования необратимой деформации в материалах со сложной структурой.

---

\* Работа выполнена при поддержке РФФ (грант 23-71-01059).

## МОДЕЛЬ

Для построения диаграмм многостадийного необратимого деформирования слоистого композита в данной работе предлагается применить структурно-временной подход, предложенный в исследованиях [5,6]. Главное преимущество структурно-временного подхода в том, что, определяемый набор параметров  $(\tau, \alpha, \beta)$  инвариантен к истории нагружения и позволяет построить единую скоростную зависимость прочности материала, как для статического, так и для динамического экспериментов. На основе структурно-временного подхода была предложена многостадийная релаксационная модель пластичности, которая позволяет рассчитать упругую, неупругую и необратимую стадии деформирования композита [3,4]. Так как рассматриваемый композит является сложным материалом, разделим процесс деформирования на несколько ключевых стадий: упругая деформация изначального композита, упругопластическая деформация композита за счет металлических слоев, разрушение хрупких слоев и последующая пластическая деформация без разрушенного хрупкого слоя.

В качестве критерия для разрушения хрупких слоев воспользуемся критерием инкубационного времени, описанным в работах [5]

$$\varphi(t, \sigma(t), \sigma_y, \tau_f, \alpha_f) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\sigma(t')}{\sigma_y} \right)^\alpha dt' \leq 1 \quad (1)$$

где  $\tau_f$  – инкубационное время разрушения хрупкого слоя,  $\Sigma(t)$  – зависимость локального растягивающего напряжения в образце от времени, а  $\sigma_y$  – статическая прочность хрупких волокон, параметр  $\alpha_f$  характеризует чувствительность материала к уровню силового поля, вызывающего разрушение (в текущих вычислениях считаем  $\alpha = 1$  для всех материалов). Время разрушения  $t_*$  определяется как момент, в который достигается знак равенства в уравнении (1).

Для моделирования упругопластического деформирования материала была использована релаксационная модель пластичности, основанная на определении инкубационного времени для описания временных эффектов пластической деформации [3-5]. Безразмерная функция релаксации  $\gamma(t, \sigma(t), \sigma_y, \tau, \alpha)$  описывает реакцию материала на нагрузку при переходе в стадию пластической деформации ( $0 < \gamma \leq 1$ )

$$\gamma(t, \sigma(t), \sigma_y, \tau, \alpha) = \begin{cases} 1, & \varphi(t, \sigma(t), \sigma_y, \tau, \alpha) < 1 \\ \varphi(t, \sigma(t), \sigma_y, \tau, \alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}, & \varphi(t, \sigma(t), \sigma_y, \tau, \alpha) \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

В настоящей работе рассматривается случай линейного нагружения  $\sigma(t) = E\varepsilon(t) = E\dot{\varepsilon}t$ . Тогда, на основе структурно-временного подхода и релаксационной модели пластичности, можем получить общую схему многостадийной релаксационной модели пластичности, которая была предложена в предыдущих работах [3]

$$\sigma_{\text{true}} = \begin{cases} E_0 \varepsilon(t), & t < t^0 \\ E_0 \gamma(t, E_0 \dot{\varepsilon} t, \sigma_y^0)^{1-\beta_0} \varepsilon(t), & t^0 \leq t \leq t^1 \\ E_0 \gamma(t, E_1 \dot{\varepsilon} t, \sigma_y^{\text{me}})^{1-\beta_1} \varepsilon(t), & t^1 \leq t \leq t^2 \\ E_0 \gamma(t, E_2 \dot{\varepsilon} t, \sigma_y^{\text{me}})^{1-\beta_2} \varepsilon(t), & t^2 \leq t \leq t^3 \\ \dots \\ E_0 \gamma(t, E_n \dot{\varepsilon} t, \sigma_y^{\text{me}})^{1-\beta_n} \varepsilon(t), & t^n \leq t \end{cases} \quad (3)$$

где  $t^0$  – время начала текучести металла,  $t^1, t^2, t^3, \dots, t^n$  – время разрушения соответствующих хрупких слоев, определяются из критерия инкубационного времени для хрупких слоев,  $E_0$  – изначальный модуль Юнга композита;  $E_1, E_2, \dots, E_n$  – модуль Юнга композита после разрушения соответствующего хрупкого слоя [3],  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  – безразмерный параметр, отвечающий за упрочнение материала,  $\sigma_y^0$  – предел текучести композита,  $\sigma_y^{\text{me}}$  – предел текучести металлического слоя.

Рассмотрим теперь модель для композита, состоящего из поочередно сложенных хрупких и металлических слоев одного типа, и уточним параметры модели с целью повышения ее точности. Предположим, что в момент разрушения единственного хрупкого слоя происходит сброс напряжений и функция релаксации  $\gamma(t)$  с набором параметров  $(\sigma_y^0, \tau_0, \alpha_0, \beta_0)$  переключается на функцию релаксации  $\gamma(t)$  с набором параметров  $(\sigma_y^{\text{me}}, \tau_{\text{me}}, \alpha_{\text{me}}, \beta_{\text{me}})$ . Важно отметить, что модель не определяет разрушение металлического слоя

$$\sigma_{\text{true}} = \begin{cases} E_0 \varepsilon(t), & t < t^0 \\ E_0 \gamma(t, E_0 \dot{\varepsilon} t, \sigma_y^0, \tau_0, \alpha_0)^{1-\beta_0} \varepsilon(t), & t^0 \leq t \leq t^1 \\ E_0 \gamma(t, E_1 \dot{\varepsilon} t, \sigma_y^{\text{me}}, \tau_{\text{me}}, \alpha_{\text{me}})^{1-\beta_{\text{me}}} \varepsilon(t), & t^1 \leq t \leq t^2 \end{cases} \quad (4)$$

где  $\sigma_y^{\text{me}}, \tau_{\text{me}}, \alpha_{\text{me}}, \beta_{\text{me}}$  – соответствующие параметры металлического слоя,  $\sigma_y^0, \tau_0, \alpha_0, \beta_0$  – соответствующие параметры для изначального композита.

Данная модель позволяет в рамках единой концепции учитывать релаксационные процессы всех составляющих, как при статических, так и при динамических режимах нагружения, а также рассчитывать напряженное состояние эквивалентного материала на каждой стадии. На примере полученных из литературы [7,8] экспериментальных результатов по разрушению многослойных композитов при статических и динамических нагрузках показано, что модель может прогнозировать многостадийное деформирование композита, а именно разрушение хрупких слоев и пластическую деформацию металлических слоев.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис.1-2 показаны результаты численного моделирования релаксационной модели пластичности для многостадийного деформирования материалов,

построенные на основе экспериментальных данных в исследованиях [7,8]. В работе [7] исследуется композитный материал Т6/0/90/90/0/Т6, состоящий из последовательной укладки пластин из титанового сплава Ti-6Al-4V и стекловолокна (ориентация 0/90/90/0) в качестве армирующего материала. Материал испытывали на растяжение при статическом ( $\dot{\epsilon} = 0.001$  1/с) и динамическом ( $\dot{\epsilon} = 500$  1/с) режимах нагружения. В работе [8] были исследованы характеристики слоистого композита Al/0/90/Al на основе алюминиевого сплава 2024 Т3 и стекловолокна ориентации 0/90 при двух скоростях нагружения ( $\dot{\epsilon} = 0.001$  1/с,  $\dot{\epsilon} = 400$  1/с).

В процессе нагружения у таких материалов наблюдается многостадийность деформирования, участки которой можем пронаблюдать на диаграмме деформирования. На начальном участке происходит упругая деформация всех слоев, далее происходит упругая деформация в волокнистых слоях и пластическая деформация в металлических слоях, на следующей стадии происходит разрушение хрупких слоев и далее происходит только пластическая деформация металлических слоев.

На рис.1-2 представлено сравнение диаграмм деформации, полученных с помощью модели (4) и экспериментальные данные [7,8].

Полученные константы модели для композита ( $\tau_0, \beta_0, \alpha_0$ ), металлического ( $\tau_{me}, \alpha_{me}, \beta_{me}$ ) и хрупкого слоя ( $\tau_f, \alpha_f, \beta_f$ ) представлены в Таблице 1.

На графиках видно, что теоретическая кривая показывает резкий сброс напряжений при разрушении хрупкого слоя для статического режима нагружения и плавное уменьшение напряжений для высоких скоростей деформации, что вызвано влиянием динамических эффектов металлического слоя композита.

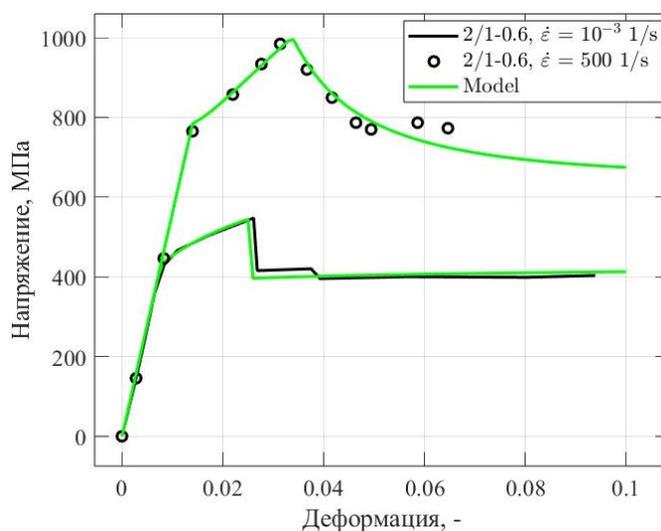


Рис.1. Диаграмма деформирования слоистого композита Т6/0/90/90/0/Т6: черным цветом указаны экспериментальные данные [7] для статического (сплошная линия) и динамического (точечно) экспериментов, зеленым цветом построены результаты моделирования по формуле (4).

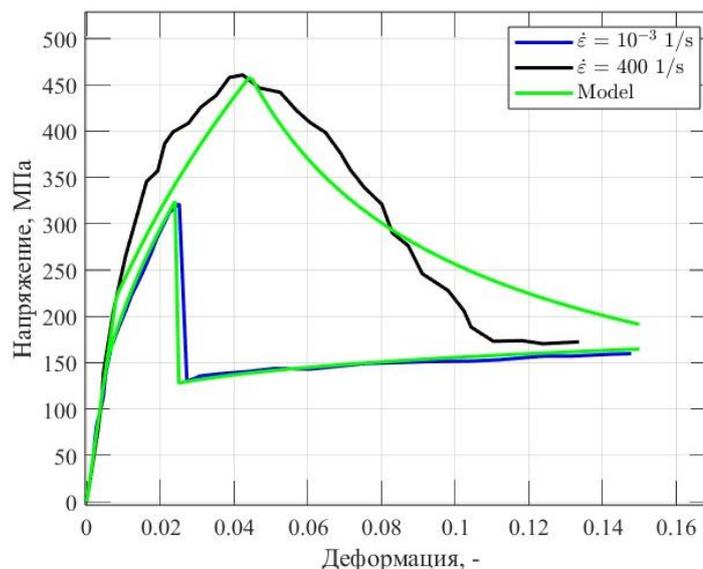


Рис.2. Диаграмма деформирования слоистого композита Al/0/90/Al: синим цветом обозначены экспериментальные данные [8] для двух скоростей деформации, зеленым цветом – построенная по формуле (4) модель.

Таблица 1.

Параметры модели, соответствующие экспериментальным данным [7-8].

Данные	$\tau_0$ , мкс	$\beta_0$ , -	$\alpha_0$ , -	$\tau_{me}$ , мкс	$\beta_{me}$ , -	$\alpha_{me}$ , -	$\tau_f$ , мкс	$\alpha_f$ , -
[7]	25	0.2	1	70	0.04	1	30	1
[8]	100	0.52	1	200	0.14	1	100	1

Показанные на рис.1-2 результаты подтверждают, что деформационные кривые хорошо согласуются с экспериментальными результатами и что модель (4) позволяет прогнозировать многостадийное деформирование композита, учитывая временные эффекты при моделировании деформационной кривой при различных скоростях деформации. Параметры ( $\tau, \alpha, \beta$ ) остаются неизменными, независимо от истории нагружения, что позволяет применять модель в широком диапазоне скоростей деформации.

## ВЫВОДЫ

Приведена и модифицирована многостадийная релаксационная модель пластичности, основанная на структурно-временном подходе и релаксационной модели пластичности. Проведена валидация параметров ( $\tau, \alpha, \beta$ ) для экспериментальных данных из литературы для металлических слоистых композитов: состоящий из титанового сплава и стекловолокна T6/0/90/90/0/T6, а также композит на основе алюминиевого сплава и стекловолокна Al/0/90/Al. Показано, что модель хорошо согласуется с экспериментальными точками, в том числе моделирует динамические эффекты при высоких скоростях деформации. Данный подход позволяет в рамках одной концепции учитывать процессы релаксации каждого слоя, как при статических, так и при динамических режимах нагружения, используя единый набор параметров  $\tau, \alpha, \beta$ .

Таким образом, многостадийная релаксационная модель пластичности может быть использована для слоистых композитов, и в рамках одной модели и единого набора параметров можно эффективно прогнозировать необратимое деформирование материалов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Zheng Z., Du Y., Chen Z., Li S., Niu J. *Experimental and theoretical studies of FRP-Steel composite plate under static tensile loading* // Construction and Building Materials. – 2021. – No.271. – 121501.
2. Li H., Li Z., Xiao Z., Wang X., Xiong J., Zhou J., Guan Z. *Development of an integrated model for prediction of impact and vibration response of hybrid fiber metal laminates with a viscoelastic layer* // Intern. Journal of Mechanical Sciences. – 2021. – No.197. – 106298.
3. Selyutina N., Petrov Y. *Structural-Temporal Peculiarities of Dynamic Deformation of Layered Materials* // Materials. – 2022. – No.15. – 4271.
4. Selyutina N. *Dynamic deformation of fiber-metal laminates depending on its metal thickness* // Procedia Structural Integrity. – 2020. – No.28. – Pp.1310-1314.
5. Petrov Y.V., Karihaloo B.L., Bratov V.V., Bragov A.M. *Multi-scale dynamic fracture model for quasi-brittle materials* // Intern. Journal of Engineering Science. – 2012. – No.61. – Pp.3-9.
6. Petrov Y.V., Borodin E.N. *Relaxation mechanism of plastic deformation and its justification using the example of the sharp yield point phenomenon in whiskers* // Phys. Solid State. – 2015. – No.57. – Pp.353-359.
7. Khan S.H., Sharma A.P. *Failure assessment of fiber metal laminates based on metal layer dispersion under dynamic loading scenario* // Engineering Failure Analysis. – 2019. – No.106. – 104182.
8. Sharma A.P., Velmurugan R. *Effect of high strain rate on tensile response and failure analysis of titanium/glass fiber reinforced polymer composites* // Journal of Composite Materials. – 2021. – No.55(24). – Pp.3443-3470.
9. Yang L., Xia H., Xu Z., Lihua Z., Ni Q. *Influence of surface modification of carbon fiber based on magnetron sputtering technology on mechanical properties of carbon fiber composites* // Materials Research Express. – 2020. – No.7. – 10560.

УДК 531.3

EDN KAHWBM (<https://elibrary.ru/kahwbm>)

DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.18



## **МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ НЕЛОКАЛЬНОГО ПОДХОДА**

Царев Р.О.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

### **ВВЕДЕНИЕ**

В современном мире развитие технологий играет ключевую роль во многих отраслях, таких как строительство, машиностроение и производство. Особое внимание уделяется развитию и использованию на практике композитных и наноматериалов, с регулируемыми физико-механическими и химическими свойствами, которые играют определяющую роль в проектировании и создании инновационных изделий. Но зачастую такие материалы имеют ортотропные или анизотропные свойства, что требует специальных обоснованных и проверенных теорий расчета. Для построения таких теорий требуются математические модели, позволяющие достоверно описывать поведение таких материалов при различных воздействиях, в том числе и динамических. Часто для этого применяют трехмерные конечно-элементные модели, позволяющие учесть особенности внутренней структуры материала и особенности его работы под нагрузкой. Такие модели являются чрезвычайно ресурсоемкими, что не позволяет эффективно применять подобный подход на практике. Альтернативой являются одномерные модели, построенные с использованием специальных гипотез, к примеру, положений нелокальной механики.

К таким моделям можно отнести модель, описанную в статье [1], где рассматривались различные варианты демпфирования при колебаниях квазиизотропной пултрузионной композитной балки: внешнее демпфирование; внутреннее демпфирование, зависящее от скорости деформации; пространственный гистерезис; и временной гистерезис. Кроме того, в статье рассматриваются различные комбинации этих механизмов. Так же, к моделям, основанным на принципах нелокальной механики, можно отнести модель нелокальной упругости, предложенную в статье [2], модель [3], сочетающую в себе нелокальность упругих и демпфирующих свойств. Определение параметров модели нелокального демпфирования на основе результатов численного моделирования динамического поведения композитной балки описано в статье [4], а нелокальная во времени модель внутреннего трения, встроенная в алгоритм метода конечных элементов, в статье [5]. В [4,5] показано, что одномерные модели, построенные с применением нелокального подхода, могут быть эффективно использованы в качестве альтернативы подробным трехмерным моделям.

Нелокальная во времени модель упругих свойств материала была разработана ранее для балочных элементов типа Эйлера-Бернулли и встроена в алгоритм метода конечных элементов [6]. Такой подход был выбран, чтобы модель можно было применять для прикладных расчётов стержневых систем, обладающих сравнительно сложной геометрией. Возможность использования

нелокального подхода при моделировании динамического поведения рамных конструкций продемонстрирована в настоящей статье.

## 1. ПОСТРОЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ ВО ВРЕМЕНИ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТРЕЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

В алгоритме метода конечных элементов уравнение движения представляется в матричном виде и записывается в перемещениях [7]

$$M \cdot \ddot{\bar{V}}(t) + D \cdot \dot{\bar{V}}(t) + K \cdot \bar{V}(t) = \bar{F}(t) \quad (1)$$

Здесь  $K$  – матрица жёсткости конечно-элементной расчётной модели,  $M$  – матрица масс,  $D$  – матрица демпфирования,  $\bar{F}(t)$  – вектор внешних силовых воздействий,  $\bar{V}(t)$  – искомый вектор перемещений.

Матрица жесткости рамного элемента, имеющего три степени свободы в каждом узле имеет вид

$$k_i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Здесь  $E$  – модуль упругости,  $I$  и  $A$  – момент инерции и площадь поперечного сечения элемента соответственно,  $l$  – длина элемента.

Матрица демпфирования для рамного элемента имеет вид

$$D_i = \chi \cdot \begin{bmatrix} \frac{A}{l} & 0 & 0 & -\frac{A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I}{l^3} & \frac{6I}{l^2} & 0 & -\frac{12I}{l^3} & \frac{6I}{l^2} \\ 0 & \frac{6I}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6I}{l^2} & \frac{2I}{l} \\ -\frac{A}{l} & 0 & 0 & \frac{A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I}{l^3} & -\frac{6I}{l^2} & 0 & \frac{12I}{l^3} & -\frac{6I}{l^2} \\ 0 & \frac{6I}{l^2} & \frac{2I}{l} & 0 & -\frac{6I}{l^2} & \frac{4I}{l} \end{bmatrix} \quad (3)$$

где  $\chi = E \frac{2\gamma}{\omega_0}$  – коэффициент вязкости материала, измеряемый в Па·с,  $\gamma$  – относительный коэффициент демпфирования,  $\omega_0$  – первая собственная частота конструкции.

При представлении упругих свойств материала как нелокальных во времени, предполагается, что упругие силы в системе в рассматриваемый момент времени  $t$  зависят не только от мгновенного значения перемещений в этот момент времени  $v(t)$  но и от значений перемещений в предыдущие моменты времени  $\tau$ . Причем влияние временных точек друг на друга тем меньше, чем больше расстояние между ними [8]. Чтобы построить модель нелокального во времени деформирования рамного элемента, представим уравнение (1) в виде

$$M \cdot \ddot{V}(t) + D \cdot \dot{V}(t) + K \cdot \int_0^t R(t-\tau) \cdot V(\tau) d\tau = \bar{F}(t) \quad (4)$$

В уравнении (4)  $R(t-\tau)$  – это ядро нелокального оператора упругости. Эта функция описывает убывание влияния деформаций в предшествующие моменты времени  $\tau$  на упругие силы в текущий момент  $t$ , при этом должно соблюдаться условие нормирования (5)

$$\int_0^t R(t-\tau) d\tau = 1, \quad (5)$$

Для моделирования функции памяти могут быть использованы ядра различного типа [2]. В настоящей работе в качестве ядра нелокального оператора используется функция ошибок, которая при выполнении условия (5) принимает вид

$$R(t-\tau) = \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\eta^2(t-\tau)^2}, \quad (6)$$

Как и для всех нелокальных моделей, в данном случае, определяющей характеристикой является масштабный параметр  $\eta$ , который характеризует степень нелокальности упругих свойств материала во времени (рис.1).

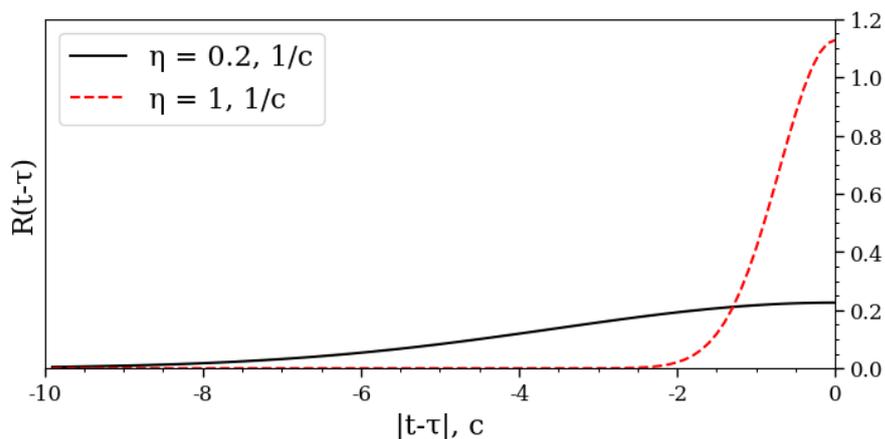


Рис.1. Влияние параметра  $\eta$  на степень нелокальности модели.

## 2. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ МАСШТАБНОГО ПАРАМЕТРА НА ХАРАКТЕР КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Для дальнейшей проработки модели необходимо определить, как изменение масштабного параметра влияет на характер колебаний стержневой системы. Для решения уравнения движения была использована неявная схема по методу Ньюмарка [9]. Вычисление узловых перемещений реализовано аналогично тому, как это было сделано при построении модели колебаний балочного элемента с учетом нелокальных во времени упругих свойств материала [6].

В качестве численного примера рассматривалась П-образная рама с жестким опиранием (рис.2). В качестве материала рамы был принят термоактивный винилэфирный стеклопластик I класса (Табл.1). Стойки в поперечном сечении представляет собой квадрат со стороной 0,4м, горизонтальная балка в поперечном сечении представляет собой прямоугольник высотой 0,3м и шириной 0,4м. Рама загружена по ригелю мгновенно приложенной и равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $-11$  кН/м.

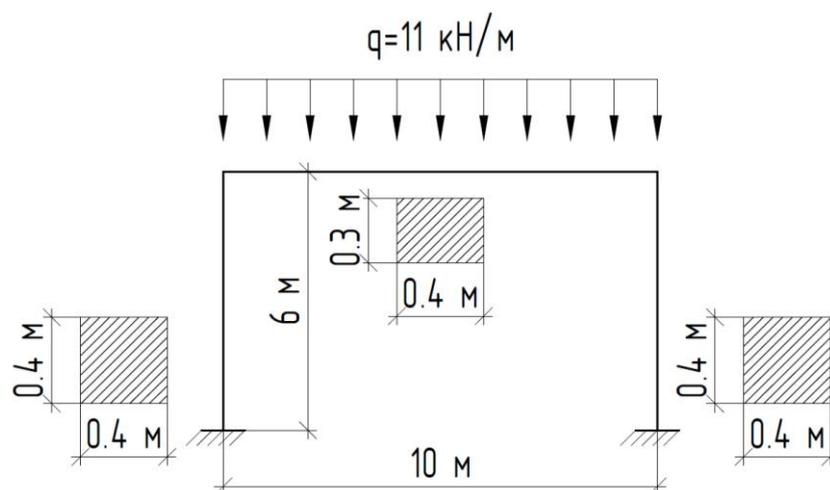


Рис.2. Расчетная схема рамы принятая для численного моделирования.

Таблица 1.

Характеристики терморезактивного винилэфирного стеклопластика I класса для моделирования из одномерных стержневых элементов.

Модуль Юнга направления, $E_{lw}$	17,2 ГПа
Коэффициент Пуассона, $\mu_{lw}$	0,32
Плотность материала, $\rho$	1,9 т/м <sup>3</sup>
Коэффициент относительного демпфирования, $\gamma$	0,042
Прочность на разрыв, $\sigma_{разр}$	241 МПа

Коэффициент вязкости для рассматриваемой рамы  $\chi = 0,021$  Па·с.

Были разработаны компьютерные программы на языке Python и на основе приведенных исходных данных были проведена серия расчетов с различными масштабными параметрами для оценки влияния масштабного параметра на характер колебательного процесса. Результаты приведены на рис.3.

Анализируя приведенные графики, можно сказать, что уменьшение параметра  $\eta$  (увеличение степени нелокальности) приводит к увеличению амплитуды колебаний.

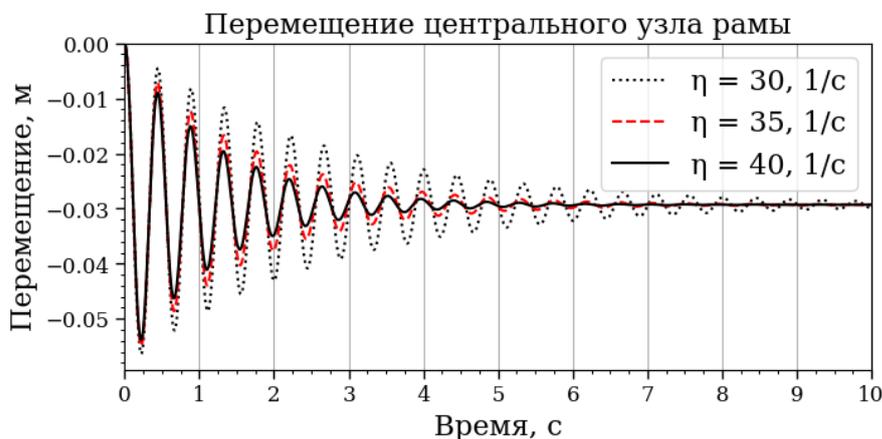


Рис.3. Графики перемещений центрального узла верхнего пояса рамы, полученные для трех реализаций расчета с различными масштабными параметрами.

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Для того чтобы нелокальную модель материала можно было применять в практических расчётах, необходимо определить значение нелокального параметра. Для достижения этой цели в настоящем исследовании использовалась методика калибровки нелокальной модели методом наименьших квадратов по результатам численного эксперимента. В качестве данных численного эксперимента использовались результаты трёхмерного конечно-элементного моделирования рамной конструкции, рассмотренной в предыдущем разделе. Модель была построена в расчетном комплексе MIDAS-Civil NX с учетом ортотропных свойств материала. Используемые при моделировании характеристики материала приведены в Таблице 2.

Таблица 2.

Характеристики термореактивного винилэфирного стеклопластика I класса для моделирования из трехмерных элементов.

Модуль Юнга в продольном направлении, $E_{lw}$	17,2 ГПа
Модуль Юнга в поперечном направлении, $E_{cw}$	12,2 ГПа
Коэффициент Пуассона в продольном направлении, $\mu_{lw}$	0,32
Коэффициент Пуассона в поперечном направлении, $\mu_{cw}$	0,15
Плотность материала, $\rho$	1,9 т/м <sup>3</sup>
Коэффициент относительного демпфирования, $\gamma$	0,042
Прочность на разрыв, $\sigma_{разр}$	241 МПа

В результате расчета был получен график перемещений среднего сечения ригеля рамы. Далее ординаты полученного в MIDAS-Civil NX графика колебаний

были экспортированы в программу для определения масштабного параметра написанную на языке Python, где был реализован алгоритм для определения масштабного параметра нелокальной модели методом наименьших квадратов. В качестве численного метода поиска минимального значения суммы квадратов расхождений между экспериментальными данными и численными результатами использовался метод золотого сечения [10].

В результате были получены графики, приведенные на рис.4 и 5. В сравнении с классической локальной моделью откалиброванная модель стержневой системы с применением нелокального подхода позволяет добиться лучшего совпадения с результатами численного эксперимента.

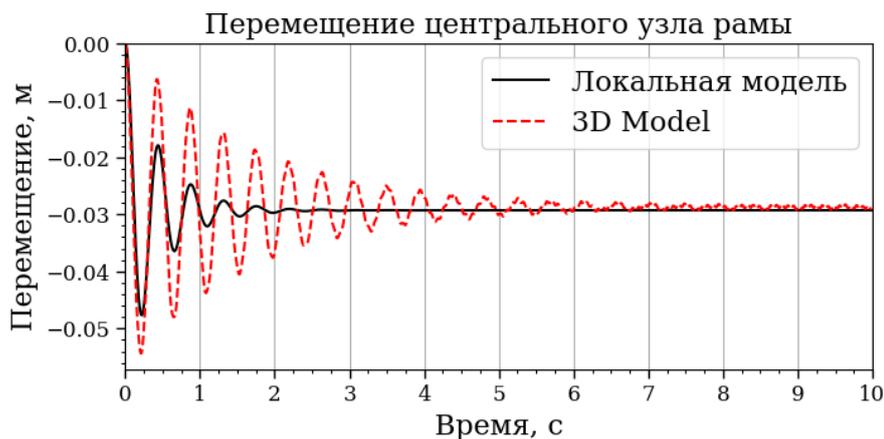


Рис.4. Сравнение результатов численного трехмерного эксперимента, с результатами одномерного моделирования по классической локальной модели. Величина среднеквадратичной ошибки:  $1.495 \cdot 10^{-5}$ .

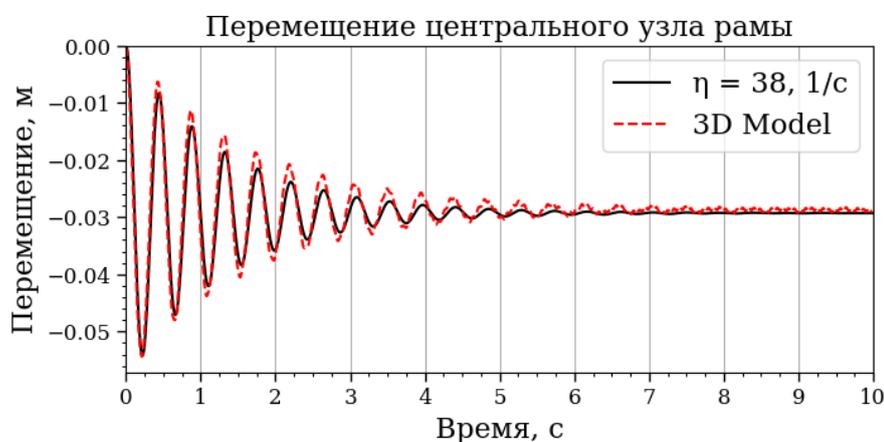


Рис.5. Сравнение результатов численного трехмерного эксперимента, с результатами одномерного моделирования с использованием откалиброванной модели нелокального во времени деформирования с использованием ядра функции ошибок. Величина среднеквадратичной ошибки:  $0.238 \cdot 10^{-5}$ .

На данных графиках наглядно видно, что нелокальная стержневая модель с откалиброванным масштабным параметром позволяет уменьшить величину среднеквадратичной ошибки в сравнении с локальной моделью почти на порядок. А значит, и получить результаты сравнимые по точности с результатами трехмерного моделирования.

В статье [6] приводятся результаты серии численных экспериментов для балок Эйлера-Бернулли с нелокальными во времени упругими свойствами материала. В частности, для балки с коэффициентом вязкости 0.021 Па·с был получен масштабный параметр 38.3 1/с. Несмотря на то, что результаты калибровки рамной конструкции, рассматриваемой в настоящей статье, получены независимо от результатов для балки, пара значений «коэффициент вязкости – масштабный параметр» получилась очень близкой: 0.021 Па·с – 38 1/с. Этот результат ещё раз подтверждает вывод, сделанный в статье [6]: масштабный параметр нелокальной модели является параметром материала, и нет необходимости калибровать модель всякий раз заново при изменении геометрии конструкции.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нелокальная модель динамического деформирования, построенная ранее для моделирования колебаний балочных элементов, расширена и сделана применимой для описания динамического поведения рамных конструкций. Показана зависимость между масштабным параметром  $\eta$  и амплитудой колебаний конструкции. Показано, что увеличение степени нелокальности материала, приводит к увеличению амплитуды колебаний. В сравнении с классической локальной моделью откалиброванная нелокальная модель стержневой конструкции позволяет добиться лучшего совпадения с результатами численного эксперимента. Получены результаты, подтверждающие, что масштабный параметр нелокальной модели, является параметром материала, и не зависит от геометрии конструкции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Banks H.T., Inman D.J. *On damping Mechanisms in Beams* // Journal of Applied Mechanics. – 1991. – Vol.58. – Iss.3. – Pp.716-723.
2. Eringen A.C., Edelen D.G.B. *Nonlocal elasticity* // Intern. Journal of Engineering Science. – 1972. – Vol.10. – Iss.3. – Pp.233-248.
3. Potapov V.D. *On the stability of a rod under deterministic and stochastic loading with allowance for nonlocal elasticity and nonlocal material damping* // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2015. – Vol.44. – No.1. – Pp.6-13.
4. Shepitko E.S., Sidorov V.N. *Defining of nonlocal damping model parameters based on composite beam dynamic behaviour numerical simulation results* / IOP Conf. Series: Materials, 2019.
5. Sidorov V.N., Badina E.S., Detina E.P. *Nonlocal in time model of material damping in composite structural elements dynamic analysis* // Intern. Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2021. – Vol.17. – No.4. – Pp.14-21.
6. Sidorov V.N., Badina E.S., Tsarev R.O. *Calibration of the nonlocal dynamic deformation model of a flexural beam based on numerical experiment results* // Intern. Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2024. – Vol.20. – No.2. – Pp.132-140.
7. Бате К.Ю., Вилсон Э.Л. *Численные методы анализа и метод конечных элементов*. – М.: Стройиздат, 1982 – 448 с.
8. Flugge W. *Viscoelasticity*. – Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, 1967. *An introductory text dealing with both Kelvin-Voigt and*

*Maxwell materials and their generalizations*; 2d rev. ed. Springer-Verlag, Berlin, 1975.

9. Сидоров В.Н., Бадьина Е.С. *Метод конечных элементов в задачах устойчивости и колебаний стержневых конструкций*. – М.: Издательство АСВ, 2021. – 172 с.
10. Лукьяненко Д.В. *Численные методы*: Физфак МГУ / Конспект лекций [<https://teach-in.ru/file/synopsis/pdf/numerical-methods-lukyanenko-M-101.pdf>].

УДК 531.01  
EDN KEQADX (<https://elibrary.ru/keqadx>)  
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.19



## ПЯТОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН

Шешенин С.В., Кузьмин М.А., Артамонова Н.Б.

*ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»,  
г. Москва, Россия*

В статье развита методика асимптотического осреднения линейно упругих однородных, слоистых и неоднородных пластин вплоть до пятого приближения. Асимптотический метод сводит трехмерные уравнения теории упругости к серии двумерных задач в плоскости пластины и одномерных задач в поперечном направлении. Краевые условия на боковой поверхности не осредняются. Особенностью работы является рассмотрение четвертого и пятого приближений. Показано, что для четвертого приближения и выше состояние изгиба и деформирования в срединной плоскости не разделяются даже для однородной пластины. Проведенное асимптотическое исследование справедливо и для сильно ортотропных пластин. Обнаружена несимметричность поперечного касательного напряжения.

### 1. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В работе развивается теория осреднения тонких тел для однородных и неоднородных по толщине материалов и является непосредственным продолжением работы [1]. Существуют различные методы, позволяющие свести трехмерные уравнения упругости к двумерным уравнениям теории пластин. Одним из методов редукции является асимптотический метод, который используется в нашем исследовании. Впервые асимптотический ряд был предложен в [2]. Асимптотика строится относительно малого параметра, равного отношению толщины к характерному размеру в плане пластины. Некоторые работы в этом направлении приведены в списке литературы [3-8].

В работах [5-8] асимптотическая теория в трех приближениях была развита для слоистых пластин и для периодических в плане гофрированных пластин. Описываемая ниже теория также применима к пластинам из функционально-градиентного материала (ФГМ). Изложение ограничено случаем симметричной относительно отсчетной плоскости неоднородности.

Рассматривается поперечный изгиб под действием нагрузки  $\varepsilon^3 p(\mathbf{x})$

$\mathbf{x} = x_1, x_2$ , приложенной к верхней поверхности. Нижняя поверхность свободна.

В силу линейности задачи в этом предположении нет ограничения общности. Как обычно, вводим «быструю» координату  $\xi_3 = x_3 / \varepsilon$   $\varepsilon$  – малый параметр, являющийся отношением толщины пластины к размеру в плане. Далее будем писать просто  $\xi$ . Предполагаем, что перемещения имеют вид  $u_i = u_i(x_1, x_2, \xi)$ . Это значит, что они меняются в поперечном направлении быстрее, чем в плоскости  $x_1, x_2$ . Плоскость  $x_3 = 0$  является отсчетной. Она может быть выбрана произвольно, но для симметричных пластин удобно ее выбрать совпадающей

со срединной плоскостью. Индексы, обозначенные малыми латинскими буквами, пробегают значения 1,2,3; большими – 1,2. Запятой обозначаем производную по соответствующей координате:  $f(x_1, x_2)_{,i} = \partial f / \partial x_i$  или  $f(\xi_3)_{,3} = \partial f / \partial \xi = f'$ . Нагрузка  $p$  зависит только от медленных координат  $x_1, x_2$ . Это означает, что она слабо меняется на расстоянии порядка толщины пластины.

Уравнения равновесия линейной теории упругости в области пластины  $V$  и граничные условия на верхней  $\Sigma_{top}$  и нижней  $\Sigma_{bot}$  ( $\xi = -1/2$ ) поверхностях записываются в виде

$$\left( C_{ijkl} u_{k,l} \right)_{,j} = 0, \quad \mathbf{x} \in V, \quad C_{ijkl} u_{k,l} n_j = \varepsilon^3 p(\mathbf{x}) \delta_{3i}, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{top}, \quad (1)$$

$$C_{ijkl} u_{k,l} n_j = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{bot}.$$

Здесь  $C_{ijkl}(\xi)$  – упругие константы материала, предполагаемого ортотропным,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к границе. Задача состоит в том, чтобы получить асимптотическое поведение решения уравнений (1) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Перемещения ищем в виде  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(e)} + \mathbf{u}^{(b)}$ , где

$$u_i^{(e)} = v_i(x_1, x_2) + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m N_i^{(e)PQ_0 \dots Q_{m-1}}(\xi) v_{P, Q_0 \dots Q_{m-1}}(x_1, x_2), \quad (2)$$

$$u_I^{(b)} = -\varepsilon \xi_3 w_{,I}(x_1, x_2) + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+1} N_I^{(b)PQ_0 \dots Q_{m-1}}(\xi) w_{P, Q_0 \dots Q_{m-1}}(x_1, x_2), \quad (3)$$

$$u_3^{(b)} = w(x_1, x_2) + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+1} N_3^{(b)PQ_0 \dots Q_{m-1}}(\xi) w_{P, Q_0 \dots Q_{m-2}}(x_1, x_2),$$

где  $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, 0\}$  – гладкая составляющая перемещения вдоль отсчетной плоскости,  $w$  – гладкая составляющая прогиба. Индекс «e» означает extension, «b» – bending. Асимптотические представления (2), (3) приближают решение задачи (1) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Нижние индексы дают номер компоненты вдоль соответствующей оси. Верхние индексы – номер функции. В работах [6-8]  $M$  равнялось трем. В данной работе  $M$  увеличено до пяти. Дифференциальные операторы серии уравнений относительно «медленных» функций  $v$  и  $w$  имеют «стандартный» для теорий пластин вид, а уравнения относительно функций  $N_i^{(e)PQ_0 \dots Q_m}$  или  $N_i^{(b)PQ_0 \dots Q_m}$  получаются линейными ОДУ. Серии уравнений выводятся чисто математически без привлечения гипотез. В этом отличие от феноменологических теорий пластин. Полезное сравнение асимптотических уравнений первых трех приближений с классическими теориями описано в [5,8]. Отличие от работ [6-8] состоит в объединении перемещений  $\mathbf{u}^{(e)} + \mathbf{u}^{(b)}$ , тогда как в работах [6-8] рассматривалась только составляющая  $\mathbf{u}^{(b)}$ . Ниже показано, что решение в виде только «изгибной» составляющей  $\mathbf{u}^{(b)}$  действительно существует для первых трех приближений, но не существует для четвертого асимптотического приближения.

По перемещениям вычисляются напряжения  $\sigma = \sigma^{(e)} + \sigma^{(b)}$  [1], где

$$\sigma_{ij}^{(e)} = P_{ij}^{PQ} v_{P,Q} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m P_{ij}^{PQ_0 \dots Q_m} w_{P, Q_0 \dots Q_m}, \quad (4)$$

$$P_{ij}^{PQ_0 \dots Q_m} = C_{ijkQ_m} N_k^{(e)PQ_0 \dots Q_{m-1}} + C_{ijk3} \left( N_k^{(e)PQ_0 \dots Q_m} \right)',$$

$$\sigma_{ij}^{(b)} = \varepsilon Q_{ij}^{PQ} w_{,PQ} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+1} Q_{ij}^{PQ_0 \dots Q_m} w_{,PQ_0 \dots Q_m}, \quad (5)$$

$$Q_{ij}^{PQ_0 \dots Q_m} = C_{ijkQ_m} N_k^{(b)PQ_0 \dots Q_{m-1}} + C_{ijk3} \left( N_k^{(b)PQ_0 \dots Q_m} \right)',$$

причем  $P_{ij}^{PQ} = C_{ijPQ} + C_{ijk3} N_k^{(e)PQ}$ ,<sub>3</sub> и  $Q_{ij}^{PQ} = -\xi C_{ijPQ} + C_{ijk3} \left( N_k^{(b)PQ} \right)'$  ( $Q = Q_0$ ).

Требуется удовлетворить 3D уравнениям равновесия  $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$ :

$$\begin{aligned} & 1/\varepsilon \left( P_{i3}^{PQ} \right)' v_{P,Q_0} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m-1} \left( \left( P_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m} \right)' + P_{iQ_m}^{Q_1 P Q_0 \dots Q_{m-1}} \right) v_{P,Q_0 \dots Q_m} + \\ & + \left( Q_{i3}^{PQ} \right)' w_{,PQ_0} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m \left( \left( Q_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m} \right)' + Q_{iQ_m}^{PQ_0 \dots Q_{m-1}} \right) w_{,PQ_0 \dots Q_m} + f_i = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $f_i = f_i(x_1, x_2, \xi)$ ,  $f_3 = 0$ , а также граничным условиям

$$\begin{aligned} & P_{i3}^{PQ} v_{P,Q} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m P_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m} v_{P,Q_0 \dots Q_m} + \\ & + \varepsilon Q_{i3}^{PQ} w_{,PQ} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+1} Q_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m} w_{,PQ_0 \dots Q_m} = \begin{cases} \varepsilon^3 p, & \xi = 1/2, \\ 0, & \xi = -1/2. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

В данной работе краевой эффект вблизи боковой границы не рассматривается.

Поперечная нагрузка в (7) пропорциональна  $\varepsilon^3$ , чтобы перемещения в плоскости  $v$  и прогиб  $w$  были конечны. Также требуется положить в (6)

$$\left( P_{i3}^{PQ} \right)' = 0, \quad \left( Q_{i3}^{PQ} \right)' = 0. \quad (8)$$

Граничные условия для (8) следуют из (7)

$$P_{i3}^{PQ} = 0, \quad Q_{i3}^{PQ} = 0, \quad \xi = \pm 1/2. \quad (9)$$

В методе осреднения для определения функций  $v$  и  $w$  используется осреднение уравнений равновесия. В нашем случае осреднение уравнений (6) дает

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m-1} \left\langle \left( P_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m} \right)' + P_{iQ_m}^{Q_1 P Q_0 \dots Q_{m-1}} \right\rangle v_{P,Q_0 \dots Q_m} + \\ & + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m \left\langle \left( Q_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m} \right)' + Q_{iQ_m}^{PQ_0 \dots Q_{m-1}} \right\rangle w_{,PQ_0 \dots Q_m} + \langle f_i \rangle = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Имеется в виду осреднение в поперечном направлении по формуле

$$\langle g \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} g(x_1, x_2, \xi_3) d\xi_3. \text{ Обозначим константы}$$

$$\begin{aligned} a_{iQ_m P Q_0 \dots Q_{m-1}} &= \left\langle \left( P_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m} \right)' + P_{iQ_m}^{PQ_0 \dots Q_{m-1}} \right\rangle, \\ b_{iQ_m P Q_0 \dots Q_{m-1}} &= - \left\langle \left( Q_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m} \right)' + Q_{iQ_m}^{PQ_0 \dots Q_{m-1}} \right\rangle. \end{aligned}$$

Тогда два 2D уравнения равновесия сил в плоскости  $x_1, x_2$  получим из (10) умножением на  $\varepsilon$

$$\sum_{m=1}^M \varepsilon^m a_{iQ_m P Q_0 \dots Q_{m-1}} v_{P,Q_0 \dots Q_m} - \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+1} b_{iQ_m P Q_0 \dots Q_{m-1}} w_{,PQ_0 \dots Q_m} + \varepsilon \langle f_i \rangle = 0. \quad (11)$$

Уравнение моментов дает третье уравнение

$$\varepsilon^2 \left\langle P_{IJ}^{PQ} \xi \right\rangle v_{P, QIJ} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+2} \left\langle P_{IJ}^{PQ_0 \dots Q_m} \xi \right\rangle v_{P, Q_0 \dots Q_m IJ} + \varepsilon^3 \left\langle Q_{IJ}^{PQ} \xi \right\rangle w_{, PQIJ} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+3} \left\langle Q_{IJ}^{PQ_0 \dots Q_m} \xi \right\rangle w_{, PQ_0 \dots Q_m IJ} = \varepsilon^3 p.$$

Если ввести константы  $c_{IJPQ_0 \dots Q_m} = \left\langle P_{IJ}^{PQ_0 \dots Q_m} \xi \right\rangle$  и  $d_{IJPQ_0 \dots Q_m} = \left\langle -Q_{IJ}^{PQ_0 \dots Q_m} \xi \right\rangle$ , то это уравнение принимает вид

$$-\sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+1} c_{IJPQ_0 \dots Q_{m-1}} v_{P, Q_0 \dots Q_{m-1} IJ} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+2} d_{IJPQ_0 \dots Q_{m-1}} w_{, PQ_0 \dots Q_{m-1} IJ} = \varepsilon^3 p. \quad (12)$$

Константы  $d_{IJPQ}$  имеют смысл эффективных изгибных модулей упругости.

Константы  $c_{IJPQ}$  есть модули взаимного влияния растяжения/сдвига и изгиба/кручения. При этом  $b_{IJPQ} = c_{PQIJ}$ .

Для решения системы (11), (12) представляем перемещения и прогиб в виде разложения по малому параметру  $\varepsilon$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{v}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{v}^{(2)} + \dots, \quad w = w^{(0)} + \varepsilon w^{(1)} + \varepsilon^2 w^{(2)} + \dots$$

Первое, третье и пятое приближения позволяют найти и уточнить основные нормальные напряжения, второе и четвертое – поперечные касательные напряжения, третье – поперечное нормальное напряжение. При этом удовлетворяются уравнения равновесия и граничные условия на верхней поверхности пластины. Представляет интерес вопрос, какова величина уточнений за счет четвертого и пятого приближений.

Чтобы увеличить точность асимптотического решения, следует рассмотреть уравнения (11), (12), удерживая члены вплоть до  $O(\varepsilon^5)$ . Для симметричной пластины ( $d_{IJPQ_0 Q_1} = 0$ ,  $c_{IJPQ_0} = 0$ ) получаем рекуррентные уравнения при  $\langle f_I \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 : \quad & \varepsilon^4 a_{IQ_1 P Q_0} v_{P, Q_0 Q_1}^{(3)} - \varepsilon^4 b_{IQ_3 P Q_0 Q_1 Q_2} w_{, PQ_0 Q_1 Q_2 Q_3}^{(0)} = 0, \\ \varepsilon^5 : \quad & \varepsilon^5 a_{IQ_2 P Q_0} v_{P, Q_0 Q_1}^{(4)} + \varepsilon^5 a_{IQ_2 P Q_0 Q_1} v_{P, Q_0 Q_1 Q_2}^{(3)} - \varepsilon^5 b_{IQ_4 P Q_0 Q_1 Q_2 Q_3} w_{, PQ_0 Q_1 Q_2 Q_3 Q_4}^{(0)} = 0, \\ \varepsilon^3 : \quad & d_{IJPQ_0} w_{, PQ_0 IJ}^{(0)} = p, \\ \varepsilon^4 : \quad & w_{, PQ_0 IJ}^{(1)} = 0, \\ \varepsilon^5 : \quad & d_{IJPQ_0} w_{, PQ_0 IJ}^{(2)} + d_{IJPQ_0 Q_1 Q_2} w_{, PQ_0 Q_1 Q_2 IJ}^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Следовательно, прогиб  $w^{(2)}$  находится из такого же уравнения, которое было получено в [5], где уравнение для прогиба не рассматривалось совместно с уравнениями равновесия в продольном направлении. Система (13) позволяет определять функции  $w^{(2)}$ ,  $\mathbf{v}^{(3)}$ ,  $\mathbf{v}^{(4)}$ , причем  $\mathbf{v}^{(3)}$  и  $\mathbf{v}^{(4)}$  находятся независимо от  $w^{(2)}$ .

Из уравнений (4) и (5) следуют граничные условия с точностью до  $O(\varepsilon^5)$

$$\begin{aligned} & P_{i3}^{PQ} \left( \varepsilon^3 v_P^{(3)},_{Q_0} + \varepsilon^4 v_P^{(4)},_{Q_0} + \varepsilon^5 v_P^{(5)},_{Q_0} \right) + \varepsilon^1 P_{i3}^{PQ_0 Q_1} \left( \varepsilon^3 v_P^{(3)},_{Q_0 Q_1} + \varepsilon^4 v_P^{(4)},_{Q_0 Q_1} \right) + \\ & \varepsilon^2 P_{i3}^{PQ_0 Q_1 Q_2} \varepsilon^3 v_P^{(3)},_{Q_0 Q_1 Q_2} + \\ & + \varepsilon Q_{i3}^{PQ} \left( w_{, PQ}^{(0)} + \varepsilon^2 w_{, PQ}^{(2)} + \varepsilon^3 w_{, PQ}^{(3)} + \varepsilon^4 w_{, PQ}^{(4)} \right) + \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 & + \varepsilon^2 Q_{i3}^{PQ_0Q_1} \left( w_{,PQ_0Q_1}^{(0)} + \varepsilon^2 w_{,PQ_0Q_1}^{(2)} + \varepsilon^3 w_{,PQ_0Q_1}^{(3)} \right) + \\
 & + \varepsilon^3 Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2} \left( w_{,PQ_0Q_1Q_2}^{(0)} + \varepsilon^2 w_{,PQ_0Q_1Q_2}^{(2)} \right) + \\
 & + \varepsilon^4 Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2Q_3} \left( w_{,PQ_0Q_1Q_2Q_3}^{(0)} \right) + \varepsilon^5 Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2Q_3Q_4} w_{,PQ_0Q_1Q_2Q_3Q_4}^{(0)} = \varepsilon^3 p \delta_{i3}.
 \end{aligned}$$

Для достижения отмеченного совпадения достаточно дополнительно к условиям (9) поставить граничные условия на локальные функции в следующем виде

$$\begin{aligned}
 P_{i3}^{PQ} &= 0, \quad P_{i3}^{PQ_0Q_1} = 0, \quad P_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2} = 0, \\
 Q_{i3}^{PQ} &= 0, \quad Q_{i3}^{PQ_0Q_1} = 0, \quad Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2} = d_{PQ_0Q_1Q_2}, \quad Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2Q_3} = 0, \\
 Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2Q_3Q_4} &= d_{PQ_0Q_1Q_2Q_3Q_4}.
 \end{aligned}$$

Тогда уравнение (13) и граничные условия (14) приводят к одинаковым уравнениям для  $w^{(0)}$ ,  $w^{(2)}$ .

Таким образом, теоретически показано, что поперечный изгиб симметричной или даже однородной, но достаточно толстой или сильно ортотропной пластины приводит, вообще говоря, к малым продольным перемещениям. При этом прогиб находится независимо от продольного перемещения.

## 2. ПРИМЕР ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИЗГИБА

Рассмотрим как пример цилиндрический изгиб трехслойной пластины. Каждый слой получается осреднением волокнистого композита. Два внешних слоя имеют угол укладки ноль градусов по отношению к продольному направлению пластины, средний более толстый слой – 90 градусов. Осредненные модули каждого слоя (МПа), рассчитанные согласно формулам из [9], приведены ниже

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= 426200.0, \quad E_{22} = E_{33} = 6900.0, \\
 G_{12} &= G_{13} = 2647.9, \quad G_{23} = 2647.9, \\
 \nu_{12} &= 0.3048, \quad \nu_{23} = 0.4881, \quad \nu_{31} = 0.0079.
 \end{aligned}$$

Поперечная нагрузка (Мпа) имеет вид  $\varepsilon^3 \cdot 10^8 (x-1)^2 (x^2)$ . На графиках напряжения приведены в Мпа, перемещения отнесены к  $l$ . Поперечный цилиндрический изгиб рассматривался для пластин различной относительной толщины, под которой понимаем отношение толщины к длине пластины. Относительная толщина, принятая за малый параметр, менялась от 0.025 до 0.2. Для параметра 0.025 все приближения совпадают друг с другом и с конечно-элементным решением. Для параметра 0.05 результаты приведены на рис.1-3. Для прогиба (рис.1) первое приближение дает решение, отличное от остальных приближений и от конечно-элементного решения. Прогибы, согласно остальным решениям, хорошо совпадают между собой.

На рис.2 изображены эпюры основных изгибных нормальных напряжений. Как видно график 5-го приближения отличается от графиков других приближений и графика конечно-элементного решения.

На рис.3 изображен график поперечного касательного напряжения. Графики, полученные во втором и четвертом приближениях, хорошо совпадают между собой. Несимметричность графика четвертого приближения едва заметна.

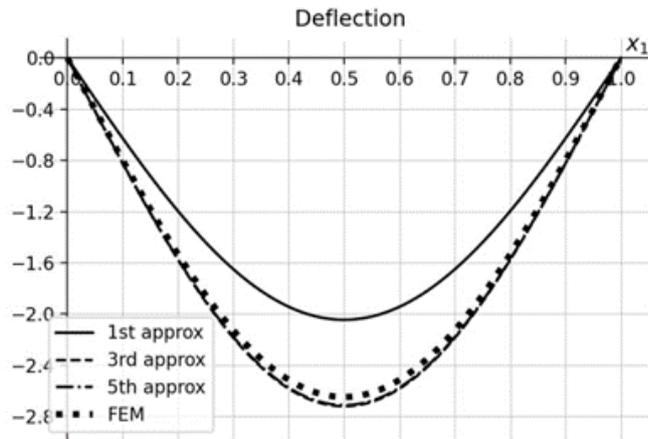


Рис.1. Графики прогиба для пластины с относительной толщиной 0.05.

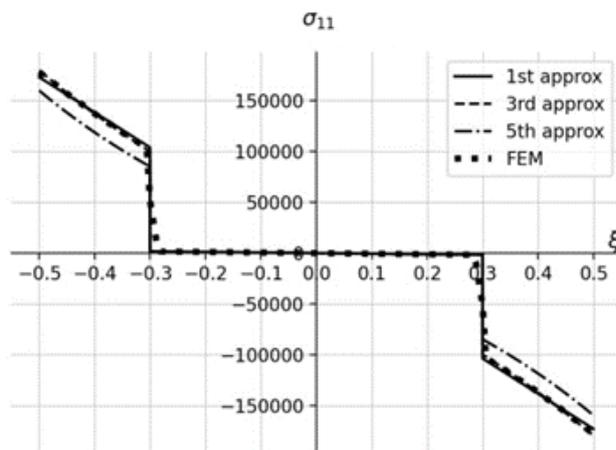


Рис.2. Эпюра нормального напряжения для пластины с относительной толщиной 0.05.

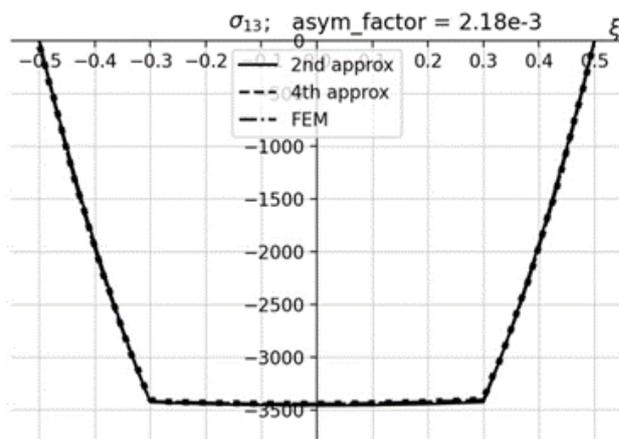


Рис.3. Эпюра поперечного касательного напряжения для пластины с относительной толщиной 0.05.

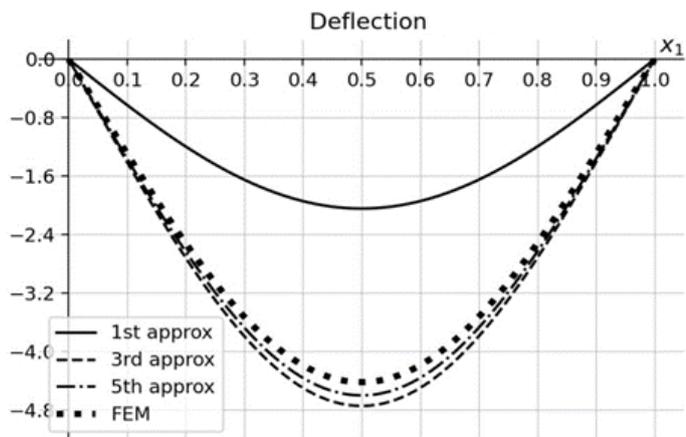


Рис.4. Графики прогиба для пластины с относительной толщиной 0.1.

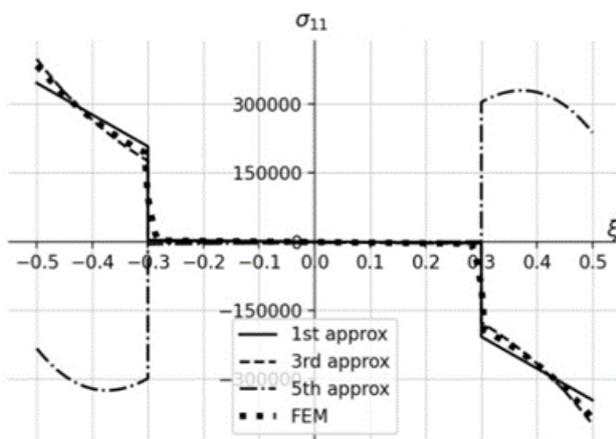


Рис.5. Эпюра нормального напряжения для пластины с относительной толщиной 0.1.

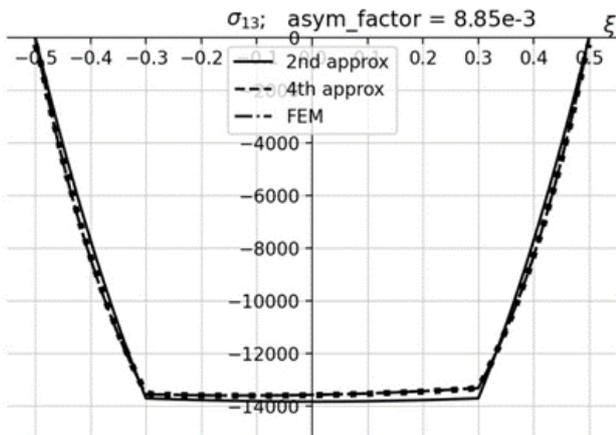


Рис.6. Эпюра поперечного касательного напряжения для пластины с относительной толщиной 0.1.

На рис.4-6 изображены аналогичные графики для относительной толщины 0.1. Видно, что различие в прогибах незначительно, кроме прогиба первого приближения, т.е. полученного по теории Кирхгофа. Для нормального напряжения пятое приближение уже не аппроксимирует решения, что возможно для асимптотического ряда. Зато аппроксимация поперечного касательного напряжения согласно четвертому приближению вполне хорошая.

На рис.7 приведено поперечное касательное напряжение, но для толщины 0.2. Видно хорошее совпадение касательного напряжения согласно 4-му приближению и конечно-элементного решения. Также видна сильная несимметричность этих напряжений относительно срединной поверхности.

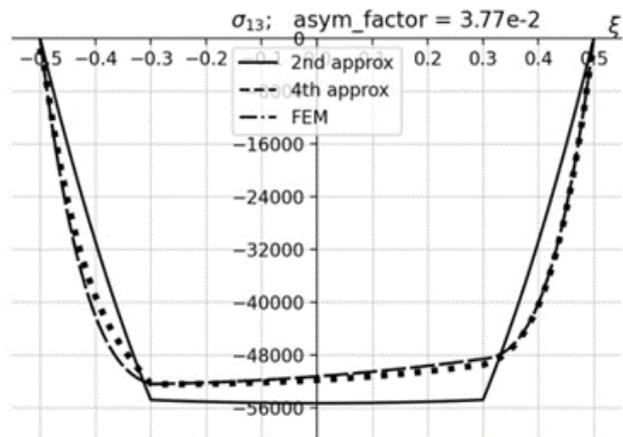


Рис.7. Эпюра поперечного касательного напряжения для пластины с относительной толщиной 0.2.

На рис.8 изображен график продольного перемещения для пластины толщиной 0.05.

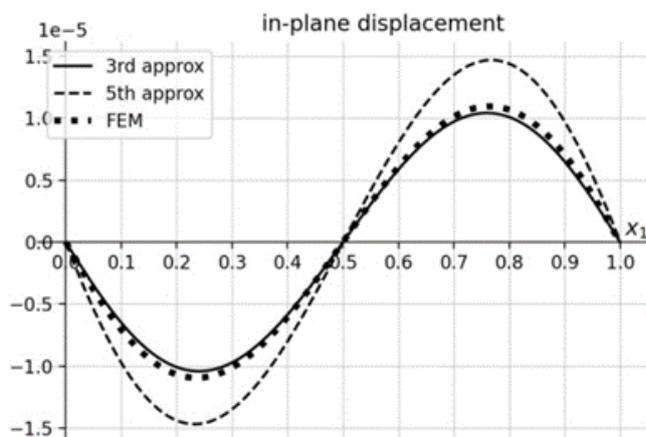


Рис.8. Графики продольного перемещения для пластины с относительной толщиной 0.05.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлено асимптотическое представление решения трехмерных уравнений равновесия линейной теории упругости вплоть до пятого приближения для неоднородного по толщине материала. Представление ограничено случаем симметричной в поперечном направлении неоднородности.

В четвертом приближении возникают перемещения в срединной плоскости, зависящие от прогиба. Возникающие малые продольные перемещения при поперечном изгибе имеют порядок малого параметра в третьей степени. Полученная ранее асимптотика прогиба до третьего приближения остается справедливой, поскольку задача для продольных перемещений решается независимо от задачи для определения прогиба. Проведенные вычисления

показали, что величина продольных перемещений мала и может не учитываться для тонких пластин.

Выявлена несимметричность поперечного касательного напряжения и показано, что четвертое асимптотическое приближение дает заметное уточнение второго приближения (типа формулы Журавского). Этот факт говорит о полезности 4-го приближения. Следует заметить, что полезность 5-го приближения в проведенных расчетах не обнаружена.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шешенин С.В., Кузьмин М.А., Артамонова Н.Б. *Высшие асимптотические приближения в задаче о поперечном изгибе пластины* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2024. – Т.30. – №2. – С.222-236.
2. Kohn R.V., Vogelius M. *A new model of thin plates with rapidly varying thickness* // Int. J. Solids Struct. – 1984. – Vol.20. – No.4. – Pp.333-350.
3. Levinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells*. – New York: World Scientific, 2000. – 768 с.
4. Панасенко Г.П., Резцов М.В. *Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине* // Докл. АН СССР. – 1987. – Т.294. – №5. – Pp.1061-1065.
5. Шешенин С.В., Мурадханов Р.Р. *Асимптотическое исследование изгиба пластины для сильно ортотропного материала* // Известия РАН. МТТ. – 2023. – №3. – С.36-57.
6. Шешенин С.В. *Асимптотический анализ периодических в плане пластин* // Известия РАН. МТТ. – 2006. – №6. – С.71-79.
7. Шешенин С.В. *Применение метода осреднения к пластинам, периодическим в плане* // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2006. – №1. – С.47-51.
8. Шешенин С.В., Скопцов К.А. *Теория пластин, основанная на методе асимптотических разложений* // Математическое моделирование и численные методы. – 2014. – №2. – С.49-61.
9. Кристенсен Р. М. *Введение в механику композитов*. – М.: Мир, 1982. – 336 с.



## ВЛИЯНИЕ ПЛЁНКИ ПРОДУКТОВ ИЗНОСА НА РАЗРУШЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ТРЕНИЯ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА\*

Шпенев А.Г.

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

### ВВЕДЕНИЕ

Большинство применяемых в технике трибологических волокнистых композитов (антифрикционные углепластики и фрикционные углерод-углеродные материалы) работают в условиях наличия на поверхности трения существенной плёнки третьего тела. Она оказывает значительное влияние, как на распределение контактных напряжений, так и на рельеф, возникающий на поверхности трения. Моделирование влияния третьего тела на трение и изнашивание осложняется сложным механическим поведением поверхностной плёнки, сочетающим в себе как элементы теории разрушения [1], так и элементы пластического течения [2,3]. В данной работе процесс трения с образованием значительной плёнки третьего тела будет представлен как два разных процесса. Первый – это процесс эволюции плёнки на макроуровне, определяющийся балансом между притоком вещества в плёнку за счёт износа поверхностей и уносом вещества из зазора контакта. В результате устанавливается некоторое равновесие, определяемое как параметрами контакта (контактными давлениями, скоростью скольжения, температурой), так и конфигурацией взаимодействующих образцов. Второй процесс описывает эволюцию плёнки на уровне отдельных волокон композита (локальный микроуровень). Он определяется вязкоупругими свойствами плёнки и неоднородностью трибологических свойств поверхности композита.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В соответствии с работами [4,5] баланс вещества в поверхностной плёнке может быть представлен плёнке в следующем виде

$$\begin{cases} Q_S = C_S V S (H_{\max} - H) \\ Q_W = C_W V L H \end{cases} \quad (1)$$

где  $Q_S$  – интенсивность притока вещества в плёнку за счёт износа, а  $Q_W$  – интенсивность оттока вещества из плёнки за счёт его выноса по периметру области контакта.  $S$  и  $L$  – площадь и периметр области контакта соответственно.  $C_S$  и  $C_W$  – коэффициенты пропорциональности,  $H_{\max}$  – максимально возможная толщина плёнки, при достижении которой поверхности полностью разделяются и интенсивность изнашивания падает до нуля. Приравняв  $Q_S$  и  $Q_W$  друг к другу, получим выражения для толщины плёнки  $H$  и средней интенсивности линейного износа  $\bar{u}$

\* Работа выполнена по теме государственного задания (№ гос.регистрации 124012500437-9).

$$\left\{ \begin{array}{l} H = \frac{H_{\max}}{\frac{C_w L}{C_s S} + 1} \\ \bar{u} = \frac{H_{\max}}{\frac{1}{C_s} + \frac{S}{C_w L}} \end{array} \right. \quad (2)$$

Износ поверхностей, имеющих развитую шероховатость, при наличии заметной пленки третьего тела, частично разделяющей поверхности, происходит за счет случайного взаимодействия различных выступающих участков (рис.1а). В соответствии с работой [4] для описания этого процесса можно рассматривать только среднюю толщину пленки, приняв линейный характер зависимости средней интенсивности изнашивания от средней толщины пленки. В нашем случае, однако, поверхность состоит из участков матрицы и участков армирующих включений, имеющих различные трибологические свойства, поэтому мы отдельно рассматриваем среднюю толщину пленки в регионах армирующих включений ( $H_f$ ) и среднюю толщину пленки в регионах матрицы ( $H_m$ ). При этих допущениях процесс изнашивания композитного материала при наличии пленки третьего тела можно рассматривать как установившееся взаимодействие между неоднородной поверхностью (моделирующей композитный материал) и жестким гладким контртелом (рис.1б). Поверхности разделены промежуточным слоем со средней толщиной  $H$ . Поверхность композита имеет кусочно-плоскую форму, на которой области армирующих включений и области матрицы лежат на разном уровне, за счет неоднородного износа. Пусть  $P$  – среднее контактное давление,  $V$  – скорость скольжения,  $H_f$  и  $H_m$  – толщина пленки в области включений и матрицы соответственно,  $v$  – доля площади включений в площади поверхности композита (равная объемной доле включений в композите). Упругими деформациями поверхности мы пренебрегаем.

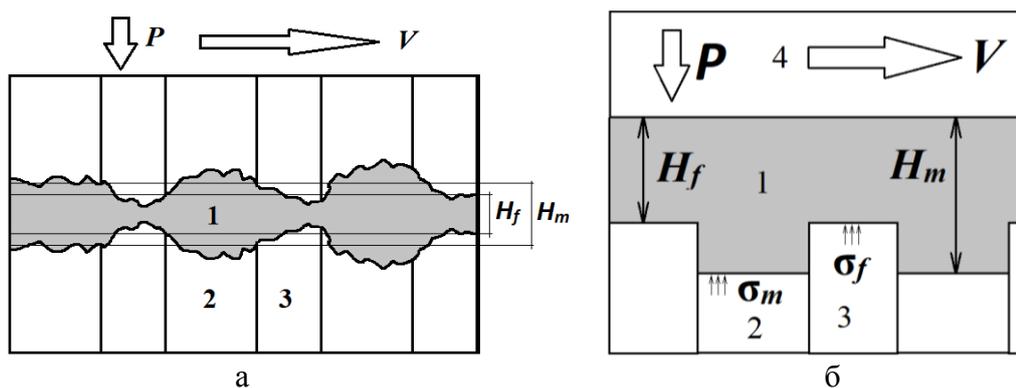


Рис.1. Схема контакта композита: а) полная, б) осредненное приближение.  
1 – поверхностная пленка, 2 – матрица композита, 3 – армирующие включения, 4 – контртело.

Тогда из условия равновесия получаем

$$v\sigma_f + (1-v)\sigma_m = P \quad (3)$$

где  $\sigma_f$  и  $\sigma_m$  – локальные контактные давления в области армирующих включений и матрицы соответственно.

Из соображений сохранения объема вещества пленки получаем

$$vH_f + (1-v)H_m = H \quad (4)$$

где  $H_f$  и  $H_m$  – локальная толщина пленки в области армирующих включений и матрицы соответственно;  $H$  – средняя толщина пленки, которая определяется конфигурацией контакта в целом.

Локальную интенсивность изнашивания в области включений  $\bar{u}_f$  и матрицы  $\bar{u}_m$  считаем пропорциональной локальному контактному давлению и линейно зависящей от локальной толщины пленки [4]. Тогда локальная интенсивность изнашивания будет определяться модифицированной формулой Арчарда

$$\bar{u}_{f,m} = VK_{f,m}\sigma_{f,m} \frac{H_{\max} - H_{f,m}}{H_{\max}} \quad (5)$$

где  $K_f$  и  $K_m$  – локальные коэффициенты изнашивания включения и матрицы соответственно,  $H_{\max}$  – максимально возможная толщина пленки, при которой поверхности разделяются полностью и износ прекращается. В установившемся режиме трения линейные скорости изнашивания матрицы и включений будут равны между собой (и равны интенсивности изнашивания композита в целом  $\bar{u} = \bar{u}_m = \bar{u}_f$ ), таким образом можно получить уравнение

$$K_f\sigma_f \frac{H_{\max} - H_f}{H_{\max}} = K_m\sigma_m \frac{H_{\max} - H_m}{H_{\max}}. \quad (6)$$

Локальная динамика толщины поверхностной пленки определяется сложным процессом вязкопластического течения вещества при росте пленки за счет износа и выдавливания вещества пленки по периметру контакта. Существующие подходы к описанию этого процесса в основном опираются на численные подходы с использованием сложных программных комплексов [2]. В первом приближении будем считать пленку одномерным вязкоупругим телом Максвелла, тогда ее толщина определяется формулой

$$\dot{H}_{f,m} = H_{f,m} \left( \frac{\sigma_{f,m}}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}_{f,m}}{E_{f,m}} \right). \quad (7)$$

Следует понимать, что коэффициенты этого уравнения ( $\eta$ ,  $E_{f,m}$ ) носят феноменологический характер и определяются не только физическими свойствами вещества пленки, но и локальными параметрами контакта. В случае установившегося трения локальные контактные параметры постоянны, а значит  $\dot{\sigma}_{f,m} = 0$ . Также в установившемся режиме скорости изменения толщины пленки в области включений и матрицы  $\dot{H}_f$  и  $\dot{H}_m$  также будут равны, откуда получаем

$$H_f\sigma_f = H_m\sigma_m \quad (8)$$

Из уравнений (3,4,6,8) получаем систему (9), состоящую из четырех уравнений относительно четырех неизвестных  $\sigma_f$ ,  $\sigma_m$ ;  $H_f$  и  $H_m$

$$\begin{cases} vH_f + (1-v)H_m = H \\ v\sigma_m + (1-v)\sigma_f = P \\ H_f\sigma_f = H_m\sigma_m \\ K_f\sigma_f \frac{H_{\max} - H_f}{H_{\max}} = K_m\sigma_m \frac{H_{\max} - H_m}{H_{\max}} \end{cases} \quad (9)$$

Для упрощения решения перейдем к безразмерным переменным

$$s_{f,m} = \frac{\sigma_{f,m}}{P}; h = \frac{H}{H_{\max}}; h_{f,m} = \frac{H_{f,m}}{H_{\max}}; K = \frac{K_f}{K_m} \quad (10)$$

Тогда система (9) примет вид

$$\begin{cases} v h_f + (1-v) h_m = h \\ v s_f + (1-v) s_m = 1 \\ h_f s_f = h_m s_m \\ K s_f (1-h_f) = s_m (1-h_m) \end{cases} \quad (11)$$

Система (11) не является линейной, но может быть приведена к виду квадратичной формы и решена аналитически

$$\left( \left( K + \frac{v}{1-v} \right) (1-2v) - H v (1-K) \right) s_f^2 + \left( (H-v)(1-K) - 1 + \frac{2v}{1-v} \right) s_f - \frac{v}{1-v} = 0 \quad (12)$$

Определив  $s_f$ , можно отыскивать остальные величины по формулам

$$s_m = \frac{1-v s_f}{1-v}; h_f = \frac{h}{(1-v) \frac{s_f}{s_m} + v}; h_m = \frac{h - v h_f}{1-v} \quad (13)$$

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТ

Достаточно устойчивая и толстая пленка на поверхности трущихся композитных деталей присутствует при трении с полным перекрытием контактных поверхностей, что соответствует схемам трения «кольцо-кольцо», «кольцо-диск» и другим подобным конфигурациям. На практике такие схемы встречаются в авиационных и железнодорожных тормозах, автомобильных сцеплениях, уплотнениях валов, подшипниках скольжения и т.д., изготавливаемых на основе УУКМ. Были рассмотрены три системы контактного взаимодействия: 1) работа полноразмерных авиационных тормозных дисков (рис.2а); 2) дисковых образцов для испытательного стенда ИМ-58 (рис.2б); и 3) малых образцов для лабораторного трибометра УМТ-2 (рис.2в).

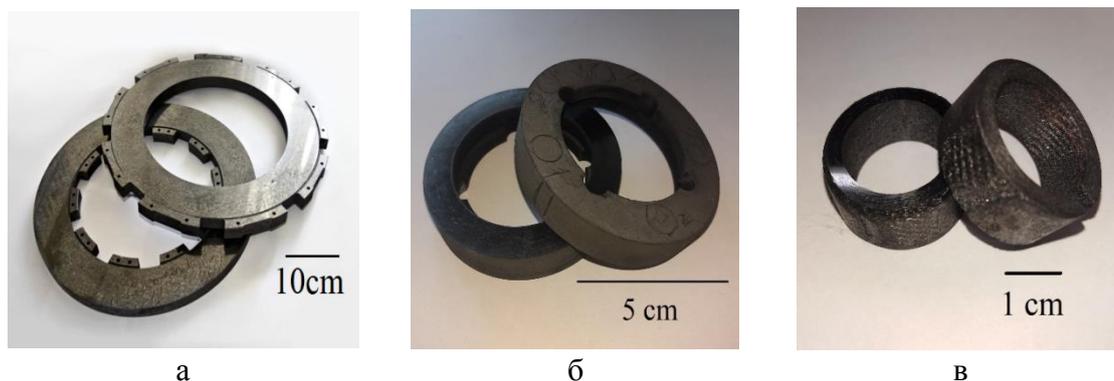


Рис.2. Кольцевые образцы углеродного волокнистого композита: а – авиационные тормозные диски, б – образцы для испытательного стенда ИМ-58, в – образцы для лабораторного трибометра УМТ-2.

Во всех случаях испытания происходили по стандартной схеме [6-8] («кольцо-кольцо»), при близких температурах и контактных давлениях, имитирующих работу авиационного тормоза, с ограничением доступа кислорода

воздуха. Основным различием рассмотренных случаев был размер образцов и, следовательно, величина геометрического фактора  $L/S$ . После трибологических испытаний поверхность композитов, отмытая от пленки продуктов износа, была исследована с помощью оптического бесконтактного профилометра Sneh (Senofar, Испания), что позволило получить трехмерные профили поверхности и измерить средний перепад высот  $\Delta$  между армирующими волокнами и матрицей.

На рис.3-5 представлены топографии поверхности трения и профили вдоль проведенных секущих всех трех образцов, а в Таблице 1 приведены значения геометрического фактора, интенсивности изнашивания и перепада высот поверхности трения исследованных образцов.

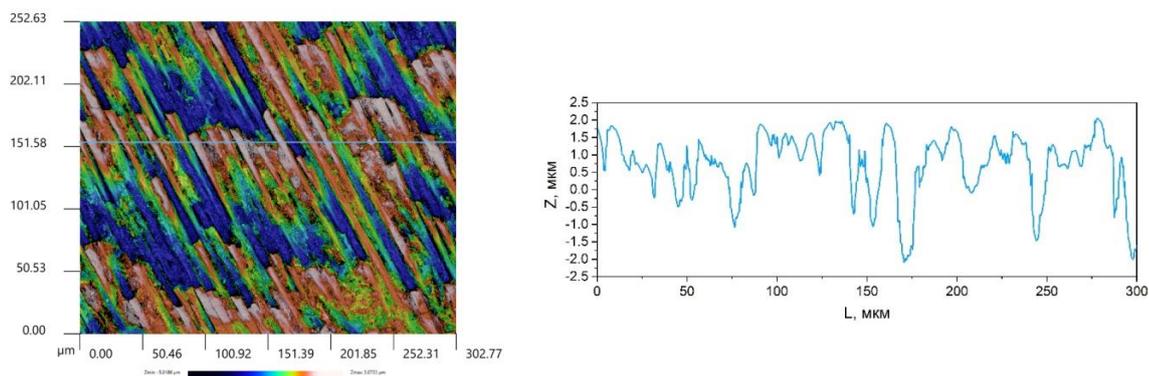


Рис.3. Топография поверхности трения углеродного тормозного диска и профиль вдоль проведенной секущей.

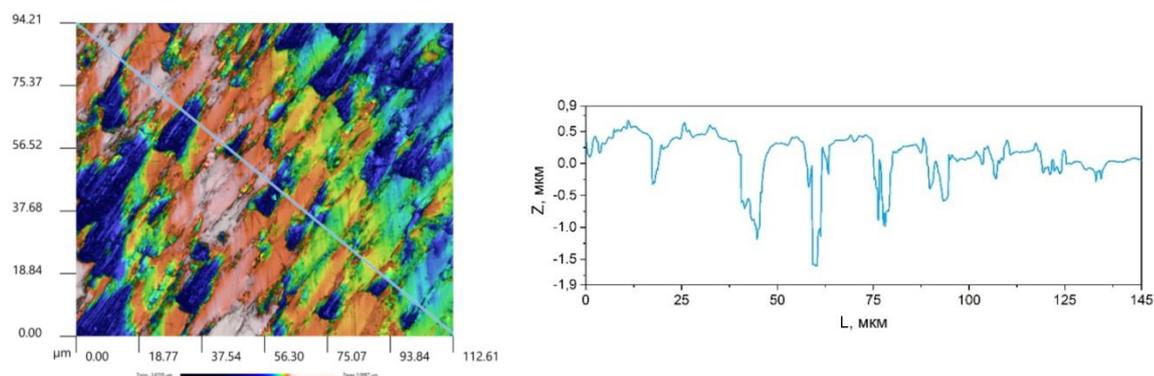


Рис.4. Профилограммы поверхности трения образца для стенда ИМ-58 и профиль вдоль проведенной секущей.

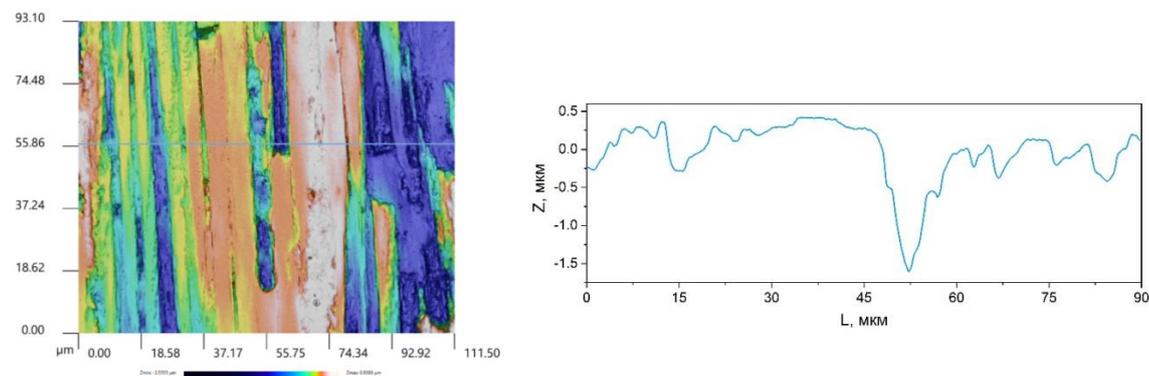


Рис.5. Профилограммы поверхности трения образца для трибометра UMT-2 и профиль вдоль проведенной секущей.

Таблица 1.

Геометрический фактор  $L/S$  и средний перепад высоты между волокном и матрицей  $\Delta$ .

Величина	Для тормоза	Для стенда ИМ-58	Для трибометра УМТ-2	Ед. изм.
Геометрический фактор, $L/S$	$10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$6.7 \cdot 10^{-4}$	мкм <sup>-1</sup>
Средний перепад высоты между волокном и матрицей, $\Delta$	1.5...2	1...1.5	0.5...1	мкм

В соответствии с формулами (5) и (10), средний перепад высоты между волокном и матрицей  $\Delta$  и средняя безразмерная интенсивности изнашивания  $\bar{u}/V$  могут быть выражены в следующем виде

$$\Delta = H_{\max} (h_m - h_f); \quad \bar{u}/V = PK_f s_s (1 - h_f). \quad (14)$$

На рис.6 показана зависимость величины  $\Delta$  от геометрического фактора  $L/S$  в соответствии с формулой (14) и обозначены полученные экспериментально величины в соответствии с Таблицей 1.

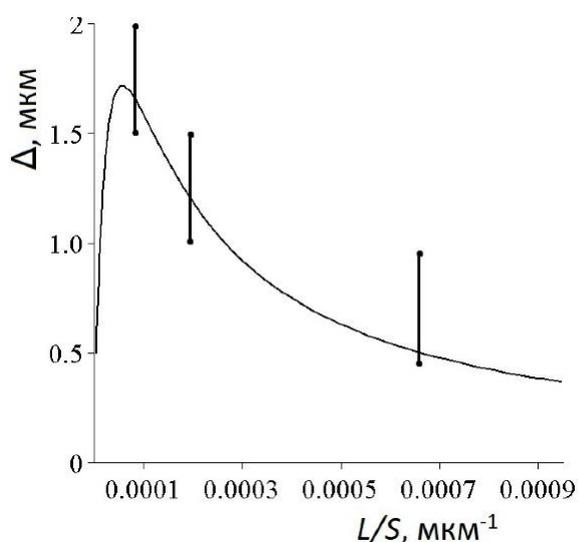


Рис.6. Зависимость перепада высоты между волокном и матрицей  $\Delta$ , мкм от геометрического фактора  $L/S$ , мкм<sup>-1</sup> с отмеченными экспериментальными результатами.

Сравнение теоретических величин с полученными экспериментальными данными показывает хорошую качественную и количественную корреляцию модели и эксперимента. Зависимость среднего перепада высоты между волокном и матрицей  $\Delta$  от геометрического фактора  $L/S$  носит немонотонный характер. Однако левая ветвь графика, имеющая возрастающий характер, относится к области малых значений геометрического параметра, соответствующих линейным размерам пятна контакта в десятки сантиметров. В построенной модели этой области соответствует толщина пленки близкая к  $H_{\max}$ , а интенсивность износа стремится к нулю. В реальных трибосопряжениях таких размеров параметры трения (прежде всего толщина поверхностной пленки)

становятся сильно неравномерными по области контакта [9] и применение данной модели возможна только с учетом этого фактора. Геометрический фактор авиационного тормозного диска соответствует области максимальных значений параметра  $\Delta$ , для условий трения, реализующихся в авиационных тормозах. Столь высокое значение перепада высоты между волокном и матрицей для некоторых УУКМ может вызвать дополнительный износ по механизму обламывания выступающих кончиков волокон [10].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поверхностная плёнка (третье тело) оказывает значительное влияние на терние и изнашивание углеродных материалов (в том числе УУКМ) в трибосопряжениях с большим коэффициентом перекрытия рабочих поверхностей (в тормозных дисках и сцеплениях). Моделирование этого процесса сопряжено с большими математическими трудностями и обычно возможно только с помощью численных методов. Однако применение многомасштабного подхода в сочетании с феноменологическим принципом моделирования течения материала третьего тела позволяет получить аналитические зависимости для интенсивности изнашивания, толщины плёнки и возникающего на поверхности композита рельефа, качественно и количественно совпадающие с экспериментальными данными.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Aghababaei R. *On the origins of third-body particle formation during adhesive wear* // Wear. – 2019. – Vol.426-427. – Pp.1076-1081.
2. Zhang Y., Mollon G., Descartes S. *Significance of third body rheology in friction at a dry sliding interface observed by a multibody meshfree model: Influence of cohesion between particles* // Tribology International. – 2020. – Vol.145. – 106188.
3. Renouf M., Cao H.-P., Nhu V.-H. *Multiphysical modeling of third-body rheology* // Tribology International. – 2011. – Vol.44. – Pp.417-425.
4. Fillot N., Iordanoff I., Berthier Y. *Wear modeling and the third body concept* // Wear. – 2007. – Vol.262. – Pp.949-957.
5. Shpenev A.G., Muravyeva T.I., Shkalei I.V., Bukovskiy P.O. *Influence of the surface film (third body) on the friction and wear process of carbon-fiber composites* // J. Surf. Investig. – 2022. – Vol.16. – Pp.397-401.
6. Крамаренко Е.И., Кулаков В.В., Кенигфест А.М., Лисовский С.А., Мозалев В.В. *Авиационные тормоза с углеродными фрикционными дисками* // Трение и износ. – 2006. – Т.27. – №3. – С.46-53.
7. Чичинадзе А.В., Албагачиев А.Ю., Кожемякина В.Д., Коконин С.С., Суворов А.В., Кулаков В.В. *Оценка фрикционно-износных характеристик отечественных углеродных фрикционных композиционных материалов для нагруженных тормозов самолетов* // Трение и износ. – 2009. – Т.30. – №4. – С.359-371.
8. Буковский П.О., Морозов А.В., Кулаков В.В., Голубков А.К., Родионов Н.Б., Кириченко А.Н. *Триботехнические свойства углерод-углеродных фрикционных композитов при высоких температурах* // Трение и износ. – 2022. – Т.43. – №5. – С.491-501.

9. Shpenev A.G. *The influence of the thermoelastic instability on the wear of composite brake discs* // Journal of Friction and Wear. – 2021. – Vol.42. – No.1. – Pp.30-37.
10. Yen B., Dharan C.K.H. *A model for the abrasive wear of fiber-reinforced polymer composites* // Wear. – 1996. – Vol.195. – No.1-2. – Pp.123-127.



## ДИАГНОСТИКА ТОНКОСТЕННЫХ И ТОНКОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИЦИЙ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

Якупов С.Н.<sup>1</sup>, Якупов Н.М.<sup>1</sup>, Валиев Х.Х.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН,  
г. Казань, Россия

<sup>2</sup>ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

### 1. ТОНКОСТЕННЫЕ И ТОНКОСЛОЙНЫЕ КОМПОЗИЦИИ

Познавая окружающий мир и решая возникающие проблемы, человечеством пройден гигантский путь от каменных глыб до изящных и прочных тонкостенных и тонкослойных конструкций, которые находят сегодня широкое применение во всех отраслях. При этом главная тенденция развития – от тривиальных форм к сложной геометрии, от однородных материалов к композиционным структурам. Широкому распространению тонкостенных и тонкослойных композиций, сочетающие в себе легкость с высокой прочностью, способствовало успешное решение научных и технологических проблем. Все это позволило создавать относительно совершенные тонкостенные конструкции. Хотя по относительным качественным параметрам рукотворные конструкции все еще очень далеки от уникальных природных объектов, в которых форма и материал каждого элемента гармонично сочетается с их функциональностью.

Современные тонкостенные и тонкослойные конструкции воспринимают большие нагрузки, работают в агрессивных средах и подвержены воздействию физических полей. В процессе эксплуатации в конструкциях возникают различные дефекты, снижающие их несущую способность [1]. Обеспечение безопасности конструкций является важной проблемой, которая входит в Перечень критических технологий Российской Федерации (п.21). В связи с этим, вопросы диагностики тонкостенных и тонкослойных композиций сложной структуры актуальны.

Возникает вопрос: как определить жесткостные и механические свойства тонкостенных и тонкослойных композиций, имеющих исходную или приобретенную сложную структуру? Стандартный способ одноосного испытания на растяжение (рис.1а, 1b) дает значительный разброс результатов испытаний [2].

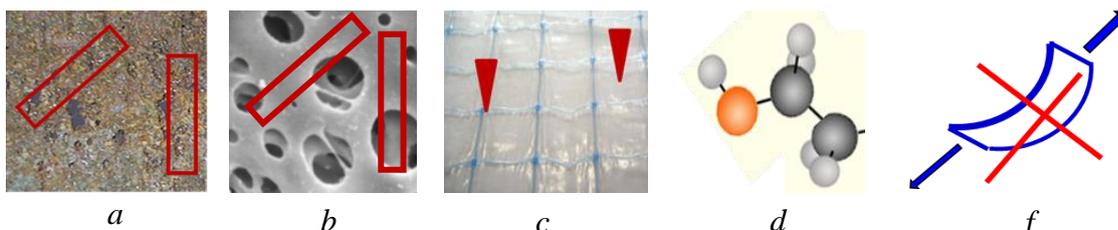


Рис.1. Методы исследования механических свойств тонких структур.

Для исследования сложных композиций, в том числе образцов с дефектами, включениями, отверстиями, армировкой... малоэффективны инденторные методы

[3] (рис.1с) и квантово-молекулярные подходы [4] (рис.1d). Стандартный одноосный способ исследования механических свойств неприменим для исходно оболочечных композиций (рис.1f).

## 2. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Разработан экспериментально-теоретический метод исследования жесткостных свойств плоских и неплоских тонкостенных и тонкослойных композиции [5,6] – синтез экспериментальных данных и теоретических соотношений, полученных из нелинейной теории тонких оболочек. Метод позволяет определять интегральные механические характеристики тонкостенных и тонкослойных композиций.

*Экспериментальный этап* – производится мониторинг образуемой формы закрепленного по контуру образца, нагруженного равномерным давлением. Устанавливается зависимость «прогиб  $w$  – давление  $p$ », характеризующая жесткость исследуемого образца. На рис.2 приведены схемы экспериментальных установок для исследования: плоских – рис.2a, сферических – рис.2b и цилиндрических образцов переменного радиуса – рис.2с.

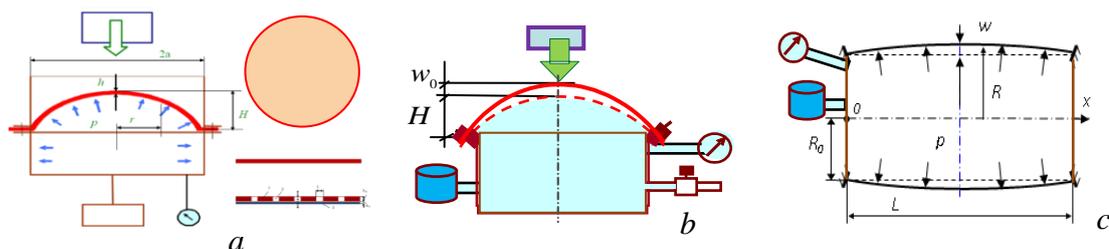


Рис.2. Схемы установок для испытания образцов.

*Теоретический этап* – этап обработки экспериментальных результатов. Модули упругости  $E$  для упругих образцов для случая среднего изгиба определяются по формуле, полученной из соотношений нелинейной теории оболочек [7]

$$E = \frac{Npa(1-\nu^2)}{h} \cdot \left(\frac{a}{H}\right)^3 \quad (1)$$

величина  $N$  зависит от коэффициента Пуассона  $\nu$  (при  $\nu=0.25$ ,  $N=0.31148$ ; при  $\nu=0.3$ ,  $N=0.30367$ ; при  $\nu=0.4$ ,  $N=0.29016$ ; при  $\nu=0.5$ ,  $N=0.27905$ ).

Жесткость на растяжение-сжатие  $B$  и жесткость на изгиб  $D$  при  $\nu=0.3$  (для металлических образцов [8]) можно определить по формулам

$$B = 0,3037 \cdot pa \left(\frac{a}{H}\right)^3; \quad D = 0,0253p \frac{a^4 h^2}{H^3} \quad (2)$$

Условный модуль упругости  $E_{ysl}$  для гибких образцов при пластических деформациях по Ильюшину А.А. можно определить по методике, изложенной в [9]

$$E_{ysl} = \frac{dA}{de_i} \epsilon_i^k + Ak\epsilon_i^{k-1}, \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (3)$$

В приведенных формулах:  $p$  – равномерно распределенное давление;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $h$  – толщина образца;  $a$  – радиус рабочей части образца;  $H$  – высоты подъема купола.

**Жесткость капроновых пористых мембран.** Исследовались мембраны толщиной 0,2 мм со средним диаметром микропор 0,2 мкм. Топография мембраны (скан 3.71 x 3.71 мкм<sup>2</sup>) приведена на рис.3 [10]. Мембраны используются для переноса биологически активных соединений. Образцы выдерживались в воде в течение 25 минут при комнатной температуре (на этапе испытания использовалась тонкая полимерная подложка толщиной 0,08 мм). Далее образцы исследовались экспериментально-теоретическим методом. Прогибы образцов и жесткость на растяжение-сжатие  $B$  (при  $\nu=0,4$ ) для образцов, подверженных и не подверженных воздействию воды приведены в Таблице 1.

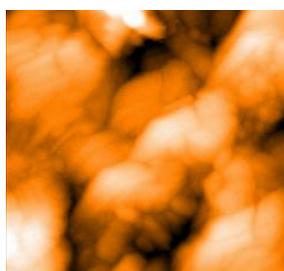


Рис.3. Топография мембраны (средний диаметр микропор 0,2 мкм).

Таблица 1.

Жесткость на растяжение-сжатие  $B$  (при  $\nu=0,4$ ).

$P$ , кг/см <sup>2</sup>	Прогибы (мм) образцов без воды / с водой				$B_{\text{ср}}$ (кг/см) (без ж. / с ж.)
	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_{\text{ср}}$	
0,057	3,52 / 7,51	3,32 / 7,67	3,35 / 6,86	3,39 / 7,35	108,7 / 10,7
0,067	3,78 / 8,23	3,62 / 8,30	3,58 / 7,34	3,66 / 7,96	101,5 / 9,9
0,080	4,09 / 9,08	3,91 / 9,21	4,01 / 8,16	4,01 / 8,82	92,2 / 8,7
Жесткость на растяжение-сжатие $B_{\text{ср}}$					100,8 / 9,77

**Выводы:** Прогибы мембран при взаимодействии в течение 25 минут с жидкой средой более чем в 2 раза выше по сравнению с неувлажненными образцами; при этом жесткость на растяжение уменьшается более чем на порядок.

**Мембранная кровля.** Исследовалось влияние длительности контакта с водой на механические свойства битумно-полимерной гидроизоляционной мембранной кровли, имеющей сложную структуру. Мембрану толщиной 5 мм получают путем двустороннего нанесения на армированную полиэфирную основу битумно-полимерного вяжущего. Образцы диаметром 120 мм выдерживались в воде в течение 2 и 8 недель (рис.4).

Прогибы образцов, а также жесткости на растяжение-сжатие  $B$  и на изгиб  $D$  (при  $\nu=0,4$ ) для образцов приведены в Таблице 2.

**Выводы:** Жесткость образцов при контакте с водой 8 недель снизилась на 11% по сравнению жесткостью образцов, выдержанных в воде 2 недели.



Рис.4. Гидроизоляционная мембранная кровля (а) в водной среде (b).

Таблица 2.

Прогибы и жесткости  $B$  и  $D$  (при  $\nu=0,4$ ).

$P, \text{ кг/см}^2$	Прогибы образцов, см (под водой)		Жесткость $B$ (кг/см) 2 недели / 8 недель	Жесткость $D$ (кг см) 2 недели / 8 недель
	$H_1$ 2 недели	$H_2$ 8 недель		
0,2	0,755	0,783	174,8 / 156,7	3,64 / 3,26
0,3	0,837	0,871	192,4 / 170,7	4,01 / 3,56
0,4	0,913	0,950	197,6 / 175,4	4,12 / 3,66
Средняя жесткость			188,3 / 167,6	3,92 / 3,49

**Влияние царапин на жесткость тонкостенных элементов.**

Исследовались металлические образцы толщиной  $h=0,6$  мм с царапинами и без них; параметры царапин: шаг  $b=2,5, 5, 10$  и  $20$  мм; глубина  $t=0,05; 0,1$  и  $0,2$  мм (рис.5).

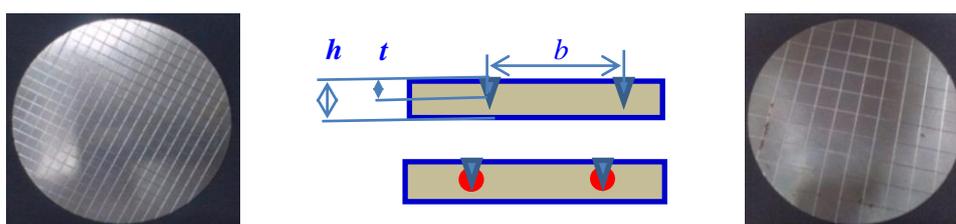


Рис.5. Образцы с царапинами.

Изменение жесткости на растяжение-сжатие  $B$  и жесткости на изгиб  $D$  в зависимости от шага  $b$  и глубины  $t$  царапин приведены на рис.6.

**Выводы:** С уменьшением шага  $b$  жесткости образцов уменьшаются; с ростом глубины  $t$  царапин наблюдается существенное снижение жесткостей. Эффект снижения жесткостей объясняется появлением в области вершин царапин пластических деформаций (рис.5).

**Полимерная пленка с нанопокрывтием.** На полимерную пленку нанесено ионно-плазменным методом покрытие из окиси титана. Рассмотрены случаи:

покрытие толщиной 50 нм (образец №3) и покрытие с толщиной 150 нм (образцы №4 и №5); отдельно исследована также пленка (подложка) толщиной  $h_{подл} = 0,1$  мм (образец №6).

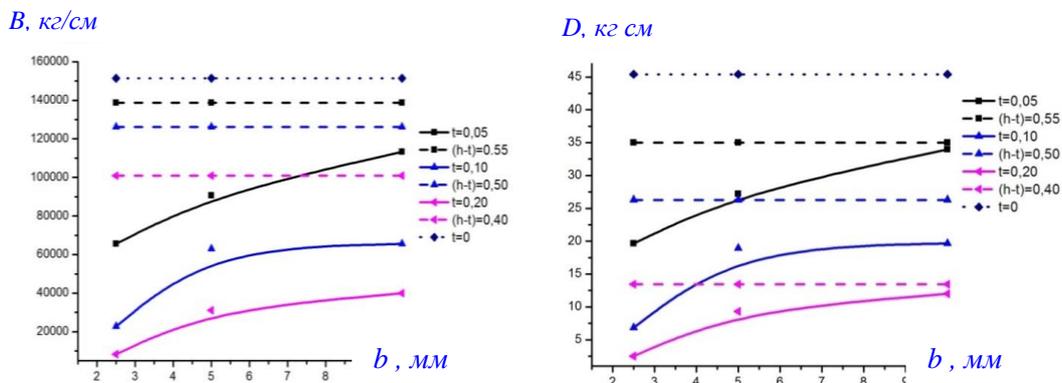


Рис.6. Изменение жесткостей образцов  $B$  и  $D$ .

Прогибы образцов  $H$  от давления  $P$  приведены на рис.7; как видно из рисунка – наличие покрытия изменяет жесткостные свойства композиции, причем с увеличением толщины покрытия эффект возрастает.

В другом цикле исследований рассмотрена аналогичная композиция с толщиной покрытия  $h_{покр}=80$  нм. Ставилась задача определения модуля упругости покрытия  $E_{покр}$ , используя экспериментально-теоретический метод. Для решения этой задачи был разработан следующий алгоритм: 1) определяем «прогиб  $H_c$  – давление  $p$ » для композиции и вычисляем ее модуль  $E_c$ ; 2) определяем «прогиб  $H_{подл}$  – давление  $p$ » для подложки и вычисляем ее модуль  $E_{подл}$ ; 3) вычисляем модуль нанопокртия  $E_{покр}$  по формуле

$$E_{покр} = \frac{E_c (h_{покр} + h_{подл}) - E_{подл} h_{подл}}{h_{покр}} \quad (4)$$

Зависимость модуля упругости  $E_{покр}$  для покрытия от интенсивности деформации  $\varepsilon_i$ , вычисленная по (3), приведена на рис.8.

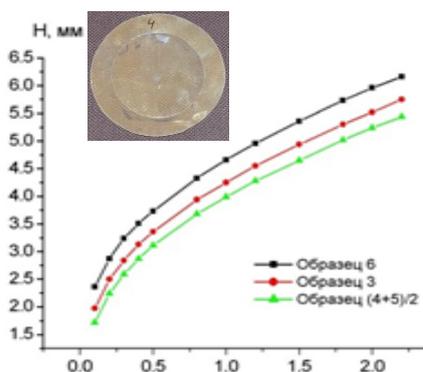


Рис.7. Зависимость « $H - P$ ».

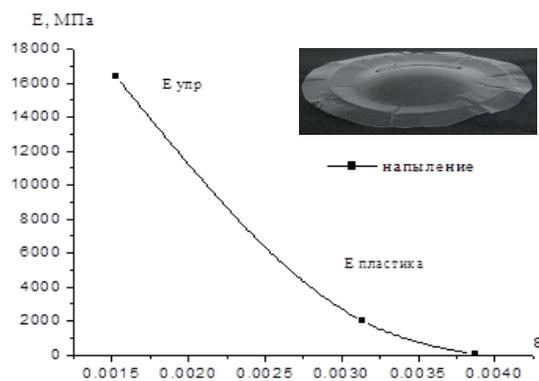


Рис.8. Зависимость « $E_{покр} - \varepsilon_i$ ».

**Вывод:** Разработанный алгоритм позволяет определять модуль упругости нанопокртия в системе «подложка – покрытие».

**Изменения механических характеристик бинта в жидкой среде.** Структура медицинского бинта заключается в сложном переплетении

хлопчатобумажных нитей. Качество бинтов подтверждают такие показатели, как: плотность, капиллярность, прочность на разрыв, стерильность (рис.9). Разрабатываются бинты различной плотности, способных растягиваться в продольном, поперечном и диагональном направлениях.

Выполнены исследования по изучению механических свойств медицинских бинтов, подверженных воздействию растворов ФУРАЦИЛИНА и КСИМЕДОНА. Фрагмент испытания медицинского бинта приведен на рис.10.



Рис.9. Медицинский бинт.

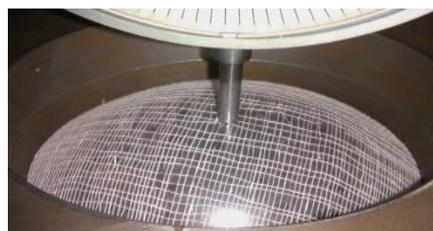


Рис.10. Фрагмент испытания бинта.

Образцы выдерживались в растворе Фурацилина и в растворе Ксимедона в течение 1 минуты и в течение 5 минут. Прогибы образцов  $H$  от давления  $P$  приведены на рис.11 (фурацилин) и рис.12 (ксимедон).

и тонкослойных композиции сложной структуры, используемых в различных отраслях.

4. Получены новые результаты по исследованию влияния среды на механические свойства конкретных образцов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Коллинз Дж. *Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение.* – М.: Мир, 1984. – 624 с.
2. Куприянов В.Н. *Пленочно-тканевые материалы для строительных конструкций.* – Казань: КИСИ, 1989. – 94 с.
3. Oliver W., Pharr G.J. // Mater. Res. Soc. Symp. Proc. – 1997. – Vol.473. – Pp.57.
4. Яновский Ю.Г., Никитина Е.А., Никитин С.М., Карнет Ю.Н. // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2009. – Т.15. – №3. – С.345-368.
5. Yakupov N.M., Galimov N.K., Yakupov S.N. *Methodology of studying non-planar films and membranes of complex structure* // Zavod. Lab. Diagn. Mater. – 2019. – Iss.2. – P.55-59.
6. Якупов Н.М., Якупов С.Н. *Диагностика тонкостенных конструкций сложной геометрии и структуры* // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2021. – Т.17. – №6. – С.576-587.
7. Галимов Н.К., Нуруллин Р.Г., Леонтьев А.А. *Об упругом равновесии заземленных круглых мембран под действием равномерного давления* // Актуальные проблемы механики сплошной среды. ИММ КазНЦ РАН. – Казань: Изд-во КГУ, 2004. – С.129-139.
8. Yakupov S.N. *Influence of Scratches on the Stiffness Properties of Thin-walled Elements* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol.40. – No.6. – Pp.834-839.
9. Якупов Н.М., Галимов Н.К., Леонтьев А.А. *Экспериментально-теоретический метод исследования прочности полимерных пленок* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2000. – Т.6. – №2. – С.238-243.
10. Yakupov S., Valiev H., Karnet Y., Shagidullina L., Yakupov N. Shumikhin T. *Changes in the Thin-Layer Membranes Mechanical Properties under the Influence of Aqueous Medium* // AIP Conference Proceedings. – 2023. – Vol.2911 – 020027.

## **Аэро-, гидромеханика, реология структурно-сложных сред**



УДК 541.126  
EDN NITOOP (<https://elibrary.ru/nitooop>)  
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.22



## **ВОЗНИКНОВЕНИЕ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР И ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СЛЕДЕ ЗА СФЕРОЙ**

Бошнятов Б.В., Лебедь И.В.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

Детерминированные уравнения многомерной гидродинамики, дополненные стохастическими компонентами, используются для численного моделирования хаотического искажения регулярных режимов течения. Статистические характеристики стохастических составляющих коррелируются с характеристиками беспорядочных возмущений, возникающих в потоке, набегающем на сферу. Стохастические решения уравнений многомерной гидродинамики раскрывают механизм смены режимов течения в следе за сферой. После потери устойчивости, наряду с затухающими беспорядочными возмущениями, появляются возрастающие возмущения. Характерное время возникновения распада беспорядочных возмущений в набегающем потоке значительно меньше характерного времени их изменения в неустойчивом следе. Таким образом, в неустойчивом следе беспорядочные возмущения не успевают значительно вырасти или затухнуть, и это приводит к накоплению как возрастающих, так и затухающих возмущений. В свою очередь, накопление беспорядочных возмущений приводит к хаотическому искажению регулярной картины течения в следе за сферой.

Турбулентность оказывает сильное влияние на окружающую действительность. Это предопределяет огромный интерес к изучению этого крайне сложного явления. По-видимому, немецкий физик и гидростроитель Г. Хаген был одним из первых, кто обратил внимание на явление турбулентности (1839). Дальнейшие исследования этого явления сопровождались возникновением предположений о причинах перехода от ламинарного движения среды к турбулентному. О. Ренольдс предположил, что причиной смены режимов является нарастание слабых хаотических возмущений после потери устойчивости течения (1883) [1]. Дж. Тэйлор выдвинул иное предположение (1935). По Дж. Тэйлору первопричиной смены режимов течения является образование крупных вихрей, которые зарождаются около поверхностей, ограничивающих течение [1,2].

Представление Дж. Тэйлора о причине смены режимов получило впоследствии свое дальнейшее развитие. В результате многолетних наблюдений за различными турбулентными процессами установлено, что турбулентные картины течения изобилуют наличием крупных вихрей. Это не только вихри, локализованные у ограничивающих течение поверхностей. Это вихревые дорожки, образующиеся в результате отделения периферии пристеночного вихря от его ядра, это другие крупные вихри, перемещающиеся в поле течения. Крупные вихри получили название когерентных структур [3]. Изучение турбулентных картин течения породило представление о том, что эволюцию регулярных когерентных структур (их зарождение, развитие и разрушение, а также их перемещение и взаимодействие) следует отождествлять с турбулентностью [4].

Одна из простейших задач гидродинамики, задача обтекания твердой сферы, является хорошим объектом для проверки корректности применения различных уравнений гидродинамики и различных методов их решения для описания процессов вихреобразования и турбулентности при умеренно высоких и высоких значениях числа Рейнольдса  $Re$ . Задача обтекания сферы трёхмерна, обтекаемое тело имеет простую форму. Эксперимент регистрирует только один пристеночный вихрь, а именно, зону закручивания в ближнем следе за сферой.

Эксперимент регистрирует базовую устойчивую осесимметричную зону закручивания  $U_0^{exp}$ , асимметричную устойчивую зону закручивания  $U_1^{exp}$  и устойчивую нестационарную зону закручивания  $U_2^{exp}$ , характеризующуюся периодическим перемещением фокусов. В невозмущённой среде течения  $U_1^{exp}$  и  $U_2^{exp}$  не зарегистрированы, эксперимент регистрирует течения  $U_1^{exp}$  и  $U_2^{exp}$  только при наличии беспорядочных возмущений в набегающем потоке, характеризующихся коэффициентом турбулентности  $\bar{K}_d$ . Каждое из перечисленных течений  $U_0^{exp}$ ,  $U_1^{exp}$  и  $U_2^{exp}$ , потеряв устойчивость, начинает развиваться в собственном, качественно отличном от других направлении. Периодическое вихревое испускание (вихревая дорожка) является обязательным, ярко выраженным режимом перехода к турбулентности. Эксперимент регистрирует шесть различных вихревых дорожек на трёх направлениях развития турбулентности [5].

Прямое численное интегрирование уравнений Навье-Стокса показывает, что переход к турбулентности в следе за сферой протекает в строгом соответствии с классическим сценарием Ландау-Хопфа [6]. После достижения первого критического значения числа Рейнольдса  $Re$  основное решение  $U_0^{NS}$ , потеряв устойчивость, бифурцирует к решению  $U_1^{NS}$ . Решение  $U_1^{NS}$ , потеряв устойчивость после достижения второго критического значения  $Re$ , бифурцирует к предельному циклу  $U_2^{NS}$ . Предельный цикл  $U_2^{NS}$  после потери устойчивости замещается многопериодическим решением  $U_3^{NS}$ . Переход от  $U_2^{NS}$  к  $U_3^{NS}$  протекает на отрезке  $\Delta Re \leq 30$  в результате серии из 22 бифуркаций Хопфа. Каждая из 22 бифуркаций имеет собственную частоту колебаний, которые накладываются друг на друга. Возникающий детерминистический хаос, отождествляется с турбулентностью [5].

Неустойчивые переходы протекают в течение коротких промежутков времени, т.е. уравнения Навье-Стокса не допускают существования достаточно продолжительных по времени неустойчивых решений [7]. В каждый момент времени при каждом значении числа Рейнольдса решения уравнений Навье-Стокса находят систему в устойчивом положении. Исключение составляют лишь короткие промежутки времени при критических значениях числа Рейнольдса.

Сценарий перехода к турбулентности Ландау-Хопфа имеет множество расхождений с экспериментом. Самое существенное расхождение заключается в следующем. Данные экспериментов указывают на то, что продолжительность регулярного режима обтекания на шкале числа Рейнольдса крайне сильно зависит от коэффициента турбулентности  $\bar{K}_d$ . Низкие значения  $\bar{K}_d$  способны задержать возникновение турбулентности даже при сколь угодно высоких значениях числа Рейнольдса. В частности, эксперимент регистрирует строго регулярную картину

вихревого испускания во всем исследуемом диапазоне значений числа Рейнольдса, вплоть до 30000, при движении твердой сферы в невозмущенной среде [8]. Решения уравнений Навье-Стокса не смогли подтвердить наблюдаемого воздействия коэффициента турбулентности. Уравнения Навье-Стокса решаются при отсутствии возмущений в набегающем потоке [9], когда эксперимент регистрирует строго регулярную картину течения.

Отметим также, что в соответствии с прямым численным интегрированием уравнений Навье-Стокса многопериодическое, на вид хаотическое, решение появляется в результате последовательного замещения решения  $U_0^{NS}$  решением  $U_1^{NS}$ , а решения  $U_1^{NS}$  решением  $U_2^{NS}$ . Это противоречит эксперименту, так как эксперимент не регистрирует течений  $U_1^{exp}$  и  $U_2^{exp}$  при отсутствии возмущений в набегающем потоке. Итак, уравнения Навье-Стокса не в состоянии воспроизвести дальнейшую эволюцию системы после пересечения первого критического значения числа Рейнольдса.

Результаты численного анализа уравнений Навье-Стокса расходятся с предположением Рейнольдса о переходе к турбулентности в результате роста слабых хаотических возмущений после потери устойчивости течения. Действительно, слабые возмущения нарастают не хаотически, а синхронизировано, и этот рост завершается через короткий промежуток времени насыщением нового регулярного решения, а не хаосом.

Помимо уравнений Навье-Стокса существует целый ряд приближенных уравнений, интерпретирующих турбулентность. Это, например, RANS и LES-уравнения [10,11]. Решения исходных уравнений Навье-Стокса обладают безусловным приоритетом перед решениями приближенных уравнений. Расхождение результатов прямого численного интегрирования уравнений Навье-Стокса с экспериментом делает абсолютно бессмысленными попытки воспроизвести этот эксперимент в рамках приближенных методов.

Таким образом, возможности уравнений классической гидродинамики в интерпретации эксперимента весьма ограничены. Уравнения многомоментной гидродинамики позволяют сделать следующий шаг на пути продвижения по числу Рейнольдса [12]. Решения уравнений многомоментной гидродинамики успешно воспроизводят регулярную зону закручивания, вихревую дорожку, а также подтверждают наблюдаемую зависимость картины течения от интенсивности возмущений в набегающем потоке, характеризуемой коэффициентом турбулентности  $\bar{K}_d$ .

В соответствии с решениями уравнений многомоментной гидродинамики система, потеряв устойчивость после пересечения первого критического значения числа Рейнольдса, продолжает далее оставаться в неустойчивом состоянии. Это существенное отличие от уравнений Навье-Стокса. Важно отметить, что при решении детерминистических уравнений многомоментной гидродинамики беспорядочные возмущения в набегающем потоке не учитываются. В результате, сколь угодно большой рост числа Рейнольдса не сопровождается нарушением регулярности неустойчивых решений [12]. Этот результат соответствует эксперименту.

Для воспроизведения турбулентности детерминистические уравнения дополняются стохастической составляющей, ответственной за беспорядочные возмущения в набегающем потоке. По-видимому, одна из первых попыток

введения случайного источника возмущений в детерминистические уравнения предпринята при интерпретации броуновского движения [13]. Таким образом, уравнения для беспорядочных возмущений решаются совместно с уравнениями для регулярных гидродинамических величин. Уравнения сохранения вынуждают беспорядочные возмущения вести себя вполне определенным образом как во времени, так и в пространстве. А именно, поведение беспорядочных возмущений во времени и пространстве должно подстраиваться под поведение во времени и пространстве гидродинамических величин.

В докритическом диапазоне слабые возмущения устойчивого решения затухают. После потери устойчивости в следе за сферой, наряду с затухающими беспорядочными возмущениями, появляются нарастающие возмущения. Как нарастающие, так и затухающие возмущения появляются в каждой точке следа за сферой поочередно случайным образом и крайне неравномерно. Вероятность появления нарастающих возмущений значительно превалирует над вероятностью появления затухающих возмущений при розыгрыше, соответствующем кривой 2 на рис.1. Наоборот, вероятность появления затухающих возмущений значительно превалирует над вероятностью появления нарастающих возмущений при розыгрыше, соответствующем кривой 3 на рис.1. Расхождение кривых 2 и 3 между собой является прямым следствием неравномерности возникновения нарастающих и затухающих беспорядочных возмущений в разных точках следа за сферой. Расчёт кривой 1 проведен при отсутствии беспорядочных возмущений [14].

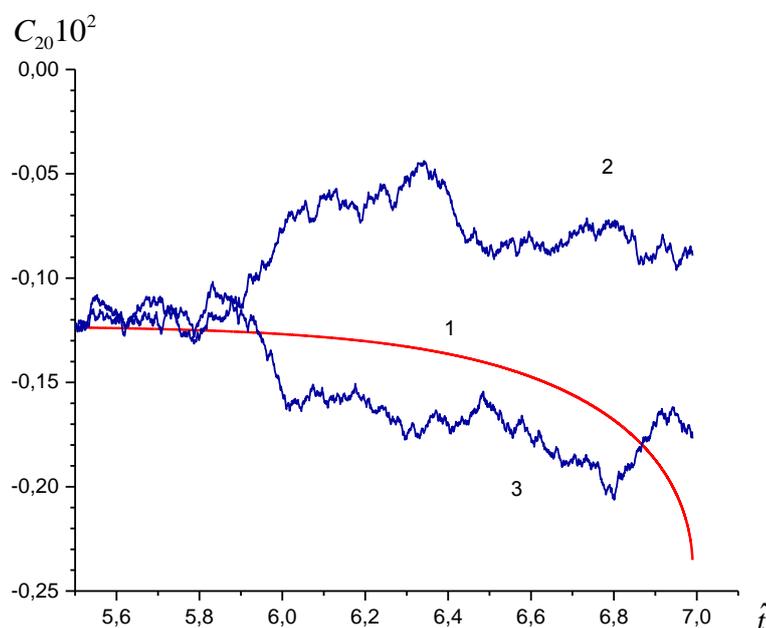


Рис.1. Поведение во времени решения  $C_{20}$ , ответственного за распределение скорости.

Характерное время возникновения и распада беспорядочных возмущений в набегающем на сферу потоке  $\tau_{d1}$  значительно меньше характерного времени их изменения в следе за сферой  $\tau_{d2}$ ,  $\tau_{d1} \ll \tau_{d2}$ . Таким образом, в следе за сферой беспорядочные возмущения не успевают значительно вырасти или затухнуть

за время  $\tau_{d1}$ , что приводит к накоплению как нарастающих, так и затухающих возмущений.

В свою очередь, накопление беспорядочных возмущений ведёт к хаотическому искажению регулярной картины течения в следе за сферой. В отличие от регулярных материальных линий (траекторий), искаженные материальные линии хаотически пересекаются в зоне закручивания. Форма искаженных материальных линий хаотически изменяется. Хаотическое движение жидкой частицы по искаженным беспорядочными возмущениями пересекающимся материальным линиям создает турбулентную картину течения в зоне закручивания в следе за сферой, рис.2 [14].

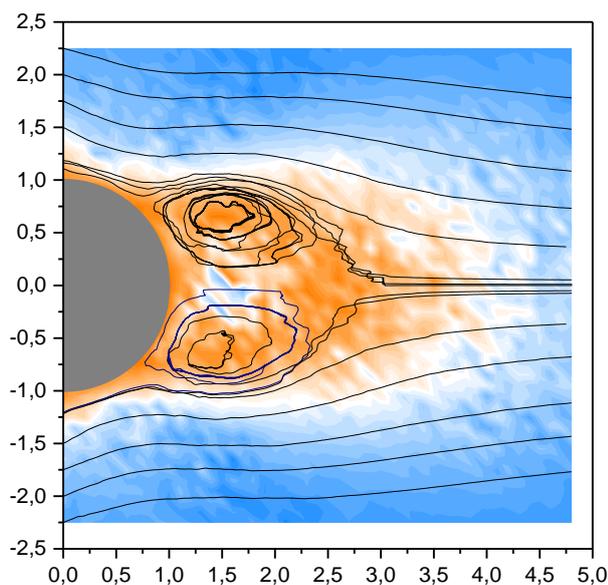


Рис.2. Искажение регулярной картины течения в ближнем следе за сферой.

Расчёт возмущений (рис.1) выполнен при высоком значении коэффициента турбулентности. Расчёты показывают, что при достаточно низких значениях коэффициента турбулентности рост числа Рейнольдса не приводит к появлению заметных искажений регулярной картины течения. Таким образом, низкие значения коэффициента турбулентности способны заблокировать возникновение турбулентности даже при сколь угодно высоких значениях числа Рейнольдса, что также согласуется с экспериментом. Напротив, высокие значения коэффициента турбулентности способны инициировать турбулентность даже при невысоких значениях числа Рейнольдса [14]. В отличие от беспорядочных возмущений спонтанные флуктуации появляются самопроизвольно в каждой точке зоны закручивания без какого-либо внешнего воздействия. Расчёты показали, что спонтанные флуктуации не в состоянии исказить ламинарную картину течения, потерявшего устойчивость [15]. Таким образом, ответственность за возникновение и развитие турбулентности полностью ложится на беспорядочные возмущения в набегающем потоке.

Поведение решений детерминистических уравнений многомоментной гидродинамики, дополненных стохастическими составляющими, позволило сформулировать представление о природе турбулентности сдвигового течения, а также выявить механизм смены режимов. Это представление и механизм в той или иной степени опираются на концепции О. Рейнольдса и Дж. Тейлора.

Когерентные структуры, а именно пристеночные вихри, вихревые дорожки, другие крупные вихри, формируют регулярную составляющую турбулентности. Беспорядочные возмущения, возникающие в среде за счет внешнего воздействия, ответственны за хаотическую составляющую турбулентности.

Как и предполагал О. Рейнольдс, потеря устойчивости является обязательным условием смены режимов. Однако, вопреки О. Рейнольдсу, малые возмущения растут крайне слабо в неустойчивом течении. Слабые возмущения не растут, а накапливаются, причем накапливаются не только нарастающие возмущения, но и затухающие возмущения. Накопление возмущений является причиной смены режимов.

Как и предполагал Дж. Тейлор, вихри, зарождающиеся вблизи ограничивающих течение поверхностей, принимают участие в формировании турбулентной картины течения. Действительно, неустойчивое движение этих вихрей и вихрей, рождающихся внутри течения, формирует регулярную составляющую турбулентности. Однако, регулярное движение когерентных структур, устойчивое и неустойчивое, само по себе не создает турбулентную картину течения. Причиной возникновения турбулентности являются беспорядочные возмущения, которые накапливаются в неустойчивом течении. Понятие накопления беспорядочных возмущений возникло в результате интерпретации решений стохастических уравнений многомментной гидродинамики. Именно это понятие позволило сформулировать представление о природе наблюдаемого явления – явления турбулентности.

Неустойчивость регулярных решений является необходимым условием перехода от ламинарного движения к турбулентному. Перманентная устойчивость решений уравнений Навье-Стокса не позволяет надеяться на накопление беспорядочных возмущений после введения стохастической составляющей в детерминистические уравнения Навье-Стокса. Несостоятельность уравнений Навье-Стокса, проявляющаяся при попытке воспроизведения турбулентности в простейшей задаче гидродинамики, развеивает надежду на способность этих уравнений к воспроизведению турбулентности в более сложных задачах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. М.: Гостехиздат, 1957. – 784 с.
2. Монин А.С., Яглом А.М. *Статистическая гидромеханика. Ч.1.* – М.: Наука, 1965. – 639 с.
3. Townsend A. *The Structure of Turbulent Shear Flow*. – Cambridge University Press, 1956. – 315 p.
4. Moffatt H.K. *Some Directions of Development of Turbulence Theory* // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1981. – Vol.106. – Pp.27-47.
5. Lebed I.V., Umansky S.Y. *The Appearance and Development of Turbulence in a Flow Past a Sphere: Problems and the Existing Approaches to Their Solution* // *Russian Journal of Physical Chemistry B*. – 2007. – Vol.1. – Pp.52-73.  
DOI: 10.1134/S1990793107010071.
6. Schuster H.G. *Deterministic Chaos*. – Weinheim: Physik-Verlag, 1984. – 220 p.
7. Hannemann K., Oertel H.Jr. *Numerical Simulation of the Absolutely and Convectively Unstable Wake* // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1989. – Vol.199. – Pp.55-88. DOI: 10.1017/S0022112089000297.

8. Chomaz J.M., Bonneton P., Hopfinger E.J. *The structure of the near wake of a sphere moving horizontally in a stratified fluid* // Journal of Fluid Mechanics. – 1993. – Vol.234. – Pp.1-21. DOI: 10.1017/S0022112093002009.
9. Tomboulides A.G., Orszag S.A. *Numerical Investigation of Transitional and Weak Turbulent Flow Past a Sphere* // Journal of Fluid Mechanics. – 2000. – Vol.416. – Pp.45-73. DOI: 10.1017/S0022112000008880.
10. Alfonsi G. *Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations for Turbulence Modeling* // Applied Mechanics Review. – 2009. – Vol.62. – 040802. DOI: 10.1115/1.3124648.
11. Sagaut P. *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*. – Heidelberg: Springer Berlin, 2006. – 558 p.
12. Lebed I.V. *Development of Instability in the Problem of Flow Around a Sphere* // Russian Journal of Physical Chemistry B. – 2014. – Vol.8. – Pp.240-253. DOI: 10.1134/S1990793114020171.
13. Lifshits E.M., Pitaevsky L.P. *Classical Kinetic Theory of Fluids*. – New York: Wiley, 1977. – 412 p.
14. Kiselev A.P., Lebed I.V. *Transition to Turbulence as a Result of Chaotic Distortion of Vortex Shedding* // Chaos Solitons Fractals. – 2021. – Vol.142. – 110491. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110491.
15. Lebed I.V. *Effect of Spontaneous Fluctuations on the Origin and Development of Turbulence. 2. Features of the Evolution of an Unstable System*. Russian Journal of Physical Chemistry B. – 1922. – Vol.16. – Pp.370-379. DOI: 10.1134/S199079312202018X.



## О МЕХАНИЗМЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ В КАНАЛАХ И СТРУЯХ

Воротилин В.П.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

С единой точки зрения на физику происходящих процессов дано описание всех практически важных типов турбулентных течений, в основе которого, исходя из факта формирования отрывных вихрей на границах потока, лежит идея переноса сдвига (т.е. трения между слоями турбулентного потока) из объема потока к его границам. Эта особенность турбулентности для течений в каналах позволила описать эффективную шероховатость в законе сопротивления как средний объем отрывных застойных зон на единице поверхности стенки, а для течений со свободной границей вывести выражение для скорости захвата внешней среды и написать замыкающее уравнение баланса массы турбулентной жидкости.

### ВВЕДЕНИЕ

Как представление очевидной истины в предисловии к книге «Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом» [1] утверждается, что в турбулентном потоке незатухающая турбулентность может передаваться и поддерживаться лишь за счет заимствования энергии осредненного потока при помощи турбулентного трения. Конкретный механизм этой передачи основывался на понятии турбулентной вязкости, описание которой задавалось на основе различного рода полуэмпирических зависимостей, исходя из аналогии с понятием молекулярной вязкости. При этом расчет поля скоростей турбулентных течений всегда оставался основной целью теоретических моделей исследования турбулентности, поскольку искомая переменная скорость входит в уравнения Рейнольдса (усредненные уравнения Навье-Стокса), являющиеся базовыми уравнениями для последующих разработок модельных методов описания турбулентности [1,2]. Отметим, что при таком понимании механизма турбулентности вне рамок теории оставалась и представлялась несущественной такая физически важная особенность турбулентности, как процесс возникновения и поддержания турбулентных пульсаций потока. И многие представляющие практический интерес вопросы турбулентных течений такие, как, например, расчет трения в каналах с распределенной шероховатостью, условия течения на свободных границах также оставались за пределами возможностей полуэмпирических методов описания турбулентности.

В противоположность существующим представлениям и методам описания турбулентности во всех практически важных ее проявлениях в [3-6] разработан и описан механизм турбулентных течений со сдвигом (в каналах, струях, турбулентном пограничном слое и турбулентном слое смешения), основанный на фактах формирования отрывных вихрей на границах турбулентной области, играющих роль возбудителя турбулентных пульсаций потока. Суть предлагаемого в них подхода к описанию турбулентности заключалась в том,

что действие физических механизмов турбулентности в своем главном качестве, т.е. переносе кинетической энергии потока к энергии турбулентных пульсаций переходит из объема потока к его границам и связано с образованием отрывных вихрей на границах потока. Для течений в каналах факт их существования позволил описать эффективную шероховатость в законе сопротивления как средний объем отрывных застойных зон на единице поверхности стенки, а для турбулентных струй – вывести выражение для скорости захвата внешней среды и написать замыкающее уравнение баланса массы турбулентной жидкости. Таким образом, решение самих уравнений для выяснения важнейших характеристик турбулентных течений теряет свою актуальность, и для распределения скоростей по сечению потока становится возможным использовать упрощенное условие однородности профиля скорости, не умаляя при этом сути физических механизмов турбулентных движений. В данном сообщении для подтверждения сделанных утверждений в краткой форме приводятся некоторые из результатов уже упомянутых работ, но еще представляющих интерес ввиду их фундаментального отличия от существующих представлений и методов расчета турбулентных течений.

## 1. ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛАХ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ШЕРОХОВАТОСТЬЮ

Одной из практически важных задач турбулентных течений является расчет коэффициента трения в каналах с распределенной шероховатостью, характеризуемой двумя и более параметрами размерности длины – высотой выступа шероховатости  $h$ , расстоянием  $p$  между соседними выступами и т.д. В качестве величины эффективной шероховатости  $K_s$  в законе трения

$$\bar{u}/v_* = (1/\kappa) \ln(R/K_s) + B,$$

где  $\bar{u}$  – средняя скорость потока,  $v_* = (\tau/\rho)^{1/2}$  – динамическая скорость,  $\tau$  – касательное напряжение на стенке,  $\kappa = 0.4$  и  $B = 8.5$  – универсальные константы,  $R$  – радиус трубы, задавался усредненный по длине потока объем отрывных застойных зон за выступами шероховатых элементов на единице площади поверхности стенки. Схема учета объема отрывных зон в каналах с шероховатостью в виде прямоугольных элементов высотой  $h$ , шириной  $b$  и расстоянием  $p$  между ними различается для близких и далеко стоящих выступов, и показана на рис. 1а,б.

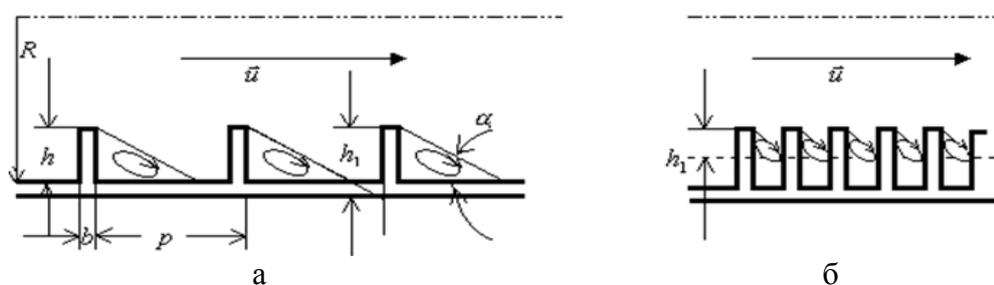


Рис.1. Картина обтекания турбулентным потоком шероховатости стенки канала в виде широко (а) и близко (б) стоящих прямоугольных выступов.

Соответственно представленной схеме выражение для  $K_s$  в обоих вариантах размещения выступов примет вид

$$K_s = \begin{cases} Ah^2/(2p) & h_1 \geq h \\ (p-b)^2/(2Ap) & h_1 < h \end{cases}$$

где  $h_1 = (p-b)/A$ ,  $\alpha$  – угол отрыва потока ( $\text{tg}(\alpha) \approx 1/8$ ). Как подтверждение данного выбора оценки  $K_s$ , среднее отклонение коэффициента трения  $c_f = \tau/\bar{u}^2$  при сравнении с экспериментальными данными из [7] для широко диапазона изменения параметров шероховатости  $p$ ,  $h$  и  $b$  составило  $\sim 6\%$ . Обтекание шероховатых выступов происходит с образованием отрывных вихрей, к которым переходит кинетическая энергия среднего течения. Но и для турбулентных течений в гладких каналах процесс переноса энергии к турбулентным пульсациям также можно связать с образованием отрывных вихрей у стенок канала на границе вязкого подслоя, что подтверждается результатами эксперимента [8,9]. Единственная комбинация размерности длины для  $K_s$  в гладком канале по той причине, что на стенку импульс передается под действием сил вязкого трения, может быть записана в виде  $K_v = \gamma_v \nu / \nu_*$ , где для  $\gamma_v$  с учетом экспериментальных данных для трения в гладких каналах получена оценка  $\gamma_v = 1.1$ .

Из представленной схемы взаимодействия потока с выступами шероховатой поверхности и экспериментально подтвержденного факта зависимости  $c_f$  от объема отрывных застойных зон следует вывод о том, что в объеме потока других механизмов трения и передачи кинетической энергии потока к турбулентным пульсациям, кроме как через отрывные вихри, образующиеся у поверхности стенки, не существует. Вывод о том, что турбулентный поток получает энергию от внешних источников только посредством образующихся у стенок отрывных вихрей, расходится с традиционно физическим пониманием механизма этого процесса, основанным на законах движения вязкой жидкости, но по аналогии применяемых к режиму турбулентного движения с использованием понятия турбулентной вязкости. Формально выводимый закон логарифмического распределения скоростей для простейшего варианта турбулентного течения в каналах на основе турбулентной вязкости фактически эквивалентен записи из соображений размерности выражения для производной скорости в виде  $du/dy = \alpha \nu_*/y$ , где  $\alpha$  – некоторая константа. Но из результатов предлагаемой теории, как одного из альтернативных вариантов механизма турбулентности, следует, что работа внешнего источника силы первоначально затрачивается на энергию отрывных вихрей, а все последующие развивающиеся во времени процессы, связанные с формированием усредненного профиля скорости, происходят без дополнительных затрат энергии и, следовательно, без участия механизма турбулентной вязкости.

## 2. ГИДРОДИНАМИКА ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЙ

Одной из особенностей течения турбулентных струй является наличие в них резко очерченной и в то же время хаотической и пульсирующей во времени границы раздела между внешней ламинарной средой и областью турбулентного течения внутри струи. Эта граница струи как реально

существующий физический объект исследования помимо общих проблем описания гидродинамики смешения веществ и завихрения внешнего потенциального потока представляет интерес с точки зрения физики, происходящих на ней физико-химических процессов, в частности горения и излучения смешиваемых реагентов. В существующих теоретических методах описания турбулентных струй отмеченные задачи не ставятся и не решаются, поскольку в своих построениях не оперируют понятием физической границы турбулентной струи. Точнее, в рамках классической теории [1,2], основанной на модели турбулентной вязкости, существование такой границы как наблюдаемой характеристики течения турбулентных струй не отрицается, но в расчетах она задается формально, как расстояние от оси струи, на котором локальное значение скорости струи отличается от скорости внешнего ламинарного потока на некоторую произвольно задаваемую малую величину, и таким образом, трактуясь как формальное математическое понятие, теряет физический смысл реально наблюдаемой границы струи.

### **2.1. О механизме захвата и турбулизации внешней среды.**

Важность понимания и формулировки условий на границе турбулентного потока (ТП) с внешним ламинарным течением в монографии [10] подчеркнута фразой: «Точный вид условий на границе с внутренней областью турбулентного течения, которым должно удовлетворять решение, до сих пор неизвестен». В литературе, как общепринятый метод расчета, формально граница, разделяющая область внешнего ламинарного течения со скоростью  $u_\infty$  и плотностью  $\rho_\infty$  и области ТП задается условием, где скорость течения в ТП отличается от скорости внешнего течения на некоторую малую величину (чаще всего на один процент). И таким образом, в разработке теории исчезает факт реально существующей границы, разделяющей области ламинарного (внешнего) и турбулентного течения, и конечно различие, действующих в них физических механизмов. В работах [2,4,5] из того факта, что внешняя среда и ТП это две четко различимые жидкости, их динамическое взаимодействие задается как сила трения, действующая на разделяющей их границе. Из соображений размерности следует, что эта сила может быть пропорциональна только квадрату некоторой комбинации скоростей движения внешней среды и ТП:  $F_{fr} = \gamma \rho_\infty (u_\infty - u_s)^2$ , где  $\gamma$  – константа (для турбулентных струй ее значение на основе опытных данных, было принято равным 0.1);  $u_s$  – промежуточная скорость между  $u_\infty$  и средней скорости ТП  $\bar{u}$ . Из условия непрерывности потока импульса, перетекающего от внешней границы во внутреннюю область ТСС, эту же силу можно записать как

$$F_{fr} = \gamma \rho (u_s - \bar{u})^2,$$

где  $\rho$  – плотность ТП. Из полученных для  $F_{fr}$  выражений, как двух уравнений для искомых  $u_s$  и  $F_{fr}$ , находим  $u_s = (\kappa u_\infty + \bar{u}) / (1 + \kappa)$  и  $F_{fr} = \gamma_s \rho_\infty (u_\infty - \bar{u})^2$ , где  $\gamma_s = \gamma / (1 + (\rho_\infty / \rho)^{1/2})^2$ .

Вывод о том, что закон трения квадратичен по скорости, означает, что обтекание возмущенной границы ТП внешним потоком должно происходить

с образованием отрывных вихрей. По смыслу деления всей области течения на внешнюю безвихревую среду и собственно ТП указанные отрывные вихри должны остаться в составе ТП, играя для него роль источника турбулентности. Поэтому и импульс, при трении отдаваемый им ТП, также должен возвратиться в ТП вместе с захваченными вихрями. От ТП вихри получают импульс пропорциональный разности скоростей  $\bar{u} - u_\infty$ . Поток возвращаемого импульса (на единицу поверхности ТП) запишем в виде  $j = \rho_\infty \mathbf{v}_c |\bar{u} - u_\infty|$ , где  $\mathbf{v}_c$  – скорость захвата вихрей внешней среды. Из условия равенства потоков  $j$  и  $F_{fr}$  находим

$$v_c = \gamma_s |\bar{u} - u_\infty|.$$

Отсюда наряду с традиционными интегральными уравнениями баланса масс можно написать уравнение баланса массы «турбулентной» жидкости, учитывая  $\mathbf{v}_c$  как ее источник, и таким образом получить уравнение для границ ТП.

В уравнении баланса масс произведение  $\mathbf{v}_c \rho_\infty$  задает источник массы турбулентной струи и таким образом струя формируется как реальный физический объект исследования с разнообразием воздействия внешних условий его описывающих.

### 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУЕ

Рассматривается истечение круглой струи радиуса  $r$  с начальной плотностью  $\rho_0$  и скоростью  $u_0$  в направлении оси  $X$  из отверстия радиуса  $r_0$  в сечении  $x=0$  в параллельный поток внешней среды со скоростью  $u_\infty$  и плотностью  $\rho_\infty$  (для полноты описания с добавлением действия силы тяжести вдоль оси  $X$ ).

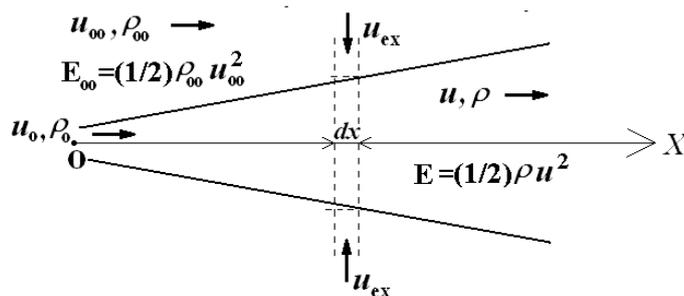


Рис.2. Схема движения турбулентной струи в параллельном потоке внешней среды.

Текущие скорость  $u$  и плотность  $\rho$  струи вследствие перемешивания поперек потока принимаются постоянными по сечению струи. Интегральные уравнения баланса массы, импульса и состава с искомыми  $\rho$ ,  $u$ ,  $r$  и  $u_{ex}$  для рассматриваемого варианта несжимаемой жидкости выводятся, как показано на рис.2, путем суммирования соответствующих потоков, между двумя нормальными к оси струи плоскостями, разделенными расстоянием  $dx \rightarrow 0$

$$d[(\rho_\infty u_\infty - \rho u) r^2] / dx - 2r \rho_\infty u_{ex} = 0,$$

$$\begin{aligned}d\left[\rho u(u-u_\infty)r^2\right]/dx &= (\rho_\infty - \rho)r^2/Fr^2, \\ \rho &= \rho_\infty - (\rho_\infty - 1)/ur^2,\end{aligned}$$

где  $Fr = u_0/(gr_0)^{1/2}$  – число Фруда и все переменные представлены в безразмерном виде с использованием параметров  $u_0$ ,  $r_0$  и  $\rho_0$  в качестве характерных масштабов скорости, длины и плотности. Недостающее 4-е уравнение для искомых  $\rho$ ,  $u$  и  $r$  задается как уравнение баланса массы «турбулентной» жидкости

$$d(\rho ur^2)/dx = 2\rho_\infty v_c r,$$

в котором ее источником  $v_c \rho_\infty$  является описанный выше процесс завихрения и захвата массы со скоростью  $v_c$  потока внешней среды.

Отметим, что в литературе экспериментальные и теоретические исследования гидродинамики на границе ламинарной и турбулентной области течения в струях и ТПС и различные варианты объяснения механизма захвата и турбулизации внешней среды не прекращались, начиная с работы Corrsin S. and Kistler A.L. [11]. Обширный обзор этих работ вместе с результатами новых данных эксперимента и на их основе попытки обоснования гипотезы вязкого надслоя представлены в недавно вышедшей статье [12]. Не вдаваясь в детали рассуждения этой и множества упомянутых в ней других исследований, отметим их главное смысловое отличие от понимания механизма турбулентности данной работы. Суть его в том, что в этой и всех других работах процесс захвата и турбулизации внешней среды рассматриваются как следствие хаотических движений турбулентных структур в окрестности границы ТПС с внешним течением, результатом которых при их усреднении во времени получают экспериментально измеряемые данные. Иначе говоря, процесс захвата и турбулизации внешней среды вторичен по отношению к наблюдаемому хаосу турбулентных пульсаций, в то время как в предлагаемой теории механизм и скорость захвата рассматриваются как первичный источник этих пульсаций.

Таким образом, как результат анализа некоторых фактов турбулентных течений, объяснение которых выходит за рамки существующих полуэмпирических теорий, в частности, оценки высоты эффективной шероховатости в трубах с распределенной шероховатостью, характеризуемой двумя и более параметрами размерности длины, представлен вариант теории турбулентных течений в каналах с гладкими и шероховатыми стенками, а также для турбулентных струй, с единым механизмом динамического взаимодействия (механизмом трения) турбулентного потока с его границами – стенками канала или внешним ламинарным потоком. Получено выражение для обобщенного закона трения, описывающее турбулентное течение при всех допустимых значениях чисел Рейнольдса от режима течения с гладкими стенками до режима с полным проявлением шероховатых элементов. Одним из выводов теории стало утверждение, что единственным источником турбулентности для турбулентных течений в каналах и струях являются вихри, образующиеся у стенок каналов и на свободных границах турбулентных струй, и только через эти вихри происходит перенос кинетической энергии от среднего течения к энергии турбулентных пульсаций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Таунсенд А.А. *Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом.* – М.: Изд-во иностранной литературы, 1959. – 399 с.
2. Монин А.С., Яглом А.М. *Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч.1.* – М.: Наука, 1965. – 639 с.
3. Воротилин В.П. *О механизме движения и диффузионного горения турбулентных струй // ЖЭТФ.* – 2018. – Т.153. – Вып.2. – С.313-328.
4. Воротилин В.П. *О механизме турбулентных течений со сдвигом // ЖЭТФ.* – 2019. – Т.156. – Вып.1. – С.176-188.
5. Воротилин В.П. *О механизме турбулентных течений. Часть 2. Турбулентный пограничный слой // ЖЭТФ.* – 2021. – Т.160. – Вып.4(10). – С.587-594.
6. Воротилин В.П. *Гидродинамика турбулентного слоя смешения // ЖЭТФ.* – 2022. – Т.162. – Вып.6(12). – С.985-990.
7. Dalle Donne M., Meyer L. *Turbulent convective heat transfer from rough surfaces with two-dimensional rectangular ribs // Int. J. Heat Mass Transfer.* – 1977. – Vol.20. – Pp.583-620.
8. Kline S.J., Reynolds W.C., Schraub F.A., Runstadler P.W. *The structure of turbulent boundary layers // J. Fluid Mech.* – 1967. – Vol.30. – Iss.4. – Pp.741-773.
9. Corino E.R., Brodkey R.S.J. *A visual investigation of the wall region in turbulent flow // J. Fluid Mech.* – 1969. – Vol.37. – Iss.1. – Pp.1-30.
10. Турбулентность: принципы и применение. Под ред. У Фроста и Т.Моулдена, Изд. Мир, Москва, 1980.
11. Corrsin S., Kistler A.L. *Tech. Rep. TN-1244.NACA.* – 1955.
12. Chauhan K., Philip J., de Silva C.M., Hutchins N., Marusic I. *The turbulent/non-turbulent interface and entrainment in a boundary layer // J. Fluid Mech.* – 2014. – Vol.742. – Pp.119-151.

УДК 621.311.25  
EDN OAMZWA (<https://elibrary.ru/oamzwa>)  
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.24



## **ВЛИЯНИЕ ЗАРЯДА НА СТАБИЛЬНОСТЬ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ НАНОПУЗЫРЬКОВ**

Кошоридзе С.И.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

В последнее время поверхностные нанопузырьки (ПНП) находят широкое применение в сельском хозяйстве, экологической инженерии, медицине, биологии, ингибировании коррозии металлов, транспорте газов к мембранам и клеткам и т.д. Однако теоретические вопросы, касающиеся причин их больших времен жизни, пока не получили окончательного ответа.

Экспериментальные исследования кинетики диффузионного растворения ПНП показывают, что с ростом ионной силы раствора время жизни нанопузырька падает [1]. Как известно, рост ионной силы раствора влечет уменьшение электрокинетического потенциала и связанного с ним заряда двойного электрического слоя (ДС) нанопузырька. В работах [2,3] было продемонстрировано, что стабильность объемных нанопузырьков (ОНП) обусловлена электростатическим давлением (ЭД), возникающим из-за наличия заряда у нанопузырька (на границе нанопузырька и водного раствора образуется ДС). ЭД компенсирует сжимающее лапласовское давление и предотвращает диффузионное растворение ОНП. Авторы [1] высказали предположение, что ПНП подобно ОНП могут стабилизироваться с помощью ЭД. Однако, теоретических работ, посвященных вычислению электростатического давления в ПНП, в литературе нет, за исключением работы автора [4].

Целью настоящей работы является сравнить значения ЭД в ПНП и ОНП при одном и том же значении поверхностной плотности заряда (ниже будет показано, что ЭД от радиуса кривизны не зависит) и таким образом ответить на вопрос – действительно ли ЭД способно стабилизировать ПНП. Будут рассмотрены теоретические модели как обычных трехмерных (3D), так и двумерных (2D) ПНП. В первом случае поверхность раздела газовой и жидкой фаз сферическая, во втором случае – цилиндрическая. Цилиндрические ПНП, по аналогии с цилиндрическими сидячими нанокляпями, часто применяются при моделировании [5].

Рассмотрим сперва 3D (сферические) ПНП с радиусом кривизны  $R$ , с центром кривизны в точке  $O$  и поверхностной плотностью свободного заряда  $\sigma$  (рис.1). ПНП геометрически представляет из себя сферический сегмент. Система ПНП-вода в целом нейтральна, а плотность связанного заряда в жидком диэлектрике  $\rho'$  связана с вектором поляризации  $\vec{P}$  соотношением ( $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная)

$$\rho' = -\operatorname{div}\vec{P} = -(\varepsilon - 1)\varepsilon_0\operatorname{div}\vec{E}.$$

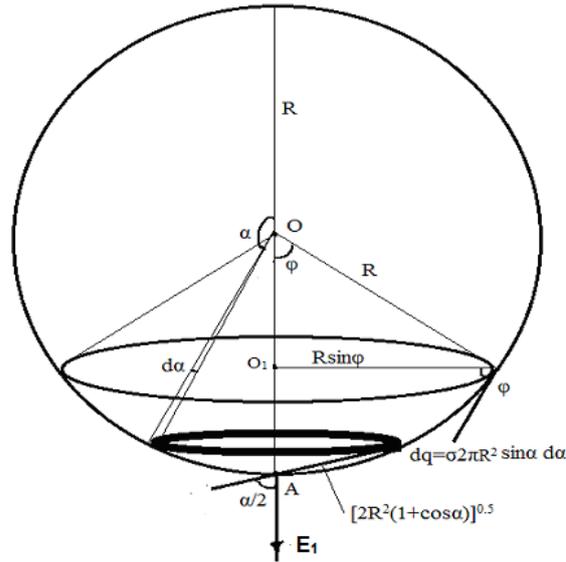


Рис.1. Схема вычисления вертикальной составляющей электростатического поля в вершине 3D (сферического) ПНП – в точке  $A$ .

А так как при сферической симметрии у напряженности электростатического поля есть только радиальная компонента, обратно пропорциональная квадрату расстояния до центра, то выполняется соотношение

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (Er^2) = 0,$$

и плотность связанного заряда равна нулю. Следовательно, объемных сил притяжения между ПНП и жидким диэлектриком нет. Пусть  $O_1$  – центр основания ПНП,  $R \sin \varphi$  – радиус основания,  $\varphi$  – т.н. контактный угол. В первую очередь вычислим вертикальную составляющую напряженности электростатического поля  $E_1$  в вершине ПНП – в точке  $A$ . Рассмотрим на поверхности нанопузырька кольцевой элемент площади  $dS = 2\pi R^2 \sin \alpha d\alpha$  (рис.1). Каждая точка этого элемента расположена на расстоянии  $R\sqrt{2(1+\cos \alpha)}$  от вершины ПНП  $A$ . Вертикальная составляющая напряженности поля, созданная данным заряженным кольцевым элементом (в системе единиц СИ) в точке  $A$  равна

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\sigma 2\pi R^2 \sin \alpha \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2R^2(1+\cos \alpha)} d\alpha. \quad (1)$$

В (1) учтено, что поверхностная плотность поляризационного заряда равна  $-\frac{\sigma(\epsilon-1)}{\epsilon}$  [6,7] и тогда для суммарной плотности свободного и связанного

зарядов получится выражение:  $\sigma - \frac{\epsilon-1}{\epsilon}\sigma = \frac{\sigma}{\epsilon}$ . После интегрирования (1) для ЭД напишем

$$p_1 = \frac{\sigma E_1}{\epsilon} \quad (2)$$

и получаем

$$P_1 = \frac{\sigma^2}{4\varepsilon_0\varepsilon^2} \int_{\pi-\varphi}^{\pi} \frac{\sin \alpha \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \cos \alpha} d\alpha = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon^2} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right). \quad (3)$$

Похожая на (3) формула получалась ранее в [4], однако из-за неучета сил давления электростатического происхождения со стороны жидкого диэлектрика, там в знаменателе отсутствовала диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$ . При  $\varphi = 180^\circ$  ПНП превращается в ОНП и выражение для ЭД принимает известный вид

$$P_b = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon^2}. \quad (4)$$

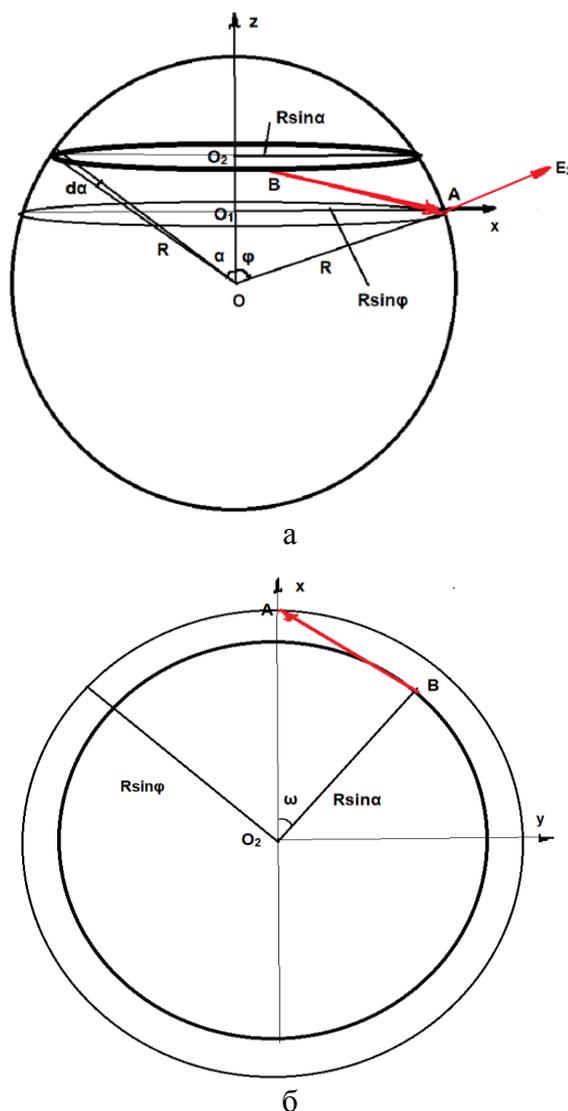


Рис.2. а) схема вычисления радиальной составляющей электростатического поля в точке A, расположенной на тройной линии 3D (сферического) ПНП; б) вид на 3D (сферического) ПНП сверху вниз параллельно оси  $O_1z$ .

Рассчитаем теперь ЭД в точке A, лежащей на периферии ПНП, на т.н. тройной линии – границе твердой, жидкой и газовой фаз (рис.2а). Опять рассмотрим поверхностный нанопузырь с радиусом R, с центром кривизны

в точке  $O$ , контактным углом  $\varphi$  и поверхностной плотностью свободного заряда  $\sigma$ . В центре основания ПНП  $O_1$  проведем декартову систему координат  $O_1xyz$  (ось  $y$  перпендикулярна плоскости рисунка, а плоскость  $O_1xy$  проходит через границу раздела твердой подложки и ПНП). На рис.2б показан вид на ПНП сверху, параллельно оси  $O_1z$ . Рассмотрим произвольный малый элемент площади  $Rd\alpha R\sin\alpha d\omega$ , обозначенный буквой  $B$ .  $\overrightarrow{BA}$  – вектор, соединяющий данную точку с точкой наблюдения  $A$ , лежащей в плоскости  $O_1xz$ . Точки  $A$  и  $B$  имеют следующие декартовы координаты в системе  $O_1xyz$

$$A = (R\sin\varphi; 0; 0), \quad B = (R\sin\alpha\cos\omega; R\sin\alpha\sin\omega; R(\cos\alpha - \cos\varphi)).$$

Тогда вектор  $\overrightarrow{BA}$  будет иметь компоненты в системе координат  $O_1xyz$

$$\overrightarrow{BA} = \{R(\sin\varphi - \sin\alpha\cos\omega); -R\sin\alpha\sin\omega; -R(\cos\alpha - \cos\varphi)\}. \quad (5)$$

Угол  $\tau$  между радиус-вектором  $\overrightarrow{R}$ , направленным от точки  $O$  к  $A$ ,  $\overrightarrow{R} = \{R\sin\varphi; 0; R\cos\varphi\}$  и вектором  $\overrightarrow{BA}$  будет вычисляться по формуле

$$\cos\tau = \frac{R[(\sin\varphi - \sin\alpha\cos\omega)\sin\varphi - (\cos\alpha - \cos\varphi)\cos\varphi]}{|\overrightarrow{BA}|}. \quad (6)$$

Тогда для нормальной (радиальной) составляющей электростатического поля  $dE_2$  в точке  $A$ , созданной «точечным» зарядом  $\sigma R^2 \sin\alpha d\alpha d\omega$ , находящимся в точке  $B$ , получим

$$dE_2 = \frac{R^3\sigma}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{[(\sin\varphi - \sin\alpha\cos\omega)\sin\varphi - (\cos\alpha - \cos\varphi)\cos\varphi] \sin\alpha d\omega d\alpha}{|\overrightarrow{BA}|^3}.$$

ЭД на тройной линии  $p_2 = \frac{\sigma E_2}{\epsilon}$  будет, следовательно, выражаться в виде двойного интеграла

$$p_2 = \frac{\sigma^2}{2\pi\epsilon_0\epsilon^2} \int_0^\varphi R^3 \left( \int_0^\pi \frac{(\sin\varphi - \sin\alpha\cos\omega)\sin\varphi - (\cos\alpha - \cos\varphi)\cos\varphi}{|\overrightarrow{BA}|^3} d\omega \right) \sin\alpha d\alpha, \quad (7)$$

где длина вектора  $\overrightarrow{BA}$ , согласно (5) равняется

$$|\overrightarrow{BA}| = R\sqrt{(\sin\varphi - \sin\alpha\cos\omega)^2 + (\sin\alpha\sin\omega)^2 + (\cos\alpha - \cos\varphi)^2}. \quad (8)$$

Численные расчеты показали, что двойной интеграл в (7) равен  $\varphi$ . Тогда

$$p_2 = \frac{\sigma^2\varphi}{2\pi\epsilon_0\epsilon^2}. \quad (9)$$

Результаты расчета по формулам (3), (4), (9) приведены на рис.3, где нанесены отношения ЭД в сферическом (3D) ПНП к давлению в ОНП как на вершине  $\frac{p_1}{p_b}$  (полярный угол  $\alpha = 0$  на рис.2а), так и на тройной линии  $\frac{p_2}{p_b}$  (полярный угол  $\alpha = \varphi$ ), при различных контактных углах  $\varphi$ . Получить выражения для ЭД при промежуточных значениях полярного угла  $p(\alpha)$

не удалось, однако выполнение очевидных неравенств  $p_2 \leq p(\alpha) \leq p_1$ , при  $0 \leq \alpha \leq \varphi$  не вызывает сомнений. При малых контактных углах ЭД в ПНП пренебрежимо мало по сравнению с ОНП:  $p_{1,2} \ll p_b$ , при  $\varphi \ll 1$ .

Корректность нашего расчета следует также из того факта, что при контактном угле  $\varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ , когда ПНП имеет форму полусферы, как видно из рис.3, выполняется очевидное условие  $p_2 = 0.5 p_b$ .

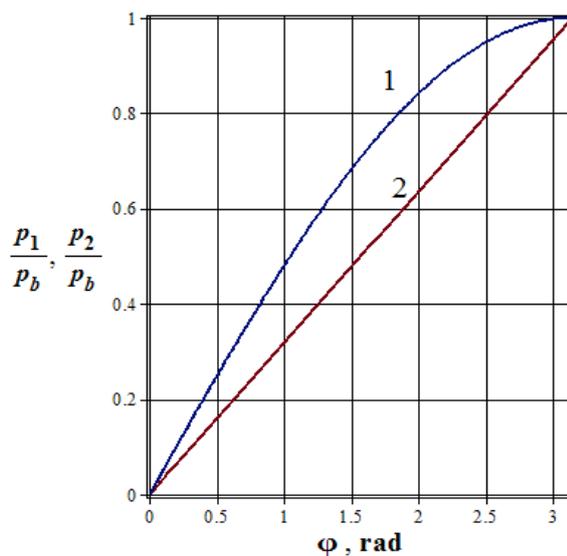


Рис.3. Зависимость ЭД в сферическом (3D) ПНП от контактного угла  $\varphi$ .

1.  $\frac{p_1}{p_b}$  – отношение ЭД на вершине ПНП к ЭД в ОНП; 2.  $\frac{p_2}{p_b}$  – отношение ЭД на тройной линии ПНП к ЭД в ОНП.

Рассмотрим теперь показанный на рис.4а,б цилиндрический (2D) ПНП, у которого длина образующей цилиндра  $l$  значительно больше радиуса кривизны (радиус основания цилиндра это и есть радиус кривизны):  $l \gg R$ . Электростатическое поле, создаваемое тонким длинным заряженным элементом поверхности  $B$  площадью  $lRd\tau$  и поверхностной плотностью заряда  $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ , в точке  $A$ , как следует из электростатической теоремы Гаусса, равно

$$dE = \frac{\sigma R d\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon |\overline{BA}|}. \quad (10)$$

Согласно рис.4б  $|\overline{BA}| = 2R \sin\left(\varphi - \frac{\tau + \alpha}{2}\right)$ . Тогда для радиальной составляющей электростатического поля вершине  $A$  двумерного ПНП получаем интеграл

$$p_3 = \frac{\sigma E}{\varepsilon} = \frac{\sigma^2 R}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon^2 2R} \int_0^{2\varphi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\varphi - \frac{\alpha + \tau}{2}\right)\right)}{\sin\left(\varphi - \frac{\alpha + \tau}{2}\right)} d\tau = \frac{\sigma^2 \varphi}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon^2}. \quad (11)$$

Таким образом, ЭД в 2D ПНП не зависит от полярного угла и одинаково во всех точках поверхности. Кроме того выражения (9) и (11) совпали

$$p_2 = p_3. \quad (12)$$

Видим, что ЭД в двумерном ПНП  $p_3$  в точности такое же, что и ЭД на тройной линии трехмерных (сферических) ПНП  $p_2$ , при условии, что у них совпадают плотности поверхностного заряда.

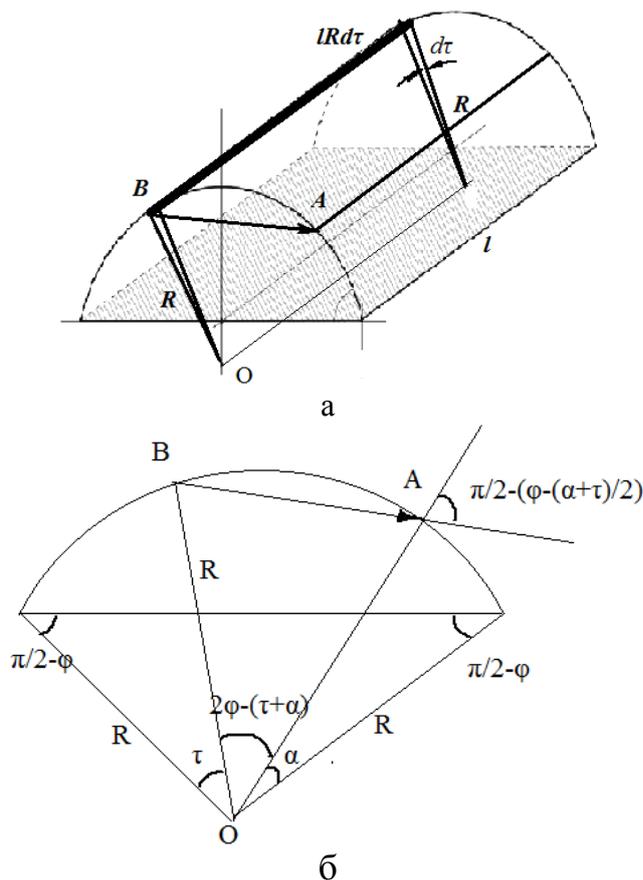


Рис.4. а) двумерный(цилиндрический) ПНП; б) двумерный(цилиндрический) ПНП с радиусом кривизны  $R$  и контактным углом  $\varphi$ . Вид с боку.

## ВЫВОДЫ

1. ЭД в ОНП всегда превышает ЭД как в сферических, так и цилиндрических ПНП:  $p_b > p_{1,2}$ .
2. В сферических ПНП ЭД на вершине  $p_1$  (полярный угол  $\alpha = 0^\circ$ ) всегда больше, чем на периферии  $p_2$  (на тройной линии,  $\alpha = \varphi$ ).
3. В 2D (цилиндрических) ПНП ЭД  $p_3$  совпадает с давлением в 3D (сферических) ПНП  $p_2$  на тройной линии при равенстве поверхностных зарядов  $\sigma$  (см.(12)).
4. При малых контактных углах  $\varphi$  ЭД в ПНП пренебрежимо мало по сравнению с его значением в ОНП:  $p_{1,2} \ll p_b$ .

Вывод 4 является основным. Из него следует, что предотвращение диффузионного растворения и, следовательно, увеличение времени жизни ПНП, с помощью механизма ЭД, возможно только при достаточно больших контактных углах  $\varphi$ , когда ЭД в ПНП и ОНП сравнимы по величине (рис.3). В ПНП с малыми контактными углами  $\varphi$  (сильно гидрофобная подложка), ЭД мало и причины механизма стабилизации могут быть другие: закрепление границ тройной линии (пиннинг) [8], диссипация энергий в вязкоупругой подложке [9], отрицательное линейное натяжение [10] и т.д.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Chang A., Niu B., Liu J., Han H., Zhang Z., Wang W. *Enrichment of surface charge contributes to the stability of surface nanobubbles* // *Particuology*. – 2023. – Vol.81. – Pp.128-134.
2. Bunkin N.F., Shkirin A.V., Suyazov V.N., Babenko V.A., Sychev A.A., Penkov N.V., Belosludtsev K.N., Gudkov S.V. *Formation and dynamics of ion-stabilized gas nanobubble phase in the bulk of aqueous NaCl solutions* // *Journal of Physical Chemistry B*. – 2016. – Vol.126. – Pp.1291-1303.
3. Koshoridze S.I. *The Effect of the Structure of an Electric Double Layer on the Stability of Bulk Nanobubbles* // *Technical Physics Letters*. – 2024. – Vol.50. – No.1. – Pp.55-57.
4. Кошоридзе С.И. *Влияние заряда на устойчивость нанопузырьков с закрепленными границами* // *Инженерная физика*. – 2019. – №1. – С.30-35.
5. Maheshwari Sh., Van der Hoef M., Rodriguez J.R., Lohse D. *Leakiness of pinned neighboring surface nanobubbles induced by strong gas-surface interaction* // *ACS Nano*. – 2018. – Vol.12. – No.3. – Pp.2603-2609.
6. Савченко О.Я. *Задачи по физике*. – Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2008. – 370 с.
7. Фрелих Г. *Теория диэлектриков, диэлектрическая проницаемость и диэлектрические потери*. – М.: Иностранная Литература, 1960. – 251 с.
8. Lohse D., Zhang X. *Pinning and gas oversaturation imply stable single surface nanobubbles* // *Phys. Rev. E*. – 2015. – Vol.91. – 031003.
9. Koshoridze S.I. *Effect of energy dissipation on a viscoelastic substrate on the dissolution of surface nanobubbles* // *Technical Physics Letters*. – 2023. – Vol.49. – No.1. – Pp.12-14.
10. Koshoridze S.I., Levin Yu.K. *The influence of line tension on the formation of surface nanobubbles* // *Russian Physics Journal*. – 2020. – Vol.63. – No.7. – Pp.1277-1281.



## МЕХАНИЗМЫ СТАБИЛЬНОСТИ ОБЪЕМНЫХ НАНОПУЗЫРЕЙ В ВОДЕ

Левин Ю.К.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

Известный эксперимент, по обнаружению гидратного  $\Delta$ -слоя с касательной ориентацией диполей у заряженного плоского электрода в воде объяснен тем, что водородные связи этого слоя имеют больший модуль плотности энергии, чем радиальная структура диполей за счет ориентационной поляризации, т.е. более выгодны. Это послужило основанием для гипотезы, согласно которой заряженный нанопузырь в воде окружен энергетически выгодным гидратным слоем  $\Delta \approx 1$  нм с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1 \approx 3$  и окружающим его диффузным слоем.

С учетом этого предложены 3 гипотезы о причинах стабильности объемных нанопузырей в воде:

1.  $\Delta$ -слой за счет своей малой диэлектрической проницаемости уменьшает общую емкость нанопузыря, что заметно повышает его кулоновское давление, компенсирующее поверхностное натяжение, что стабилизирует нанопузырь.

2. Повышенное давление  $P$  в  $\Delta$ -слое может достигать критического значения  $P > P_m = 10^9$  Па, при котором вода переходит в лед даже при температуре  $T > 297$  К. Механическое напряжение ледяного  $\Delta$ -слоя компенсирует давление Лапласа, что также стабилизирует нанопузырь.

3. Малая диэлектрическая проницаемость  $\Delta$ -слоя формирует в нем anomalously высокое поле  $E > 10^9$  В/м, при котором вода замерзает даже при температуре  $T > 297$  К, давление Лапласа компенсируется механическим напряжением ледяной оболочки, что также стабилизирует нанопузырь.

Определены размеры и заряд нанопузыря, которые при указанных механизмах стабильности обеспечивают компенсацию давления Лапласа.

**Ключевые слова:** стабильность заряженных нанопузырей; кулоновское и лапласовское давление; аномальная диэлектрическая проницаемость; размер и заряд нанопузырей

### ВВЕДЕНИЕ

Интерес к объемным нанопузырям (ОНП) в воде связан с перспективами их применения в различных областях [1-3]. Такие пузыри имеют заряд и ведут себя как коллоидные частицы [4], имеют двойной электрический слой (ДЭС) из противоионов – одни закреплены на оболочке ОНП, а другие совершают броуновское движение в диффузном слое. Обычно при анализе считали воду однородной диэлектрической средой и полагали, что стабильность ОНП обеспечивается балансом кулоновского давления  $P_C(r_0)$  за счет заряда ОНП  $q_0$  и лапласовского давления  $P_L(r_0)$  за счет поверхностного натяжения воды.

Однако, вблизи границы раздела сред экспериментально обнаружен гидратный  $\Delta$ -слой ( $\Delta \approx 1$  нм,  $\epsilon_1 \approx 3$ ) диполей молекул воды с касательной ориентацией вектора поляризации [5], что было объяснено экономией энергии

водородных связей [6]. За пределами  $\Delta$ -слоя диэлектрическая проницаемость воды возвращается к своему обычному значению  $\varepsilon_2 \approx 80$ , как показано на рис.1. Это означает, что вода вблизи заряженного ОНП не является однородной жидкой средой.

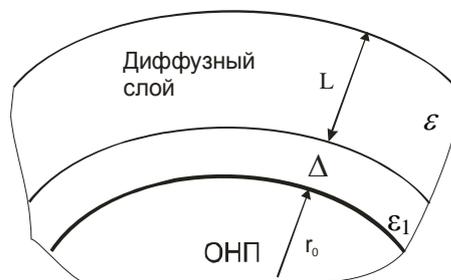


Рис.1. Структура объемного нанопузыря.

Поэтому актуален анализ с учетом влияния заряда и ДЭС ОНП на их стабильность в неоднородном жидком диэлектрике.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Давления Кулона  $P_C(r_0)$  и Лапласа  $P_L(r_0)$  на границе нанопузыря в однородной жидкой диэлектрической среде определены известными выражениями [7,17]

$$P_C(r_0) = \frac{q_0^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon r_0^4}, \quad (1)$$

$$P_L(r_0) = 2\alpha/r_0, \quad (2)$$

где  $r_0$  и  $q_0$  – радиус и заряд ОНП, соответственно,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость воды,  $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$  – диэлектрическая проницаемость вакуума,  $\alpha = 0.072 \text{ N/m}$  – коэффициент поверхностного натяжения воды. Однако  $\Delta$ -слой делает окружающую ОНП водную среду неоднородной и изменяет его свойства. Поставленная задача состоит в уточнении давления на границе ОНП с учетом  $\Delta$ -слоя. При этом учтем, что вода – полярный диэлектрик, и в электрическом поле свободного заряда ОНП  $q_0$  на его границе формируется связанный поляризационный поверхностный заряд [8].

## 2. РОЛЬ $\Delta$ -СЛОЯ В СТАБИЛИЗАЦИИ НАНОПУЗЫРЕЙ

Модель ОНП представляют сферической системой (рис.1) с двухслойным диэлектриком, которая эквивалентна вложенным друг в друга сферическим конденсатором [9] с радиусами обкладок у первого  $(r_0, r_0 + \Delta)$  и  $(r_0 + \Delta, r_0 + \Delta + L)$

– у второго, емкостями конденсаторов  $C_1 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0 + \Delta} \right)^{-1}$ ,

$C_2 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 \left( \frac{1}{r_0 + \Delta} - \frac{1}{r_0 + \Delta + L} \right)^{-1}$  и общей емкостью

$$C(r_0) = 4\pi\epsilon_0 \left[ \frac{1}{\epsilon_1} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0 + \Delta} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \left( \frac{1}{r_0 + \Delta} - \frac{1}{r_0 + \Delta + L} \right) \right]^{-1}, \quad (3)$$

где  $L = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_2 k_B T / 2e^2 N_A c}$  – длина Дебая (м),  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$  J/K – постоянная Больцмана,  $N_A = 6 \cdot 10^{23}$  mol<sup>-1</sup> – число Авогадро,  $c$  – концентрация раствора солей (mol/m<sup>3</sup>),  $T = 293$  К – температура,  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  С – элементарный заряд. Давление на поверхность ОНП [7]

$$P(r_0) = -\frac{\partial U}{\partial r_0} \cdot \frac{1}{4\pi r_0^2} = -\frac{q_0^2}{8\pi r_0^2} \frac{\partial}{\partial r_0} \left( \frac{1}{C(r_0)} \right), \quad (4)$$

где  $U(r_0) = q_0^2 / 2C(r_0)$  – энергия конденсатора. Отсюда, с учетом (3), (4), получаем

$$P(r_0) = \frac{q_0^2 (2r_0 + 2\Delta + L)L}{32\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_2 r_0^2 (r_0 + \Delta)^2 (r_0 + \Delta + L)^2} \left[ 1 + \frac{\epsilon_2 \Delta (2r_0 + \Delta)(r_0 + \Delta + L)^2}{\epsilon_1 L r_0^2 (2r_0 + 2\Delta + L)} \right]. \quad (5)$$

Проверка подтверждает, что при  $\Delta = 0$ ,  $L \rightarrow \infty$  формула (5) ожидаемо переходит в (1).

Зависимости давлений на границе стабильного ОНП от его радиуса приведены на рис.2.

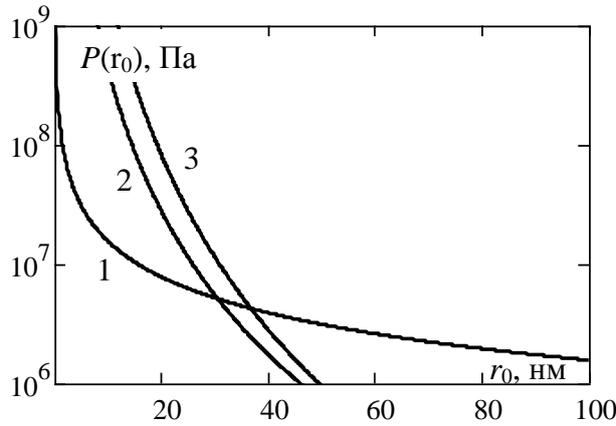


Рис.2. График зависимости давлений на границе стабильного ОНП с зарядом  $q_0 = 10^{-15}$  Кл от его радиуса в чистой воде ( $c = 1$  моль/м<sup>3</sup>): кривая 1 – давление Лапласа (2); 2 и 3 – давление Кулона для ОНП без  $\Delta$ -слоя (1) и с  $\Delta$ -слоем (5), соответственно.

Выигрыш давления  $B(r_0) = P(r_0) / P_C(r_0)$  за счет  $\Delta$ -слоя (рис.3), с учетом (5) и (1), равен

$$B(r_0) = \frac{r_0^2 (2r_0 + 2\Delta + L)L}{(r_0 + \Delta)^2 (r_0 + \Delta + L)^2} \left[ 1 + \frac{\epsilon \Delta (2r_0 + \Delta)(r_0 + \Delta + L)^2}{\epsilon_1 L r_0^2 (2r_0 + 2\Delta + L)} \right]. \quad (6)$$

Из (6) получим  $B(r_0) \approx \frac{2\epsilon\Delta}{\epsilon_1 r_0}$  с погрешностью от  $-20\%$  до  $+20\%$  при  $r_0$

от 5 нм до 60 нм.

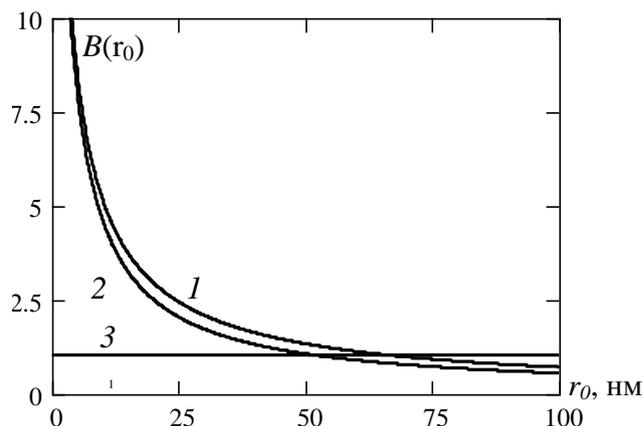


Рис.3. Зависимость выигрыша  $B(r_0)$  в давлении от радиуса ОНП за счет  $\Delta$ -слоя: кривые 1, 2 – в чистой ( $c = 1$  моль/м<sup>3</sup>,  $L = 9.6$  нм) и в морской ( $c = 600$  моль/м<sup>3</sup>,  $L = 0.4$  нм) воде, соответственно; 3 –  $B(r_0) = 1$ .

Из рис.3 видно, что наиболее сильно  $\Delta$ -слой влияет на пузыри меньшего размера. Также отметим слабое влияние солености воды на этот результат. Таким образом,  $\Delta$ -слой ОНП повышает его стабильность, т.к. увеличивает положительное (расширяющее ОНП) кулоновское давление, помогая компенсировать отрицательное (сжимающее) давление Лапласа. Однако на стабильность более крупных ОНП  $r_0 > 60$  нм гидратный слой оказывает небольшое противоположное влияние.

Повышение давления за счет  $\Delta$ -слоя уменьшает заряд стабильного ОНП при балансе давлений Кулона и Лапласа (2) и (5). Из (1) и (2) находим зависимость заряда стабильного ОНП без  $\Delta$ -слоя от его радиуса (рис.4 – все графики для чистой воды  $c = 1$  моль/м<sup>3</sup>), кривая 3)

$$q_0(r_0) = \sqrt{64\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon_2 \alpha r_0^3}. \quad (7)$$

Из формулы (5) видно:  $P(r_0) \sim q_0(r_0)^2$ . Поэтому выигрыш давления  $B(r_0)$ , с учетом (7), легко переводится в выигрыш по величине заряда ОНП при балансе (2) и (5) (рис.4, кривая 2)

$$q_\Delta(r_0) = \sqrt{64\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon_2 \alpha r_0^3 B(r_0)}. \quad (8)$$

### 3. РОЛЬ ЭФФЕКТА «ELECTROFREEZING» В СТАБИЛИЗАЦИИ НАНОПУЗЫРЕЙ

Однако, возможен иной механизм стабильности ОНП. Известно, при напряженности электрического поля  $10^9 \text{ V/m} < E_n < 1.5 \cdot 10^9 \text{ V/m}$  вода переходит в лед даже при комнатной температуре – эффект «электрозамораживания» [10-12]. Напряженность поля в воде равна

$$E_i(r) = \frac{q_0}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_i r^2}, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Поле  $E_1$  в  $\Delta$ -слое существенно выше, чем  $E_2$  – за его пределами:  $E_1(r) \gg E_2(r)$ , т.к.  $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$ . Поэтому электрозамораживание реализуется за счет аномально низкого значения диэлектрической проницаемости воды в  $\Delta$ -слое.

При поле «электрозамораживания»  $E_n = 10^9 \text{ V/m}$  зависимость минимального заряда от радиуса ОНП, замороженного электрическим полем (рис.4, кривая 4), с учетом (9), определяется выражением

$$q_{0e}(r) = 4\pi\epsilon_0\epsilon_1 r_0^2 E_n. \quad (10)$$

На том же рис.4 (кривая 3) приведена зависимость заряда  $q_0(r_0)$  от радиуса ОНП без  $\Delta$ -слоя. Видно, как отмечалось выше (рис.3),  $\Delta$ -слой положительно влияет на стабильность ОНП при радиусе  $r_0 < 63 \text{ нм}$ , поскольку поверхностное натяжение компенсируется при меньшем заряде ОНП.

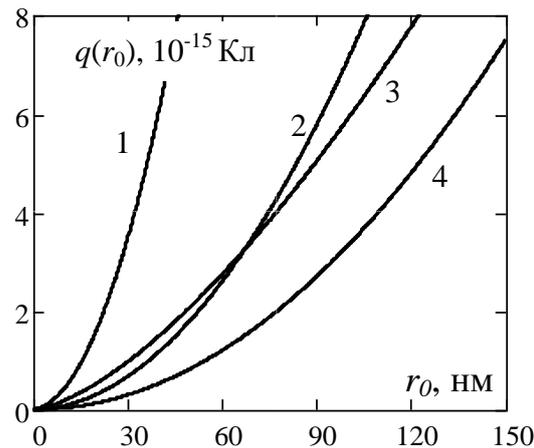


Рис.4. Зависимость заряда  $q(r_0)$  стабильного нанопузыря от его радиуса для чистой воды: 1 – заряд  $q_{0P}(r_0)$  нанопузыря с  $\Delta$ -слоем, замороженным давлением по формуле (14); 2 – заряд  $q_{\Delta}(r_0)$  нанопузыря с  $\Delta$ -слоем по формуле (8); 3 – заряд  $q_0(r_0)$  нанопузыря без  $\Delta$ -слоя по формуле (7); 4 – заряд  $q_{0e}(r_0)$  нанопузыря с  $\Delta$ -слоем, замороженным электрическим полем, по формуле (10).

#### 4. СТАБИЛИЗАЦИЯ НАНОПУЗЫРЕЙ ЗА СЧЕТ ЭФФЕКТА «PRESSUREFREEZING»

Вода имеет богатую фазовую диаграмму с различными структурными переходами при разных давлениях среды [13]. Например, при давлении  $P > 10^9 \text{ Па}$  при комнатной температуре вода переходит в лед [14-16] (эффект «pressurefreezing»).

Как известно, в электрическом поле заряда ОНП окружающая его диэлектрическая среда поляризуется [8]. Электрическое поле связанного заряда  $q_0$  оболочки ОНП наводит заряды:  $q_1$  – на поверхности ОНП и  $q_2$  – на поверхности  $\Delta$ -слоя, которые вносят вклад в энергию ОНП и обеспечивают соответствующее давление на его поверхности и в гидратном слое. Для упрощенной задачи (концентрация растворенных солей  $c = 0$ , длина Дебая  $L \rightarrow \infty$ ) справедливы формулы

$$q_1 = \frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1} q_0, \quad (11)$$

$$q_2 = \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) q_0. \quad (12)$$

Определим давление  $P_\Delta(r_0)$  при эффекте «pressurefreezing». Отметим, что давление (5) создается полной энергией ОНП и определяет положительное (расширяющее) давление на границе ОНП. Электростатическое давление  $P_\Delta(r_0)$ , сжимающее  $\Delta$ -слой, определяется взаимной энергией  $U_\Delta = Q_1 Q_2 / 4\pi\varepsilon_0 (r_0 + \Delta)$  зарядов  $Q_1 = q_0 + q_1 = q_0 / \varepsilon_1$  на внутренней границе  $\Delta$ -слоя и  $Q_2 = q_2$  на его внешней границе, с учетом (11) и (12)

$$P_\Delta(r_0) = - \frac{\partial U_\Delta}{\partial r_0} = - \frac{1}{4\pi (r_0 + \Delta)^2} = - \frac{q_0^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{16\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 (r_0 + \Delta)^4}. \quad (13)$$

Отрицательность  $P_\Delta(r_0)$  указывает на сжатие  $\Delta$ -слоя. Определим нижнюю границу заряда  $q_0$  при переходе «pressurefreezing», подставляя в формулу (13) условие  $P_\Delta = 10^9$  Па

$$q_{0P} = 4\pi \cdot 10^4 (r_0 + \Delta)^2 \varepsilon_1 \sqrt{\frac{10 \varepsilon_2 \varepsilon_0}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}}. \quad (14)$$

Зависимость (14) приведена на рис.4 (кривая 1), где видно, что замораживание за счет давления требует максимального заряда стабильного ОНП. Вместе с тем, зависимость (10), приведенная на рис.4 (кривая 2), показывает, что электрозамораживание требует минимального заряда стабильного ОНП от  $10^{-17}$  Кл до  $7.5 \cdot 10^{-15}$  Кл при увеличении радиуса ОНП от 5 нм до 150 нм. При  $r_0 = 10$  нм заряд на кривой 2 меньше зарядов на кривых 1 и 3 в 6 и 14 раз, соответственно.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С учетом изложенного, можно полагать, что именно электрозамораживание  $\Delta$ -слоя и механические свойства ледяной оболочки обеспечивают стабильность ОНП. Это происходит из-за сложной структуры двойного электрического слоя, аномально малой диэлектрической проницаемости и, соответственно, большого электрического поля в  $\Delta$ -слое.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бункин Н.Ф., Бункин Ф.В. *Бабстонная структура воды и водных растворов электролитов* // Успехи физических наук. – 2016. – Т.186. – №9. – С.933-952. DOI: 10.3367/UFN.2016.05.037796.
2. Meegoda J.N., Hewage S.A. and Batagoda J.H. *Stability of nanobubbles* // Environmental Engineering Science. – 2018. – Vol.35. – No.11. – Pp.1216-1227. DOI: [10.1089/ees.2018.0203](https://doi.org/10.1089/ees.2018.0203).
3. Левин Ю.К. *Характеристики двойного электрического слоя объемных нанопузырей в воде* // Коллоидный журнал. – 2023. – Т.85. – №3. – С.350-354. DOI: 10.31857/S0023291223600220.

4. Гамаюнов Н.И. *Воздействие постоянного магнитного поля на движущиеся растворы и суспензии* // Коллоидный журнал. – 1994. – Т.56. – №2. – С.290-298.
5. Fumagalli L., Esfandiari A., Fabregas R., Hu S., Ares P., Janardanan A., Yang Q., Radha B., Taniguchi T., Watanabe K., Gomila G., Novoselov K.S., Geim A.K. *Anomalously low dielectric constant of confined water* // Science. – 2018. – Vol.360. – Pp.1339-1342.
6. Левин Ю.К. *Условия стабильности слоя Штерна объемных нанопузырей в воде* // Известия вузов. Физика. – 2022. – Т.65. – №12. – С.55-59.
7. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. *Фейнмановские лекции по физике. Вып. 5.* – М.: Мир, 1966.
8. Тамм И.Е. *Основы теории электричества: Учеб. пособие для вузов.* – М.: Физматлит, 2003. – 616 с. (С.101-102).
9. Кошоридзе С.И. *Влияние строения двойного электрического слоя на стабильность объемных нанопузырей* // Инженерная физика. – 2023. – №7. – С.22-25. DOI: 10.25791/infi zik.7.2023.1342.
10. Okada T., Iitaka T., Yagi T. et al. *Electrical conductivity of ice VII* // Scientific Reports. – 2014. – Vol.4. – 5778. DOI: 10.1038/srep05778.
11. Cassone G., Martelli F. *Electrofreezing of Liquid Water at Ambient Conditions* // arXiv:2308.04893v1. – 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2308.04893.
12. Zhu W., Huang Y., Zhu C. et al. *Room Temperature Electrofreezing of Water Yields a Missing Dense Ice Phase in the Phase Diagram* // Nature Communications. – 2019. – Vol.10. – 1925. DOI: 10.1038/s41467-019-09950-z.
13. Petrenko V.F. and Whitworth R.W. *Physics of Ice.* – Oxford: Oxford University Press, 1999.
14. Белов С.И., Борисков Г.В., Быков А.И. и др. *Электрофизические свойства воды и льда при изоэнтропическом сжатии до мегабарных давлений* // Письма в ЖЭТФ. – 2017. – Т.105. – Вып.3. – С.182-186. DOI: 10.7868/S0370274X17030109.
15. Дунаева А.Н., Анцышкин Д.В., Кусков О.Л. *Фазовая диаграмма H<sub>2</sub>O: термодинамические функции фазовых переходов льдов высокого давления* // Астрономический вестник. – 2010. – Т.44. – №3. – С.222-243.
16. Kapil V., Schran C., Zen A. et al. *The first-principles phase diagram of monolayer nanoconfined water* // Nature. – 2022. – Vol.609. – No.15. – Pp.512-526. DOI: 10.1038/s41586-022-05036-x.
17. Левин Ю.К. *Механизм стабильности нанопузырей в воде* // Изв. вузов. Физика. – 2024. – Т.67. – №10. – С.58-61. DOI: 10.17223/00213411/67/10/7.

УДК 532.525.2  
EDN FDGTGC (<https://elibrary.ru/fdgtgc>)  
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.26



## **ГИДРОДИНАМИКА И ТЕПЛООБМЕН ПРИ НАТЕКАНИИ ИМПАКТНОЙ ЛАМИНАРНОЙ СТРУИ НА КАТАЛИТИЧЕСКУЮ ПОВЕРХНОСТЬ \***

Лукашов В.В., Леманов В.В., Тупикин А.В., Федоренко В.А., Шаров К.А.

*ФГБУН Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН,  
г. Новосибирск, Россия*

Одним из приоритетных направлений мировой науки является поиск решений, обеспечивающих экологическую безопасность и высокую эффективность энергетических установок. В настоящее время значительное внимание уделяется вопросу декарбонизации в промышленности, энергетике и транспорте [1-3]. Предлагаются различные решения для снижения «углеродного следа»: переход к «зеленой энергетике»; пиролиз или термическое разложение метана на  $H_2$  и  $C$ , с последующей утилизацией или переработкой углерода на удобрения; создание альтернативных топливных смесей. Международное энергетическое агентство (International Energy Agency, IEA), принимая «Парижское соглашение по климату» (12 декабря 2015 года), поставило задачу использовать в качестве энергоносителя до 80% возобновляемых источников энергии и к 2050 г. вдвое сократить выбросы  $CO_2$  в атмосферу. Хотя формально наша страна не подписала данное соглашение, но фактически его поддерживает. В сентябре 2021 г. была утверждена «Стратегия социально-экономического развития Российской Федерации с низким уровнем выбросов парниковых газов до 2050 года» (распоряжение Правительства Российской Федерации от 29 октября 2021 г. № 3052-р). Заметим, что снижения выбросов  $CO_2$  не могут быть уменьшены только за счет замены видов сырья и топлива, потребуются изменения в технологических процессах (изменение конструкций печей и котлов химических реакторов, разработка катализаторов и т.д.). Использование водорода для получения энергии в газотурбинных двигателях и топливных элементах обладает огромным потенциалом для обезуглероживания мирового энергетического сектора. В топливных элементах активно используется горение бедных водородно-воздушных смесей в каналах при стабилизации с каталитической поддержкой на стенке [4]. Платина-содержащие каталитические материалы, нанесённые на твердую поверхность, обладают способностью оказывать влияние на устойчивость горения как на поверхности, так и внутри объёма газовой фазы. При этом подавляются пульсации давления, что было продемонстрировано в работе [5], при воспламенении гомогенных газовых смесей углеводородов с окислителем при наличии металлической платины в бомбе постоянного объёма. Скорость элементарных гетерогенных реакций зависит от многих факторов: скорости реакций адсорбции, температуры поверхности, массовых долей топлива, кислорода и продуктов, находящихся в газовой фазе на пластине. Поэтому, задачи поверхностной кинетики не могут решаться

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Соглашение от 24.04.2024 № 075-15-2024-543.

в отрыве от газодинамики внешнего течения [6]. При этом гетерогенное горение также оказывает влияние на газовый поток. В случае, когда гетерогенная реакция сопровождается изменением числа молекул в смеси, то возникает стефановский поток, который ориентирован по нормали к каталитической поверхности.

Важным аспектом при организации горения являются гидродинамические и теплофизические процессы в пристеночной зоне и основном течении топливно-воздушной смеси. Применение крупномасштабных когерентных структур для управления процессами тепломассопереноса широко используется в настоящее время [7,8]. Согласно результатам, представленным в [9], если гетерогенная каталитическая реакция окисления протекает в диффузионном режиме, неоднородность газового состава у поверхности может привести к неравномерному изменению свойств катализатора, возникающему из-за образования оксидов, вследствие чего изменится шероховатость поверхности. Заметим, что для проектирования топливных систем на окислительных катализаторах важно иметь информацию о структуре и химическом составе катализатора в реальных условиях с учётом изменения параметров (давление, температура, состав). Таким образом, исследования на модельных объектах являются неотъемлемой частью решения технических и технологических задач. В работе изучалась тепловая динамика при натекании водородосодержащей струи на нагретую каталитическую поверхность. Исследовались режимы течения с числами Рейнольдса ( $Re < 2000$ ), когда истечение в пространство происходит в ламинарном режиме, а на выходе из трубки реализуется установившееся течение Пуазейля.

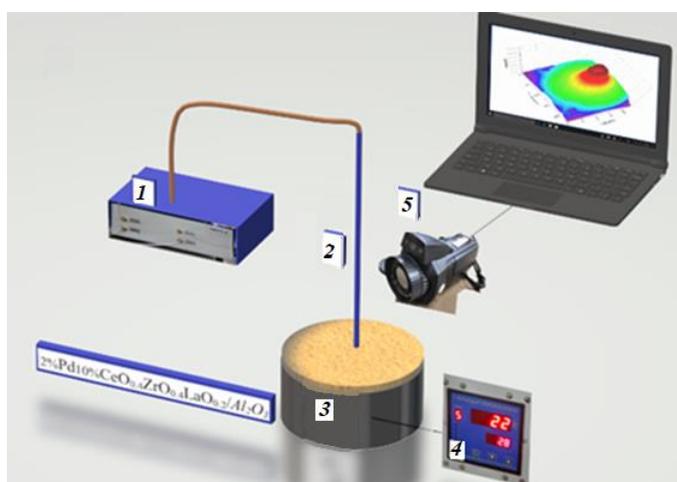


Рис.1. Схема эксперимента: 1 – генератор газовых смесей УФПГС-2; 2 – трубка подачи газообразного топлива; 3 – нагреваемая пластина с каталитической поверхностью; 4 – управление электрическим нагревателем; 5 – тепловизор.

Схема экспериментальной установки показана на рис.1. Расход топливной смеси задавался с помощью генератора топливной смеси (1). В качестве топлива использовались: смеси водорода с азотом и водорода с аргоном; водородно-воздушная смесь и чистый водород. Струя топлива истекала из трубки (2) с внутренним диаметром  $d = 3$  мм длиной  $l = 1$  м ( $l/d = 333$ ) в затопленное пространство (свободную атмосферу) и натекала под углом  $90^\circ$  на нагретую пластину (3) диаметром  $D = 2R = 100$  мм и толщиной  $\Delta = 3$  мм с температурой

поверхности  $T_w = 140 - 350^\circ\text{C}$ . Для нагрева пластины использовался электрический нагреватель с автоматической поддержкой заданной температуры (4). Материал пластины – нержавеющая сталь. Катализатор, используемый для формирования покрытия на металлическом диске, представляет собой гамма-оксид алюминия, модифицированный редкоземельными металлами и содержащий активный каталитический компонент палладий (Pd), имел состав: 2%Pd/10%CeO<sub>0,4</sub>ZrO<sub>0,4</sub>LaO<sub>0,2</sub>/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. Расстояние от трубки до преграды варьировалось в диапазоне  $h = 9 - 60$  мм ( $h/d = 3 - 20$ ). Число Рейнольдса ( $Re = u_0 \times d/\nu$ ) определялось по диаметру трубки, кинематическая вязкость топливной смеси  $\nu$  при комнатной температуре бралась из справочных данных [9],  $u_0$  – средняя по расходу скорость. Распределение температуры на поверхности пластины регистрировалось тепловизионной камерой Testo 890-2 (5) с неохлаждаемой микроболومترической матрицей  $640 \times 480$  pxl (спектральный диапазон 8-14 мкм, диапазон измеряемых температур от  $-20$  до  $+1200^\circ\text{C}$ , чувствительность  $0.08^\circ\text{C}$ ). Погрешность измерения температуры в опытах не превышала 2%. Размер выборки составлял 50 кадров.

Опыты проводились на ламинарных режимах истечения из трубки воздуха и бедной водородно-воздушной смеси (молярная доля водорода  $X_{H_2} = 2 - 10\%$  или коэффициент избытка топлива  $\varphi = 0.07 - 0.32$ ). Перед подачей топливной смеси катализатор нагревали до температуры  $T_w^0$ , и проводилась съемка термограммы поверхности, используемая в дальнейшем при обработке данных. На рис.2 представлены распределения осредненной по выборке температуры на поверхности образца  $T_w(r/R)$  и среднеквадратичного отклонения для случаев натекания на преграду инертной (воздух) и химически активной (бедная водородно-воздушная смесь  $\varphi = 0.26$ ) струи. Расстояние до преграды  $h/d = 15$ ,  $Re \approx 1800 - 1900$ , начальная температура поверхности  $T_w^0 = 140^\circ\text{C}$ .

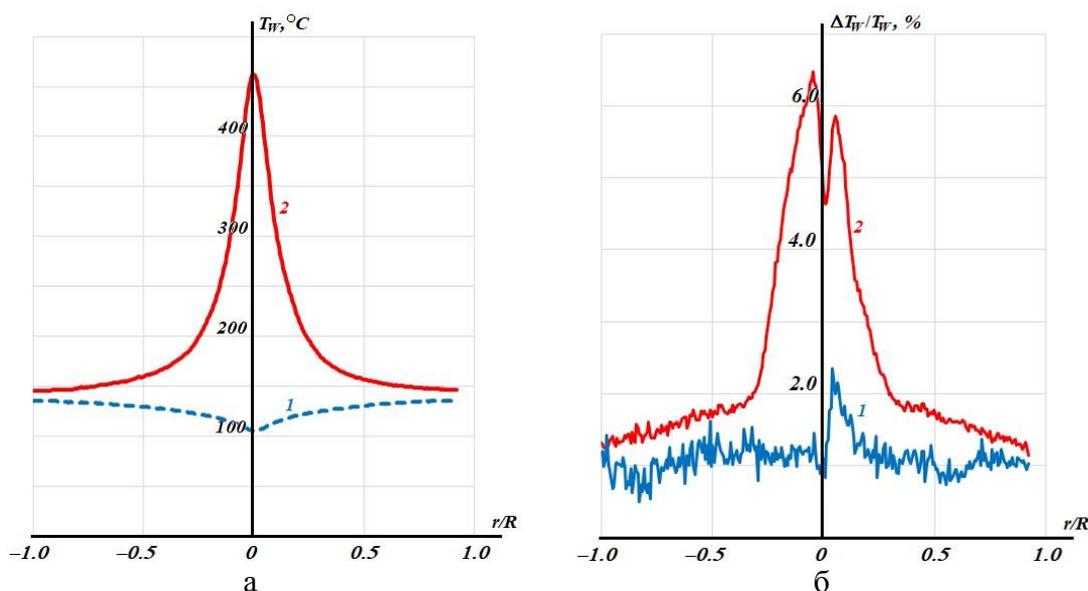


Рис.2. Осредненной по выборке температура поверхности образца (а) и среднеквадратичное отклонение (б) при набегании инертной (кривая 1) и химически активной струи (кривая 2).

Тепло, выделяемое в результате экзотермической реакции, увеличивало тепловые потоки образца в окружающую среду и, соответственно, температуру каталитической поверхности (рис.2а). Как можно заметить, если среднеквадратичное отклонение температуры для инертной среды (воздух) носит случайный и равномерный по радиусу характер, то в случае химически активной струи можно говорить о существенном росте пульсаций температуры за счет протекания каталитических реакций (см. рис.2б).

С целью анализа влияния каталитического окисления водорода на теплоперенос оценивалось изменение тепловых потоков относительно условий без химических реакций. Для этого применялся закон Ньютона-Рихмана:  $q = \alpha [T_w - T_0]$ ,  $T_w$  – распределение температуры на поверхности,  $T_0$  – температура окружающей среды и  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи с поверхности, который является функцией числа Нуссельта ( $\alpha \sim Nu$ ). Термодинамические свойства смеси (коэффициент теплопроводности и вязкость) слабо изменяются в рассматриваемом диапазоне состава, и в случае ламинарного натекания на преграду изменение на коэффициент теплоотдачи незначительно, по оценкам  $\alpha_{mix}/\alpha_{air} \approx 1.02$ ,  $\alpha_{mix}$  – для смеси,  $\alpha_{air}$  – для воздуха. На рис.3 приведено влияние каталитического окисления водорода на теплоотдачу при изменении процентного соотношения по водороду:  $\tilde{q} = \left( \frac{q_{mix}}{q_{air}} - 1 \right)$ ,  $q_{mix}$  – плотность теплового потока при натекании смеси,  $q_{air}$  – при натекании воздушного потока.

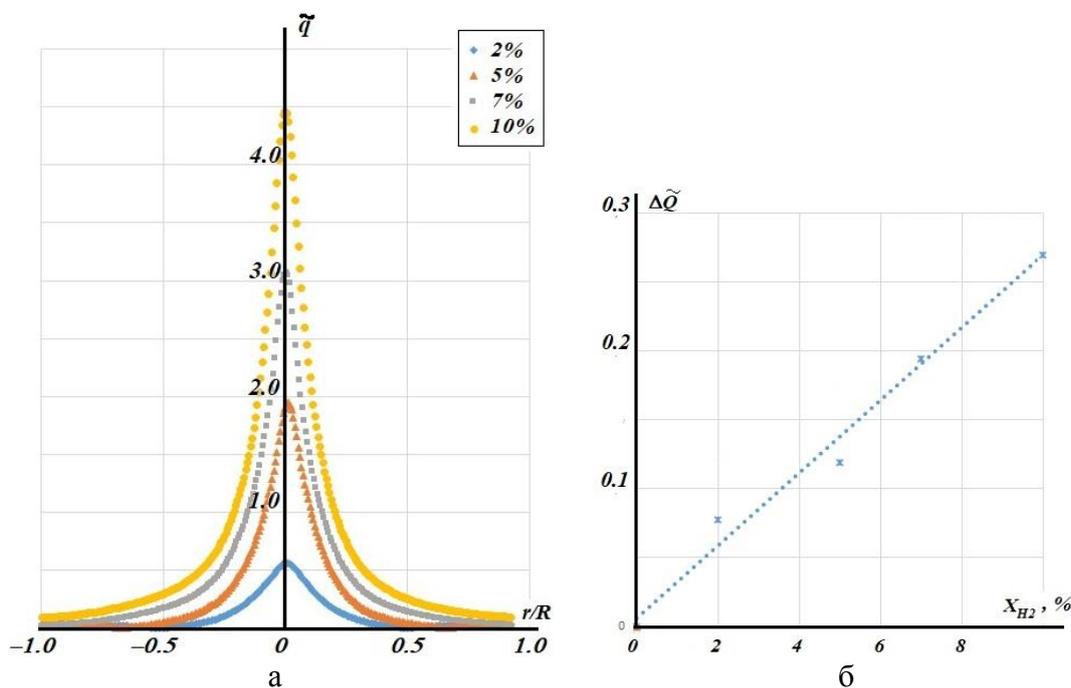


Рис.3. Влияние каталитического окисления водорода на теплоотдачу в зависимости от количества водорода в смеси: а) по плотности теплового потока; б) по интегральной теплоотдаче.

Наблюдается не только рост интенсивности тепловых потоков, но и расширение области, на которой заметно влияние химических реакций. Интегральная теплоотдача с поверхности может быть определена как:

$$\Delta Q = \int_0^R 2\pi [T_w(r) - T_0] r dr, \text{ тогда относительный прирост теплообмена оценим как:}$$

$$\Delta \tilde{Q} = \frac{\int_0^R 2\pi [T_w^{mix}(r) - T_0] r dr}{\int_0^R 2\pi [T_w^{air}(r) - T_0] r dr} - 1. \text{ Увеличение мощности теплоотдачи практически}$$

линейно связано с количеством добавляемого водорода.

Если для функции разности плотности теплового потока задать порог отличия от нуля, например,  $\tilde{q}(r_{ch}/R) = \left( \frac{q_{mix}}{q_{air}} - 1 \right) \leq 0.01$ , то можно оценить зону каталитической активности поверхности  $r_{ch}$  при изменении условий эксперимента. На рис.4 представлены результаты оценки радиуса области каталитической активности для импактной струи водородно-воздушной смеси в зависимости от состава и расстояния до поверхности. При приближении трубки к поверхности на  $h/d = 5$  для наиболее бедных составов ( $X_{H_2} = 2$  и 5%) расширение области каталитической активности более значительное, а смесь с  $X_{H_2} = 10\%$  демонстрируют неполное окисление при протекании вдоль поверхности.

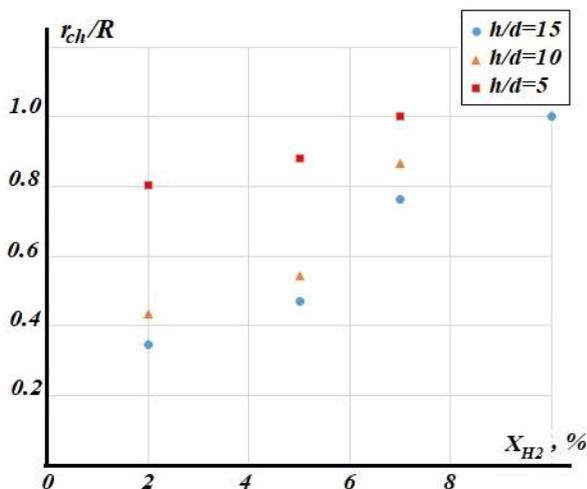


Рис.4. Размеры зоны каталитической активности поверхности в зависимости от состава смеси.

Таким образом, выбранный метод диагностики с использованием тепловизионной камеры с высокой температурной чувствительностью позволил обнаружить существенный рост пульсаций температуры за счет протекания каталитических реакций на поверхности  $2\%Pd/10\%CeO_{0,4}ZrO_{0,4}LaO_{0,2}/Al_2O_3$ . Проведенный анализ влияния каталитического окисления водорода на теплоперенос адекватно описывает физический процесс в импактной струе при наличии химической активности на поверхности образца. С увеличением процентного содержания водорода наблюдается не только рост интенсивности теплообмена, но и расширение зоны реакций. Также заметим, что, в случае химически активной струи возникают пульсации температуры (примерно 5%), связанные с протекания каталитических реакций окисления водорода.

## ЛІТЕРАТУРА

1. de Pee A., Pinner D., Roelofsen O., Somers K., Speelman E., Witteveen M. *Decarbonization of industrial sectors: the next frontier*. – McKinsey & Company, 2018.
2. Nose M., Kawakami T., Nakamura S., Kuroki H., Kataoka M., Yuri M. *Development of Hydrogen/Ammonia Firing Gas Turbine for Decarbonized Society // Mitsubishi Heavy Industries Technical Review*. – 2021. – Vol.58. – No.3.
3. Valera-Medina A., Xiao H., Owen-Jones M., David W.I.F., Bowen P.J. *Ammonia for power // Progress in Energy and Combustion Science*. – 2018. – Vol.69. – Pp.63-102.
4. Kim J., Yu J., Lee S., Tahmasebi A., Jeon C.-H., Lucas J. *Advances in catalytic hydrogen combustion research: catalysts, mechanism, kinetics, and reactor designs // Int. J. Hydrog. Energy*. – 2021. – Vol.46. – Pp.40073-40104.
5. Troshin K.Y., Rubtsov N.M., Tsvetkov G.I., Chernysh V.I. *The influence of noble metals on thermoacoustic vibrations and boundaries of the region of a negative temperature coefficient during combustion of n-pentane-air mixtures // Russian J. of Physical Chemistry B*. – 2022. – Vol.16. – Pp.39-46.
6. Mellado J.D., Kindelán M., Sánchez A.L. *A simplified formulation for heterogeneous catalytic combustion in stagnation-point flows // Combustion and Flame*. – 2003. – Vol.132. – Pp.596-599.
7. Renard P.-H., Thévenin D., Rolon J.C., Candel S. *Dynamics of flame/vortex interactions // Prog. Energy Combustion Science*. – 2000. – Vol.26. – Pp.225-282.
8. Ginevsky A.S., Vlasov Y.V., Karavosov R.K. *Acoustic control of turbulent jets*. – Berlin/Heidelberg: Springer, 2004.
9. Pfaff S., Rämisch L., Gericke S.M., Larsson A., Lundgren E., Zetterberg J. *Visualizing the gas diffusion induced ignition of a catalytic reaction // ACS Catalysis*. – 2022. – Vol.12. – No.11. – Pp.6589-6595.

**Волновая динамика газообразных,  
жидких и твёрдых сред.  
Высокоскоростной удар**



УДК 539.3+519.6

EDN HDJXPL (<https://elibrary.ru/hdjxpl>)

DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.27



## УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ И НЕДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ РАЗРЫВОВ В МИКРОПОЛЯРНОЙ МАГНИТОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Бахолдин И.Б.

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,  
г. Москва, Россия*

Ранее была разработана теория бездиссипативных и слабодиссипативных структур разрывов [1]. Согласно этой теории решения задачи о распаде произвольного разрыва в недиссипативном случае содержат расширяющиеся области, однородные участки, волновые зоны и центрированные простые волны. В слабодиссипативном случае с течением времени волновые зоны перестают расширяться. Упорядоченные волновые зоны описываются усредненными уравнениями. Эти области могут ограничиваться или разделяться обратимыми структурами разрывов, представляющими собой переходы между однородными или периодическими состояниями.

В соответствии с [2] одномерные уравнения электропроводящей магнитоупругой среды с использованием модели Коссера имеют вид

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\mu + \alpha) \left( 1 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\alpha \frac{\partial \phi_3}{\partial x} - H_1^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$I \frac{\partial \phi_3}{\partial t^3} = (\gamma + \varepsilon) \left( 1 + 2 \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi_3}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial v}{\partial x} + 2\alpha \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 4\alpha \phi_3. \quad (2)$$

Здесь  $t$  – время,  $x$  – пространственная координата,  $v$  – компонента вектора перемещения,  $\rho$  – плотность,  $I$  – показатель инерции при вращении,  $\mu$  – постоянная Ламе,  $\alpha, \gamma, \varepsilon$  – физические константы модели Коссера,  $H_1$  – напряженность магнитного поля. Продифференцировав (2) по  $x$  и исключив из него  $\phi_{3x}$  с помощью (1) можно получить уравнение в перемещениях с одним неизвестным

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_\theta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{I c_\phi^2 c_T^2}{4\alpha} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{I}{4\alpha} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} - \frac{I(c_\phi^2 + c_T^2)}{4\alpha} \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} + \\ & + \sum_{i=1}^3 N_i + \frac{c_\phi^2 \rho}{8I\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{i=4}^9 N_i = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$N_1 = -c_T^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \quad N_2 = \frac{c_T^2 c_\phi^2 I}{4\alpha} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \quad N_3 = -\frac{c_T^2 I}{4\alpha} \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2,$$

$$N_4 = c_T^4 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \quad N_5 = c_T^4 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^2, \quad N_6 = 2c_T^2 c_T^2 \frac{c_\phi^2 I}{4\alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2,$$

$$N_7 = -2c_T^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad N_8 = -2c_T^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \quad N_9 = \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)^2.$$

Здесь  $c_\tau = (\mu/\rho)^{1/2}$ ,  $c_\phi = [(\gamma + \varepsilon)/I]^{1/2}$ ,  $c_t = [(\mu + \alpha)/\rho]^{1/2}$ ,  $c_\theta^2 = c_\tau^2 - c_A^2$ ,  $c_T^2 = c_t^2 - c_A^2$ ,  $c_A = [H_1^2/(4\pi\rho)]^{1/2}$ . Уравнение с одним неизвестным выводилось в [2], но здесь представлен поправленный вариант. Для дальнейшего анализа потребуются еще три уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_\theta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{I c_\phi^2 c_T^2}{4\alpha} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{I}{4\alpha} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \frac{I(c_\phi^2 + c_T^2)}{4\alpha} \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} - c_\tau^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^2 = 0, \quad (4)$$

$$u = \frac{\partial}{\partial x} v,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_\theta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c_\tau^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^2 = 0, \quad (5)$$

$$I \frac{\partial \phi_3}{\partial t^3} = (\gamma + \varepsilon) \left( 1 + 2 \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi_3}{\partial x^2} + 2\alpha u + 2\alpha u^2 - 4\alpha \phi_3. \quad (6)$$

Уравнение (4) выводится из уравнения (3) дифференцированием по  $x$ , переходом к слабонелинейно-длинноволновому приближению [2], т.е. отбрасыванием нелинейно-дисперсионных членов более высокого порядка малости, чем те, которые есть в этом уравнении. Оно представляет собой один из вариантов уравнения Буссинеска. При такой методике вывода уравнение точно передает дисперсионные свойства линейных волн в отличие от остальных вариантов уравнений Буссинеска, эквивалентных уравнению (4) в используемом асимптотическом приближении. Анализ эволюционности линеаризованного варианта уравнения (4) с помощью методики Петровского [1,3] показывает, что оно эволюционно (корректно) при всех значениях  $I$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $H_1$  (в случае произвольных значений коэффициентов уравнения (4) некорректность возможна).

Уравнение (5) представляет собой так называемый упрощенный [1] вариант уравнения (4), получаемый отбрасыванием дисперсионных членов и применяемый при исследовании структур разрывов.

Уравнение (6) получается из уравнения (2) в предположении, что величина  $u$  не зависит от  $t$  и  $x$ .

Уравнение (4) имеет аналитические решения в виде уединенных волн с профилем, описываемым функцией  $\text{sech}^2$ , т.е. таким же как и в случае уединенных волн уравнения Кортевега-де Вриза. Устойчивость этих уединенных волн исследовалась как с помощью аналитических [4] и гибридных численно-аналитических методов, основанных на функции Эванса, так и непосредственным численным расчетом эволюции решений уравнения (4) с начальными данными в виде уединенной волны. С помощью функции Эванса можно выявить наличие растущей со временем собственной функции для уравнений бегущих волн, линеаризованных относительно некоторого локального стационарного решения в системе координат, движущейся со скоростью исследуемого объекта (например, уединенной волны или стационарной структуры разрыва). Численно-аналитический подход с применением функции Эванса сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Такой расчет выполняется точнее и значительно быстрее, чем расчет уравнений в частных производных, который также можно применять для исследования устойчивости. Имеются

как сверхзвуковые уединенные волны типа горба, так и дозвуковые типа впадины (под скоростью звука здесь понимается скорость  $c_\theta$ ). Уединенные волны малой и умеренной амплитуды устойчивы, а уединенные волны большой амплитуды неустойчивы. Введем обозначения:  $s_1 = (c_T/c_\theta)^2$ ,  $s_2 = (c_\phi/c_\theta)^2$ ,  $v = W^2$ ,  $Wc_\theta$  – скорость уединенной волны. Для сверхзвуковых волн выделяются два случая:  $s_2 > v > 1 > s_1$  и  $s_2 > v > s_1 > 1$  (или  $s_1 > v > s_2 > 1$ , индексы 1 и 2 можно менять местами, решения уравнения (4) от этого не меняются). В первом случае есть уединенные волны малой амплитуды при  $v \rightarrow 1$ , они устойчивы, при увеличении квадрата скорости до некоторого значения  $v_2 < s_2$  (и соответственно увеличения амплитуды) они становятся неустойчивыми. Неустойчивость сохраняется вплоть до  $v = s_2$ . Во втором случае уединенных волн сколь угодно малой амплитуды нет, а на обеих границах области допустимых значений  $v$  длина уединенной волны стремится к нулю, то есть волны не описываются слабонелинейно-длинноволновым приближением, использованным при выводе уравнения (4). Возле границ существования решений волны неустойчивы, а на среднем интервале  $v_1 < v < v_2$  волны устойчивы. Для дозвуковых волн выделяются аналогичные два случая:  $s_2 > s_1 > 1 > v$  и  $s_2 > 1 > s_1 > v$ . В первом случае есть устойчивые волны сколь угодно малой амплитуды при  $v \rightarrow 1$  и неустойчивые при  $v < v_1$ . Во втором случае есть устойчивый интервал  $v_1 < v < v_2$ . Поэтому при  $s_2 > s_1 > 1$  существуют и дозвуковые и сверхзвуковые уединенные волны, что может приводить к появлению солитонных структур разрывов с уединенными волнами обоого типа. На рис.1 показаны графики эволюции численного решения с начальными данными в виде неустойчивой сверхзвуковой уединенной волны (а),  $I = 1$ ,  $c_\phi = 1.6$ ,  $c_T = 0.9$ ,  $\alpha = 1$ ,  $c_T = 1$ ,  $c_\theta = 1$ , и неустойчивой дозвуковой уединенной волны (б), здесь и далее рисунки в случае  $c_T > c_\phi > c_\theta$  соответствуют  $c_\phi = 1.0488$ ,  $c_T = 2$ .

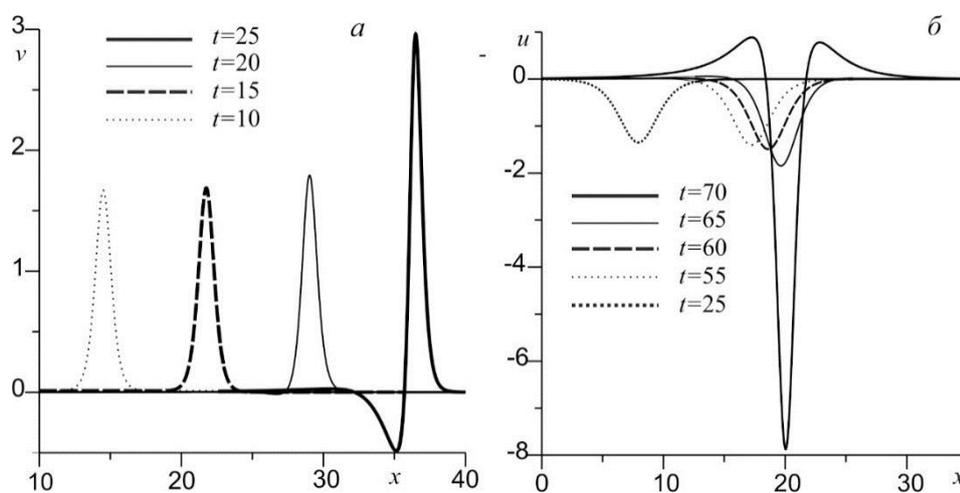


Рис.1.

Последовательно численно решалась задача о распаде разрыва для уравнений (4), (3), системы (1)-(2). Для того чтобы рассмотреть отдельно структуры, движущиеся вправо, начальные данные брались на основе функции

в виде движущейся сглаженной ступеньки, а необходимые для расчетов уравнения (3) и системы (1)-(2) значения  $v$  и  $\phi_3$  находились интегрированием

$$\begin{aligned} u &= -(u_2 - u_1) \tanh[(v - Vt)r]/2 + (u_1 + u_2)/2, \\ V &= c_\theta + c_\tau^2(u_2 + u_1)/(2c_\theta), \\ v &= \int_{x_1}^x u(\xi, t) d\xi + v_1, \\ \phi_3 &= \int_{x_1}^x \left[ \frac{\mu + \alpha}{2\alpha} \left( 1 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\rho}{2\alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{H_1^2}{8\pi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + \phi_{31}, \\ \frac{d^2 \phi_{31}}{dt^2} &= 2\alpha u_1 + 2\alpha u_1^2 - 4\alpha \phi_{31}. \end{aligned} \quad (7)$$

Зависимость от времени здесь нужна, чтобы найти необходимые для правильной постановки задачи начальные значения производных по времени. Константа интегрирования  $v_1$  не существенна и определяет сдвиг. Постановка задачи о распаде разрыва для системы (1)-(2) в общем случае допускает, что состояния 1 и 2 – колебательные. Но если выбрать начальное значение  $\phi_{31} = (u_1 + u_1^2)/2$ , то для состояния 1 колебаний не будет. Колебаний также не будет в случае включения в правую часть уравнения (2) диссипативного члена  $\phi_{3xx}$  с положительным коэффициентом (вязкоупругость). С течением времени они затухнут независимо от начального значения  $\phi_3$ . Формула для скорости выводится из анализа интегральной формы приближенного уравнения переноса  $-2u_t + (c_\tau/c_\theta)^2 (u^2)_{x'x'}$ , выводимого из уравнения (5) в системе координат наблюдателя  $x'$ , движущейся вправо со скоростью  $c_\theta$ . Формула выводилась в предположении разрывов малой амплитуды, но оказалось, что пригодна и в случае умеренной амплитуды.

Применялся конечно-разностный численный метод с центральными пространственными разностями и аппроксимацией временных производных методом Рунге-Кутты четвертого порядка. При этом, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих производные по времени выше первого порядка, вводятся дополнительные неизвестные так, чтобы получить систему уравнений с производными по времени первого порядка. Метод был разработан в [5]. На примере обобщенного уравнения переноса с пространственной производной произвольного порядка  $m$  было теоретически показано, что при условии  $\tau < ch^m$ , имеется сходимость, и в не диссипативном случае ( $m$ -нечетное) схемная диссипация имеет пятый порядок малости и поэтому практически незаметна.

Расчет на бесконечной области моделировался расчетом на достаточно протяженном отрезке. В случае уравнения (4) на границе ставились условия  $u_x = 0$ ,  $u_{xx} = 0$ ,  $u_{tx} = 0$  ( $u_{xx} = 0$ ,  $u_{xxx} = 0$  тоже можно). В случае уравнения (3) –  $v_{xx} = 0$ ,  $v_{xxx} = 0$ ,  $v_{tx} = 0$  ( $v_x = 0$ ,  $v_{xx} = 0$  тоже можно, если  $u_1 = 0$ ). Для уравнений (1)-(2) –  $v_{xx} = 0$ ,  $\phi_{3xx} = 0$ .

Расчеты для уравнения (4), как и ожидалось, показали, что при небольших амплитудах разрыва наблюдается структура солитонного типа, содержащая расширяющуюся со временем волновую зону, в которой волна на ее границе

стремится к уединенной при  $t \rightarrow \infty$ . В случае  $c_T > c_\theta > c_\phi$  наблюдались структуры с уединенной волной типа горба, рис.2, сплошная линия,  $t = 200$ , этот рисунок и рисунки далее в этом случае соответствуют  $c_\phi = 0.81$ ,  $c_T = 2$ . При увеличении амплитуды возникала неустойчивость уединенной волны с ростом ее амплитуды, приводящая к остановке расчета.

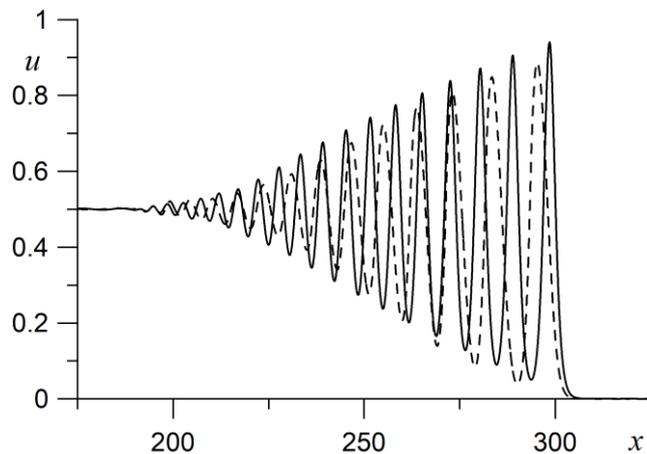


Рис.2.

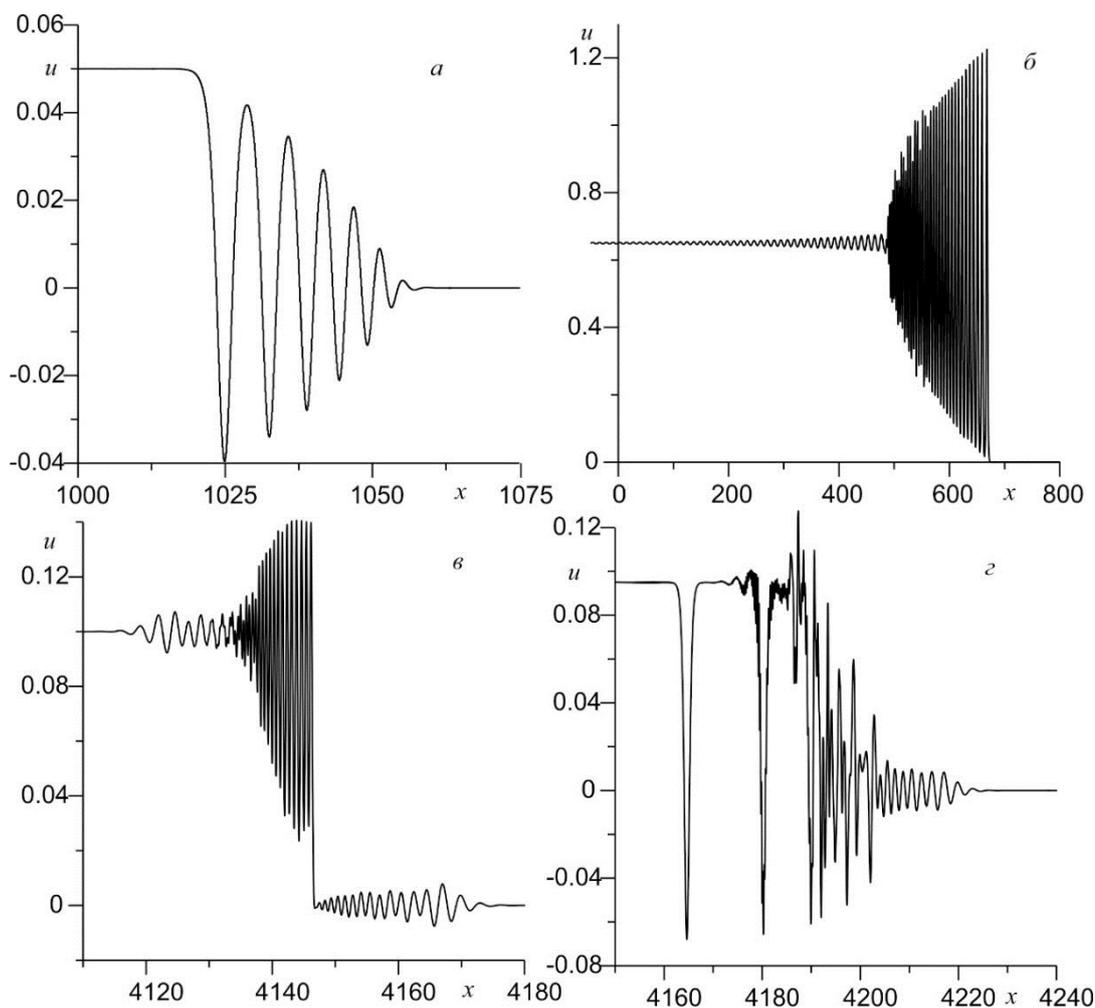


Рис.3.

Примеры графиков решений при  $c_T > c_\phi > c_\theta$  приведены на рис.3,  $c_\phi = 1.0488$ ,  $c_T = 2$ . При небольшой амплитуде возникала структура с уединенной волной типа впадина рис.3а,  $t = 1000$ . При увеличении амплитуды начального разрыва возникает структура с уединенной волной типа горб, рис.3б,  $t = 500$ , но здесь слева в волновой зоне наблюдается резкий переход между короткими и длинными волнами, как бы опрокидывание огибающей. С течением времени это приводит к росту амплитуды волн в этой области и остановке расчета. При увеличении амплитуды разрыва наблюдается сравнительно упорядоченная нестационарная структура с излучением волн вправо и влево, рис.3в,  $t = 4000$ . При дальнейшем увеличении амплитуды начального разрыва возрастает хаотизация, появляются «оторвавшиеся» уединенные волны типа впадина, рис.3г,  $t = 4000$ . При еще большей начальной амплитуде структура не формируется, а происходит остановка расчета из-за роста амплитуды волн.

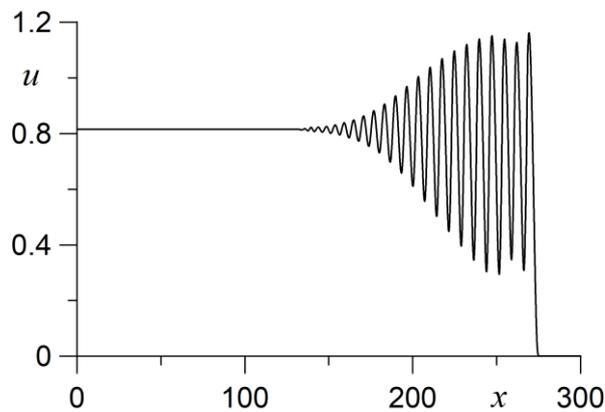


Рис.4.

Расчеты для уравнений (3) и (1)-(2) для небольших амплитуд разрыва также показали образование солитонных структур для небольших амплитуд разрыва. График решения со структурой солитонного типа и с уединенной волной типа горб показан на рис.2 штриховой линией, здесь и далее  $\rho = 1$ . Качественных отличий от результатов расчета уравнения (4) нет. При увеличении амплитуды в случае  $c_\phi < c_\theta$  возникала структура, аналогичная разрыву с излучением, описанному в [1]. Структура содержала переход между однородным и периодическим состоянием, рис.4. В отличие от случаев, описанных в [1], такая структура содержит слабый разрыв, т.е. разрыв производной величины  $u$  на гребне волны максимальной амплитуды, см. рис.4. Слабым этот разрыв является для уравнения (5), если его привести к системе уравнений  $z_t - c_\theta^2 u_x - c_T^2 (u^2)_x = 0$ ,  $u_t = z_x$ . В теории разрывов под слабым разрывом в общем случае понимается разрыв производных, порядок которых меньше или равен порядку старших производных входящих в уравнение. Поскольку уравнение (3) содержит производные третьего порядка от величины  $u$ , то для исходных уравнений это сильный разрыв, разрыв  $\phi_{3x}$  тоже есть. Сходимость расчетов при уменьшении пространственного шага в случае расчета уравнения (3) при  $c_\phi > c_\theta$  наблюдалась и в случае разрыва с излучением, несмотря на отсутствие гладкого решения, т.е. возникала схемная структура слабого разрыва (см. ниже). Заметим, что ранее при использовании данной численной схемы было обнаружено

образование дисперсионной схемной структуры сильного разрыва для быстрых магнитозвуковых волн в магнитной гидродинамике [6]. В случае расчетов уравнений (1)-(3) получаются аналогичные результаты, но сходимости в случае наличия слабого разрыва обнаружено не было. Проблема была решена добавлением членов  $\varepsilon_v v_{xxx}$  и  $\varepsilon_\phi \phi_{3xxx}$  в правые части уравнений,  $\varepsilon_v$  и  $\varepsilon_\phi$  – малые положительные величины, для рис.4  $\varepsilon_v = \varepsilon_\phi = 0.001$ . При этом на границах расчетной области требуются дополнительные условия  $v_{3xxx} = 0$ ,  $\phi_{3xxx} = 0$ . Поскольку слабых разрывов может быть много, то для обеспечения сходимости такие члены при расчете уравнений (1)-(2) нужно добавлять всегда. Расчет уравнений (1)-(3) требует значительно меньшего числа операций, чем расчет уравнения (3), что позволило провести большее число расчетов определить границы существования различных типов решений. Поэтому некоторое усложнение методики за счет включения диссипативных членов здесь оправдано. На рис.5 показаны зависимости от величины  $I$  максимально возможной амплитуды начального разрыва  $a = u_2 - u_1$ , при которой не нарушается условие корректности (см. ниже), кривая 1, а также кривая 2, определяющая максимально возможную амплитуду, при которой возникает солитонная структура.

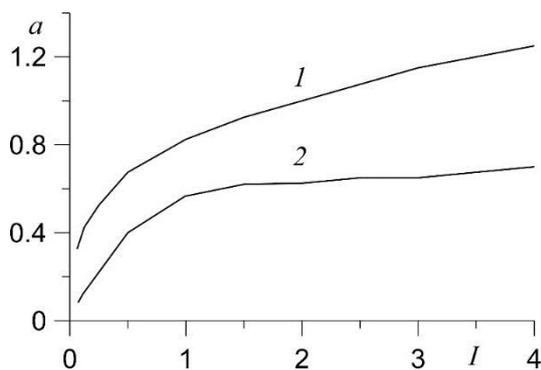


Рис.5.

Как и в расчетах уравнения (4), ожидаемо при  $c_\phi < c_\theta$  для малых амплитуд наблюдалась солитонная структура с уединенной волной типа горба, при увеличении амплитуды она замещалась структурой с волной, излучаемой влево. При  $c_\phi > c_\theta$  ожидаемо при малых амплитудах возникала солитонная структура с уединенной волной типа впадина, при увеличении амплитуды она замещалась структурой с волной, излучаемой вправо, но при дальнейшем увеличении амплитуды выявлялось значение, при котором излучаемой волны не было, а был переход между двумя однородными состояниями. При дальнейшем увеличении амплитуды возникала структура с волной, излучаемой влево. Графики решений солитонного типа с уединенной волной типа впадина, с излучением вправо, без излучения и с излучением влево приведены на рис.6а-г,  $t = 4000$ , рассчитывалось уравнение (3), графики показаны в системе координат наблюдателя, движущейся со скоростью  $V = 1$ . Области схемной структуры слабого разрыва в случае структур с излучением показаны в увеличенном виде в рамках.

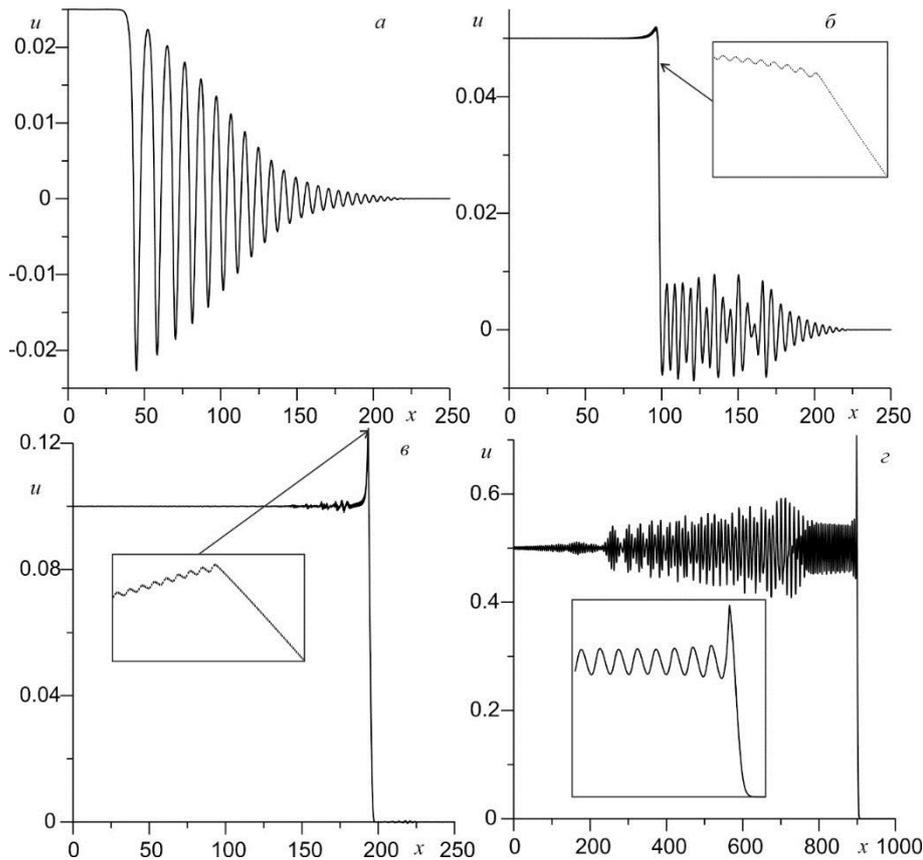


Рис.6.

В обоих случаях при большой амплитуде разрыва в области структуры нарушалось условие  $1+2\phi_{3x} > 0$ . Система (1)-(2) становится некорректной. Нарушение еще одного условия корректности  $(\alpha + \mu)(1+2u) - H_1^2/(4\pi) > 0$  в описанных выше расчетах не наблюдалось. Причину некорректности объяснить несложно. Согласно методике Петровского, необходимо провести анализ дисперсионного соотношения для коротких волн [1], корректность определяется только членами со старшими производными, т.е. достаточно исследовать только два линейных уравнения

$$\rho u_{tt} = [(\mu + \alpha)(1+2u) - H_1^2/(4\pi)] u_{xx}, \quad I\phi_{3tt} = (\gamma + \varepsilon)\phi_{3xx}.$$

При нарушении указанных выше условий эти уравнения становятся негиперболическими, т.е. не эволюционными.

Тем не менее, в случае обнаруженной выше некорректности можно все же получить структуру разрыва, используя вязкоупругую модель, добавив в правые части уравнений (1) и (2) вязкие члены  $c_v v_{txx}$  и  $c_\phi \phi_{3txx}$  с положительными коэффициентами, корректность будет достигнута. На рис.7 приведены графики величин  $u$ , кривая 1, и  $\phi_{3x}$ , кривая 2,  $c_v = c_\phi = 0.01$ ,  $c_\phi = 0.81$ ,  $c_T = 2$ ,  $t = 200$ .

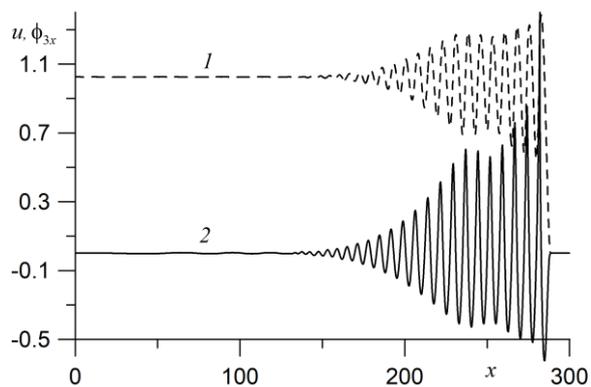


Рис.7.

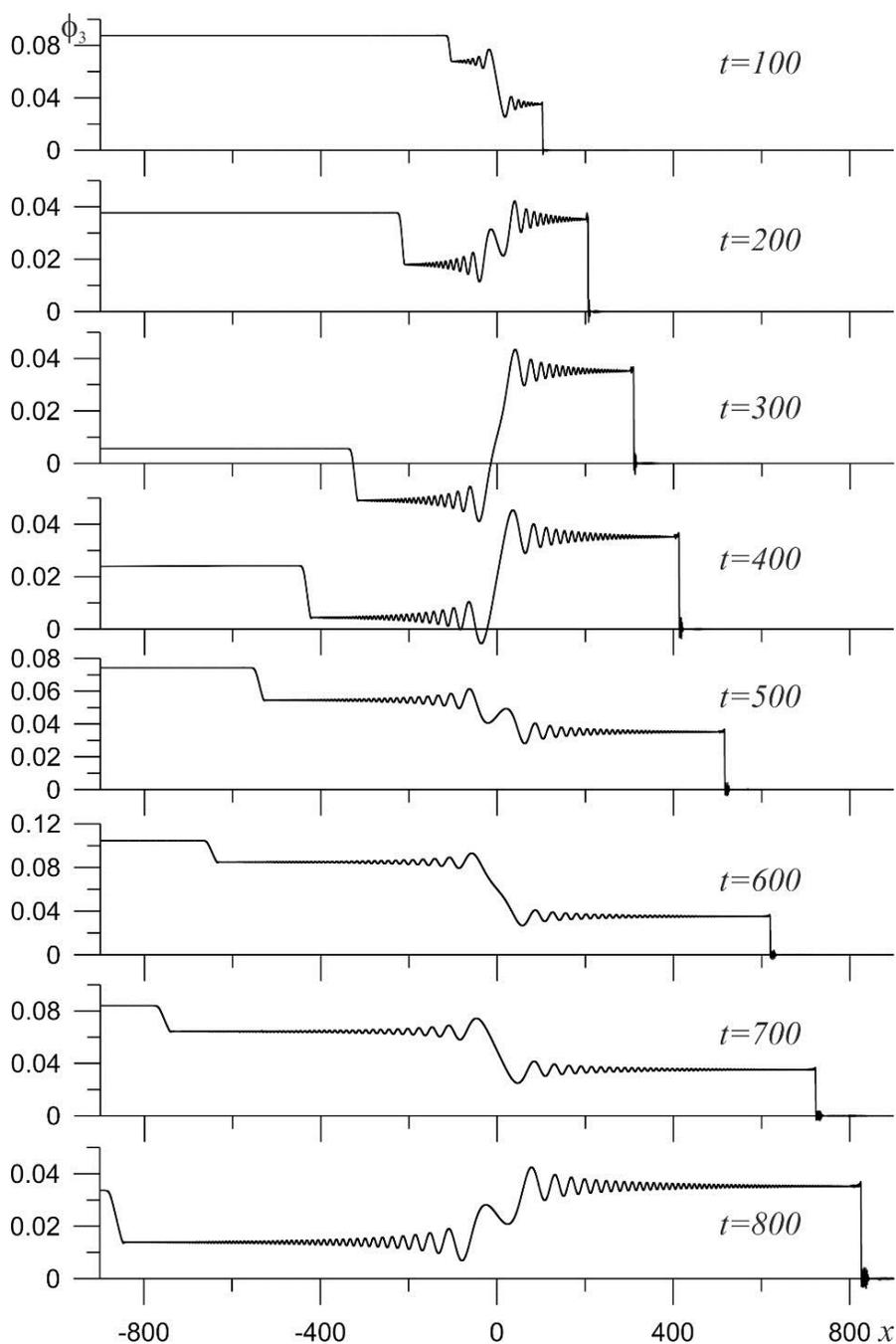


Рис.8.

Был проведен также расчет с начальными данными типа ступеньки, движущейся со скоростью, отличающейся от скорости разрыва малой амплитуды. Возникло решение с распадом разрыва общего вида, рис.8.,  $c_\phi = 1.0488$ ,  $c_T = 2$ ,  $V = 0.31623$ . Помимо разрыва, двигающегося вправо, возникла простая волна, движущаяся влево. При этом состояние слева и состояние в области перед простой волной для величины  $\phi_3$  стало колебательным по времени. Но колебаний величины  $u$  нет. В середине рисунка наблюдается зона пространственных колебаний величины  $\phi_3$ , которую приближенно можно описать упрощенным уравнением (6), поскольку величина  $u$  в этой области практически постоянна. А решение для  $u$  во всей области можно приближенно описать уравнением (5), учитывая при этом наличие разрыва справа. Уравнение (6) является уравнением с дисперсией, поэтому и возникают такие пространственные колебания, а сама область при некоторых периодически повторяющихся значениях времени становится похожа на область с двумя структурами солитонного типа, близко расположенными друг от друга. Но уравнение (6) не предполагает наличие таких структур разрывов, поскольку его дисперсионные кривые не пересекают начало координат и нет нелинейности. Таким образом это область перехода между двумя однородными (в общем случае колебательными) состояниями величины  $\phi_3$ , волны, движущиеся вправо непрерывным образом, переходят в волны, движущиеся влево. Заметим, что при расчетах со скоростью, описываемой формулой (7), при большой амплитуде разрыва также наблюдается структура разрыва или простая волна для величины  $u$ , движущаяся влево, и область пространственных колебаний величины  $\phi_3$ , но их амплитуды малы по сравнению с амплитудой разрыва, движущегося вправо.

Данная работа продолжает цикл работ, посвященных исследованию обратимых систем уравнений с конечной скоростью распространения волн при стремлении их длины к нулю [5,6]. В таких моделях наблюдаются как недиссипативные структуры, так и опрокидывание волн, требующее рассмотрения неклассических решений, добавления вязких или недиссипативных дисперсионных членов, чтобы исключить исчезновение дисперсии коротких волн. В данном случае наблюдалось опрокидывание волны для величины  $u_x$ . Попытка устроить опрокидывание для самой величины  $u$  для уравнений (1)-(2) и (3) посредством увеличения параметра  $r$  в формуле (7), определяющего начальную длину переходной области, привела к возникновению некорректности из-за нарушения условия  $1 + 2\phi_{3,x} > 0$ . В других моделях опрокидывание в такой ситуации наблюдалось.

Перечислим основные результаты. Исследована устойчивость уединенных волн в слабонелинейно-длинноволновом приближении. Исследованы недиссипативные структуры разрывов, для уравнения Буссинеска и для полной модели. Выявлен новый тип структур разрывов – разрыв с излучением с внутренним слабым разрывом. Показана возможность расчета структуры слабого разрыва с помощью схемной дисперсии или добавленной слабой диссипации. Выявлены области некорректности для полной модели и показана возможность коррекции при использовании вязкоупругой модели. Обнаружено, что постановка задачи о распаде разрыва в общем случае подразумевает однородные колебательные состояния, проведен расчет распада разрыва, в котором выявлен переход между двумя такими состояниями.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бахолдин И.Б. *Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды*. – М.: Физматлит, 2004. – 318 с.
2. Erofeev V.I., Malkhanov A.O. *Spatially localized nonlinear magnetoelastic waves in an electrically conductive micropolar medium* // ZAMM. – 2023. – Vol.103. – Iss.4.
3. Куликовский А.Г. *Об устойчивости однородных состояний* // Прикл. матем. мех. – 1966. – Т.30. – Вып.1. – С.148-153.
4. Erofeev V.I., Il'ichev A.T. *Instability of supersonic solitary waves in a generalized elastic electrically conductive medium* // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2023. – Vol.35. – Pp.2313-2323.
5. Бахолдин И.Б. *Уравнения, описывающие волны в трубах с упругими стенками, и численные методы с низкой схемной диссипацией* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2020. – Т.60. – №7. – С.1224-1238.
6. Бахолдин И.Б. *Анализ уравнений двухжидкостной плазмы в приближении электромагнитной гидродинамики и структур разрывов в их решениях* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2021. – Т.68. – №3. – С.458-474.



## ТРЕХИНВАРИАНТНЫЕ КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ПРОБИВАНИЯ ПЛАСТИНЫ ЖЁСТКИМ ТЕЛОМ

Вершинин В.В., Мондрус В.Л.

*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия*

### ВВЕДЕНИЕ

В современной феноменологической теории прочности пластичных материалов принято [1,2], что предельные накопленные (эквивалентные, например, по Мизесу,  $\bar{\varepsilon}_{pl,f}$ ) пластические деформации, при которых происходит разрушение материала, зависят от вида напряжённого состояния, характеризуемого двумя параметрами – трёхосностью  $\eta$  и углом Лоде  $\theta$  (или одним из зависящих от него параметров – нормированным углом Лоде  $\bar{\theta}$  или параметром Лоде-Надаи), где

$$\eta = \frac{I_1}{3\sqrt{3J_2}}, \quad (1)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{J_3}{2} \left( \frac{3}{J_2} \right)^{\frac{3}{2}} \right), \quad (2)$$

$$\bar{\theta} = 1 - \frac{6\theta}{\pi}, \quad (3)$$

$$L = \frac{3 \tan(\theta) - \sqrt{3}}{\tan(\theta) + \sqrt{3}}. \quad (4)$$

Здесь  $I_1$  – первый инвариант тензора напряжений  $\hat{\sigma}$ ,  $J_2$  и  $J_3$  – второй и третий инварианты девиатора напряжений  $\hat{S}$ , соответственно. В смешанном пространстве  $(\eta, \bar{\theta}, \bar{\varepsilon}_{pl,f})$  или  $(\eta, L, \bar{\varepsilon}_{pl,f})$  в предположении пропорционального нагружения пластические деформации при разрушении материала  $\bar{\varepsilon}_{pl,f}$  представляют собой некоторую поверхность двойной кривизны, называемую поверхностью разрушения. Для её построения, т.е. для определения функции  $\bar{\varepsilon}_{pl,f} \equiv \bar{\varepsilon}_{pl,f}(\eta, \bar{\theta})$ , или  $\bar{\varepsilon}_{pl,f} \equiv \bar{\varepsilon}_{pl,f}(\eta, L)$ , необходимо проведение большого количества экспериментов на растяжение, сжатие и сдвиг с использованием образцов различной формы, в критических сечениях которых реализуется различное напряжённое состояние. В то же время остаётся неисследованным вопрос необходимости учёта всех трёх инвариантов тензора напряжений при описании прочностных свойств материалов в рамках решения практических задач.

В серии работ [3-6] исследуется необходимость учёта всех трёх инвариантов тензора напряжений при описании прочностных свойств материалов при решении задач ударного взаимодействия двух тел, а именно задач пробивания пластины

жёстким телом. На практике такая постановка задачи (когда деформации ударника происходят в пределах упругости, так что ими можно пренебречь) может иметь место при скоростях соударения до  $\sim 1$  км/с в зависимости от формы головной части ударника и соотношения физико-механических свойства материалов ударника и мишени.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются круглые пластины различной толщины  $H$ , свободные [3] или жёстко закреплённые по контуру [4-6], по центру которых осуществляется удар по нормали жёстким сферическим [3] или цилиндрическим (с плоской, полусферической или оживальной головными частями) [4-6] телом диаметром  $D$ , имеющим некоторую начальную скорость  $V_0$ . Мишени имеют безразмерную толщину  $H/D$  от 0.1 до 2.0 и выполнены либо из алюминиевого сплава Д16Т/2024-Т351 [3,5,6], либо из стали Weldox 700 E [4].

Процесс ударного взаимодействия при фиксированных параметрах ударника и мишени количественно характеризуется баллистическим пределом  $V_{bl}$  (минимальным значением скорости соударения, при котором ударник с вероятностью 50% пробьёт мишень навывлет) и остаточной скоростью ударника  $V_r$  при  $V_0 > V_{bl}$ . Качественно процесс ударного взаимодействия можно охарактеризовать механизмом разрушения мишени в зоне удара: выбивание ударником пробки, образовавшейся в результате больших деформаций сдвига по её боковой поверхности; выбивание ударником пробки, образовавшейся в результате больших деформаций растяжения по её контуру (образованию пробки предшествует формирование по её контуру «шейки»); образование радиальных трещин по толщине мишени с раскрытием «лепестков» в процессе прохождения ударника через мишень. В зависимости от параметров соударяющихся тел разрушение мишени может происходить по одному или нескольким механизмам.

Необходимо определить, насколько учёт всех трёх инвариантов тензора напряжений при описании прочностных свойств материалов влияет на точность решения рассматриваемой задачи (очевидно, численного в силу её сложности). Альтернативой использованию трёхинвариантных критериев разрушения для описания прочностных свойств материалов является использование двухинвариантных критериев. Для определения параметров двухинвариантных критериев разрушения достаточно небольшого количества экспериментов с использованием одностипных образцов, например, экспериментов на одноосное растяжение с использованием цилиндрических образцов, имеющих по контуры выточки разного радиуса, в результате чего в критическом сечении образцов реализуются разные значения трёхосности  $\eta$  напряжённого состояния.

Предположение о том, что ударник является жёстким телом, позволяет исключить из рассмотрения материал одного из соударяющихся тел, что существенно упрощает задачу.

## 2. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ

Для решения поставленной задачи используется комплексный экспериментально-численный подход. Для получения «эталонного» решения проводится серия экспериментов с использованием легкогазовых пушек

для разгона ударника и высокоскоростных камер для съёмки процесса соударения двух тел и определения остаточной скорости ударника  $V_r$ . Значения баллистического предела  $V_{bl}$  определяются либо напрямую из эксперимента [3], либо на основании набора экспериментальных данных в формате пар чисел  $(V_0, V_r)$  и его аппроксимации посредством соотношения

$$V_r = a(V_0^p - V_{bl}^p)^{\frac{1}{p}}, \quad (5)$$

оптимальные значения параметров  $a$ ,  $p$  и  $V_{bl}$  которого определяются по методу наименьших квадратов [4-6]. Механизмы разрушения мишеней определяются по восстановленным образцам визуально [3-6], а также с помощью сканирующего электронного микроскопа [4], позволяющего проводить подробный анализ повреждений материала на уровне его микроструктуры.

Анализ восстановленных ударников показывает, что в проводимых экспериментах их деформации либо остаются полностью упругими, либо имеют очень маленькую пластическую составляющую, так что исходная форма ударника в процессе ударного взаимодействия остаётся практически неизменной, и постановка задачи в части удара именно жёстким телом выполняется с достаточной точностью.

После получения «эталонного» решения задача решается численно в программном комплексе SIMULIA Abaqus. Для пространственной дискретизации задачи используется метод конечных элементов в лагранжевой постановке. Интегрирование по времени уравнений движения, записанных в векторной форме для узлов конечно-элементной сетки, осуществляется по явной центрально-разностной схеме, реализованной в модуле Abaqus/Explicit с автоматическим контролем за соблюдением условия устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви, так что получаемое решение имеет второй порядок точности.

Для определения влияния учёта всех трёх инвариантов тензора напряжений при описании прочностных свойств материала мишени на точность численного решения между собой сравниваются результаты расчётов, выполняемых с использованием при прочих равных либо двухинвариантного, либо трёхинвариантного критериев разрушения.

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ

Численное моделирование пробивания пластины жёстким телом осуществляется как в трёхмерной постановке [3,5,6], так и в осесимметричной [3,4]. Ударник моделируется либо как однородное изотропное упругое тело [3], либо как абсолютно жёсткое [4-6]. Мишень моделируется как однородное изотропное упругопластическое тело. Характерный размер конечного элемента мишени в зоне удара составляет от 10 до 300 мкм, так что по толщине мишени располагаются от нескольких десятков до нескольких сотен конечных элементов.

Для описания пластических свойств материала мишени используется критерий текучести Максвелла-Мизеса с параметром  $\sigma_y$ , определяющим начальный предел текучести материала при одноосном растяжении или сжатии, его изменение с ростом накопленных (эквивалентных по Мизесу) пластических деформаций  $\bar{\epsilon}_{pl}$ , а также влияние температуры  $T$  и скорости деформирования  $\dot{\epsilon}$  материала на его предел текучести, в форме Джонсона-Кука [7]

$$F = \sqrt{3J_2} - \sigma_y = 0, \quad (6)$$

где  $\sigma_y \equiv \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{pl}, \dot{\varepsilon}, T)$ , а также ассоциированный закон пластического течения

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{pl} = \dot{\Lambda} \frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}, \quad (7)$$

где  $\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{pl}$  – тензор скоростей пластических деформаций, а  $\dot{\Lambda}$  – скалярный множитель, определяемый из условия совместности

$$\dot{F}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\varepsilon}_{pl}, \dot{\varepsilon}, T) = 0. \quad (8)$$

Так как функция текучести  $F$  не зависит от  $I_1$ , ассоциированный закон пластического течения определяет пластически несжимаемый материал. (Здесь и далее точка над переменной означает материальную производную этой переменной по времени.)

Функции  $\sigma_y \equiv \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{pl}, \dot{\varepsilon}, T)$  для алюминиевого сплава Д16Т/2024-Т351 и для стали Weldox 700 Е определялись как с использованием данных из литературы [3,5,6], так и на основании собственных экспериментов (на растяжение при малых скоростях деформирования и комнатной температуре, на растяжение при малых скоростях деформирования при повышенной температуре с использованием термокамеры, на сжатие при высоких скоростях деформирования с использованием разрезного стержня Гопкинсона) [4,6].

В силу того, что процесс соударения двух тел при рассматриваемых начальных скоростях ударника ( $V_0 \sim 10^2 \dots 10^3$  м/с) является быстропротекающим, предполагается, что процесс нагрева материала вследствие выделения тепла при его неупругой работе является адиабатическим

$$\dot{T} = \frac{\chi}{\rho c_\varepsilon} \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{pl}, \quad (9)$$

где  $\chi$  – коэффициент Тэйлора-Куинни, представляющий собой долю неупругой работы, рассеиваемой в виде теплоты,  $\rho$  – плотность материала,  $c_\varepsilon$  – удельная теплоёмкость материала при постоянных упругих деформациях.

Принимается классический подход механики разрушения, в рамках которого предполагается, что в процессе неупругого деформирования пластичных материалов происходит образование микродефектов структуры материала (микропустот), которые с ростом накопленных пластических деформаций увеличиваются в размерах и сливаются друг с другом, что в конечном итоге приводит к разрушению материала на макроуровне. Однако в рамках настоящего исследования не учитывается деградация упругих характеристик материала с ростом накопленных пластических деформаций вследствие развития микродефектов структуры материала. Повреждения микроструктуры материала характеризуются скалярной величиной  $D$ , значение  $D=0$  которой соответствует материалу в его естественном состоянии и которая изменяется по следующему закону

$$\dot{D} = \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_{pl}}{\bar{\varepsilon}_{pl,f}}. \quad (10)$$

Значение  $D=1$  соответствует разрушению материала на макроуровне. Конечный элемент, в котором значение  $D$  достигает единицы, удаляется

из расчётной схемы. При этом узлы конечно-элементной сетки, которым изначально присвоена масса относящегося к ним объёма материала и у которых были удалены все прилежащие к ним конечные элементы, остаются в расчётной схеме в виде свободных точечных масс, так что масса взаимодействующих тел в процессе расчёта не изменяется.

В качестве двухинвариантного критерия разрушения используется критерий Джонсона-Кука [8]

$$\bar{\varepsilon}_{pl,f} = \left[ D_1 + D_2 \exp(D_3 \eta) \right] \left[ 1 + D_4 \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right] \left[ 1 + D_5 \left( \frac{T - T_0}{T_{melt} - T_0} \right)^{D_6} \right], \quad (11)$$

где  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$  – параметры материала,  $T_{melt}$  – температура плавления материала,  $T_0$  – температура в экспериментах, на основании которых определяются параметры  $D_1, D_2, D_3, \dot{\varepsilon}_0$  – скорость эквивалентных деформаций в экспериментах, на основании которых определяются параметры  $D_4, D_5, D_6$ .

Также рассматриваются два разных трёхинвариантных критерия: модифицированный критерий Мора-Кулона [9]

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{pl,f} = & \left[ \frac{K}{c_2} \left\{ c_s + \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} (c_{ax} - c_s) \left( \sec \left( \frac{\bar{\theta}\pi}{6} \right) - 1 \right) \right\} \right]^{-1/n} \times \\ & \times \left\{ \sqrt{\frac{1 + c_1^2}{3}} \cos \left( \frac{\bar{\theta}\pi}{6} \right) + c_1 \left[ \eta + \frac{1}{3} \sin \left( \frac{\bar{\theta}\pi}{6} \right) \right] \right\}^{-1/n} \times \\ & \times \left[ 1 + D_4 \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right] \left[ 1 + D_5 \left( \frac{T - T_0}{T_{melt} - T_0} \right)^{D_6} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$c_{ax} = \begin{cases} 1 & \text{при } \bar{\theta} \geq 0 \\ c_c & \text{при } \bar{\theta} < 0 \end{cases} \quad (13)$$

$c_c, c_s, K, n, c_1, c_2$  – параметры материала, и критерий Лу-Юна-Ха [10]

$$\bar{\varepsilon}_{pl,f} = C_3 \left( \frac{2}{\sqrt{L^2 + 3}} \right)^{-C_1} \left( \left\langle \frac{1}{1 + C_0} \left[ \eta + \frac{3 - L}{3\sqrt{L^2 + 3}} + C_0 \right] \right\rangle \right)^{-C_2}, \quad (14)$$

где  $\langle \rangle$  – скобки Маколея,  $C_0, C_1 > 0, C_2 > 0, C_3 > 0$  – параметры материала.

Калибровка параметров критериев разрушения для алюминиевого сплава Д16Т/2024-Т351 и для стали Weldox 700 Е осуществляется как с использованием данных из литературы [3,5,6], так и на основании собственных экспериментов (на растяжение образцов различной формы, в критических сечениях которых реализуется различное напряжённое состояние, при малых скоростях деформирования и комнатной температуре, а также при повышенной температуре с использованием термокамеры и при средних скоростях деформирования) [4,6]. В результате двухинвариантные и трёхинвариантные критерии разрушения определяют существенно отличающиеся друг от друга поверхности разрушения в смешанном пространстве  $(\eta, \bar{\theta}, \bar{\varepsilon}_{pl,f})$  или  $(\eta, L, \bar{\varepsilon}_{pl,f})$ , как в случае алюминиевого сплава Д16Т/2024-Т351, так и в случае стали Weldox 700 Е (см. рис.1).

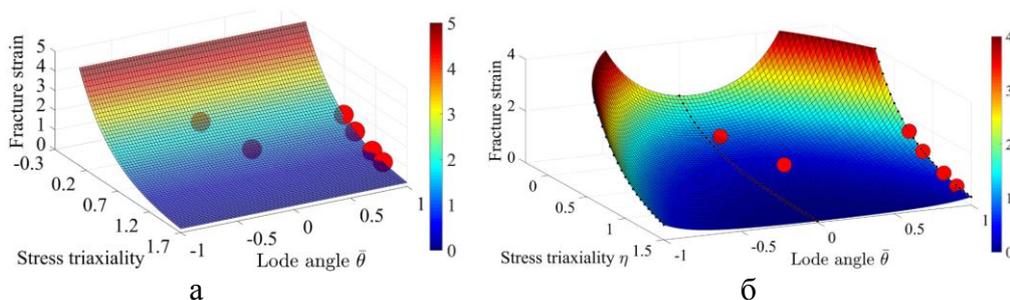


Рис.1. Поверхность разрушения для стали Weldox 700 E в смешанном пространстве  $(\eta, \bar{\theta}, \bar{\varepsilon}_{pl,f})$ , определяемая [4]: а) двухинвариантным критерием Джонсона-Кука (11); б) трёхинвариантным модифицированным критерием Мора-Кулона (12)-(13).

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ И ВЫВОДЫ

Результаты расчётов для мишеней из алюминиевого сплава Д16Т/2024-Т351 свидетельствуют [3,5,6] о том, что точность численного решения, получаемого с использованием для описания прочностных свойств материала мишени трёхинвариантного критерия разрушения, выше как по количественным (см. рис.2,3) так и по качественным (см. рис.4,5) параметрам, характеризующим решаемую задачу, чем точность численного решения, получаемого с использованием для описания прочностных свойств материала мишени двухинвариантного критерия разрушения, независимо от безразмерной толщины мишени  $H/D$  и формы ударника.

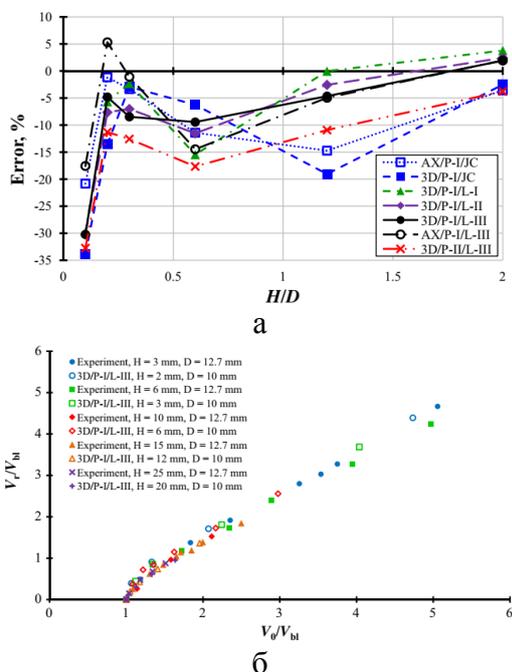


Рис.2. Сравнение результатов численного решения задачи пробивания круглых свободных пластин из алюминиевого сплава Д16Т жёстким сферическим ударником с экспериментальными данными [3]: а) ошибки в определении значений баллистического предела  $V_{bl}$ ; б) соотношения между остаточной скоростью ударника  $V_r$  и его начальной скоростью  $V_0$ .

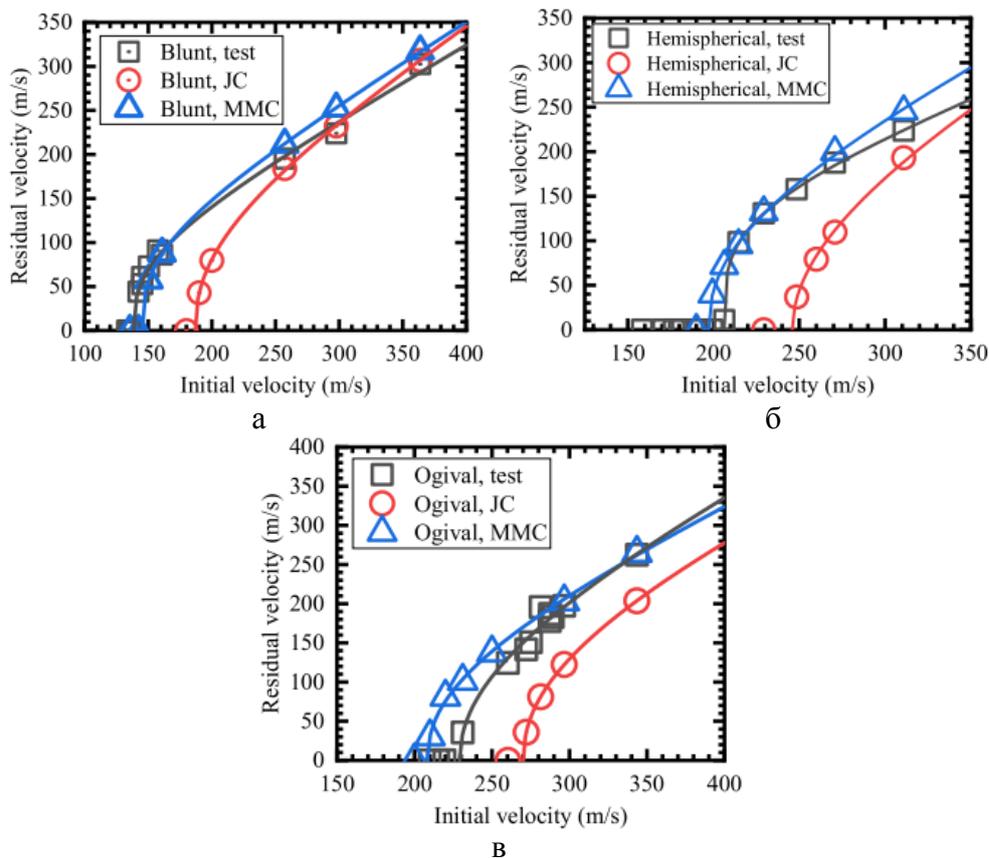


Рис.3. Сравнение результатов численного решения задачи пробивания круглых закреплённых пластин из алюминиевого сплава 2024-T351 жёстким цилиндрическим ударником с различной формой головной части с экспериментальными данными [5]: а) плоская; б) полусферическая; в) оживальная.

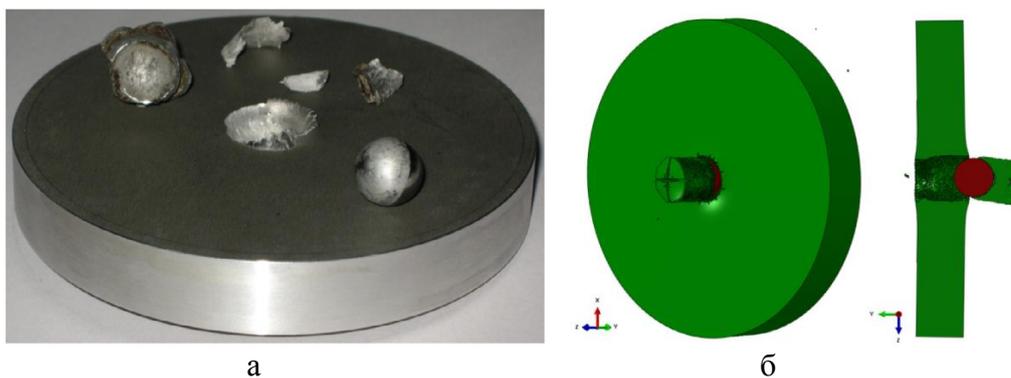


Рис.4. Разрушение круглой свободной пластины из алюминиевого сплава Д16Т при нормальном ударе по её центру жёсткого сферического ударника [3]: а) результаты эксперимента:  $H/D = 1.22$ ,  $V_0 = 681.2$  м/с; б) численное решение:  $H/D = 1.2$ ,  $V_0 = 640.0$  м/с.

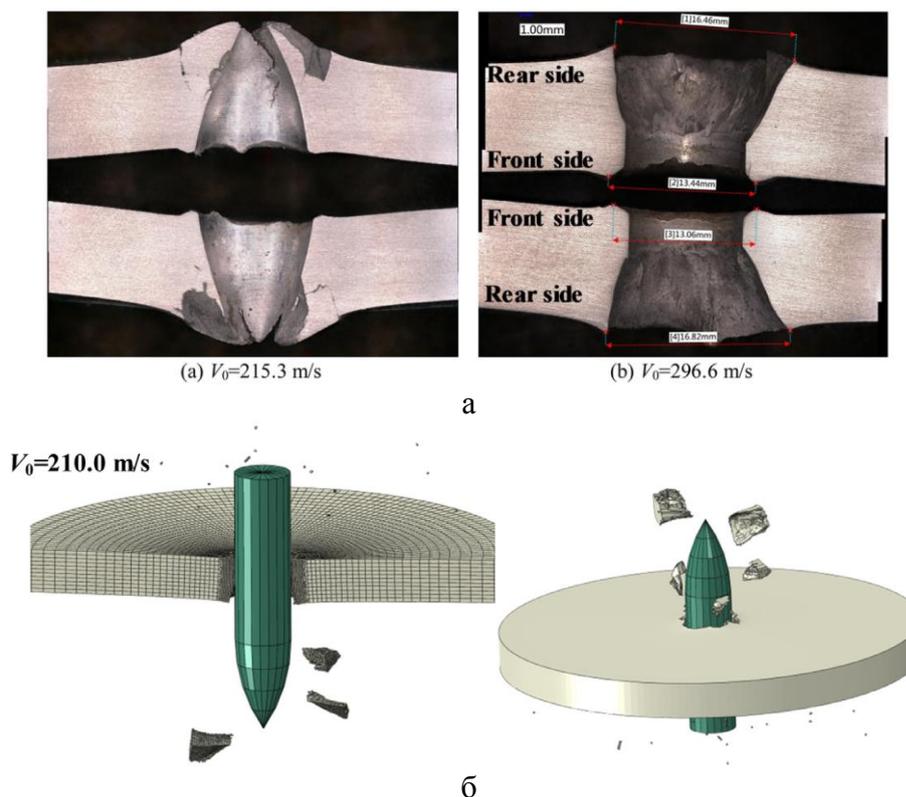


Рис.5. Разрушение круглой заземлённой пластины из алюминиевого сплава 2024-T351 при нормальном ударе по её центру жёсткого цилиндрического ударника с оживальной головной частью [5]: а) результаты эксперимента; б) численное решение.

Анализ напряжённого состояния конечных элементов мишени в зоне удара, которые разрушаются в процессе соударения, показывает [5,6], что напряжённое состояние в зоне удара можно охарактеризовать либо как чистый сдвиг, либо как растяжение в условиях плоского деформированного состояния (см. рис.6). При таком напряжённом состоянии разница между поверхностями разрушения, определяемыми двухинвариантным и трёхинвариантным критериями разрушения, в смешанном пространстве  $(\eta, \bar{\theta}, \bar{\varepsilon}_{pl.f})$ , или  $(\eta, L, \bar{\varepsilon}_{pl.f})$ , калибровка параметров которых осуществляется с использованием одних и тех же экспериментальных данных будет, будет максимальной, что очевидным образом сказывается на качественных и количественных результатах численного решения – материал, чьи прочностные свойства при прочих равных описываются двухинвариантным критерием разрушения, является более работоспособным в части восприятия начальной кинетической энергии ударника, чем материал, чьи прочностные свойства при прочих равных описываются трёхинвариантным критерием разрушения.

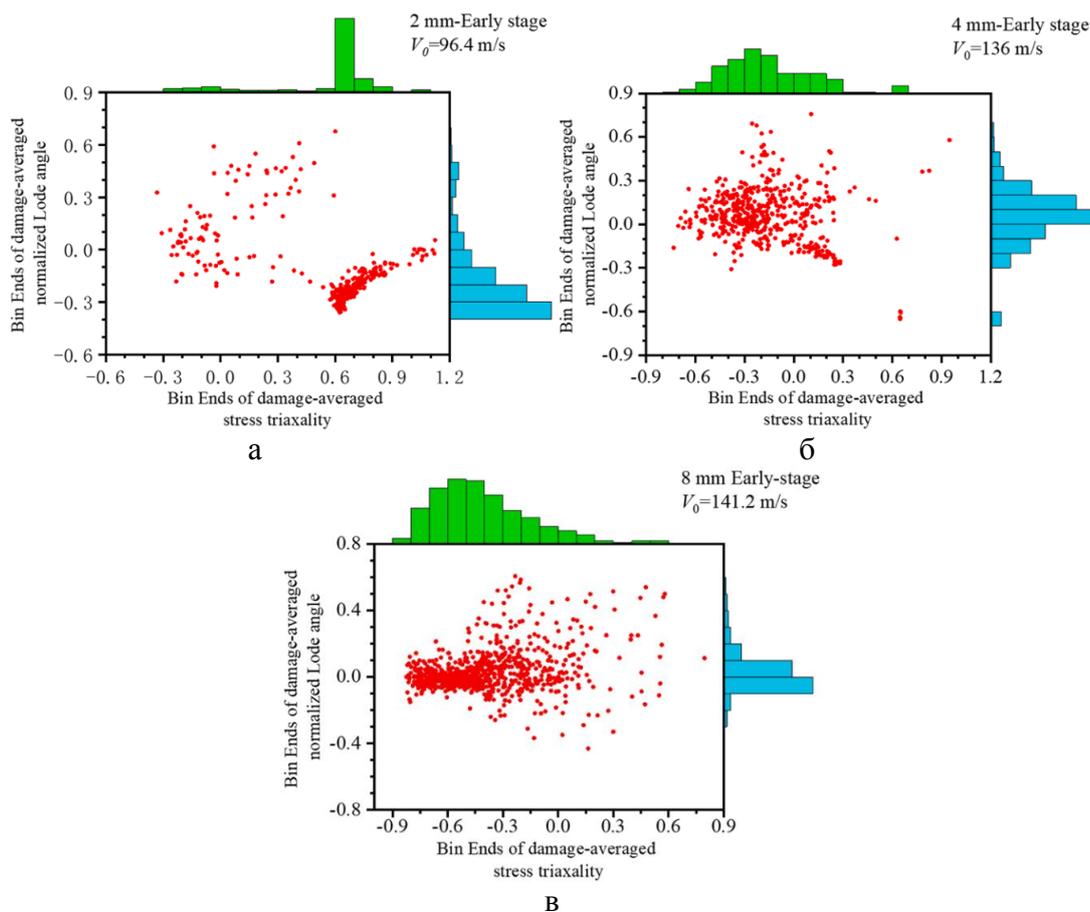


Рис.6. Осреднённые по поврежденности  $D$  материала значения параметров напряжённого состояния  $\eta$  и  $\bar{\theta}$  в конечных элементах круглой закреплённой мишени из алюминиевого сплава 2024-T351, разрушающихся в результате нормального удара по центру мишени жёсткого цилиндрического ударника с плоским торцом в начальной фазе ударного взаимодействия [6]: а)  $H/D=0.16$ ,  $V_0=96.4$  м/с; б)  $H/D=0.32$ ,  $V_0=136.0$  м/с; в)  $H/D=0.63$ ,  $V_0=141.2$  м/с.

В то же время в расчётах для мишеней из стали Weldox 700 E [4] влияние учёта всех трёх инвариантов тензора напряжений при описании прочностных свойств материала мишени влияет на точность численного решения как в части количественных, так и в части качественных параметров задачи не так значительно (см. рис.7), как в случае мишеней из алюминиевого сплава Д16Т/2024-T351. Анализ напряжённого состояния конечных элементов мишени в зоне удара, которые разрушаются в процессе соударения, показывает [4], что напряжённое состояние в зоне удара, как и в случае мишеней из алюминиевого сплава Д16Т/2024-T351, можно охарактеризовать либо как чистый сдвиг, либо как растяжение в условиях плоского деформированного состояния (см. рис.8), что обособленно должно давать схожий эффект в повышении точности численного решения при использовании для описания прочностных свойств мишени не двухинвариантного, а трёхинвариантного критерия разрушения, с тем, что имеет место в случае мишеней из алюминиевого сплава Д16Т/2024-T351.

Однако сталь Weldox 700 E имеет существенно большие предельные накопленные пластические деформации, чем алюминиевый сплав Д16Т/2024-

T351. Как следствие в силу адиабатического нагрева материала мишени при его неупругой работе в процессе соударения материал мишени в зоне разрушения в процессе соударения успевает расплавиться до достижения им предельных деформаций. Вследствие этого использование для описания прочностных свойств стали Weldox 700 E не двухинвариантного, а трёхинвариантного критерия разрушения, определяющего меньшие предельные накопленные деформации материала мишени, не даёт такого значимого эффекта, как в случае с мишенями из менее пластичного алюминиевого сплава Д16Т/2024-T351.

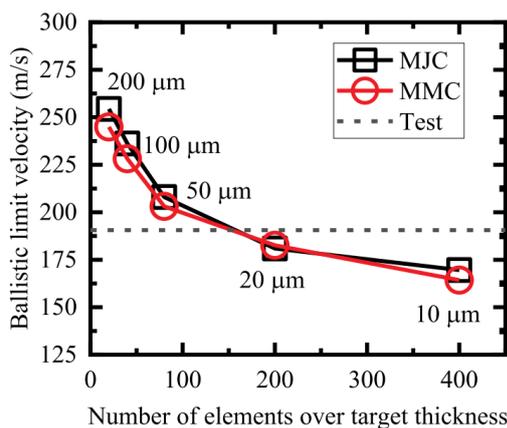


Рис.7. Сравнение [4] с экспериментом результатов численных расчётов в части определения баллистического предела  $V_{bl}$  для круглой защемлённой пластины из стали Weldox 700 E при нормальном ударе по её центру жёсткого цилиндрического ударника с плоским торцом при различном характерном размере конечных элементов мишени (анализ сходимости конечно-элементных аппроксимаций) и различных критериях разрушения – двухинвариантном (МЖС) и трёхинвариантном (ММС) – материала мишени.

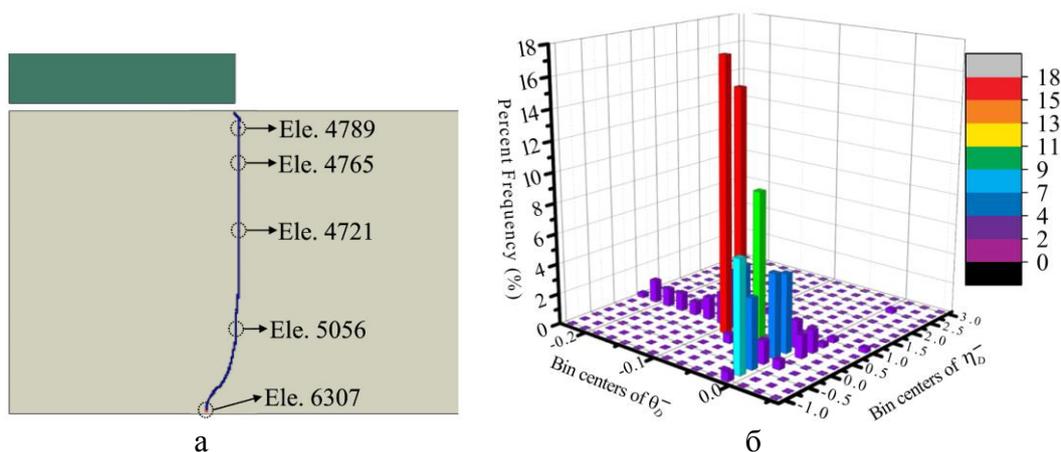


Рис.8. Анализ напряжённого состояния конечных элементов круглой защемлённой пластины из стали Weldox 700 E в зоне нормального удара по её центру жёсткого цилиндрического ударника с плоским торцом, которые разрушаются в процессе соударения [4]: а) зона, в которой происходит разрушение конечных элементов в процессе соударения; б) осреднённые по поврежденности  $D$  материала значения параметров напряжённого состояния  $\eta$  и  $\bar{\theta}$  в разрушенных конечных элементах.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты серии работ [3-6], проводимых с использованием комплексного экспериментально-численного подхода, позволяют сделать следующее заключение. Так как в задачах пробивания пластин жёстким телом рассматриваются состояния мишени, которые в прямом смысле являются предельными, увеличение точности как количественных, так и качественных результатов численного решения таких задач за счёт использования для описания прочностных свойств материала мишени не двухинвариантных, а трёхинвариантных критериев разрушения видится критичным. Повышенная сложность применения трёхинвариантных критериев разрушения, связанная с необходимостью проведения большого количества экспериментов по определению прочностных характеристик материала в условиях сложного напряжённого состояния, в данном случае является осознанной необходимостью.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bao Y. *Prediction of ductile crack formation in uncracked bodies* / Thesis (Ph.D.), Department of Ocean Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 2003. – Cambridge, MA, USA: Massachusetts Institute of Technology, 2003. – 253 p.
2. Bai Y., Wierzbicki T. *A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence* // Int. J. Plast. – 2008. – Vol.24. – Iss.6. – Pp.1071-1096.
3. Vershinin V.V. *Validation of metal plasticity and fracture models through numerical simulation of high velocity perforation* // Int. J. Solids Struct. – 2015. – Vol.67-68. – Pp.127-138.
4. Xiao X., Wang Y., Vershinin V.V., Chen L., Lou Y. *Effect of Lode angle in predicting the ballistic resistance of Weldox 700 E steel plates struck by blunt projectiles* // Int. J. Imp. Eng. – 2019. – Vol.128. – Pp.46-71.
5. Wang Y., Chen X., Xiao X., Vershinin V.V., Ge R., Li D.-s. *Effect of Lode angle incorporation into a fracture criterion in predicting the ballistic resistance of 2024-T351 aluminum alloy plates struck by cylindrical projectiles with different nose shapes* // Int. J. Imp. Eng. – 2020. – Vol.139. – 103498.
6. Han J., Shi Y., Ma Q., Vershinin V.V., Chen X., Xiao X., Jia B. *Experimental and numerical investigation on the ballistic resistance of 2024-T351 aluminum alloy plates with various thicknesses struck by blunt projectiles* // Int. J. Imp. Eng. – 2022. – Vol.163. – 104182.
7. Johnson G.R., Cook W.H. *A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and temperatures* / Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics. – The Hague, The Netherlands: American Defense Preparedness Association, Koninklijk Instituut van Ingenieurs, 1983. – Pp.541-547.
8. Johnson G.R., Cook W.H. *Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures* // Eng. Fract. Mech. – 1985. – Vol.21. – Iss.1. – Pp.31-48.
9. Bai Y., Wierzbicki T. *Application of extended Mohr-Coulomb criterion to ductile fracture* // Int. J. Fract. – 2010. – Vol.161. – Iss.1. – Pp.1-20.
10. Lou Y., Yoon J.W., Huh H. *Modeling of shear ductile fracture considering a changeable cutoff value for stress triaxiality* // Int. J. Plast. – 2014. – Vol.54. – Pp.56-80.

УДК 539.42

EDN IOJOEA (<https://elibrary.ru/iojoea>)

DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.29



## ОЦЕНКА РАЗМЕРА ОСКОЛКОВ ПРИ ФРАГМЕНТАЦИИ ТОНКОЙ СФЕРЫ ПРИ СИЛЬНОМ ВЗРЫВЕ

Головешкин В.А.<sup>1,2</sup>, Беклемишев С.А.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

### ВВЕДЕНИЕ

Статистическая теория Мотта [1] и энергетическая теория Грэди [1,2] позволяют получить оценку средних размеров фрагментов и их число в задачах о фрагментации быстро расширяющихся металлических цилиндров и колец. Однако эти теории предполагают заранее известную энергию, затраченную на образование поверхности разрыва. Аналогичная задача рассматривается в [3] с учетом распределения фрагментов по массе. Но и в данной работе предполагается, что удельная энергия, которая расходуется на образование единицы свободной поверхности, известна.

В работах [4-5] предложена модель, позволяющая аналитически определить количество фрагментов, образующихся при осесимметричном разлете трубы в плоской постановке, а также оценить удельную энергию, которая расходуется на образование единицы свободной поверхности при использовании модели идеальной пластичности.

Целью настоящей работы является попытка применить полученные результаты на случай сферической оболочки.

### 1. ДВИЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ФРАГМЕНТА

Рассматривается сегмент сферического слоя (рис.1) радиуса  $R$ , толщины  $h$ .

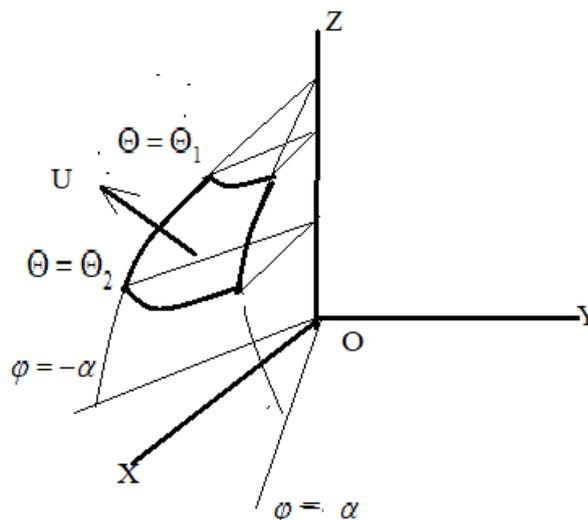


Рис.1. Сферический сегмент.

В сферической системе координат  $(r; \varphi; \theta)$   $0 < \Theta < \pi$ ;  $-\pi < \varphi < \pi$  сегмент ограничен поверхностями:  $r = R - h$ ;  $r = R$ ;  $\varphi = -\alpha$ ;  $\varphi = \alpha$ ;  $\theta = \theta_1$ ;  $\theta = \theta_2$ .

Предполагаем, что  $\frac{h}{R} \ll 1$ . Начальная скорость фрагмента поверхности сферы  $U$  направлена во всех точках поверхности по радиусу и имеет вид  $U(r) = U \frac{R^2}{r^2}$ .

В силу предположения  $\frac{h}{R} \ll 1$ , можно считать, что начальная скорость равна  $U(r) = U$ .

Относительно механических свойств материала принимается закон идеальной пластичности при условии несжимаемости. Предел текучести материала фрагмента обозначим  $Y$ , плотность  $\rho$ .

Начальная площадь поверхности сегмента равна

$$S = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} d\Theta \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin \Theta d\varphi = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} R^2 2\alpha \sin \Theta d\Theta = R^2 2\alpha (\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2). \quad (1.1)$$

Так как  $\frac{h}{R} \ll 1$ , то масса сегмента  $M$  и его начальная кинетическая энергия  $E_t$ , с учетом соотношения (1), равны

$$M = \rho h S = \rho h R^2 2\alpha (\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2), \quad (1.2)$$

$$E_t = \frac{1}{2} M U^2 = \rho h R^2 U^2 \alpha (\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2). \quad (1.3)$$

Далее оценим начальный импульс фрагмента. В силу симметрии начальный импульс состоит из двух составляющих:  $P_{IZ}$  – составляющей вдоль оси  $Z$ ;  $P_{IX}$  – составляющей вдоль биссектрисы меридионального угла. Вычисляя их, имеем.

Вдоль оси  $Z$

$$P_{IZ} = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} d\Theta \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho R^2 h U \cos \Theta \sin \Theta d\varphi = \rho R^2 h U 2\alpha \frac{1}{2} (\sin^2 \Theta_2 - \sin^2 \Theta_1). \quad (1.4)$$

Проводя соответствующие преобразования, представляем его в несколько других возможных видах

$$\begin{aligned} P_{IZ} &= \frac{1}{2} \rho R^2 h U \alpha (\cos 2\Theta_1 - \cos 2\Theta_2) = \\ &= \rho R^2 h U \alpha \sin(\Theta_2 - \Theta_1) \sin(\Theta_2 + \Theta_1). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Вдоль биссектрисы меридионального угла

$$P_{IX} = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} d\Theta \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho R^2 h U \sin \Theta \sin \Theta \cos \varphi d\varphi = \rho R^2 h U 2 \sin \alpha \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \sin^2 \Theta d\Theta.$$

Окончательно

$$P_{IX} = \rho R^2 h U \sin \alpha \left[ \Theta_2 - \Theta_1 - \frac{1}{2} (\sin 2\Theta_2 - \sin 2\Theta_1) \right]. \quad (1.6)$$

Естественно предположить, что в конечном итоге фрагмент будет двигаться как твердое тело, все точки которого имеют одинаковую скорость  $V_Z$ ;  $V_X$ . Из закона сохранения импульса определяем их значения.

Согласно (1.2), (1.4)

$$V_z = \frac{P_{Iz}}{M} = \frac{\rho R^2 h U \alpha (\sin^2 \Theta_2 - \sin^2 \Theta_1)}{\rho h R^2 2\alpha (\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2)} = \frac{1}{2} U \frac{\sin^2 \Theta_2 - \sin^2 \Theta_1}{\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2},$$

$$V_z = \frac{1}{2} U \frac{\cos^2 \Theta_1 - \cos^2 \Theta_2}{\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2} = \frac{1}{2} U (\cos \Theta_1 + \cos \Theta_2). \quad (1.7)$$

Аналогично, согласно (1.2), (1.6)

$$V_x = \frac{P_{Ix}}{M} = \frac{\rho R^2 h U \sin \alpha \left[ \Theta_2 - \Theta_1 - \frac{\sin 2\Theta_2 - \sin 2\Theta_1}{2} \right]}{\rho h R^2 2\alpha (\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2)} =$$

$$= U \frac{\sin \alpha}{2\alpha} \frac{\Theta_2 - \Theta_1 - \frac{\sin 2\Theta_2 - \sin 2\Theta_1}{2}}{\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2},$$

$$V_x = \frac{1}{2} U \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\Theta_2 - \Theta_1 - \sin(\Theta_2 - \Theta_1) \cos(\Theta_2 + \Theta_1)}{\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2}. \quad (1.8)$$

Тогда конечная полная кинетическая энергия фрагмента  $E_F$  равна

$$E_F = \frac{1}{2} M [V_z^2 + V_x^2]. \quad (1.9)$$

Используя (1.7)-(1.9), получаем

$$E_F = \frac{1}{4} \rho h R^2 U^2 \frac{1}{\alpha (\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2)} \times$$

$$\times \left[ \alpha^2 (\cos^2 \Theta_1 - \cos^2 \Theta_2)^2 + \sin^2 \alpha \left( \Theta_2 - \Theta_1 - \frac{1}{2} (\sin 2\Theta_2 - \sin 2\Theta_1) \right)^2 \right]. \quad (1.10)$$

Потерянная кинетическая энергия  $E_D$  равна

$$E_D = E_I - E_F.$$

Как следует из (1.3), (1.10)

$$E_D = \rho h R^2 U^2 \alpha (\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2) - \frac{1}{4} \rho h R^2 U^2 \frac{1}{\alpha (\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2)} \times$$

$$\times \left[ \alpha^2 (\cos^2 \Theta_1 - \cos^2 \Theta_2)^2 + \sin^2 \alpha \left( \Theta_2 - \Theta_1 - \frac{1}{2} (\sin 2\Theta_2 - \sin 2\Theta_1) \right)^2 \right].$$

После соответствующих преобразований, получаем следующее выражение

$$E_D = \frac{1}{4} \rho h R^2 U^2 \alpha \times \left[ 4(\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2) - (\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2)(\cos \Theta_1 + \cos \Theta_2)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \frac{\left( \Theta_2 - \Theta_1 - \frac{1}{2} (\sin 2\Theta_2 - \sin 2\Theta_1) \right)^2}{(\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2)} \right]. \quad (1.11)$$

## 2. ОЦЕНКА ВОЗМОЖНЫХ РАЗМЕРОВ ФРАГМЕНТА

В работе [4] в случае идеально пластического материала для подобных задач была предложена следующая оценка величины  $\Delta H$  – энергии, затраченной на образование единицы площади поверхности разрыва

$$\Delta H = \frac{1}{\sqrt{3}} Yh. \quad (2.1)$$

В [3] предложено считать, что половина данной энергии обеспечивается исследуемым фрагментом, а вторая половина – соседними. Будем предполагать, что вся потерянная кинетическая энергия уходит на образование поверхности разрыва. В этих предположениях энергия  $\Delta H_f$ , затраченная на образование поверхности разрыва для сферического фрагмента, вырезаемого поверхностями  $\varphi = -\alpha$ ,  $\varphi = \alpha$ ,  $\theta = \theta_1$ ,  $\theta = \theta_2$ , равна

$$\Delta H_f = \frac{1}{\sqrt{3}} Yh^2 [2R(\theta_2 - \theta_1) + 2(R \sin \theta_2 + R \sin \theta_1)\alpha]. \quad (2.2)$$

Тогда условие образования рассматриваемого фрагмента запишется в виде

$$E_D = \frac{1}{2} \Delta H_f.$$

Используя (1.11), (2.2) последнее соотношение запишем в виде

$$\begin{aligned} E_D = \frac{1}{4} \rho h R^2 U^2 \alpha & \left[ 4(\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2) - (\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2)(\cos \Theta_1 + \cos \Theta_2)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{\sin^2 \alpha \left( \Theta_2 - \Theta_1 - \frac{1}{2}(\sin 2\Theta_2 - \sin 2\Theta_1) \right)^2}{\alpha^2 (\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2)} \right] = \\ & = \frac{1}{\sqrt{3}} Yh^2 [R(\theta_2 - \theta_1) + (R \sin \theta_2 + R \sin \theta_1)\alpha]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Представим это условие в более удобной форме.

$$\text{Пусть } \Theta = \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2}; \quad \Delta\Theta = \Theta_2 - \Theta_1; \quad \alpha = \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \rho R U^2 \Delta\varphi & \left[ \sin \Theta \sin \frac{\Delta\Theta}{2} - \sin \Theta \sin \frac{\Delta\Theta}{2} \cos^2 \Theta \cos^2 \frac{\Delta\Theta}{2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi^2} \frac{(\Delta\Theta - \cos 2\Theta \sin \Delta\Theta)^2}{2 \sin \Theta \sin \frac{\Delta\Theta}{2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} Yh \left[ \Delta\theta + \Delta\varphi \sin \Theta \cos \frac{\Delta\Theta}{2} \right]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Рассмотрим частный случай – фрагмент образовался на полюсе. В этом случае  $\theta_1 = 0$ ;  $\theta_2 = \Delta\theta$ ;  $\theta = \frac{1}{2} \Delta\theta$ ;  $\Delta\varphi = 2\pi$ .

Согласно (2.4), получаем

$$2\rho RU^2\pi \left[ \sin^4 \frac{\Delta\Theta}{2} \left( 1 + \cos^4 \frac{\Delta\Theta}{2} \right) \right] = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} Yh \sin \frac{\Delta\Theta}{2} \cos \frac{\Delta\Theta}{2}.$$

Считая величину  $\Delta\Theta \ll 1$ , получаем следующую оценку

$$\Delta\Theta^3 = \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{Yh}{\rho RU^2}.$$

Вместо величины начальной скорости разлета  $U$  удобнее рассматривать начальную кинетическую энергию  $E_0$ , определяемую по формуле  $E_0 = 2\pi\rho R^2 h U^2$ .

Тогда для оценки размера рассматриваемого фрагмента применима оценка

$$\Delta\Theta = \sqrt[3]{\frac{16\pi}{\sqrt{3}} \frac{YRh^2}{E_0}}. \quad (2.5)$$

Соответственно его масса  $M_f$  равна

$$M = \pi\rho h R^2 \frac{\Theta^2}{2} = \frac{1}{2} \rho h R^2 \left( \frac{16\pi}{\sqrt{3}} \frac{YRh^2}{E_0} \right)^{2/3}. \quad (2.6)$$

Если предположить, что все фрагменты имеют одинаковую массу (что неверно, но для качественной оценки приемлемо), то количество фрагментов  $N_f$  определяется соотношением

$$N_f = \frac{4\pi\rho R^2 h}{M_f} = \sqrt[3]{2\pi} \left( \sqrt{3} \frac{E_0}{YRh^2} \right)^{2/3}. \quad (2.7)$$

Рассмотрим азимутальный слой  $\Delta\Theta \ll 1$ .

При малых  $\Delta\Theta$  ( $\Delta\Theta \ll 1$ ), имеем

$$\begin{aligned} \sin \Theta \sin \frac{\Delta\Theta}{2} - \sin \Theta \sin \frac{\Delta\Theta}{2} \cos^2 \Theta \cos^2 \frac{\Delta\Theta}{2} &= \\ &= \frac{1}{2} \sin^3 \Theta \Delta\Theta + \frac{1}{8} \sin \Theta \left( \cos^2 \Theta - \frac{1}{6} \sin^2 \Theta \right) \Delta\Theta^3, \\ \frac{(\Delta\Theta - \cos 2\Theta \sin \Delta\Theta)^2}{2 \sin \Theta \sin \frac{\Delta\Theta}{2}} &= 4 \sin^3 \Theta \Delta\Theta + \left( \frac{2}{3} \sin \Theta \cos 2\Theta + \frac{1}{6} \sin^3 \Theta \right) \Delta\Theta^3. \end{aligned}$$

Тогда, согласно (1.11), в предположении  $\Delta\Theta \ll \Delta\varphi$  потерянная кинетическая энергия равна

$$\begin{aligned} E_D = E_{D\varphi} &= \rho h R^2 U^2 \Delta\varphi \left[ \frac{1}{2} \sin^3 \Theta \Delta\Theta - 2 \frac{\sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi^2} \sin^3 \Theta \Delta\Theta \right], \\ E_D = E_{D\varphi} &= \rho h R^2 U^2 \Delta\varphi \sin^3 \Theta \Delta\Theta \left[ 1 - 2 \frac{1 - \cos \Delta\varphi}{\Delta\varphi^2} \right]. \end{aligned}$$

Приравняв потерянную энергию затраченной энергии на образование фрагмента, получаем уравнение для определения  $\Delta\varphi$

$$\rho h R^2 U^2 \Delta\varphi \sin^3 \Theta \Delta\Theta \left[ 1 - 2 \frac{1 - \cos \Delta\varphi}{\Delta\varphi^2} \right] = \frac{2}{\sqrt{3}} YRh^2 \Delta\Theta,$$

$$\Delta\varphi \left[ 1 - 2 \frac{1 - \cos \Delta\varphi}{\Delta\varphi^2} \right] = \frac{1}{\sin^3 \Theta} \frac{2}{3} \sqrt{3} \frac{Y}{\rho U^2} \frac{h}{R}.$$

Последнее уравнение служит для определения угла расслоения  $\Delta\varphi$  по меридиану

Полагая  $\Delta\Theta \ll \Delta\varphi \ll 1$

$$E_D = E_{D\varphi} = \rho h R^2 U^2 \Delta\varphi \frac{1}{2} \sin^3 \Theta \Delta\Theta \left[ 1 - 2 \frac{(1 - \cos \Delta\varphi)}{\Delta\varphi^2} \right],$$

$$E_D = E_{D\varphi} = \rho h R^2 U^2 \frac{1}{24} \Delta\varphi^3 \sin^3 \Theta \Delta\Theta.$$

Энергия  $\Delta H_f$ , потраченная на образование меридионального разрыва для фрагмента  $\Delta\varphi$ ;  $\Delta\Theta$  равна

$$\Delta H_f = \frac{2}{\sqrt{3}} Y R h^2 \Delta\Theta.$$

Приравнявая  $E_{D\varphi} = \frac{1}{2} \Delta H_f$ , получаем

$$\rho h R^2 U^2 \frac{1}{24} \Delta\varphi^3 \sin^3 \Theta \Delta\Theta = \frac{1}{\sqrt{3}} Y R h^2 \Delta\Theta.$$

Тогда размер фрагмента оценивается соотношением

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sin^2 \Theta} \left( 8\sqrt{3} \frac{Y}{\rho U^2} \frac{h}{R} \right)^{1/3}.$$

Или окончательно, используя связь  $E_0 = 2\pi\rho R^2 h U^2$ , получаем

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sin^2 \Theta} \left( 16\sqrt{3}\pi \frac{Y R h^2}{E_0} \right)^{1/3}. \quad (2.8)$$

Тогда  $N$  – количество фрагментов на широте  $\Theta$  может примерно оцениваться соотношением

$$N = \frac{2\pi}{\Delta\varphi} = \pi \sin^2 \Theta \left( \frac{E_0}{2\sqrt{3}\pi Y R h^2} \right)^{1/3}. \quad (2.9)$$

## ВЫВОДЫ

В настоящей работе получены оценки для возможных размеров фрагментов при разрушении быстро расширяющейся сферы. Принималось, что материал сферы является несжимаемым, а его механическое поведение является идеально жесткопластическим. Для оценки энергии, затраченной на образование поверхности разрыва, использовалась соответствующая оценка, полученная при решении задачи о разлете идеально пластического стержня.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Grady D.E. *Fragmentation of rings and shells*. – Berlin: Springer, 2006.
2. Kipp M.E., Grady D.E. *Dynamic fracture growth and interaction in one dimension* // J.Mech. Phys. Solids. – 1985. – Vol.33. – Pp.399-415.

3. Киселев А.Б. *Моделирование фрагментации тонкостенных конструкций и компактных элементов при взрывном нагружении и ударном взаимодействии* // Математическое моделирование. – 2012. – Т.24. – №2. – С.33-66.
4. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N. *Fragmentation model for expanding cylinder* // International Journal of Fracture. – 2014. – Vol.187. – No.2. – Pp.239-243.
5. Головешкин В.А., Мягков Н.Н. *Модель фрагментации расширяющегося цилиндра* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №1. – С.97-103.



## ВИБРОПОГЛОЩАЮЩИЕ СВОЙСТВА ТРЕХСЛОЙНЫХ ПРЕГРАД С МАТЕРИАЛОМ ЗАПОЛНИТЕЛЯ ИЗ СТАЛЕЙ СО СВЕРХВЫСОКИМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ В ГРУНТЕ\*

Нгуен Зыонг Фунг<sup>1</sup>, Локтева Н.А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Технический университет Ле Куи Дона, г. Ханой,  
Социалистическая республика Вьетнам*

<sup>2</sup>*ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный  
исследовательский университет)», г. Москва, Россия*

В работе выполнено сравнение нормальных перемещений на границе преграды и среды, после воздействия на преграду плоской гармонической волны. Продемонстрировано отличие результатов в пользу вибропоглощающих свойств материала Сталь 01Ю5Т. Получены функции влияния для нормальных и сдвиговых перемещений в несущих слоях трехслойной пластины, которые в дальнейшем будут использоваться для решения задач с заданными граничными условиями. В процессе расчета примеров учтены особенности стали 01Ю5Т. Главным достоинством предлагаемой методики является сохранение аналитического вида расчета, что позволяет подставлять различные физические и геометрические характеристики материала несущих слоев и заполнителя трехслойной пластины.

**Ключевые слова:** пластина сложной конструкции; трехслойная пластина; диссипация; жесткость конструкции; функция влияния; стационарные колебания

### ВВЕДЕНИЕ

Основной задачей является выработка оптимальных геометрических параметров заполнителя трехслойной вибропоглощающей преграды в грунте при различных видах воздействия, обеспечивающих максимальное снижение вибраций в защищаемой зоне. В качестве материала заполнителя предполагается использовать сталь 01Ю5Т, обладающую высокими показателями диссипации при низких значениях напряжений. Решение поставленной задачи будет искаться для различных моделей грунтов и стационарного воздействия. Основная задача заключается в первую очередь в разработке математической модели взаимодействия волны, индуцируемой в грунте и трехслойной преграды, что позволит вырабатывать оптимальные геометрические параметры сотового заполнителя преграды, обеспечивающего наилучший вибропоглощающий эффект. Кроме того, в данной работе предполагается в качестве сматривала заполнителя впервые использовать новую марку стали 01Ю5Т, имеющую улучшенные свойства диссипации энергии при низких значениях напряжений. Также будет реализован метод, позволяющий организовывать требующиеся граничные условия, соответствующие реальным способам закрепления преграды. Данный подход базируется на методе компенсирующих нагрузок и применяется для самого общего случая постановки задачи в виде бесконечной пластины.

---

\* Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 24-19-00845.

## 1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается пластина, окруженная с двух сторон грунтом, моделировать который предполагается с помощью уравнений теории упругости, описывающих движение среды. Среды, окружающие пластину, обозначаются соответственно «1» и «2» (рис.1). Изотропная упругая среда «1» имеет плотность  $\rho_1$ , со скоростью распространения в ней продольных волн растяжения-сжатия  $c_1$  и скоростью распространения сдвиговых волн  $c_2$ . Предполагается, что скорости распространения волн в средах «1» и «2» будут одинаковыми, однако, предложенный подход подразумевает возможность рассмотрения различных сред по разные стороны от вибропоглощающего препятствия.

В качестве вибропоглощающей преграды предполагается рассматривать преграды сложной конструкции в виде трехслойных пластин, описываемые системой уравнений Паймушина В.Н. [4].

Задача рассматривается в декартовой системе координат  $Oxyz$ . Пластина расположена таким образом, что плоскость  $Oxy$  для пластины является срединной, а ось  $Oz$  направлена в глубину среды «2».

Внешнее воздействие будет представлять собой плоские стационарные волны, распространяющиеся из среды «1».

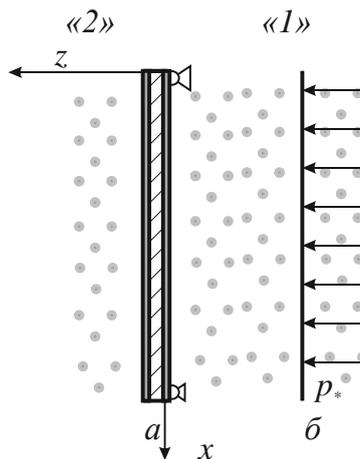


Рис.1. Взаимодействие волн с преградами в грунте: а) трехслойная преграда, б) плоская волна.

Модель преграды – трехслойная пластина с сотовым наполнителем. Геометрические параметры наполнителя возможно варьировать, материал наполнителя – сталь 01Ю5Т, несущие слои – бетон.

Для реализации метода компенсирующих нагрузок, позволяющего организовывать любые граничные условия, соответствующие различным видам закрепления пластины, определяются также функции влияния нормальных и касательных перемещений трехслойной пластины.

На основании полученных функций влияния в дальнейшем будет реализован подход, позволяющий реализовывать любые граничные условия как сумму решения для шарнирно опертой преграды и сумму сверток функций влияния с компенсирующими нагрузками (1)

$$w(x, \omega) = w^\infty(\omega) + \sum_1^4 G_w * P_n. \quad (1)$$

## 2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРЕГРАДЫ СО СТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНОЙ В ГРУНТЕ

Рассматривается взаимодействие пластины со стационарной волной в грунте. В качестве преграды выступает трехслойная пластина, описываемая системой уравнений Паймушина В.Н. [4]. На преграду воздействует плоская гармоническая волна с амплитудой на фронте

$$p_* = p_a \cdot e^{i\omega t}. \quad (2)$$

Граничные условия соответствуют шарнирному опиранию

$$w|_{x=0,l} = 0, \quad w''|_{x=0,l} = 0. \quad (3)$$

Уравнения движения трехслойной пластины (рис.2)

$$\begin{aligned} Bu_{1,xx}^a(x,t) - \rho_a \ddot{u}_1^a(x,t) + 2q_1(x,t) &= 0, \\ -Dw_{c,xxxx}(x,t) - \rho_c \ddot{w}_c(x,t) + 2k_1q_{1,x}(x,t) + p_1 - p_2 &= 0, \\ -Dw_{a,xxxx}(x,t) - \rho_{aw} \ddot{w}_a(x,t) - 2c_3w_a(x,t) + p_1 + p_2 &= 0, \\ u_1^a(x,t) - k_1w_{c,x}(x,t) - k_2q_{1,xx}(x,t) + k_{31}q_1(x,t) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

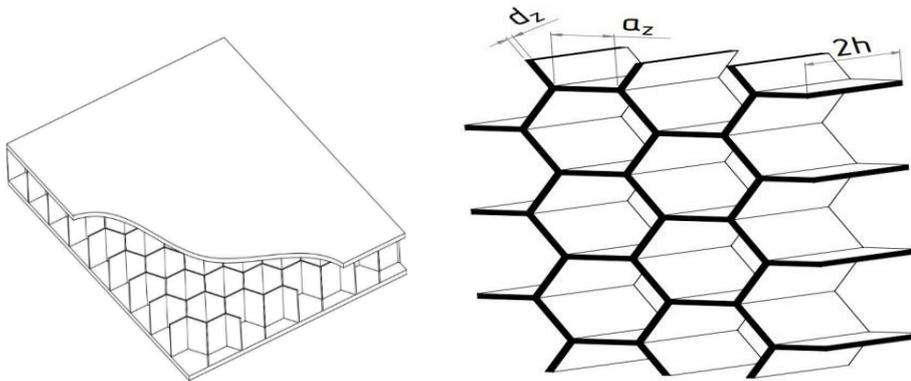


Рис.2. Структура трехслойной преграды.

В данной системе уравнений присутствуют следующие физические и геометрические соотношения:  $B = 2Et/1 - \nu^2$  – жесткость несущих слоев на растяжение-сжатие;  $D = Bt^2/3$  – жесткость несущих слоев на изгиб;  $k_1 = t_1 + h$ ,

$$k_2 = \frac{h^2}{3c_3}, \quad k_{3i} = \frac{2h}{G_i}, \quad c_3 = \frac{E_3}{2h}; \quad E_3 = 4dE_z/3(1 - \nu_z^2) \sin(\varphi) \quad \text{– модуль обжатия}$$

заполнителя [5];  $\rho_a = 2\rho_b t, \quad \rho_c = \rho_a + \rho h, \quad \rho_{aw} = \rho_a + \frac{\rho h}{3};$

$$u_1^a = u_1^{(1)} - u_1^{(2)} \equiv 2u_1^{(1)} \equiv -2u_1^{(2)}; \quad w_c = w^{(1)} + w^{(2)}, \quad w_a = w^{(1)} - w^{(2)}.$$

Так как в качестве материала заполнителя используется Сталь 01Ю5Т, необходимо учесть его демпфирующие свойства. Коэффициент поглощения материала будет определяться как

$$\psi_* = \frac{\Delta W}{2W} = 0.37. \quad (5)$$

В соответствии с теорией Кельвина-Фойгта [6] напряжение определяется как

$$\sigma = E\varepsilon + \beta\dot{\varepsilon}. \quad (6)$$

Модуль упругости берется осредненный в соответствии со структурой

заполнителя  $E_3$ . Все функции изменяются по гармоническому закону

$$w = w_a e^{i\omega t}. \quad (7)$$

С учетом (7) из (5) определяется значение максимальной энергии за цикл  $W$  и энергии, рассеиваемой за один цикл  $\Delta W$ .

На основании [7] определяем значение коэффициента вязкости материала  $\beta$

$$\beta = \frac{E\delta}{\pi\omega}. \quad (8)$$

Далее определяются значения деформаций (6) и перемещений. Перемещение заполнителя находится как следствие упругой деформации, суммированной с вязкой деформацией. В дальнейшем уравнения (4) решаются совместно с уравнениями движения упругой среды с учетом значений напряжений и перемещений в набегающих волнах. Решение находится с помощью разложения в тригонометрические ряды Фурье всех входящих в систему функций [3]

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \sin \lambda_n x, \quad H = (w_c, w_a)^T, \quad H_n = (w_{cn}, w_{an})^T, \quad \text{где } \lambda_n = \frac{n\pi}{L}; \quad (9)$$

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos \lambda_n x, \quad K = (u, q_1)^T, \quad K_n = (u_n, q_{1n})^T.$$

Движение сред задается аналогичным [8] образом.

В качестве примера рассматривается трехслойная преграда с различными наполнителями. Механические характеристики несущих слоев, заполнителя и грунта представлены в Таблице 1.

Таблица 1.

<b>Несущие слои</b>		
<b>Характеристики</b>	<b>Бетон</b>	
Толщина несущего слоя	$t_1 = 0.1$ м	
Модуль упругости	$E = 2.75 \cdot 10^9$ кг/м <sup>2</sup>	
Плотность	$\rho_b = 2340$ кг/м <sup>3</sup>	
Коэффициент Пуассона	$\nu = 0.29$	
<b>Заполнитель</b>		
<b>Характеристики</b>	<b>Сталь 12Х18Н10Т</b>	<b>Сталь 01Ю5Т</b>
Толщина заполнителя	$2h = 0.4$ м	$2h = 0.4$ м
Длина	$L = 5$ м	$L = 5$ м
Модуль упругости первого рода	$E_z = 1.8 \cdot 10^{10}$ кг/м <sup>2</sup>	$E_z = 19 \cdot 10^{10}$ кг/м <sup>2</sup>
Плотность	$\rho_z = 7900$ кг/м <sup>3</sup>	$\rho_z = 7300$ кг/м <sup>3</sup>
Длина стенки заполнителя	$a = 0.2$ м	$a = 0.2$ м
Толщина стенки заполнителя	$d = 0.003$ м	$d = 0.003$ м
Угол между сторонами ячейки заполнителя	$\varphi = 90^\circ$	$\varphi = 90^\circ$
Плотность	$\rho_{gr} = 2000$ кг/м <sup>3</sup>	
Коэффициент Пуассона	$\nu = 0.4$	

Получение значения нормальных перемещений представлены на рис.3.

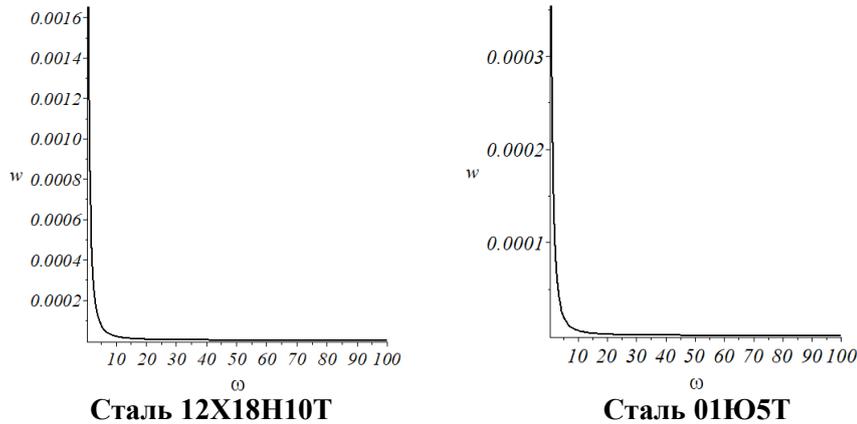


Рис.3. Нормальные перемещения трехслойной преграды в грунте при различных материалах заполнителя.

Данные результаты получены для шарнирно опертой преграды. Для организации других видов закрепления преграды возможно использовать метод компенсирующих нагрузок [0].

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Для реализации заявленного подхода необходимо определить значения функций влияния, чтобы затем воспользоваться выражением (1). Для этого решим систему уравнений (4) с учетом разложений в тригонометрические ряды (9). При этом в качестве внешней нагрузки приложим к первому несущему слою нагрузку в виде дельта-функции. Данную нагрузку также разложим в тригонометрические ряды

$$\delta(x - \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(\xi) \sin \lambda_n x; \quad (10)$$

$$\delta_n(\xi) = \frac{2}{L} \int_0^L \delta(x - \xi) \sin(\lambda_n x) dx = \frac{2}{L} \sin(\lambda_n \xi).$$

Тогда система уравнений (4) примет вид

$$\begin{aligned} -B\lambda_n^2 u_n + \omega^2 \rho_a u_n + q_{1n} &= 0, \\ -D\lambda_n^4 w_{cn} + \omega^2 \rho_c w_{cn} - 2k_1 \lambda_n q_{1n} + \delta_n(\xi) &= 0, \\ -D\lambda_n^4 w_{an} + \omega^2 \rho_{aw} w_{an} - 2c_3 w_{an} + \delta_n(\xi) &= 0, \\ 2u_n - k_1 \lambda_n w_c + k_2 \lambda_n^2 q_{1n} + k_{31} q_{1n} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Решая данную систему, получим следующие функции влияния

$$\begin{aligned} G_{u_{1an}} &= \frac{(\rho_a \omega^2 - B \lambda_n^2) k_1 \delta_n(\xi) \lambda_n}{A_n \omega^4 + B_n \omega^2 + BD1k_2 \lambda_n^8 + BD1k_{31} \lambda_n^6 + (2Bk_1^2 + 2D1) \lambda_n^4}; \\ G_{w_{cn}} &= \frac{2k_1 \delta_n(\xi) \lambda_n}{A_n \omega^4 + B_n \omega^2 + BD1k_2 \lambda_n^8 + BD1k_{31} \lambda_n^6 + (2Bk_1^2 + 2D1) \lambda_n^4}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$G_{wan} = \frac{\delta_n(\xi)}{-D1\lambda_n^4 + \rho_{aw}\omega^2 - 2c_3};$$

$$G_{q1n} = \frac{\left((\rho_a k_2 \lambda_n^2 + \rho_a k_{31})\omega^2 - Bk_2 \lambda_n^4 - Bk_{31} \lambda_n^2 - 2\right)\delta_n(\xi)}{A_n \omega^4 + B_n \omega^2 + BD1k_2 \lambda_n^8 + BD1k_{31} \lambda_n^6 + (2Bk_1^2 + 2D1)\lambda_n^4};$$

где

$$A_n = \rho_a \rho_c k_2 \lambda_n^2 + \rho_a \rho_c k_{31};$$

$$B_n = -\rho_a D1k_2 \lambda_n^6 + (-\rho_a D1k_{31} - \rho_c Bk_2)\lambda_n^4 + (-2\rho_a k_1^2 - \rho_c Bk_{31})\lambda_n^2 - 2\rho_c.$$

Далее приведены графики функций влияния для нормальных и касательных перемещений.

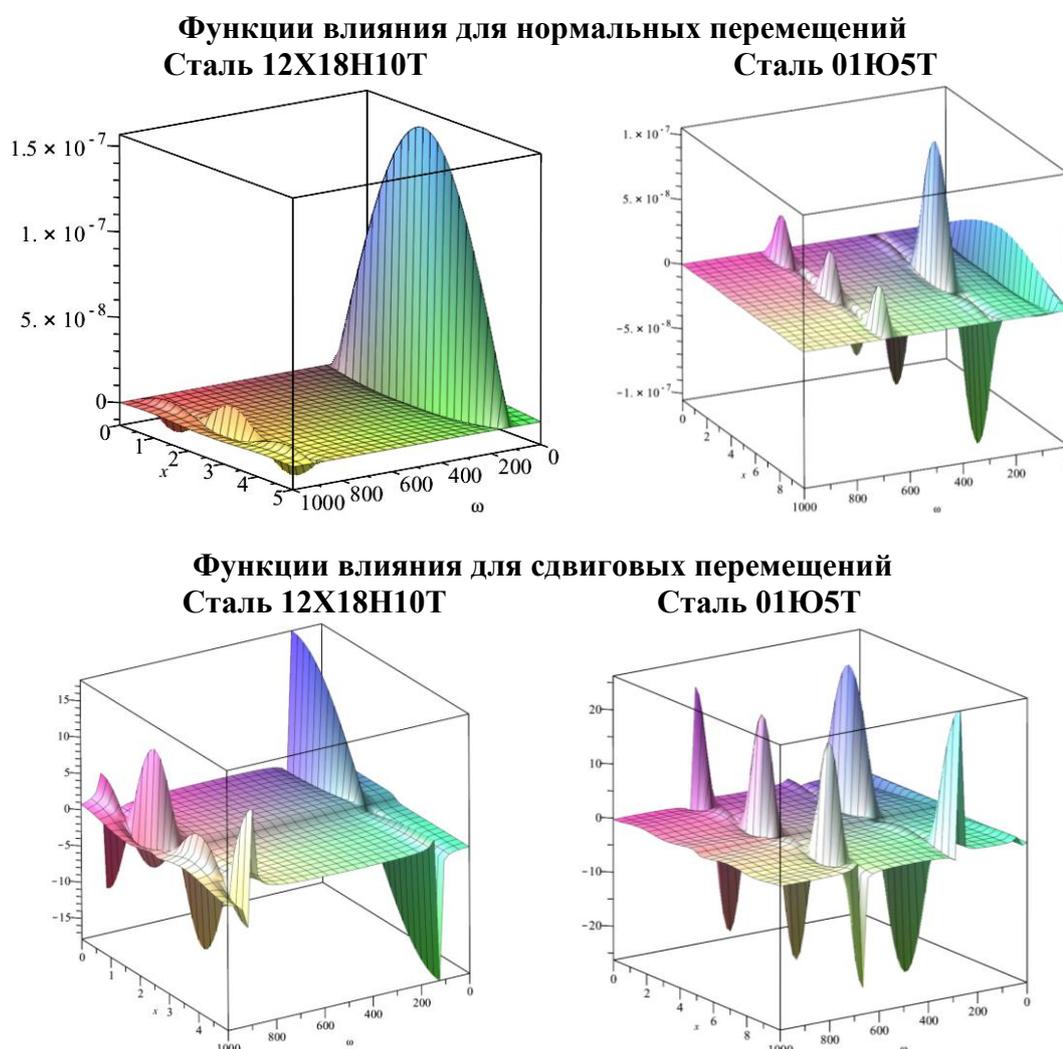


Рис.4. Функции влияния для нормальных и сдвиговых перемещений для различных видов заполнителя трехслойной пластины.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выполнено сравнение нормальных перемещений на границе преграды и среды, после воздействия на преграду плоской гармонической волны.

Продемонстрировано отличие результатов в пользу вибропоглощающих свойств материала Сталь 01Ю5Т. Получены функции влияния для нормальных и сдвиговых перемещений в несущих слоях трехслойной пластины, которые в дальнейшем будут использоваться для решения задач с заданными граничными условиями. В процессе расчета примеров учтены особенности Стали 01Ю5Т.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Венцель Э.С., Джан-Темиров К.Е., Трофимов А.М., Негольша Е.В. *Метод компенсирующих нагрузок в задачах теории тонких пластинок и оболочек.* – Харьков: Б. и., 1992. – 92 с.
2. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
3. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров.* – М.: Наука, 1974. – 832 с.
4. Иванов В.А., Паймушин В.Н. *Уточненная постановка динамических задач трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем численно-аналитический метод их решения // Прикладная механика и техническая физика.* – 1995. – Т.36. – №4. – С.147-151.
5. Акишев Н.И., Закиров И.И., Паймушин В.Н., Шишов М.А. *Теоретико-экспериментальный метод определения осредненных упругих и прочностных характеристик сотового наполнителя трехслойных конструкций // Механика композитных материалов.* – 2011. – Т.47. – №4. – С.543-556.
6. Постников В.С. *Внутреннее трение в металлах.* – М.: Металлургия, 1969. – 330 с.
7. Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Шишкин В.М. *Моделирование динамической реакции при резонансных колебаниях удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.* – 2020. – №1. – С.74-86.
8. Локтева Н.А., Нгуен З.Ф. *Сравнительный анализ вибропоглощающих свойств трехслойной и однородной преград под воздействием нестационарной нагрузки // Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2022. – Т.28. – №1. – С.19-35.

УДК 629.78:531.3

EDN JECBBJ (<https://elibrary.ru/jecbbj>)

DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.31



## **К ОЦЕНКЕ ЗАЩИЩЁННОСТИ КОРПУСОВ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ОТ ВОЗДЕЙСТВИЯ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА**

Онучин Е.С.

*Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет) (МФТИ), г. Москва, Россия*

### **1. ТЕХНОГЕННАЯ СРЕДА ОКОЛОЗЕМНОГО КОСМИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА (ОКП) И ЗАЩИТА ОРБИТАЛЬНЫХ СТАНЦИЙ ОТ УДАРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ**

С ростом числа орбитальных космических аппаратов околоземное пространство интенсивно засоряется продуктами разрушения отработавших конструкций спутников и верхних ступеней ракет, образующих техногенную среду космического мусора (КМ). Вместе со средой естественных метеороидов она представляет угрозу для орбитальных аппаратов. Наземные средства мониторинга ОКП способны отслеживать крупные фрагменты с размерами более 100 мм, траектории которых известны и могут считаться детерминированными. Для мелкодисперсной «невидимой» фракции КМ существуют статистические модели распределения частиц по размерам, массе и скоростям, такие как ORDEM, MASTER, SDPA [1]. Для защиты орбитальных пилотируемых станций от крупных наблюдаемых фрагментов КМ применяются манёвры уклонения за счет корректировки их орбит. Защита от частиц мелкодисперсной фракции КМ осуществляется путем введения в конструкции специальных экранных защитных конструкций (ЭЗК). Эта практика, возникшая в 80-е годы XX века в связи проектом станций «Мир» и «Салют», получила интенсивное развитие в процессе проектирования и эксплуатацией Международной космической станции (МКС). Статистически представительной ситуацией, принимаемой за основу проектирования ЭЗК, является соударение частицы КМ размером 5-10 мм со скоростью удара 3-10 км/с. Так как основным материалом космических аппаратов – источников космического мусора являются сплавы на основе алюминия, в упомянутых моделях КМ фигурируют, главным образом, алюминиевые частицы. Так как при высокоскоростном соударении осколки быстро теряют форму, условно принято, что они являются сферическими.

В основу создания ЭЗК был положен принцип, предложенный Ф. Уипплом [2] в 1947 году. Принцип основан на том, что при соударении с экраном частица пробивает его, при этом образуется сильно сжатый сгусток вещества частицы и экрана. Энергия сжатия настолько велика, что ее достаточно, чтобы при разгрузке диспергировать сгусток, превратив его в быстро расширяющееся облако вторичных мелкодисперсных невзаимодействующих частиц материала или даже его расплава. Соударение этого облака с защищаемой конструкцией существенно менее опасно для нее, чем удар первичной частицы. Эффективность защиты в основном определяется рациональным выбором лицевого экрана, который должен обеспечить максимальное диспергирование частицы, максимальный угол разлета продуктов разрушения, минимальные размеры

вторичных осколков. Базовая схема Уиппла была усовершенствована в виде двухэкранный ЭЗК, состоящей из лицевого и промежуточного экранов (рис.1). Промежуточные экраны на основе пакетов из тканей типа Nextel или АРМОС обеспечивают тепловую защиту от нагретого облака продуктов разрушения и дополнительно тормозят образующиеся осколки.

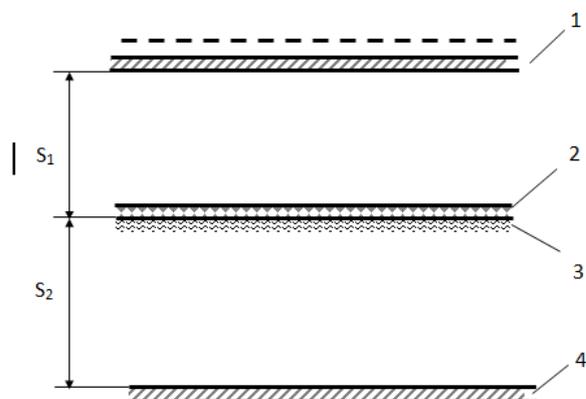


Рис.1. Принципиальная схема ЭЗК. 1 – лицевой экран; 2 – теплозащитный пакет промежуточного экрана (слои базальтовой ткани, ткани Nextel); 3 – силовой пакет промежуточного экрана (слои ткани на основе нити арамидных волокон или Kevlar); 4 – защищаемая стенка гермоотсека.

Характеристикой стойкости защищаемой конструкции модуля является баллистическая предельная зависимость (БПЗ), определяющая минимальный размер частицы, пробивающей стенки конструкции. Расчет и экспериментальное подтверждение БПЗ составляют основу для определения нормируемых статистических характеристик – вероятностей непробоя (ВНП) в течение заданного времени нахождения на орбите. Для этой конечной цели используются упомянутые выше модели среды КМ. В настоящее время разработаны методы расчета и экспериментальной отработки экранов [3-6]. Ниже излагается модель формирования облака вторичных осколков, определяющая его воздействие на защищаемую конструкцию, и метод расчета ее реакции.

## 1. МОДЕЛЬ ВТОРИЧНОГО ОБЛАКА И НАГРУЗКИ НА ЗАЩИЩАЕМУЮ КОНСТРУКЦИЮ

Один из вариантов модели формирования облака продуктов разрушения описан в работе [3]. В ее основе лежит представление облака в виде ансамбля невзаимодействующих частиц, получивших в момент разгрузки сгустка материалов частицы-ударника и разрушенной части экрана индивидуальные и в дальнейшем постоянные скорости. Считается, что формирование облака начинается из исходной точки на оси удара, при этом в начальный момент облако имеет пренебрежимо малые размеры (подобно модели точечного взрыва). Имеющиеся данные свидетельствуют о том, что исходная точка располагается выше центра отверстия, образующегося в экране. После распада сгустка центр массы облака движется с постоянной скоростью. Скорость индивидуальной частицы представляется в виде суммы переносной и относительной (скорость разлета относительно центра массы). На рис.2 показана схема формирования облака. Численное моделирование показало, что принятая схема качественно описывает характер процесса.

Масса внутри телесного угла распределена по скоростям разлета, причем это распределение может быть различным в различных телесных углах. Основная трудность состоит в установлении этой зависимости. После ее определения задача расчета нагрузки на защищаемую конструкцию, например, на гермооболочку, легко решается аналитически и результаты ее решения могут использоваться для построения БПЗ. Это существенно сокращает объем вычислений, который, как показывает опыт расчетов, обычно значителен.

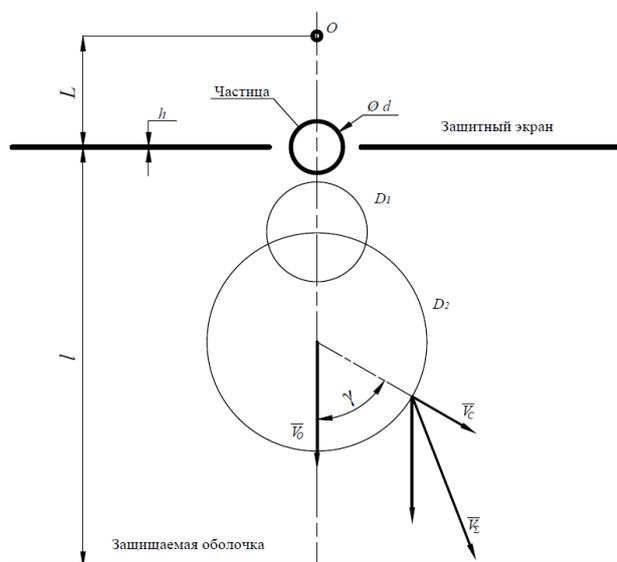


Рис.2. Последовательные моменты формирования облака разлета.

Модель позволяет получить удельный импульс, действующий на конструкцию в виде интеграла

$$p(x) = \frac{M_{\Sigma}}{4\pi\tau L_{\Sigma}} \int_x^1 \left( \frac{k_1}{\lambda_1^3} m_{\gamma}(\gamma_1) - \frac{k_2}{\lambda_2^3} m_{\gamma}(\gamma_2) \right) \frac{m_v}{\beta^2} d\beta,$$

где  $M_{\Sigma}$  – полная масса частиц облака,  $L_{\Sigma}$  – расстояние от условной точки начала формирования облака до контрольной поверхности,  $\tau = L_{\Sigma}/V_0$ ,  $V_0$  – скорость центра облака, относительно которого происходит разлёт,  $\beta$  – безразмерная скорость, определяемая отношением относительной скорости частиц слоя сферы разлёта к скорости его центра,  $m_v$  – безразмерное распределение массы облака по относительным скоростям слоёв,  $m_{\gamma}$  – безразмерное распределение массы облака по углу разлёта относительно оси удара,  $x$  – безразмерная координата на контрольной поверхности,  $k_1, \lambda_1$  – функции безразмерных координат и скоростей,  $\gamma_{1,2}$  – угловые координаты, определяющие области облака, контактирующие с контрольной поверхностью.

Для моделирования используется пакет ANSYS AUTODYN, реализующий метод гидродинамики сглаженных частиц (SPH), позволяющий описывать механизм ударно-волнового нагружения и разрушения частицы и экрана. Состояние среды определяется четырьмя параметрами: массовой скоростью  $U$ , скоростью  $D$  фронта волны сжатия, давлением  $P$  и внутренней энергией  $E$ , которая, в отличие от газов, зависит не только от температуры, но и от деформации.

Эти параметры связаны тремя соотношениями Рэнкина-Гюгонио [7]. В качестве недостающего четвертого соотношения используется экспериментально определяемая для каждого материала зависимость  $D(U)$ , которая хорошо аппроксимируется линейной (кусочно-линейной) функцией вида  $D = \alpha + \beta U$ . Для алюминия согласно данным [8]  $D-U$  зависимость может быть аппроксимирована трендом

$$D = 5335,2 + 1,3561U \quad \text{при } U < 8 \text{ км/с,}$$

$$D = 6221,5 + 1,1784U \quad \text{при } U \geq 8 \text{ км/с.}$$

При степени сжатия материала  $\delta = \rho/\rho_0 < 2$ , характерной для актуального диапазона скоростей соударения (до 16 км/с), справедливо уравнение состояния (УРС) металлов в форме Ми-Грюнайзена, использующее представление давления и энергии в виде суммы холодных и тепловых составляющих

$$P = P_x(\delta) + \rho\Gamma(\delta, T)E_T(\delta, T), \quad E = E_x(\delta) + E_T(\delta, T).$$

В оговоренных условиях коэффициент Грюнайзена не зависит от температуры и является функцией только степени сжатия; а внутренняя энергия равна  $E_T = c_v T$  [7]. Пластическое течение материала описывается моделью Штейнберга-Гайнана [9], применимой при скоростях деформирования больших  $\dot{\epsilon} \geq 10^5 \text{ с}^{-1}$ , характерных для исследуемых процессов. Используется критерий разрушения материала по откольному напряжению  $\sigma_{отк}$ . Численно моделируется нормальный удар сферической частицы по плоской пластине. Целью моделирования является определение закона распределения массы облака по скоростям и углам разлета  $m_v(V_c, \gamma)$ . Представляет также интерес доля энтропийных потерь, позволяющая сравнить кинетическую энергию облака продуктов разрушения с кинетической энергией исходной частицы-ударника. При моделировании варьируются скорость соударения  $V_p$ , толщина экрана  $h$ , диаметр ударника  $d$  таким образом, чтобы отношение  $d/h$  находилось в пределах от 1 до 9 при толщине экрана 1 и 3 мм.

Результаты расчетов приведены на рис.4-8. Как следует из рис.3, доля энтропийных потерь относительно невелика, то есть практически вся исходная механическая энергия частицы передается облаку и посредством его – защищаемой конструкции. Характерные распределения массы по углам и скорости разлета показаны на рис.5 и 6.

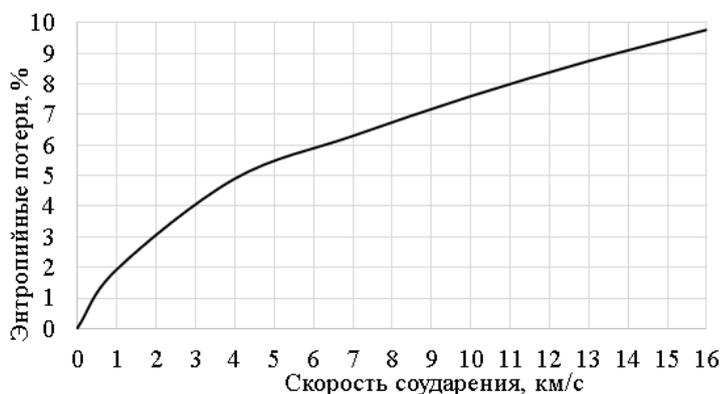


Рис.3. Зависимость энтропийных потерь, отнесённых к удельной энергии ударника  $V^2/2$ , от скорости соударения.

При моделировании варьируются скорость соударения  $V_p$ , толщина экрана  $h$ , диаметр ударника  $d$  таким образом, чтобы отношение  $d/h$  находилось в пределах от 1 до 9 при толщине экрана 1 и 3 мм. На рис.4 показаны полученные по результатам численного моделирования распределения массы по углам разлёта облака ударника при различных значениях толщины экрана для  $d/h = 3; 9$ ,  $V = 8$  км/с. По абсциссе отложена угловая координата в радианах, по ординате масса облака, отнесённая к его полной массе.

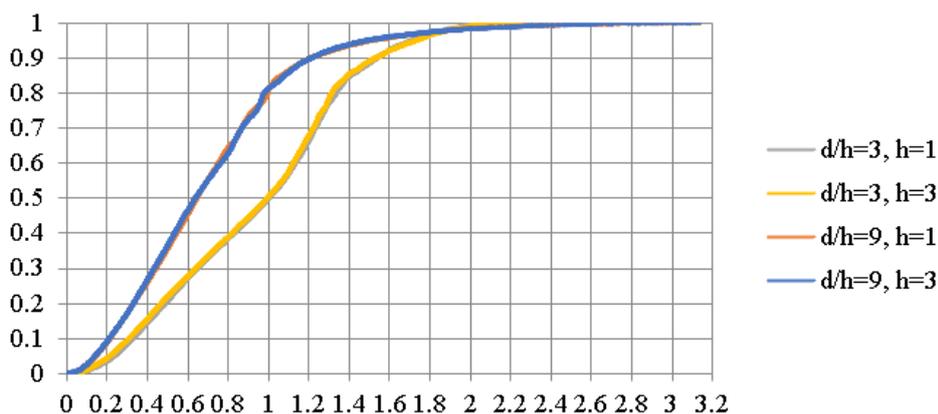


Рис.4. Распределения массы по углам разлёта облака ударника при различных значениях толщины.

На рис.5 показаны распределения массы по скоростям разлёта облака ударника относительно центра масс для случая  $d/h = 3; 9$ ,  $V = 8$  км/с при различных значениях толщины  $h$ . По абсциссе отложена скорость частиц облака, отнесённая к скорости его центра масс, по ординате масса облака, отнесённая к его полной массе.

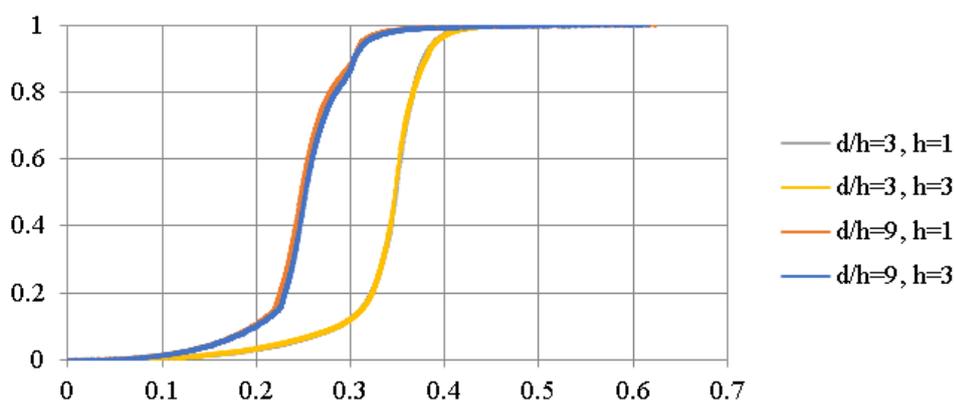


Рис.5. Распределения массы по скоростям разлёта облака ударника при различных значениях толщины.

Анализ результатов показывает, что отклонения интегральных распределений массы по углам разлета для различных значений толщины лицевого экрана не превышают 5%. Установлено также, что определяющее значение имеет отношение диаметра частицы к толщине экрана  $d/h$ .

Для проверки адекватности представления нагрузки в принятой модели (разлёта) проведено сравнение распределения удельного импульса на пластинемитени, полученные прямым суммированием импульса падающих частиц облака

на контрольную поверхность в численном счёте с аналогичным распределением получаемые по модели сферического разлёта (рис.б).

На основе изложенной модели и численного моделирования построены аналогичные распределения для практически значимых параметров соударения, которые могут быть использованы для расчета БПЗ конструкций модулей космических аппаратов.

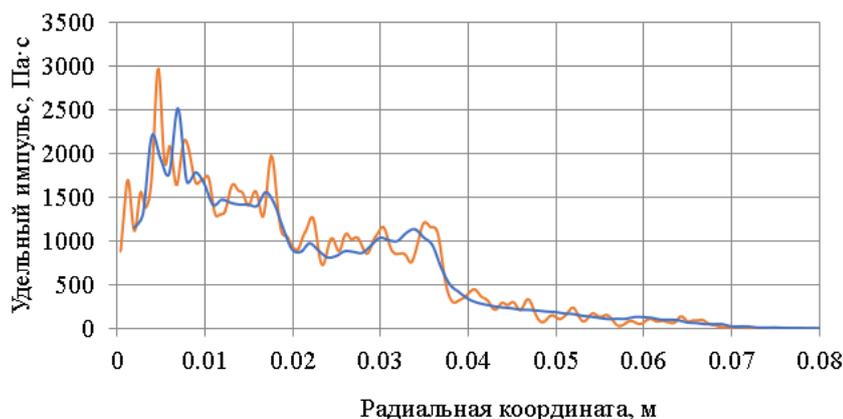


Рис.б. Сравнение формы удельного импульса для  $V = 6$  км/с (красный – прямое суммирование импульсов частиц, синий – расчёт по модели разлёта).

## 2. РАСЧЕТ ЗАЩИЩАЕМОЙ СТЕНКИ

Область нагружения защищаемой стенки мала по сравнению с ее радиусом кривизны и размерами в плане. Поэтому при ее расчете можно пренебречь краевыми эффектами и рассматривать бесконечную пластину. Кроме того, в данном случае в пластине растягивающие напряжения преобладают над изгибными, что позволяет ограничиться моделью гибкой мембраны в форме

$$\sigma_r - \sigma_\phi + r\sigma_r' = 0, \quad \rho\dot{w} = \sigma_r \left( \frac{w'}{r} + w'' \right) + w'\sigma_r', \quad (1)$$

где  $\sigma_r, \sigma_\phi$  – радиальные и окружные напряжения,  $r$  – радиальная координата,  $\rho$  – поверхностная плотность,  $w$  – прогиб мембраны.

Осевая симметрия, имеющая место в наиболее опасном случае нормального удара, позволяет применить интегральное преобразование Ханкеля. Ввиду нелинейности уравнений интегральное преобразование может быть включено в пошаговую (по времени) процедуру. Заменяем непрерывный интервал интегрирования  $0 < t < T$  множеством дискретных равноотстоящих значений  $t_n$  ( $n = 0, \dots, N$ ) с шагом  $\tau$  и определим, наряду с непрерывными функциями  $w(r, t), \Phi(r, t)$ , их дискретные значения  $w_n(r), \Phi_n(r)$ . Пусть в момент времени  $t_n$  известны  $w_n(r)$ , тогда правая часть уравнения (1) также известна. Применяя преобразование Ханкеля к уравнению движения мембраны, получим

$$\mu \int_0^\infty \Delta^2 \Phi J_0(\lambda r) r dr = -\frac{1}{2} \int_0^\infty (w_n'^2)' J_0(\lambda r) dr.$$

Пошагово решая систему уравнений движения, определяется образ функции прогиба. Прогиб находится обратным преобразованием.

Вычисления циклически повторяются для следующих шагов по времени. На каждом шаге по времени определяются значение интенсивности деформаций сопоставляется с предельной интенсивностью, при которой происходит разрушение.

Для верификации изложенной методики расчёта результат сравнивается с решением на основе расчётного пакета ANSYS LS-DYNA. При верификации сравниваются распределения прогиба и интенсивности деформации по расчётной области. Моделирование выполнялось для двух толщин пластины 1 и 3 мм, радиус нагружаемой области варьировался в диапазоне от 5 до 100 мм. Параметры нагружения подбирались таким образом, чтобы получить максимальные значения интенсивности деформации 0,20, 0,25 и 0,30.

Результаты сравнения формы максимальных по времени прогибов пластины (рис.7) указывает на их практическое совпадение. Синим цветом показаны результаты численного расчета, красным – результаты расчета по изложенной выше методике.

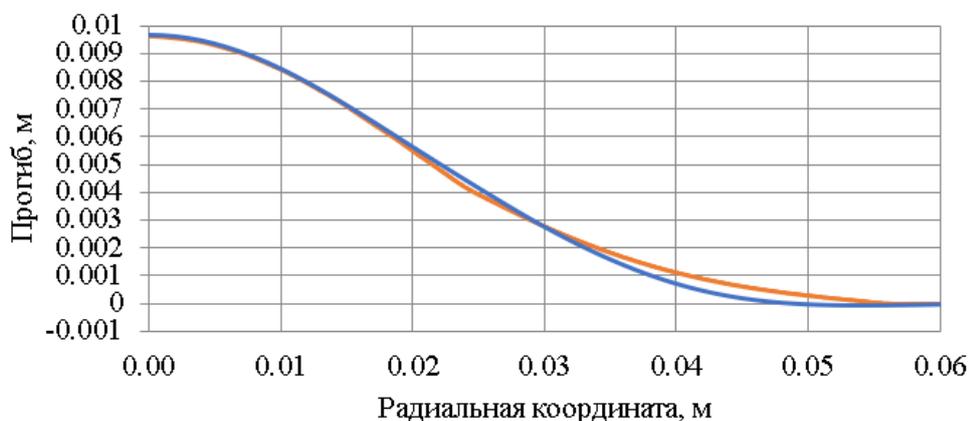


Рис.7. Сравнение форм прогиба (радиус области нагружения – 40 мм).

Описанная методика может быть использована для расчёта БПЗ гермооболочек модулей космических аппаратов, имеющих одноэкрannую ЭЗК. На рис.8 показано сравнение результатов расчета БПЗ предложенной методики (толщина лицевого экрана 1,5 мм, толщина стенки 2 мм, расстояние между экраном и стенкой 50 мм) и по зависимости, аппроксимирующей эмпирические данные [9]. Видно хорошее соответствие получаемых расчётных результатов.

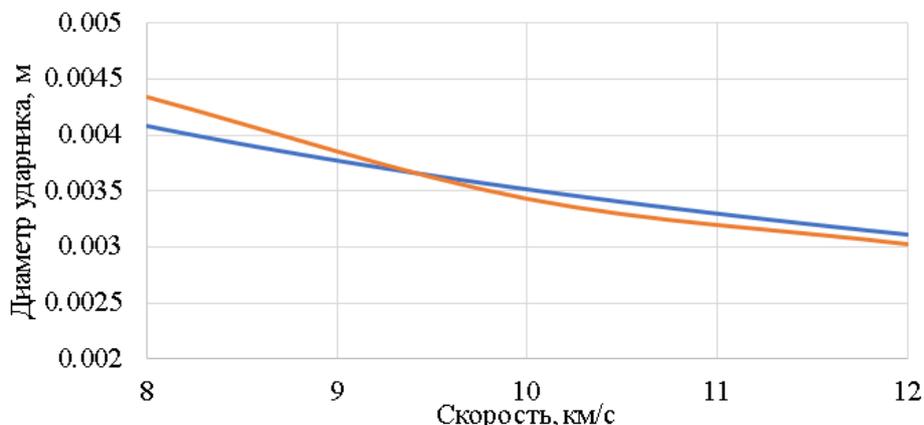


Рис.8. Получаемая баллистическая предельная зависимость по описанной методике (оранжевый) и по данным работы [10] (синий).

Область применимости предложенной методики может быть расширена путём включения модели разрушения промежуточного тканевого экрана, влияющего на формирование нагрузки на защищаемую стенку, при этом остальные элементы методики остаются неизменными.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Агапов В.М. и др. *Космический мусор. В 2 книгах. Книга 1. Методы наблюдения и модели космического мусора.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 248 с.
2. Whipple F.L. *Meteorites and space travel* // The Astronomical Journal. – 1947. – Vol.52. – 131.
3. Utkin V.F., Romanchenkov V.P., Sokolov V.G., Brovkin A.G. *Risk of functioning of International Space Station connected with influence of meteoroids and space debris* / 49<sup>th</sup> International Astronautical Congress. Melbourne, Australia, 1998.
4. Sokolov V.G., Kristiansen E., Gorbenko A.V., Romanchenkov V.P., Feldshteyn V.A. *The effect of thin deployable construction elements of the international space station on the probability of its hull penetration by s and orbital debris* // Int. J. of Impact Ing. – 2001. – Vol.26. – Pp.725-734.
5. Лоцманов А.В., Онучин Е.С., Фельдштейн В.А. *Модель облака продуктов разрушения частицы космического мусора и защитного экрана при высокоскоростном соударении* // Космонавтика и ракетостроение. – 2020. – №6(117). – С.79-90.
6. Panichkin N.G., Buslov E.P., Romanchenkov V.P., Semenov V.I., Kolosov V.G., Feldshteyn V.A. *Method of Ballistic Limit Curves Calculations for Shielding Constructions Protecting Space Vehicle from High Velocity Impacts of Meteoroids or Space Debris* / 50-th International Congress. Amsterdam, The Netherlands.
7. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.* – М.: Наука, ГРФМЛ, 1966.
8. Трунин Р.Ф., Гундаренко Л.Ф., Жерноклетов М.М., Симаков Г.В. *Экспериментальные данные по ударно-волновому сжатию и адиабатическому расширению конденсированных веществ: Научное издание / 2-е изд., перераб. и доп.* – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2006. – 531 с.
9. Steinberg D.J., Cochran S.G., Guinan M.W. *A constitutive model for metals applicable at high strain rate* // J. Appl. Phys. – 1980. – Vol.51. – 1498.
10. *Handbook for Designing MMOD Protection. Astromaterials Research and Exploration Science Directorate.* Human Exploration Science Office. NASA Johnson Space Center, 2009.

# **Геомеханика. Современные методы исследований**





## СВОЙСТВА ПЕСЧАНОГО ГРУНТА НА СЖАТИЕ И СДВИГ<sup>\*</sup>

Артамонова Н.Б., Шешенин С.В., Чистяков П.В.

*ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»,  
г. Москва, Россия*

Для моделирования упругопластического деформирования водонасыщенных песчаных грунтов под нагрузкой предполагается использовать определяющие соотношения деформационного типа. Цель настоящего исследования – определение материальных функций деформационной теории для песка на имеющемся в наличии экспериментальном оборудовании. Изложены методика и результаты экспериментального определения свойств песчаных грунтов на сжатие и сдвиг. Исследована зависимость свойств песка от скорости деформации.

### ВВЕДЕНИЕ

Деформационная теория пластичности была разработана Г. Генки и А. Надаи и обоснована А.А. Ильюшиным [1] для простых процессов. Определяющие соотношения деформационной теории пластичности, учитывающей влияние гидростатического давления, при активном нагружении развивались, например, в работах Д.Л. Быкова (1966), К.А. Агахи, В.Н. Кузнецова (1978), Е.В. Ломакина (1991) [2-4].

В работе использовалось обобщение классической деформационной теории [2-4] при предположении, что функция пластичности Ильюшина ( $\omega$ ) [1] зависит не только от интенсивности деформаций ( $\varepsilon_u = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$ ), но и от объемной деформации ( $\theta$ ):  $\omega = \omega(\varepsilon_u, \theta)$ . Связь девиаторов тензоров напряжений ( $s_{ij}$ ) и деформаций ( $e_{ij}$ ) при активном нагружении имеет вид

$$s_{ij} = \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} e_{ij},$$

где интенсивность тензора напряжений  $\sigma_u = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$  выражается в виде

$$\sigma_u = 2\mu(\varepsilon_u, \theta)\varepsilon_u, \quad \mu(\varepsilon_u, \theta) \equiv \mu_0(1 - \omega(\varepsilon_u, \theta)).$$

Здесь  $\mu(\varepsilon_u, \theta)$  – секущий модуль сдвига,  $\mu_0$  – упругий модуль сдвига при  $\theta = 0$ .

Взаимосвязь среднего напряжения ( $\sigma$ ) и объемной деформации ( $\theta$ )

$$\sigma = \sigma(\varepsilon_u, \theta) = K(\varepsilon_u, \theta)\theta,$$

где  $K(\varepsilon_u, \theta)$  – секущий модуль объемного сжатия/расширения.

<sup>\*</sup> Авторы выражают благодарность студентам Е.А. Орлову, К.А. Миниханову, С.Д. Третьякову, И.Р. Хамидуллину за активное участие в выполнении экспериментов. Экспериментальные исследования песчаного грунта проводились на автоматизированном испытательном комплексе АСИС, приобретенном за счёт средств Программы развития Московского университета (контракт №1040-44-2019 от 24.09.2019).

Как известно из экспериментов, у пористых материалов наблюдается зависимость процессов сдвигового и объемного деформирования, зависимость кривых «интенсивность напряжений – интенсивность деформаций» и «объемное напряжение – объемная деформация» от пути деформирования (вида напряженного состояния).

В работе Е.В. Ломакина [4] на основе нелинейной теории упругости предложен потенциал для описания поведения таких материалов

$$\Phi = \Phi(\sigma_u, \xi), \quad \xi = \frac{\sigma}{\sigma_u}.$$

Если поведение материала при нагрузке удовлетворяет таким условиям

$$\sigma_u = \sigma_u(\varepsilon_u, \theta), \quad \sigma = \sigma(\varepsilon_u, \theta), \quad \frac{\partial \sigma_u}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_u},$$

то краевая задача будет самосопряженной. Выполнение этих условий нужно проверять экспериментально.

## 1. СОСТАВ И ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ИССЛЕДУЕМЫХ ПЕСЧАНЫХ ГРУНТОВ

Для исследований были выбраны два песка близкого минерального состава, но различной крупности. Гранулометрический состав песков определялся ситовым методом и представлен в Таблице 1. Согласно ГОСТ 25100-2020 «Грунты. Классификация», песок №1 – крупный, песок №2 – мелкий. По минеральному составу пески кварцевые (Таблица 2).

Таблица 1.

Гранулометрический состав исследуемых песков.

Размер частиц, мм	Название частиц	Содержание, %	
		Песок №1	Песок №2
>2	гравий, дресва	2	0
1<x<2	грубые	83	0
0.5<x<1	крупные	15	1
0.25<x<0.5	средние	0	21
0.1<x<0.25	мелкие	0	71
0.05<x<0.1	тонкие	0	6
<0.05	пылеватые	0	1

Таблица 2.

Минеральный состав песчаных грунтов.

Песок	Кварц, %	Иллит, %	Каолинит, %	Плагиоклазы, %	КПШ, %	Хлорит, %
Крупный	94.4	1.6	–	2.1	1.9	Следы
Мелкий	96.9	2.5	0.6	–	–	–

Перед испытаниями песок утрамбовывали ступкой до максимально плотного состояния. Плотность песков ( $\rho$ ), плотность материала зерен ( $\rho_s$ ) и пористость ( $n$ ) приведены в Таблице 3.

Таблица 3.

Физические характеристики исследуемого песка.

Песок	Крупный	Мелкий
$\rho_s, \text{г/см}^3$	2.65	2.65
$\rho, \text{г/см}^3$	1.71	1.61
$n, \%$	35	39

## 2. ОПЫТ НА СЖАТИЕ ПЕСКА В ТОНКОЙ ДЕФОРМИРУЕМОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА

Испытания на сжатие песка в металлической оболочке проводились в испытательной машине Zwick Z100 (рис.1) в НИИ механики МГУ.



Рис.1. Проведение опыта на сжатие песка в оболочке в испытательной машине Zwick Z100.

Под действием вертикального сжимающего напряжения  $\sigma_1 < 0$  в радиальном направлении в грунте происходит растяжение, поэтому радиальные и кольцевые деформации положительны:  $\varepsilon_r > 0$ ,  $\varepsilon_\theta > 0$  (вертикальная деформация сжатия отрицательна:  $\varepsilon_1 < 0$ ). Металлическая оболочка частично препятствует расширению грунта в радиальном направлении, поэтому в грунте возникают сжимающие горизонтальные напряжения:  $\sigma_r < 0$  и  $\sigma_\theta < 0$ . Предполагаем, что горизонтальные деформации в грунте везде одинаковы и равны кольцевым деформациям в оболочке  $\varepsilon_\theta^M$ :  $\varepsilon_\theta = \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^M$ . Следовательно, горизонтальные напряжения тоже равны:  $\sigma_r = \sigma_\theta$ . Запишем соотношения для грунта

$$\sigma_1 = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_1 + 2\lambda\varepsilon_\theta, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = 2(\lambda + \mu)\varepsilon_\theta + \lambda\varepsilon_1.$$

Растягивающая сила (в проекции на ось  $X$ ) в металлической оболочке в горизонтальной плоскости равна:  $F_x = \sigma_\theta^M h$  при  $h \ll r$ , где  $\sigma_\theta^M$  – кольцевое растягивающее напряжение в металлической оболочке. Из интегрального уравнения равновесия для металлической оболочки в направлении оси  $X$

$$F_x + \int_0^{\pi/2} \sigma_r r \cos \varphi d\varphi = 0, \quad F_x = - \int_0^{\pi/2} \sigma_r r \cos \varphi d\varphi = -\sigma_r r \sin \varphi \Big|_0^{\pi/2} = -\sigma_r r$$

получаем соотношения:  $\sigma_r = -\sigma_0^M \frac{h}{r}$ ,  $\sigma_0^M = E_M \varepsilon_0^M$ . Отсюда  $\sigma_r = -\left(\frac{h}{r}\right) E_M \varepsilon_0$ .

В результате получаем соотношения для грунта и оболочки

$$\sigma_1 = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_1 + 2\lambda \varepsilon_0, \quad -\left(\frac{h}{r}\right) E_M \varepsilon_0 = 2(\lambda + \mu) \varepsilon_0 + \lambda \varepsilon_1,$$

из которых можно определить параметры  $\lambda$  и  $\mu$ . Здесь вертикальная деформация  $\varepsilon_1$  задается, а вертикальное напряжение  $\sigma_1$  и кольцевая деформация оболочки  $\varepsilon_0$  измеряются.

Интенсивности девиаторов деформаций  $\varepsilon_u = \sqrt{e_{ij} e_{ij}}$  и напряжений  $\sigma_u = \sqrt{s_{ij} s_{ij}}$  для опыта на сжатие в оболочке имеют вид

$$\varepsilon_u = \sqrt{\frac{2}{3}} (\varepsilon_0 - \varepsilon_1), \quad \sigma_u = -\sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sigma_1 + \left(\frac{h}{r}\right) E_M \varepsilon_0 \right).$$

Среднее гидростатическое давление  $\sigma$  и объемная деформация  $\theta$  равны

$$\sigma = \frac{1}{3} \left( \sigma_1 - 2 \left(\frac{h}{r}\right) E_M \varepsilon_0 \right), \quad \theta = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_0.$$

Формулы для вычисления коэффициента поперечной деформации  $\nu$  как функции от  $\theta$

$$\mu = \frac{1}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)} \left( \sigma_1 + \left(\frac{h}{r}\right) E_M \varepsilon_0 \right) = \frac{\sigma_u}{2\varepsilon_u}, \quad \lambda = \frac{1}{\theta} (\sigma_1 - 2\mu\varepsilon_1), \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Испытания проводились с заданной постоянной скоростью деформации  $5.6 \cdot 10^{-3}$  1/с. Оболочка из дюралюминия диаметром 80.6 мм, высотой 30 мм и толщиной 1 мм. Предварительное уплотнение и водонасыщение образцов осуществлялись непосредственно в оболочке. Вертикальная нагрузка передавалась на образец через поршень диаметром 79 мм.

В процессе опыта задавались вертикальные перемещения образца, измерялись вертикальное напряжение и кольцевая деформация оболочки. Для измерения кольцевых деформаций оболочки использовались 4 тензометрических датчика, установленные в верхней и нижней частях металлической оболочки диаметрально противоположно друг другу. Кольцевые деформации усреднялись по 4-м датчикам. Проводилось 5 циклов нагрузки до 3 МПа с последующими разгрузками до 0.04 МПа. Для каждого условия опыт проводился трижды.

Рассмотрим результаты экспериментов на сжатие в оболочке для сухих и водонасыщенных крупных и мелких песков.

На рис.2 показаны графики зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций для водонасыщенных крупного и мелкого песков для пяти циклов нагружения. Как видно, после первого цикла песок сильно уплотняется, далее с каждым циклом песок уплотняется, но гораздо меньше. Кривые, соответствующие третьему, четвертому и пятому циклам, практически совпадают. Поэтому далее будем рассматривать графики для второго цикла нагружения (рис.3-8). Также видно, что мелкий песок (рис.2б) больше деформируется, чем крупный (рис.2а).

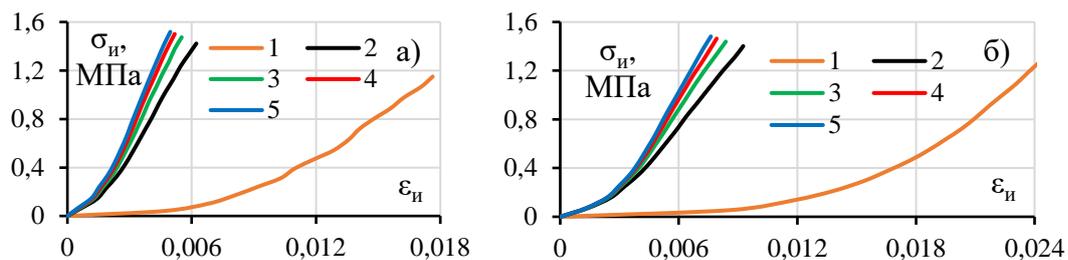


Рис.2. Зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций для водонасыщенных крупного (а) и мелкого (б) песков. В легенде обозначены номера циклов нагружения.

На рис.3 и рис.4 приведены графики «интенсивность напряжений – интенсивность деформаций» и «среднее напряжение – объемная деформация» для крупных и мелких сухих и водонасыщенных песков для второго цикла нагружения. Разброс кривых для песка каждого типа (крупного или мелкого) и состояния (сухого или водонасыщенного) не превышает 10%, что свидетельствует о хорошем совпадении результатов опытов. Видно, что кривые для сухих крупных песков не сильно отличаются по наклону от кривых для водонасыщенных крупных песков (рис.3а,4а). А кривые для водонасыщенных мелких песков гораздо более пологие, чем кривые для сухих мелких песков (рис.3б,4б). Следовательно, при одних и тех же напряжениях мелкие водонасыщенные пески деформируются сильнее, чем мелкие сухие.

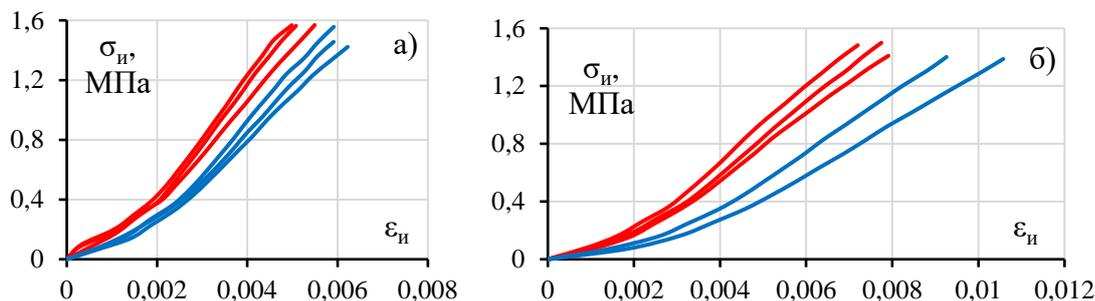


Рис.3. Зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций для крупного (а) и мелкого (б) песков – сухих (красн.) и водонасыщенных (син.).

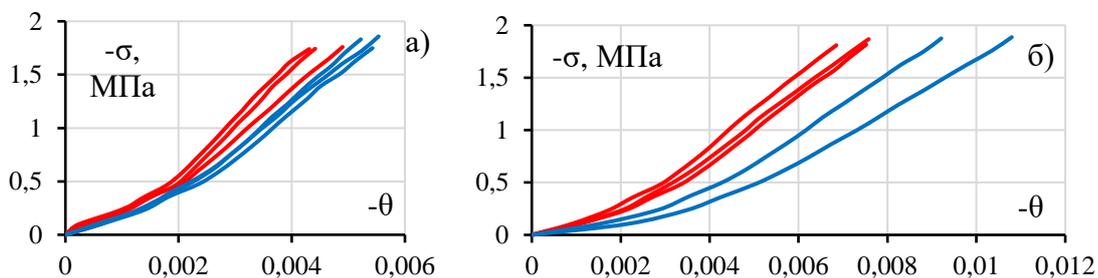


Рис.4. Зависимости среднего напряжения от объемной деформации для крупного (а) и мелкого (б) песков – сухих (красные) и водонасыщенных (синие).

На рис.5 и рис.6 представлены графики зависимости секущего модуля сдвига и секущего модуля объемного сжатия/расширения от объемной деформации для крупных и мелких сухих и водонасыщенных песков для второго цикла нагружения. Как видно, крупный песок характеризуется более высокими

значениями модуля сдвига и модуля объемного сжатия/расширения, чем мелкий, а значения модулей для сухих песков выше, чем для водонасыщенных.

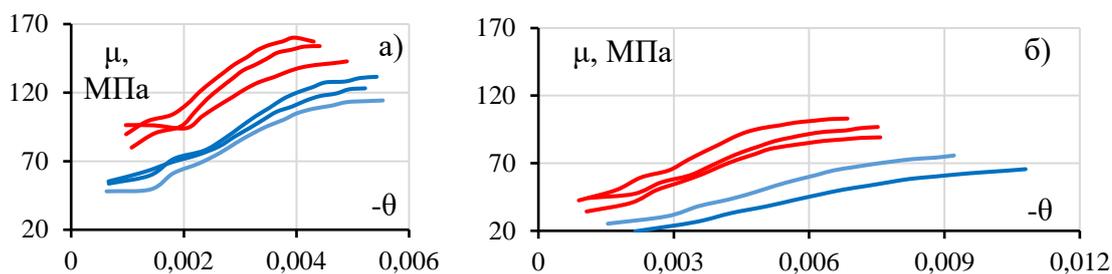


Рис.5. Зависимости секущего модуля сдвига от объемной деформации для крупного (а) и мелкого (б) песков – сухих (красные) и водонасыщенных (синие).

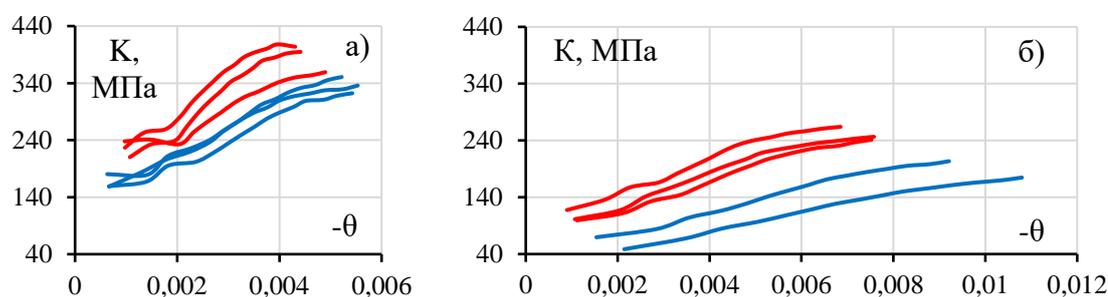


Рис.6. Зависимости секущего объемного модуля от объемной деформации для крупного (а) и мелкого (б) песков – сухих (красные) и водонасыщенных (синие).

На рис.7 приведены осредненные графики зависимости коэффициента Пуассона от объемной деформации для крупных и мелких сухих и водонасыщенных песков для второго цикла нагружения. Как было обнаружено, для конкретного типа и состояния песка коэффициент Пуассона слабо меняется (не более чем на 10%) и выходит на константу с увеличением величины объемной деформации. Следовательно, в модели коэффициент Пуассона можно принимать постоянной величиной для конкретного типа и состояния грунта (см. Таблицу 4).

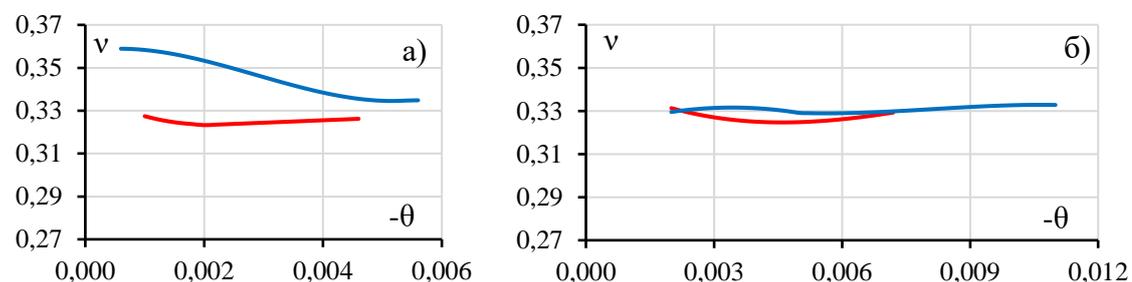


Рис.7. Осредненные графики зависимости коэффициента Пуассона от объемной деформации для крупного (а) и мелкого (б) песков – сухих (красные) и водонасыщенных (синие).

Таблица 4.

Значения коэффициента Пуассона исследуемых песков.

Песок	Сухой	Водонасыщенный
Крупный	0.325	0.340
Мелкий	0.328	0.332

Опыты на сжатие песка в оболочке происходят при малых деформациях. Теперь рассмотрим опыты на многоплоскостной срез, при которых происходят большие деформации сдвига [5].

### 3. ИСПЫТАНИЯ ПЕСКА НА МНОГОПЛОСКОСТНОЙ СРЕЗ

Опыты на сдвиг песчаных грунтов определялись с помощью установки простого сдвига (многоплоскостного среза) ООО НПП «Геотек» (рис.8) [5].

Испытания песчаного грунта проводились в кинематическом режиме приложения сдвигающей нагрузки с заданной постоянной скоростью деформации сдвига по схеме консолидировано-дренированного сдвига (КД) при постоянном вертикальном давлении, чтобы исследовать, как меняется объем песка при деформации сдвига. Консолидация образцов перед испытанием на сдвиг осуществлялась в одну ступень при открытом дренаже при следующих значениях эффективного вертикального напряжения консолидации: 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 МПа. Опыты проводились со следующими скоростями деформации сдвига:  $4 \cdot 10^{-4}$ ,  $2 \cdot 10^{-3}$ ,  $4 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ , чтобы исследовать влияние скорости деформации на сдвиговые свойства песчаных грунтов. В приборе многоплоскостного среза кольца не связаны друг с другом, поэтому иногда многоплоскостной срез переходит в одноплоскостной срез по наиболее слабой поверхности сдвига.



Рис.8. Сборка комплекса АСИС для испытаний на многоплоскостной срез (ООО НПП «Геотек»).

По результатам испытаний были построены графики зависимости касательных напряжений ( $\sigma_{12}$ ) и объемной деформации ( $\theta$ ) от сдвиговых деформаций ( $\varepsilon_{12}$ ) для различных значений вертикального напряжения ( $\sigma_{11} = const$ ) при различных скоростях деформации.

На рис.9 и рис.10 для примера показаны графики зависимости  $\sigma_{12}$  и  $\theta$  от  $\varepsilon_{12}$  для крупного водонасыщенного песка при вертикальном давлении 0.2 и 0.4 МПа.

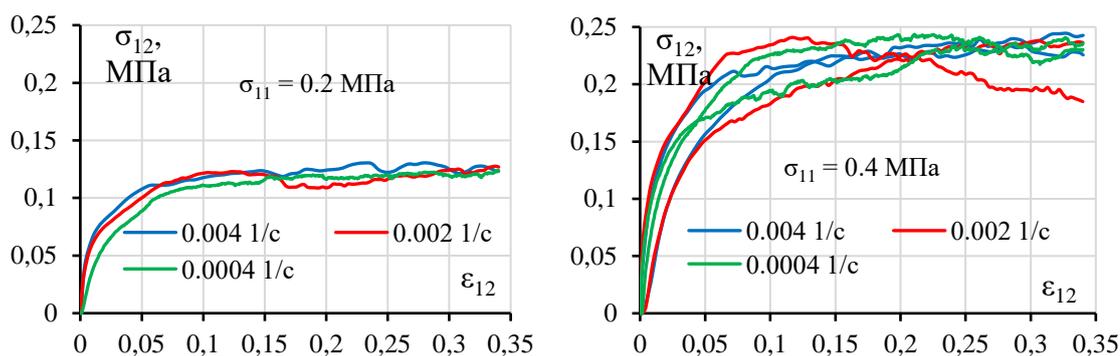


Рис.9. Зависимости касательного напряжения от сдвиговой деформации для крупного водонасыщенного песка.

Как видно (рис.9), графики зависимости  $\sigma_{12}$  от  $\varepsilon_{12}$  имеют небольшой разброс, зависимость от скорости деформации не наблюдается. На рис.9 видно, что в большинстве опытов происходит упрочнение при сдвиге, но на рис.9 справа в одном опыте можно наблюдать переход многоплоскостного среза в одноплоскостной по наиболее слабой поверхности (по причине отсутствия связи между кольцами в приборе).

При деформации сдвига песок меняет объем (рис.10), причем при небольших вертикальных давлениях (0.2 МПа) увеличение объема крупного водонасыщенного песка при сдвиге больше, чем при больших давлениях (0.4 МПа). Зависимости кривых  $\theta$  от  $\varepsilon_{12}$  от скорости деформации также не наблюдается (рис.10).

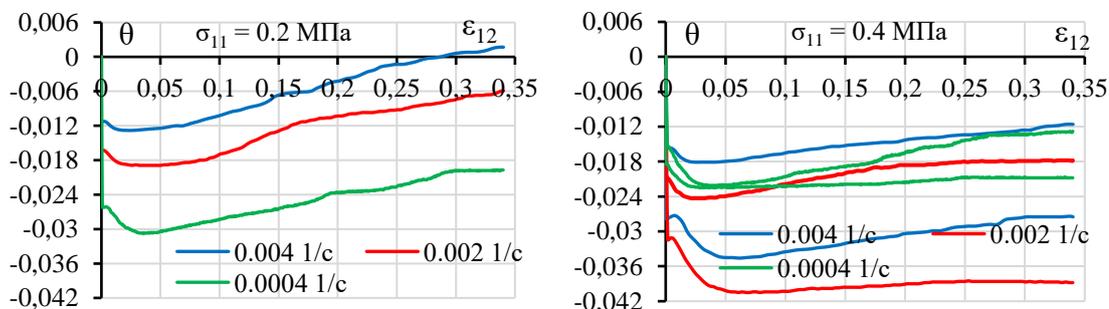


Рис.10. Зависимости объемной деформации от сдвиговой деформации для крупного водонасыщенного песка.

По значениям  $\sigma_{12}$  и  $\varepsilon_{12}$  были рассчитаны интенсивности деформаций и интенсивности напряжений по следующим формулам [5]

$$\varepsilon_u = \sqrt{\frac{2}{3}\theta^2 + 2\varepsilon_{12}^2}, \quad \sigma_u = \sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)^2 \sigma_{11}^2 + 2\sigma_{12}^2}.$$

В опыте на многоплоскостной срез  $\theta = \varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$ . Для расчета  $\sigma_u$  использовались значения коэффициента Пуассона, найденные в опыте на сжатие песков в оболочке (см. Таблицу 4).

Для примера на рис.11 показаны графики зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций для крупного водонасыщенного песка при вертикальном давлении 0.2 и 0.4 МПа.

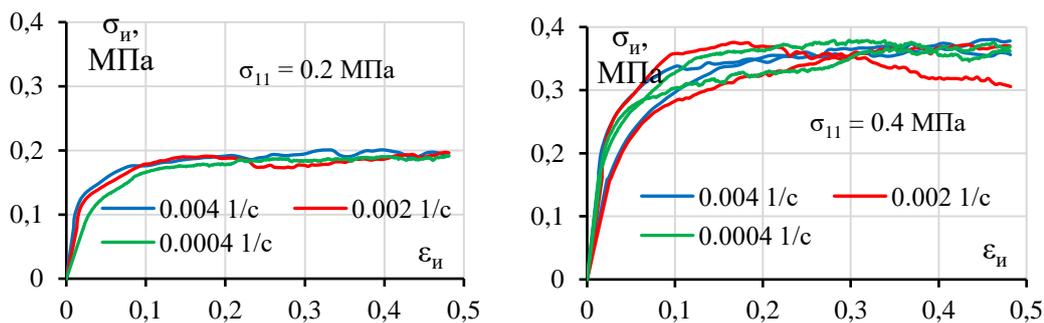


Рис.11. Зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций для крупного водонасыщенного песка.

В опытах на многоплоскостной срез деформации сдвига большие (до 35%), а объемные деформации малые (до 4%) и соизмеримы с объемными деформациями в опыте на сжатие песка в оболочке.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На имеющемся оборудовании проведена серия экспериментов, которые нужны для определения материальных параметров деформационной теории.

Предложена схема модифицированного опыта на сжатие песка в деформируемой металлической оболочке для определения коэффициента Пуассона. Обнаружено, что коэффициент поперечной деформации слабо меняется в зависимости от объемной деформации песка. Следовательно, в модели можно считать коэффициент поперечной деформации постоянной величиной для данного грунта и данного состояния грунта.

Как показали эксперименты, объемная деформация песка при сдвиге соизмерима с объемной деформацией в опытах на сжатие. В модели ее нужно либо учитывать, либо считать материал несжимаемым по сравнению с гораздо большими деформациями сдвига.

В дальнейшем мы планируем провести опыты на сдвиг на установке истинного трехосного сжатия. Такие опыты упрощают получение параметров деформационной теории, позволяют выявить влияние пути нагружения, позволяют определить влияние третьего инварианта (вида деформационного состояния).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А. *Пластичность Ч.1. Уруго-пластические деформации.* – М., Л.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
2. Быков Д.Л. *Основные уравнения и теоремы для одной модели физически нелинейной среды* // Инж. журн. МГТ. – 1966. – №4. – С.58-64.
3. Агахи К.А., Кузнецов В.Н. *К теории пластичности материалов, учитывающей влияние гидростатического давления* // Уругость и неугругость. – 1978. – Вып.5. – С.46-52.
4. Ломакин Е.В. *Определяющие соотношения деформационной теории для дилатирующих сред* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1991. – №6. – С.66-75.
5. Артамонова Н.Б., Шешенин С.В. *К вопросу идентификации параметров нелинейной модели консолидации песчаного грунта* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – №1. – С.31-44.

УДК 69  
EDN BOHONE (<https://elibrary.ru/bohone>)  
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.33



## **ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЕМОГО КОМПЕНСАЦИОННОГО НАГНЕТЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЯ С РАСШИРЕННЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ВАРЬИРУЕМЫХ ФАКТОРОВ**

Дейнеко А.В.<sup>1</sup>, Симутин А.Н.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ООО «Сигма Тау», г. Москва, Россия

<sup>2</sup>ООО «Монитрон», г. Москва, Россия

### **УПРАВЛЯЕМОЕ КОМПЕНСАЦИОННОЕ НАГНЕТЕНИЕ**

Управляемое компенсационное нагнетание [0-5] относится к специальным геотехническим работам и применяется в различных случаях, часто, в уникальных. Типичным сценарием является подъем зданий или сооружений для компенсации неприемлемой дополнительной осадки: как ремонтно-восстановительное мероприятие, когда дополнительная осадка уже проявилась, или как проектное мероприятие геотехнической защиты параллельно с процессом дополнительной осадки (когда эта осадка спрогнозирована и решается задача ее не допустить).

Основная идея управляемого компенсационного нагнетания заключается в том, чтобы инъекции в грунт выполнялись без гидроразрыва с использованием вязкого медленнотвердеющего раствора. Таким образом, подаваемый раствор «раздвигает» существующий грунт, не перемешиваясь с ним. В месте инъекции формируется объемное включение сравнительно правильной формы, стремящейся к эллипсоиду (в соответствии с направлением главных напряжений в грунте). После набора прочности раствор приобретает физико-механические свойства не хуже, чем у грунта, и может рассматриваться как искусственный грунт.

Каждое объемное включение имеет четко определенное местоположение и четко определенный объем, для этого инъекции выполняются через манжетные колонны с помощью пакера, а объем раствора дозируется. Это определяет управляемость процесса компенсационного нагнетания, т.е. возможность рассчитать воздействие от каждой инъекции на подъем сооружения, чтобы добиться целевого подъема.

На практике требуемый подъем обычно неравномерный, как и компенсируемая дополнительная осадка. Поэтому подбор распределения объемов искусственного грунта, чтобы добиться нужного подъема сооружения, является нетривиальной задачей.

### **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Схематичная конечно-элементная модель напряженно-деформированного состояния (НДС) при управляемом компенсационном нагнетании показана на рис.1. Инъекции моделируются как объемное расширение конечных

элементов. Можно заметить, что перемещения грунта вокруг зоны нагнетания превышают перемещения поднимаемого сооружения.

Если рассматривать модель в упругой постановке, то подъем сооружения был бы линейно связан с объемом инъекций. Однако процесс компенсационного нагнетания сопряжен со всеми видами нелинейности:

- физическая (большие деформации грунта);
- конструктивная (сдвиги и раскрытия по контакту бетон-грунт);
- генетическая (поэтапность нагнетания);
- геометрическая (большие перемещения).

Поэтому действительная зависимость подъема от объема инъекций будет нелинейной и описывается квадратичным полиномом, как видно на рис.2.

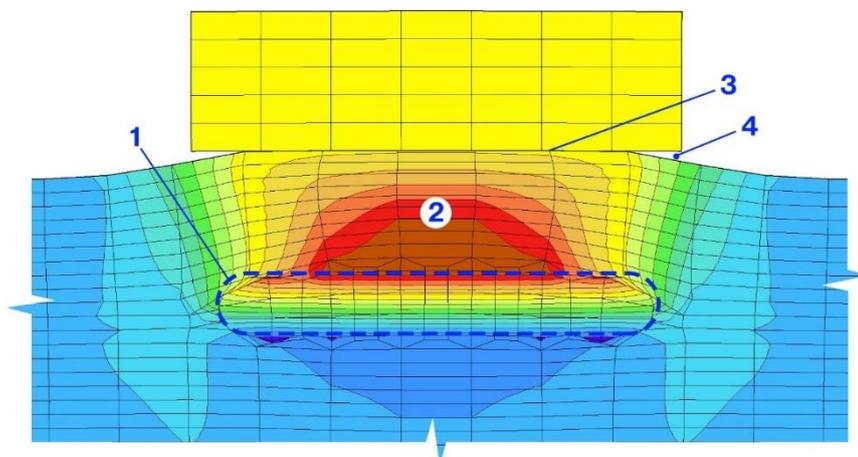


Рис.1. Схематичная конечно-элементная модель НДС при компенсационном нагнетании (масштаб перемещений увеличен): 1 – зона нагнетания; 2 – большие перемещения и деформации грунта вокруг зоны нагнетания; 3 – сдвиг по контакту бетон-грунт; 4 – раскрытие контакта бетон-грунт.

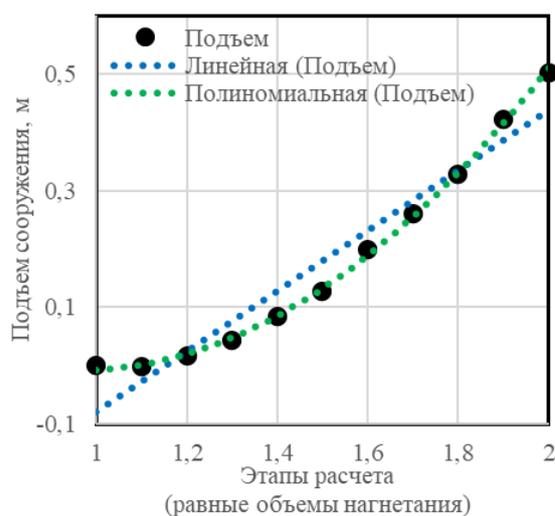


Рис.2. Нелинейная зависимость подъема сооружения от объема инъекций.

## МОНИТОРИНГ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Теоретический характер подъема подтверждается результатами геотехнического мониторинга, который необходим, чтобы своевременно

корректировать распределение объема инъекцией по манжетам для достижения целевого подъема сооружения.

Для мониторинга подъема хорошо подходит технология автоматизированного гидростатического нивелирования. Его принцип заключается в создании системы сообщающихся сосудов, внутри которых уровень жидкости занимает равную высотную отметку, как видно на рис.3. Далее измерительные сосуды перемещаются вместе с конструкциями, на которых они закреплены. Уровень жидкости находится на единой высотной отметке, а глубина жидкости в каждом сосуде меняется по ходу подъема. Отсчет вертикальных перемещений обычно ведется относительно опорного сосуда, вынесенного за пределы зоны ожидаемых перемещений.

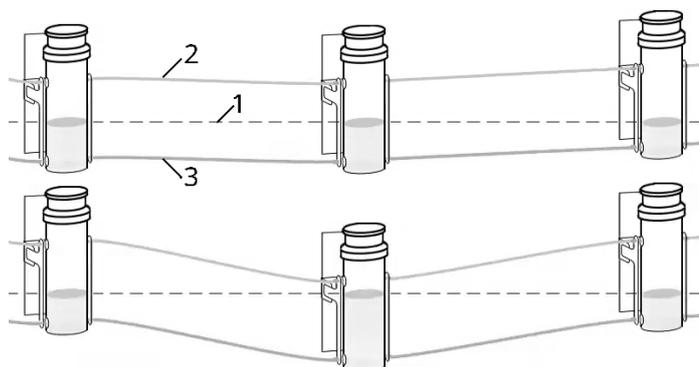


Рис.3. Принцип работы системы гидростатического нивелирования: 1 – уровень жидкости; 2 – шланг воздушной трассы; 3 – шланг гидравлической трассы.

Измерительные сосуды соединяются гибкими шлангами, трасса которых может иметь любую форму в плане, делая повороты для обхода препятствий или прохода через существующие проемы. Не требуется прямая видимость между датчиками. Поэтому автоматизированное гидростатическое нивелирование особенно эффективно для наблюдений внутри сооружения (в подвалах и первых этажах, по вентилируемым ростверкам зданий или резервуаров, в потернах плотин). Это особенно важно для наблюдения за процессом управляемого компенсационного нагнетания, что требует контроля по всей площади сооружения.

Все датчики гидростатического нивелирования работают параллельно, это позволяет отслеживать вертикальные перемещения в режиме реального времени, что также актуально для задач управляемого компенсационного нагнетания.

Авторы работают с гидростатическими нивелирами «Монитон» российского производства. Серийно выпускаются датчики гидростатического нивелира цифровые ДГЦ-19, включенные в Государственный реестр средств измерений (Госреестр СИ). Точность снятия показаний  $\pm 0,05$  мм при диапазоне измерений 100 мм. Цикличность 1 раз в минуту. Температурный диапазон эксплуатации от минус 65 до плюс 50°C. Степень защиты оболочки IP 66, маркировка взрывозащиты 1Ex db IIC T6 Gb X. Базовый срок службы 15 лет.

Система «Монитрон» представляет собой программно-аппаратный комплекс мониторинга под ключ, датчики быстро разворачиваются на объекте и по умолчанию подключаются через интернет к личному кабинету пользователя на портале <https://monitron.ru>, откуда осуществляется доступ к данным и их анализ с помощью веб-интерфейса.

## ПЛАНИРОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Выше рассмотрены подходы к определению расчетного подъема сооружения от запланированных инъекций, и к измерению фактического подъема от произведенных инъекций. Возникает задача: подобрать распределение объемов инъекций по манжетам, чтобы добиться целевого подъема сооружения. А также сопутствующая задача по ходу подъема: перераспределить последующие объемы инъекций для повышения эффективности подъема (уменьшения расхода компенсационного раствора на единицу высоты подъема), а также для корректировки неравномерного подъема с учетом результатов высокоточного нивелирования.

Решение этой задачи предлагается на основе теории планирования эксперимента (ТПЭ) [6]. На манжетном поле выберем ключевые манжеты  $\{X_1, X_2 \dots X_9\}$ , как показано на рис.4.

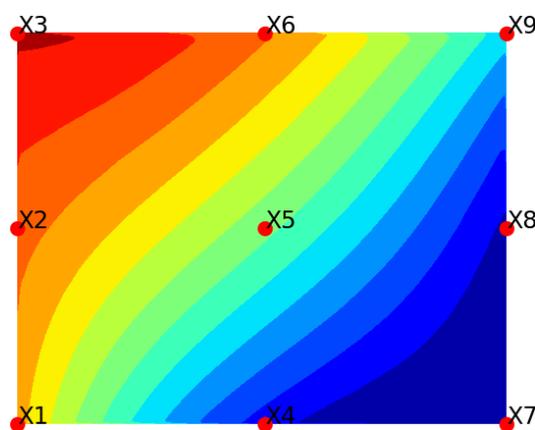


Рис.4. Выбор 9 ключевых манжет и возможный вид сплайн-аппроксимации распределения объемов инъекций

Будем подбирать оптимальные объемы инъекций в выбранных манжетах, тогда как объемы инъекций во всех остальных манжетах будем определять по сплайновой интерполяции, которая отличается гладкостью. По терминологии ТПЭ объемы инъекций в выбранных манжетах будем называть факторами.

Поскольку зависимость между объемом инъекций и подъемом описывается квадратичным полиномом, для ее определения требуется, чтобы каждый фактор варьировался на трех уровнях.

Чтобы найти оптимальные значения варьируемых факторов необходимо провести численные опыты, т.е. МКЭ-расчеты, при различных комбинациях варьируемых факторов. Соответственно, в каждом расчете принимаются конкретные значения объемов  $\{X_1, X_2 \dots X_9\}$ , выполняется интерполяция по манжетному полю и определяются конкретные значения объемов в каждой манжете. Во всех вариантах суммарный объем инъекций на все манжеты принимается равным.

После завершения численных опытов находится функция отклика, которая связывает величину подъема со значениями факторов. Далее методами математического анализа находится экстремум этой функции и определяются аргументы максимизации, т.е. значения факторов, при которых подъем достигает максимального значения.

В ТПЭ комбинации факторов не обязательно являются рациональными сценарными вариантами подъема, они в первую очередь должны быть подходящими с математической точки зрения, чтобы построить функцию отклика. Цель планирования эксперимента не в переборе комбинаций факторов, а в составлении минимального количества комбинаций, достаточного для построения функции отклика, чтобы далее методами математического анализа функции отклика обнаружить новую комбинацию факторов, которое ранее не рассматривалось, но которая обеспечивает наилучший результат.

Центральным вопросом ТПЭ является выбор плана эксперимента, т.е. перечня комбинаций варьируемых параметров.

Имеем: количество факторов  $k=9$  (что принято из геометрических соображений для описания сплайновой интерполяции), количество уровней варьирования  $p=3$ , степень полинома  $d=2$ . Возможное количество сочетаний  $p^k$  для 9 факторов составляет 19683, что формирует полный факторный эксперимент (ПФЭ  $3^k$ ), т.е. перебор всех возможных комбинаций. Функция отклика ищется в виде квадратичного полинома

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \cdot X_i + \sum_{i=1}^k b_{ii} \cdot X_i^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k b_{ij} \cdot X_i \cdot X_j,$$

где  $b_0$  – свободный член регрессии,  $b_i$  – коэффициенты регрессии.

Количество коэффициентов регрессии  $N = (k+d)! / (k! \cdot d!)$ , что для 9 факторов составляет 55. Это минимальное количество комбинаций, необходимое для оценки коэффициентов регрессии методом наименьших квадратов.

В случае ПФЭ  $3^k$  коэффициент избыточности составит  $3^k / N = 19683 / 55 \approx 358$ . Это показывают явную избыточность ПФЭ  $3^k$  для данной задачи.

Для таких случаев в ТПЭ разработаны оптимальные, экономичные по количеству комбинаций, планы экспериментов. Среди планов второго порядка, т.е. с тремя уровнями варьирования, можно выделить:

- семейство центральных композиционных планов (ЦКП), или план Бокса-Вильсона (Box-Wilson) [7];
- план Бокса-Бенкена (Box-Behnken) [8].

Схема факторного пространства при  $k=3$  показана на рис.5.

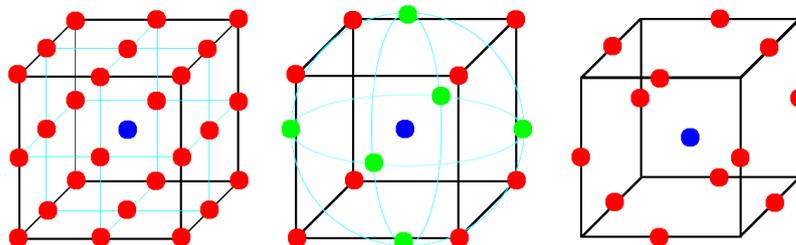


Рис.5. Схема факторного пространства при  $k=3$ : 1 – ПФЭ, 2 – план Бокса-Вильсона, 3 – план Бокса-Бенкена; синий – комбинация средних уровней всех факторов; красный – комбинации, при которых 1-3 фактора равны по модулю 1, зеленый – звездные точки, в которых один фактор по модулю больше 1.

В плане Бокса-Вильсона сокращение количества комбинаций достигается тем, что пропускаются комбинации с участием средних уровней варьирования факторов (по центру ребер куба). Точки по центру граней куба заменяются на так называемые звездные точки, вынесенные дальше, чем угловые, в них увеличенное значение одного фактора смешивается со средними значениями других.

В плане Бокса-Бенкена, наоборот, пропускаются комбинации, в которых все факторы на экстремальных уровнях варьирования (в углах куба).

Как представляется, именно план Бокса-Бенкена лучше всего подходит для описания компенсационного нагнетания, потому что ожидаемый оптимум представляет собой скорее не произвольное сочетание варьлируемых факторов, а некоторое отклонение от начального приближения, задаваемого по геотехническим соображениям. Поэтому можно ожидать, что сравнительно далеко от центра факторного пространства будет отклоняться меньшинство факторов, тогда как большинство факторов будет оставаться ближе к центру.

Планы Бокса-Бенкена разработаны для определенных значений  $k$ . Часто рассматриваются только  $3 \leq k \leq 7$ , например, в функции генерации планов эксперимента в известной математической программе Mathcad, или в онлайн-генераторе DATAtab. В то же время, планы Бокса-Бенкена разработаны и для более высоких значений  $k$ , а именно для 9, 10, 11, 12 и 16 [8]. Таким образом, для решения поставленной используется план при  $k=9$ , который предусматривает 130 сочетаний, из которых 10 повторяющихся в центре факторного пространства, что дает 121 уникальный численный опыт.

## РАСШИРЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ВАРЬИРУЕМЫХ ФАКТОРОВ

Рассмотренная выше задача на рис.4 при  $k=9$  предполагает постулирование характера распределения объемов инъекций между выбранными ключевыми манжетами  $\{X_1, X_2 \dots X_9\}$ , соответствующего выбранному количеству и местоположению манжет, а также выбранному типу аппроксимации. Однако нет оснований считать, что именно такое распределение, описанное сплайн-аппроксимацией по 9 точкам, будет оптимальным, учитывая нелинейность процесса компенсационного нагнетания, сложность исходного напряженного состояния, конфигурацию подошвы фундамента и другие особенности поднимаемого сооружения.

Более того, форма оптимального распределения объемов инъекций априори неизвестна. Это не позволяет заранее выбрать количество и местоположение ключевых манжет, чтобы построить по ним лучшую аппроксимацию.

Решение этой проблемы представляется возможным с увеличением количества ключевых манжет, чтобы они с достаточной плотностью покрыли всю площадь манжетного поля. Тогда заранее неизвестная форма оптимального распределения объемов инъекций будет обнаружена в результате поиска аргументов максимизации функции отклика.

Если сравнить ключевые манжеты с пикселями экрана, то неизвестная форма оптимального распределения «проявится» на «экране». Такой подход, когда характер результата определялся в ходе расчетов, в межотраслевой практике называется генеративным (порождающим) дизайном. Пример подобной формы при использовании 50 манжет на рис.6.

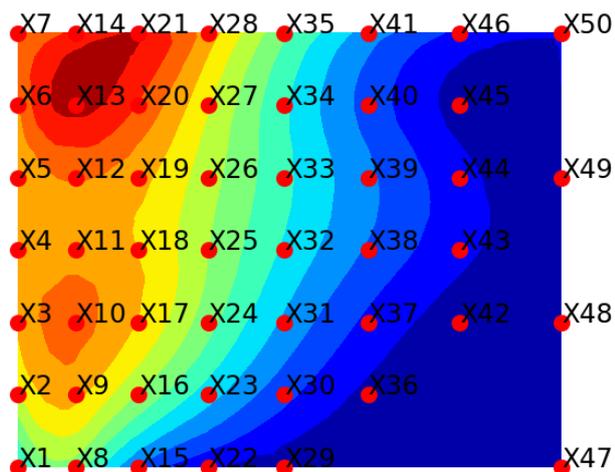


Рис.6. Выбор 50 ключевых манжет и возможный вид сплайн-аппроксимации распределения объемов инъекций.

Основная сложность для планирования эксперимента с расширенным количеством факторов заключается в том, что оптимальные планы, в частности план Бокса-Бенкена, для такого количества факторов отсутствуют. Однако, как представляется, их возможно составить по аналогии.

### СОСТАВЛЕНИЕ ПЛАНОВ С УВЕЛИЧЕННЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ФАКТОРОВ

Существующие планы Бокса-Бенкена составлены одним из четырех способов. Во всех случаях при составлении строк плана все неоговоренные факторы принимаются на среднем уровне. Оставшиеся 2-5 факторов комбинируются между собой во всех возможных сочетаниях своих минимальных и максимальных уровней варьирования. Это комбинирование выполняется согласно плану полного факторного эксперимента (ПФЭ). Кроме того, добавляются несколько строк, где все факторы на среднем уровне.

Получаются следующие варианты комбинирования минимальных и максимальных уровней варьирования факторов в строках плана:

- по два фактора согласно матрице ПФЭ  $2^2$  (при  $k$  равных 3, 4, 5);
- по три фактора согласно матрице ПФЭ  $2^3$  (при  $k$  равных 6, 7, 9);
- по четыре фактора согласно о матрице ПФЭ  $2^4$  (при  $k$  равных 10, 12, 16);
- по пять факторов согласно матрице ПФЭ  $2^5$  (при  $k = 11$ ).

Принятая нотация: -1, 0, +1 соответствует минимальному, среднему и максимальному уровню варьирования. На схеме плана обозначение  $\pm 1$  означает, что данный фактор комбинируется согласно матрице ПФЭ, это значит, что данная строка заменяется на число строк матрицы ПФЭ.

Для примера рассмотрим схему плана Бокса-Бенкена при  $k = 3$ . В первых трех строках схемы плана комбинируется по два фактора на минимальных и максимальных уровнях согласно матрице ПФЭ  $2^2$ . Схема плана имеет вид:

$X_1$	$X_2$	$X_3$	Примечание
$\pm 1$	$\pm 1$	0	4 строки ПФЭ $2^2$
$\pm 1$	0	$\pm 1$	—"—
0	$\pm 1$	$\pm 1$	—"—
0	0	0	повтор 3 раза

Матрица ПФЭ  $2^2$  имеет вид:

$X_i$	$X_j$
-1	-1
1	-1
-1	1
1	1

Подставляя матрицу ПФЭ  $2^2$  в схему плана, получим план эксперимента:

№ комбинации	$X_1$	$X_2$	$X_3$
1	-1	-1	0
2	1	1	0
3	-1	-1	0
4	1	1	0
5	-1	0	-1
6	1	0	1
7	-1	0	-1
8	1	0	1
9	0	-1	-1
10	0	1	1
11	0	-1	-1
12	0	1	1
13	0	0	0
14	0	0	0
15	0	0	0

Как представляется, применение более сложных схем комбинирования при  $k > 5$ , когда в одной строке встречаются по три-пять факторов на минимальных и максимальных уровнях варьирования, направлено на повышение экономичности плана (уменьшения количества комбинаций). Однако повышение экономичности в зависимости от способа комбинирования невелико по сравнению с выигрышем плана Бокса-Бенкена по сравнению с ПФЭ  $3^k$ . Так, для 50 факторов  $3^{50}$  имеет порядок  $10^{23}$ , тогда как план Бокса-Бенкена будет иметь порядок  $10^3$ , что укладывается в реальные возможности численного экспериментирования.

Поэтому представляется возможным применить способ комбинирования на основе ПФЭ  $2^2$  к необходимому количеству факторов. Как представляется, комбинирование на основе ПФЭ  $2^2$  будет давать более простую конфигурацию гиперкуба факторного пространства и обеспечивать достаточный уровень ротатабельности без проведения дополнительных исследований, выходящих за рамки настоящей работы в области управляемого компенсационного нагнетания.

Введем обозначения: ББк – количество строк классических планов Бокса-Бенкена [8], ББд – количество строк составленных дополнительных планов. Количество строк приводится с учетом комбинаций факторов на среднем уровне варьирования. К составляемым планам добавляются  $k$  таких комбинаций. Параметры полученных планов для  $3 \leq k \leq 100$  сведены в таблицу.

Для сопоставления вариантов комбинирования дополнительные планы составлены, в том числе, для значений  $k$ , для которых имеются оригинальные

планы Бокса-Бенкена. В этом случае количество комбинаций на среднем уровне принято, как в оригинальных планах. Поэтому при 3, 4 и 5 факторах ББк=ББд.

Дополнительные планы составлены в том числе для значений  $k$ , исключенных при составлении оригинальных планов, а именно 8, 13, 14, 15.

Рассмотренные алгоритмы ТПЭ, включая составление плана эксперимента, расчет функции отклика и поиск аргументов ее максимизации реализованы на основе свободного программного обеспечения на языке Python с использованием математических библиотек NumPy и ScyPy.

## ВЫВОДЫ

1. Управляемое компенсационное нагнетание характеризуется нелинейной зависимостью между объемом инъекций и подъемом сооружения, что аппроксимируется квадратичным полиномом.

2. Распределение объемов инъекций поддается оптимизации по теории планирования эксперимента (ТПЭ) с помощью планов второго порядка типа Бокса-Бенкена. Объемы инъекций в выбранных ключевых манжетах рассматриваются как факторы, варьируемые на 3 уровнях, а объемы инъекций в остальных манжетах определяются по интерполяции. При этом поиск оптимального распределения объемов инъекций ограничивается классом форм распределений, определяемых выбранным набором ключевых манжет и типом интерполяции. Ориентировочно 9 факторов являются минимально необходимым количеством для данной методики, что соответствует 121 уникальному численному опыту.

Таблица.

Параметры планов Бокса-Бенкена: классических и дополнительных.

k	N	ББк	ББд	ББд/N	k	N	ББк	ББд	ББд/N
3	10	15	15	1,5	52	1431	—	5356	3,7
4	15	27	27	1,8	53	1485	—	5565	—" —
5	21	46	46	2,2	54	1540	—	5778	3,8
6	28	54	66	2,4	55	1596	—	5995	—" —
7	36	62	90	2,5	56	1653	—	6216	—" —
8	45	—	120	2,7	57	1711	—	6441	—" —
9	55	130	153	2,8	58	1770	—	6670	—" —
10	66	170	190	2,9	59	1830	—	6903	—" —
11	78	188	232	3,0	60	1891	—	7140	—" —
12	91	204	276	—" —	61	1953	—	7381	—" —
13	105	—	325	3,1	62	2016	—	7626	—" —
14	120	—	378	3,2	63	2080	—	7875	—" —
15	136	—	435	—" —	64	2145	—	8128	—" —
16	153	396	496	—" —	65	2211	—	8385	—" —
17	171	—	561	3,3	66	2278	—	8646	—" —
18	190	—	630	—" —	67	2346	—	8911	—" —
19	210	—	703	—" —	68	2415	—	9180	—" —
20	231	—	780	3,4	69	2485	—	9453	—" —
21	253	—	861	—" —	70	2556	—	9730	—" —
22	276	—	946	—" —	71	2628	—	10011	—" —
23	300	—	1035	3,5	72	2701	—	10296	—" —

24	325	—	1128	—"—	73	2775	—	10585	—"—
25	351	—	1225	—"—	74	2850	—	10878	—"—
26	378	—	1326	—"—	75	2926	—	11175	—"—
27	406	—	1431	—"—	76	3003	—	11476	—"—
28	435	—	1540	—"—	77	3081	—	11781	—"—
29	465	—	1653	3,6	78	3160	—	12090	—"—
30	496	—	1770	—"—	79	3240	—	12403	—"—
31	528	—	1891	—"—	80	3321	—	12720	—"—
32	561	—	2016	—"—	81	3403	—	13041	—"—
33	595	—	2145	—"—	82	3486	—	13366	—"—
34	630	—	2278	—"—	83	3570	—	13695	—"—
35	666	—	2415	—"—	84	3655	—	14028	—"—
36	703	—	2556	—"—	85	3741	—	14365	—"—
37	741	—	2701	—"—	86	3828	—	14706	—"—
38	780	—	2850	3,7	87	3916	—	15051	—"—
39	820	—	3003	—"—	88	4005	—	15400	—"—
40	861	—	3160	—"—	89	4095	—	15753	—"—
41	903	—	3321	—"—	90	4186	—	16110	—"—
42	946	—	3486	—"—	91	4278	—	16471	3,9
43	990	—	3655	—"—	92	4371	—	16836	—"—
44	1035	—	3828	—"—	93	4465	—	17205	—"—
45	1081	—	4005	—"—	94	4560	—	17578	—"—
46	1128	—	4186	—"—	95	4656	—	17955	—"—
47	1176	—	4371	—"—	96	4753	—	18336	—"—
48	1225	—	4560	—"—	97	4851	—	18721	—"—
49	1275	—	4753	—"—	98	4950	—	19110	—"—
50	1326	—	4950	—"—	99	5050	—	19503	—"—
51	1378	—	5151	—"—	100	5151	—	19900	—"—

3. Оптимальная форма распределения объемов инъекций априори неизвестна. Предложена эвристическая методика поиска приближения оптимального распределения путем выбора ключевых манжет на всей площади манжетного поля, достаточно равномерно покрывая его опорными точками для аппроксимации неизвестного распределения. Такой подход соответствует принципу генеративного дизайна. Ориентировочно около 50 факторов являются необходимым количеством для данной методики.

4. Классические планы Бокса-Бенкена известны для количества факторов  $k$ , равного 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12 и 16. При их составлении использованы 4 способа комбинирования максимальных и минимальных уровней варьирования в строке плана: по 2, 3, 4 и 5 факторов. Для решения задачи оптимизации распределения объемов инъекций алгоритмизировано составление дополнительных планов для любого количества факторов свыше 3 на основе методики Бокса-Бенкена, используя способ попарного комбинирования факторов на минимальных и максимальных уровнях согласно матрице ПФЭ  $2^2$ . Остальные факторы остаются на среднем уровне. Добавляются  $k$  комбинаций факторов на среднем уровне.

5. Рассмотренные алгоритмы, включая составление плана эксперимента, расчет функции отклика и поиск аргументов ее максимизации, реализованы на базе свободного программного обеспечения на языке Python с использованием математических библиотек NumPy и ScyPy.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рашендорфер Ю., Жуков В.Н., Майер К. *Компенсационное нагнетание как способ обеспечения устойчивости зданий и сооружений при проходке тоннелей* // Метро и тоннели. – 2008. – №4. – С.26-28.
2. Маковский Л.В., Кравченко В.В. *Применение компенсационного нагнетания при строительстве подземных сооружений в сложных градостроительных условиях* / Транспортное тоннелестроение. Современный опыт и перспективные разработки. Сборник научных трудов ЦНИИС. – 2008. – С.112-120.
3. Bezuijen A. *Compensation Grouting in Sand. Experiments, Field Experiences and Mechanisms: Thesis for the purpose of obtaining the degree of doctor at the Delft University of Technology.* – 2010.
4. Симутин А.Н. *Методики расчета параметров компенсационного нагнетания для управления деформациями оснований зданий и сооружений: дисс. канд. техн. наук.* – М.: Московский государственный строительный университет. 2015. – 165 с.
5. Зерцалов М.Г., Симутин А.Н., Александров А.В. *Применение технологии компенсационного нагнетания при ликвидации дополнительных деформаций основания гидротехнических сооружений на примере гидроузла Неккар* // Гидротехническое строительство. – 2017. – №4. – С.47-51.
6. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. *Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий.* – М.: Наука, 1976.
7. Box G.E.P. and Wilson K.B.. *On the experimental attainment of optimum conditions* // Jour. Roy. Stat. Soc. B. – 1951. – Vol.13. – Pp.1-45.
8. Box G.E.P. and Behnken D.W. *Some New Three Level Designs for the Study of Quantitative Variables* // Technometrics. – 1960. – Vol.2. – Pp.455-475.



## **ВЛИЯНИЕ ШВОВ БЕТОНИРОВАНИЯ ТРАНШЕЙНОЙ СТЕНЫ КОТЛОВАНА НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СИСТЕМЫ «ОГРАЖДАЮЩАЯ КОНСТРУКЦИЯ – ГРУНТ»**

Исаев А.В.<sup>1</sup>, Зерцалов М.Г.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>АО «Центральный научно-исследовательский и проектно-экспериментальный институт промышленных зданий и сооружений – ЦНИИПромзданий»,  
г. Москва, Россия

<sup>2</sup>ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (МГСУ), г. Москва, Россия

### **ВВЕДЕНИЕ**

По мере увеличения размеров городов становится все более актуальным использование подземного пространства для размещения в нём различных типов сооружений, инженерных коммуникаций, транспортных и железнодорожных тоннелей и т.п. Поскольку строительные работы часто проводятся в условиях уже существующей застройки, необходимо принимать меры для защиты соседних зданий и сооружений от сверхнормативных осадок. Например, при отрывке котлованов для строительства открытым способом таких объектов, как станции метро или перегонные тоннели, нужно устанавливать специальные ограждающие конструкции котлованов, выход из строя отдельных элементов которых, или их аварийное состояние, могут привести к разрушению всей конструкции и, как следствие, к недопустимым деформациям сооружений окружающей застройки. Если при строительстве ограждений бортов котлованов уровень грунтовых вод высокий, часто применяют технологию «стена в грунте», позволяющую возводить сооружения, характеризующиеся высокой прочностью и водонепроницаемостью. Её особенность заключается в способе возведения стены отдельными участками (захватками), что приводит к наличию большого количества швов бетонирования, избыточные деформации или некачественное устройство которых, может привести к прорыву воды в котлован и другим аварийным ситуациям. На рис.1 представлены типичные схемы траншейных стен.

Следует отметить, что в настоящее время влияние швов на напряженно-деформированное состояние системы «ограждение котлована – грунтовый массив» изучено очень мало, в частности, из-за сложностей учёта их работы в расчётной конечно-элементной сетке, возникающих при численном моделировании. Так, в работе [2] предлагается использовать анизотропные пластинчатые или линейные упругие стержневые элементы для моделирования этих швов, чтобы адекватно отразить их поведение. Результаты моделирования показывают увеличение и влияния швов на напряженное состояние ограждения при возрастании глубины котлована. Эта модель показала свою эффективность, особенно для коротких сторон выемок, где стандартные методы дают заниженные смещения.

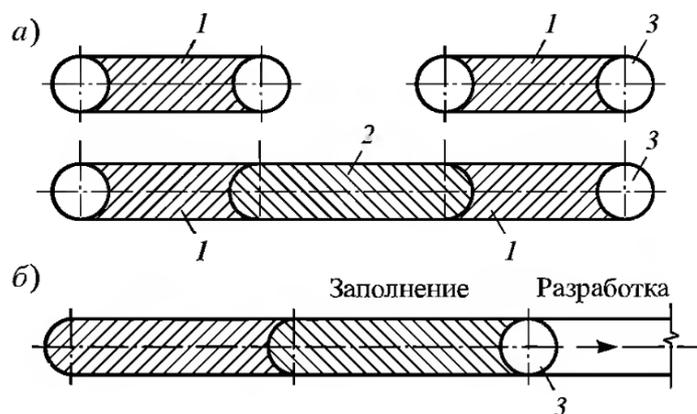


Рис.1. Виды траншейных и свайных стен, выполненных в грунте [1]:  
а) из соприкасающихся траншей; б) из непрерывных траншей с секционным заполнением.

Также, весьма ограниченно количество публикаций, посвящённых исследованию очень важной проблемы – выходу из работы одной или нескольких распорок, что может вызвать прогрессирующее разрушение ограждающей конструкции. Например, в работе [3] рассматривался отказ одной распорки в центре котлована и на расстоянии 2 метров от угла с целью оценки изменения эффективных напряжений в грунте и усилий в распорной системе. Были проанализированы 6 случаев котлованов глубиной 16.8-30.8 метра для определения эффективных напряжений и один случай с четырьмя ярусами распорок для изучения перераспределения усилий. Было установлено, что зона влияния отключения распорки в центре котлована больше, чем в углу, что, вероятно, связано с угловым эффектом. В котлованах меньшей глубины наблюдается большее снижение эффективных напряжений в грунтах в зоне влияния отключения распорки, что, вероятно, связано с большими перемещениями грунтовых масс, снижающими эффективные напряжения. Отключение распорки 4 яруса приводит к разгрузке 1 яруса распорок, а наибольший прирост наблюдается в распорке над отключаемой.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Объектом рассматриваемого исследования является котлован глубиной 16 метров, защищенный железобетонной стеной в грунте толщиной 800 мм из бетона класса В35 и арматуры класса А500С. Распорные ярусы выполнены из труб диаметром 720 мм и толщиной стенки 14 мм из стали класса С255. Шаг распорок составляет 3 метра в горизонтальном направлении и 4 метра в вертикальном направлении. Ширина захваток стены в грунте равна 6 метрам. Ограждение котлована крепится распорной системой. Продольный и поперечный разрезы котлована представлены на рис.2. При расчете устойчивости стены холодный шов бетонирования расположен на расстоянии 1 метра от удаленного элемента. Грунты характеризуются параметрами, приведенными в Таблице 1, уровень грунтовых вод находится на 2 метра ниже поверхности земли. На период строительства предусмотрено локальное снижение уровня воды внутри котлована до уровня дна.

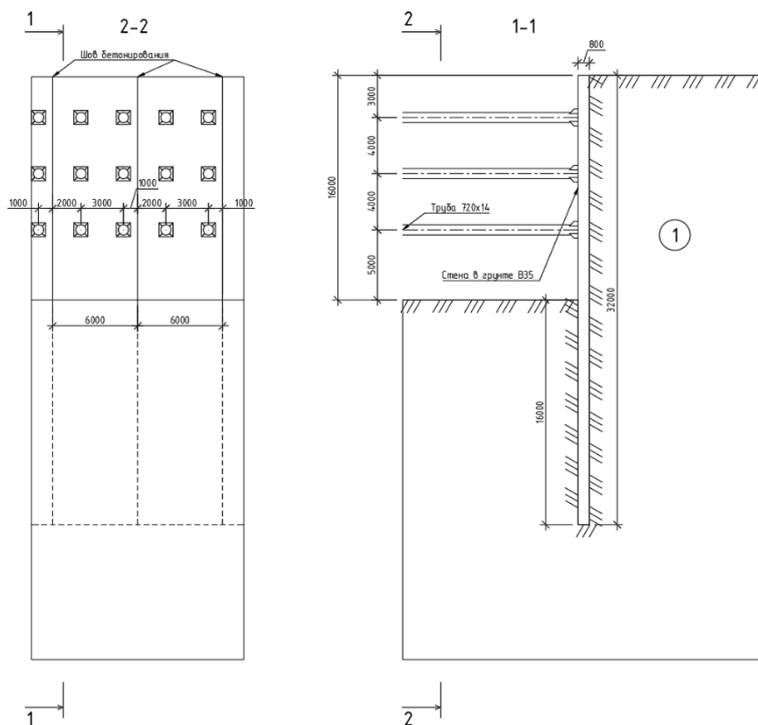


Рис.2. Поперечное и продольное сечение котлована.

Таблица 1.

Физико-механические характеристики грунтов.

№	Наименование характеристики	Песок средней крупности средней плотности
1	Удельный вес грунта, кН/м <sup>3</sup>	19,4
2	Масса частиц грунта, г/см <sup>3</sup>	27,0
3	Коэффициент пористости	0,657
4	Удельное сцепление, кПа	0
5	Угол внутреннего трения, град.	31
6	Модуль деформации, МПа	31
7	Модуль деформации вторичной ветви загрузки, МПа	68

Для постановки задачи использовался программный комплекс Midas FEA NX, основанный на методе конечных элементов. Применяемая модель поведения грунта – Hardening Soil, модель поведения конструкций – Elastic. Расчётная схема представляет собой центральную часть котлована и представлена на рис.3. Габариты расчётной схемы – 36×76×37 (h) метров. Граничные условия:

- нижняя грань – запрет на перемещения в 3 направлениях;
- грани, не соприкасающиеся с котлованом – запрет на перемещение в направлении, перпендикулярном грани;
- грани, соприкасающиеся с котлованом – запрет на перемещения в направлении, перпендикулярном грани; запрет на поворот в плоскостях вне грани.

После расчета напряженно-деформированного состояния грунта на этапе завершения строительства котлована включается этап, где одна из распорок нижнего яруса в центральном сечении удаляется. Выбор этой распорки

обусловлен тем, что она имеет наибольшую нагрузку среди остальных распорок. Затем рассчитываются нагрузки на оставшиеся распорки после удаления одной из них, и при необходимости изменяется их сечение с учетом дополнительных коэффициентов условий работы при аварийном воздействии, равных 1,1. Эти итерации продолжаются до тех пор, пока не будут выполнены условия прочности для всех оставшихся распорок при увеличенных нагрузках, вызванных отсутствием одной из них.

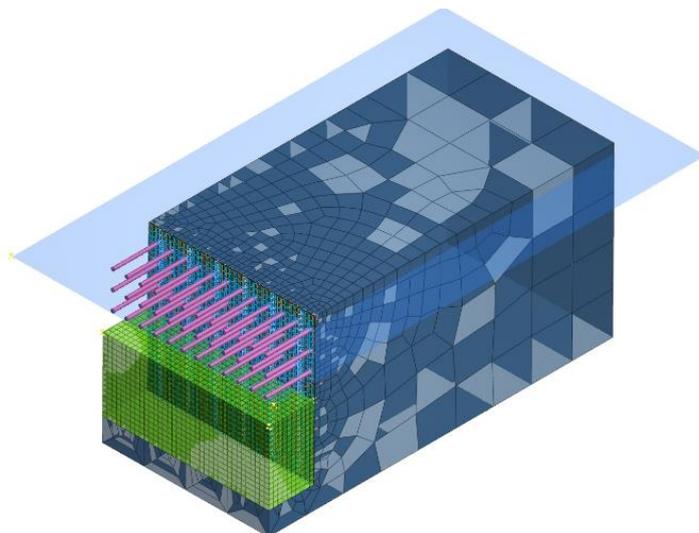


Рис.3. Расчётная схема.

Для моделирования шва между захватами использовался контактный элемент (интерфейс), который был добавлен после создания интерфейсов между стеной и окружающим грунтом. Нормальная и касательная жесткость контакта между двумя бетонными элементами класса В35 были рассчитаны с использованием коэффициента, учитывающего отпор скальной породы под пятами разомкнутой обделки

$$K_n = \frac{E}{1,34(1-\nu)(1+\nu) \cdot t} = \frac{34500}{1,34 \cdot 0,8 \cdot 1,2 \cdot 0,8} = 33500 \frac{\text{МПа}}{\text{м}},$$
$$K_t = \frac{K_n}{2(1+\nu)} = \frac{34500}{2(1+0,2)} = 13960 \frac{\text{МПа}}{\text{м}},$$

где  $E$  – модуль упругости бетона – для бетона класса В35 составляет 34500 МПа;  $t$  – толщина контактного элемента (равняется толщине стены в грунте).

Помимо моделирования жесткости интерфейсного элемента также моделировалась его прочность. Прочность была принята равной расчетному сопротивлению бетона осевому растяжению  $R_{bt} = 1,3$  МПа как для нормального, так и для касательного направлений.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И ОБСУЖДЕНИЕ

По результатам расчетов было получено напряженно-деформированное состояние системы «ограждение котлована-грунт» с учетом и без учета шва бетонирования между захватами. На рис.4 и Таблице 2 представлены сравнения усилий в распорках и траншейной стене.

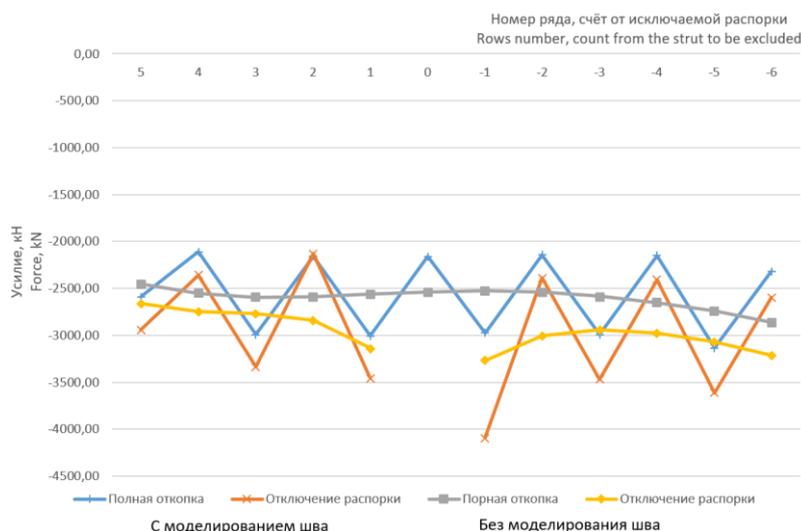


Рис.4. Сравнение усилий в распорках последнего ряда на различных стадиях.

Таблица 2.

Сравнение изгибающих моментов в стене в грунте.

Му, кН*м/м/	Без моделирования швов			С моделированием швов			
	2	3	4	5	6	7	
Точка	Полная откопка	Отключение распорки	3/2	Полная откопка	Отключение распорки	6/5	6/3
Распорка над отключаемой	-479.64	628.56	-1.31	443.62	838.46	1.89	1.33
Точка отключения распорки	290.86	-273.73	-0.94	333.71	-384.22	-1.15	1.40
Уровень дна котлована	-1271.23	-1279.64	1.01	-1206.51	-1370.39	1.14	1.07

Как видно на рис.4, усилия в распорках при моделировании шва бетонирования на стадии полной откопки распределены неравномерно вдоль одной захватки. Распорки, находящиеся ближе к центру захватки (распорки 1 и -1, расстояние до шва 2 метра), нагружены сильнее, чем распорки, расположенные ближе ко шву (распорка 0, 2, -2, расстояние до шва 1 метр). Также заметно, что в среднем усилия в распорках при моделировании шва примерно соответствуют усилиям в распорках без моделирования шва.

При выходе из строя распорки 0 при моделировании шва происходит более значительное перераспределение усилий на распорку, находящуюся в пределах захватки с отключаемой. На рис.5 представлено сравнение прироста усилий в распорках последнего яруса при моделировании и без моделирования шва бетонирования. Максимальное увеличение усилий между стадиями при моделировании шва составляет 37%, тогда как без моделирования шва – 29%. При моделировании шва бетонирования на стадии откопки котлована усилия в распорке -1 составляли около 2980 кН, если шов не моделируется, то усилие составит около 2500 кН. При аварийном воздействии усилия в данной распорке

с учетом работы шва возрастут до 4090 кН, а без моделирования шва – до 3230 кН (разница 26%).

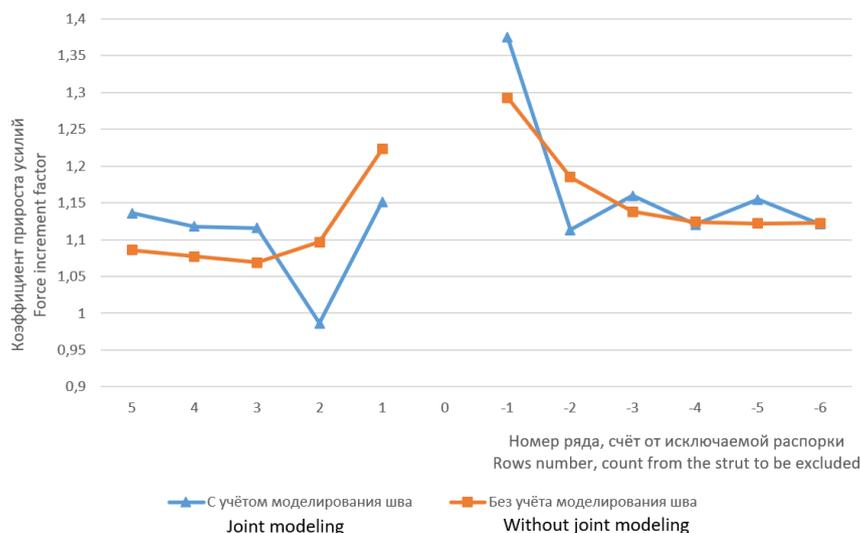


Рис.5. Прирост усилий в распорках последнего яруса, д.е.

Изгибающие моменты в стене в плоскости поперечного сечения котлована также изменяются в зависимости от моделирования шва. На стадии полной откопки котлована разница между учетом и неучетом шва незначительна, но моменты имеют разные знаки, что указывает на растяжение на противоположных сторонах. При аварийном воздействии в обоих случаях в зоне отказа знак момента меняется. В зоне распорки над отключаемой распоркой (на 1 ярус выше) при традиционном методе моделирования знак момента меняется, однако при моделировании шва момент сохраняет тот же знак и увеличивается на 89%. Общее различие усилий при различных методах достигает 40%.

Перемещения стены в грунте по двум сечениям показаны на рис.6,7.

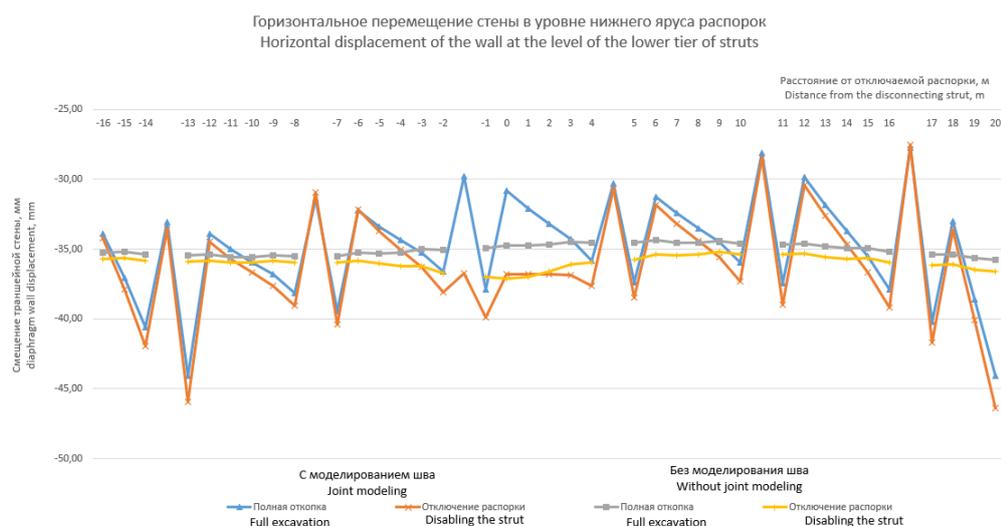


Рис.6. Перемещения стены в грунте внутрь котлована в уровне последнего яруса.

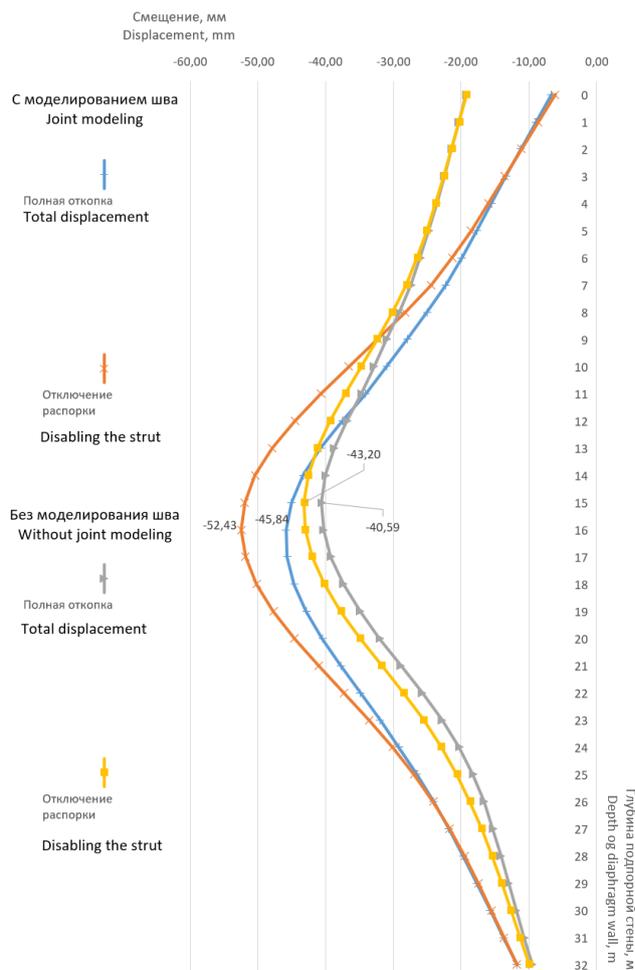


Рис.7. Перемещения стены в грунте внутри котлована в плоскости поперечного сечения котлована.

На рис.6 отображены перемещения стены в грунте внутри котлована на уровне последнего яруса распорной системы. По результатам численного моделирования перемещения стены в грунте при учете шва бетонирования оказались меньше, чем без него. В зонах расположения швов наблюдаются различные перемещения. Разница в перемещениях также заметна на рис.7, где перемещения стены в грунте внутри котлована при моделировании швов составляют до 52 мм на стадии полной откопки котлована. Перемещения верхнего края стены также меньше при моделировании шва и составляют около 5-6 мм, тогда как без учета шва перемещения стены на уровне дневной поверхности грунта достигают порядка 20 мм.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По итогам сравнения двух методик можно сделать следующие выводы:

1. Был предложен метод моделирования шва бетонирования с использованием интерфейсных элементов, определены их жесткостные и прочностные характеристики.
2. Учет шва бетонирования влияет на напряженно-деформированное состояние грунта, уменьшая деформации массива, но увеличивая усилия в ограждающих конструкциях.

3. При аварийном воздействии с учетом шва происходят перераспределения усилий, преимущественно на распорки, расположенные внутри захватки, где была отключена распорка. Разница усилий по сравнению с традиционным методом достигает 40%.
4. При прогрессирующем обрушении в траншейной стене моменты меняют свой знак. В качестве конструктивных мер рекомендуется установка одинаковых арматурных сеток на противоположные грани.
5. В качестве дальнейшего исследования возможно применение других моделей для моделирования шва бетонирования, таких как Discrete Cracking и Concrete Smeared Crack, однако для этого потребуются дополнительные испытания.
6. Предупреждение прогрессирующего обрушения котлована проще, чем борьба с его последствиями. Качественный геотехнический мониторинг за конструкциями котлована и окружающей застройкой поможет выявить проблемы и оперативно принять решения на основе объективных данных.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильичев В.А., Мангушев Р.А. *Справочник геотехника. Основания, фундаменты и подземные сооружения. 3-е издание, дополненное и переработанное.* М.: АСВ, 2023. – 1084 с.
2. Yang M. et al. *Displacement Analyses of Diaphragm Wall in Small-Scale Deep Excavation Considering Joints between Panels // Buildings.* – 2024. – Vol.14. – No.5. – 1449. DOI: 10.3390/buildings14051449.
3. Phan H.K. *Behaviours and mechanism analysis of deep excavation in sand caused by one-strut failure.* – 2019.  
[https://yo-1.ct.ntust.edu.tw:8887/tgssp/file/16ARC/file/ATC6-01-010\\_ATC6-10.pdf](https://yo-1.ct.ntust.edu.tw:8887/tgssp/file/16ARC/file/ATC6-01-010_ATC6-10.pdf)
4. Znamenskiy V. et al. *The modeling of the «diaphragm wall» with the anchor without the use of distribution beams // E3S Web Conf.* – 2019. – Vol.97. – 04021. DOI: 10.1051/e3sconf/20199704021.
5. Cheng X.S. et al. *Study of the progressive collapse mechanism of excavations retained by cantilever contiguous piles // Engineering Failure Analysis.* – 2017. – Vol.71. – Pp.72-89. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2016.06.011.
6. Zheng G. et al. *Experimental study on progressive collapse mechanism in braced and tied-back retaining systems of deep excavations // Can. Geotech. J.* – 2021. – Vol.58. – No.4. – Pp.540-564. DOI: 10.1139/cgj-2019-0296.
7. Chen R.P. et al. *Failure Investigation at a Collapsed Deep Excavation in Very Sensitive Organic Soft Clay // J. Perform. Constr. Facil.* – 2015. – Vol.29. – No.3. – 04014078. DOI: 10.1061/(ASCE)CF.1943-5509.0000557.
8. Hu J., Ma F. *Failure Investigation at a Collapsed Deep Open Cut Slope Excavation in Soft Clay // Geotech Geol Eng.* – 2018. – Vol.36. – No.1. – Pp.665-683. DOI: 10.1007/s10706-017-0337-2.
9. Зерцалов М.Г. *Геомеханика. Введение в механику скальных грунтов: Учебник.* – М.: Издательство АСВ, 2014. – 352 с.
10. Колыбин И.В. *Уроки аварийных ситуаций при строительстве котлованов в городских условиях / Международная конференция по геотехнике «Развитие городов и геотехническое строительство». Сборник трудов.* – Санкт-Петербург: Геореконструкция-Фундаментпроект, 2008. – Т.3. – С.89-124.



## **ИННОВАЦИОННЫЕ РАЗРАБОТКИ ЛАБОРАТОРИИ ГЕОМЕХАНИКИ ИПРИМ РАН**

Королев М.В.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

Как известно, от надежности и точности определения механических характеристик грунтов основания в значительной мере зависят экономичность, долговечность и надежность проектируемых сооружений. Однако достоверное определение механических свойств многих грунтов представляет собой весьма сложную и пока до конца не решенную задачу. Особенно сложную задачу представляет собой определение механических свойств грунтов, изменяющих свои физико-механические свойства под действием дополнительных природно-климатических и техногенных воздействий.

В процессе эксплуатации сооружений грунты оснований фундаментов подвергаются воздействию не только непосредственно от самого сооружения, но часто испытывают дополнительные физико-химические и механические воздействия, которые могут существенно ухудшать значения механических характеристик грунтов основания в течение срока эксплуатации сооружений [1-3].

Приведем примеры таких дополнительных воздействий.

Изменение температуры многолетнемерзлых грунтов в процессе эксплуатации сооружения может привести к недопустимым осадкам фундаментов и привести к аварии сооружения.

Динамические нагрузки от работы оборудования, движения транспорта, от некоторых строительных работ, сейсмические нагрузки и т.д. в ряде случаев могут вызвать разжижение грунтов или дополнительные осадки за счет более компактной переупаковки минеральных частиц.

Водонасыщение грунтов также может приводить к изменению механических свойств грунтов. Например, замачивание лессовых (макропористых, недоуплотненных) грунтов в результате утечек из водонесущих коммуникаций приводит к растворению цементирующих скелет грунта минеральных солей, что в свою очередь приводит к просадкам фундаментов. Водонасыщение глинистых грунтов, например, в результате заполнения водохранилищ может привести к ухудшению механических свойств грунта, что в свою очередь может привести к образованию оползней.

Часто в процессе хозяйственной деятельности в массив грунта проникают нефтепродукты, фекальные воды, технологические кислотные и щелочные растворы, которые, при взаимодействии с минеральными частицами грунта также могут существенно изменять его свойства.

Сосредоточенная фильтрация воды в массиве грунта с большими градиентами может вызвать развитие суффозионных и карстообразовательных процессов и вызвать аварии сооружений.

Эти дополнительные факторы могут воздействовать на грунты как по отдельности, так и в совокупности нескольких факторов. Как правило,

при проектировании эти дополнительные негативные факторы либо не учитываются совсем, либо учитываются недостаточно полно.

Основы применяемых в настоящее время методов геомеханических испытаний сформировались еще к середине прошлого века и с тех пор принципиально не изменились. Эти методы и методики обладают многими недостатками: малой информативностью, высокой трудоемкостью и стоимостью. Они были разработаны для случаев, когда дополнительные факторы, действующие на грунты, не учитывались. Для вышеперечисленных же случаев существующие методы практически непригодны, так как учет изменения свойств грунтов в процессе эксплуатации потребовал бы при применении данных методов проведения огромного числа испытаний.

Без решения создания более эффективных методов и методик невозможно будет эффективно реализовать масштабные приоритетные проекты страны по освоению северных регионов, по освоению подземного пространства мегаполисов и по строительству зданий и сооружений, в том числе высотных, в условиях существующей плотной городской застройки.

В лаборатории Геомеханики ИПРИМ РАН активно ведется разработка эффективных и технологичных методов, способов, методик и оборудования для исследования свойств многолетнемерзлых грунтов в процессе изменения температуры и оттаивания, для исследования дисперсных грунтов, являющихся основанием сооружений в мегаполисах, свойства которых могут существенно изменяться под действием техногенных нагрузок, для оценки устойчивости склонов под действием новых дополнительных факторов и др. [2-5].

## **ИННОВАЦИИ В ОБЛАСТИ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ МЕТОДИК ИСПЫТАНИЙ**

Основными задачами инноваций в этой области являлись:

- сокращение сроков испытаний;
- повышение информативности испытаний и получение необходимых механических характеристик мерзлых грунтов при различных дополнительных воздействиях (температура, влажность, динамические нагрузки, загрязнения и т.д.) по результатам одного испытания;
- возможность реализации методик на простом или уже имеющемся оборудовании, которая не требует высокой квалификации специалистов и сложного оборудования.

Разрабатываемые в ИПРИМ РАН методики основаны на том, что разрушение упруговязкопластичного грунта происходит не в момент приложения к нему предельной нагрузки, а в результате достижения образцом предельных деформаций. То есть, если образец довести до состояния, близкого к его предельным деформациям и ограничить их дальнейшее развитие, то при изменении физического состояния или при других дополнительных негативных воздействиях, образец не разрушится, а будет испытывать релаксацию касательных напряжений, по стабилизированному значению которых можно определить параметры прочности грунта при этом новом физическом состоянии, вызванном дополнительным воздействием.

Используя этот принцип, в ИПРИМ РАН созданы высокоэффективные методики, позволяющие существенно сократить время испытаний, повысить информативность и достоверность результатов и определить параметры

прочности грунта при различных значениях отрицательной температуры в ходе одного опыта.

Приведем примеры.

В настоящее время с использованием данного подхода разработаны методики для определения параметров прочности мерзлых грунтов при различных температурах в ходе испытания одного образца для сдвиговых, трехосных испытаний, испытаний шаровым и кольцевым ребристым штампом, а также для испытания несущей способности свай. Все методики экспериментально проверены и показали свою работоспособность и эффективность. Эти разработки опубликованы в монографиях [2,3], статьях, обсуждались на научно-практических конференциях, демонстрировались на научно-технических выставках, где получили престижные награды (три серебряные медали выставок и два кубка за лучшую инновационную работу).

В дальнейшем планируется разработать стандарты организации, позволяющие использовать новые методики в геомеханических изысканиях и продолжить разработку методик с учетом других негативных добавочных воздействий (водонасыщение, динамические нагрузки, загрязнения нефтепродуктами и др.)

## **ИННОВАЦИИ В ОБЛАСТИ РАЗРАБОТКИ НОВЫХ ПРИБОРОВ ДЛЯ ГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ**

Для реализации новых методик требуется соответствующее оборудование. Имеющиеся в настоящее время современные приборы для проведения геомеханических испытаний мерзлых грунтов обладают рядом существенных недостатков:

- относительно высокая стоимость;
- для испытания мерзлых грунтов требуется стационарная климатическая камера. Нельзя проводить испытания в полевых условиях, непосредственно в месте отбора образцов. Сложность проведения испытаний в режиме задаваемых деформаций;
- невозможность проведения испытаний при изменении температуры в процессе одного опыта;
- сложность в наладке и эксплуатации оборудования.

Задачами инноваций в этой сфере являлись:

– создание линейки простых, недорогих и надежных приборов, позволяющих использовать эффективные и информативные методики (в режиме задаваемых деформаций) и не требующих высокой квалификации персонала;

– создание приборов, позволяющих производить испытания непосредственно в месте отбора образцов при различных значениях отрицательных температур. Создание приспособлений, расширяющих возможности имеющихся приборов.

Важным элементом инноваций является то, что разрабатываемые в ИПРИМ РАН приборы оснащены компактной мобильной климатической камерой, в которую помещается только испытываемый образец, а нагрузочные и измерительные системы располагаются снаружи климатической камеры, и поэтому при изменении температуры в ходе одного опыта они не будут испытывать температурные деформации.

Вторым важным элементом инноваций является то, что конструкция нагрузочной системы приборов позволяет проводить испытания как в режиме ползучести, так и в режиме релаксации.

Третьей особенностью приборов является то, что данные приборы многофункциональны и с их помощью можно производить испытания грунта на сдвиг, одноосное сжатие и растяжение, сдвиг кручением, с помощью шарового штампа, испытания в режиме компрессии и стабилметрические испытания. В настоящее время создан действующий макет мобильного прибора шарового штампа с компактной климатической камерой, который проходит полевые и лабораторные испытания. На рис.1 показана конструкция прибора, на рис.2 процесс проведения испытаний.

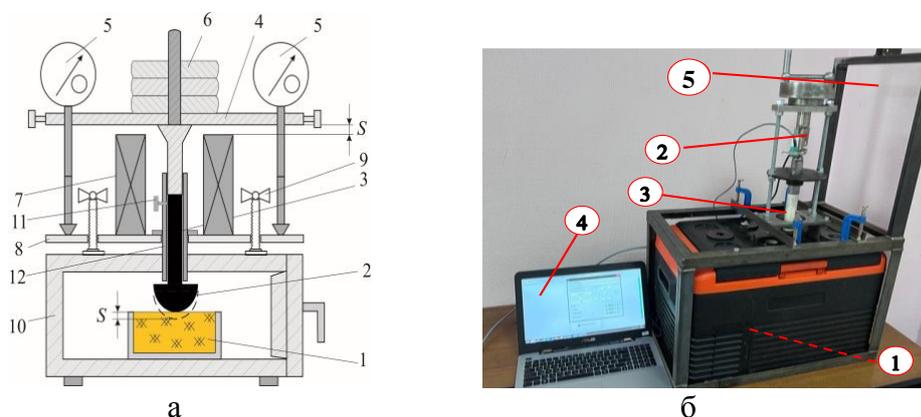


Рис.1. Общий вид прибора шарового штампа с компактной климатической камерой: а) схема прибора (1 – образец; 2 – шаровой штамп; 3 – направляющая футочка; 4 – грузовая платформа; 5 – индикаторы; 6 – гири; 7 – динамометры; 8 – платформа; 9 – регулировочные винты; 10 – климатическая камера; 11 – стопорный винт; 12 – подвижный шток); б) фото прибора (1 – компактная морозильная камера; 2 – нагрузочное устройство; 3 – шток с шаровым штампом; 4 – компьютер для автоматической записи и обработки результатов; 5 – силовая рама).

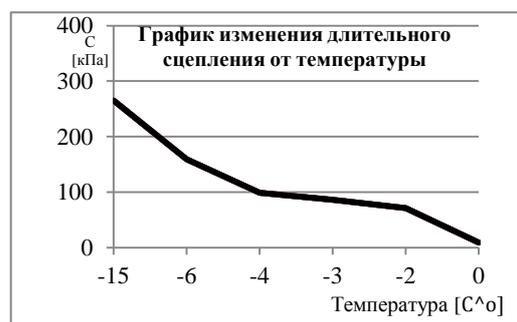
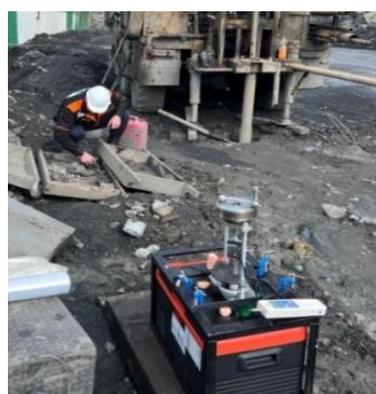


Рис.2. Процесс проведения в полевых условиях испытаний керна, извлеченного из скважины (а) и результаты эксперимента (б).

На этой основе планируется создание целой линейки компактных приборов для проведения испытаний разными способами.

## СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ СХЕМ И ОБОРУДОВАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПОЛЕВЫХ ИСПЫТАНИЙ

Наиболее достоверные результаты определения механических характеристик масштабно неоднородных грунтов получаются при проведении полевых испытаний. Однако эти испытания являются дорогостоящими, трудозатратными и требуют долгих подготовительных работ, поэтому их трудно осуществить.

Направления инноваций в области совершенствования полевых испытаний:

- использование эффективных и информативных методик;
- оптимизация количества испытаний на основе предварительных расчетов;
- сокращение трудоемкости и сроков проведения подготовительных работ за счет применения инвентарных установок и более простых в реализации схем нагружения;
- использование для интерпретации опытных данных в опытах, где реализуется сложное напряженное состояние численных расчетов;
- создание более равномерного напряженно-деформированного состояния и температурного состояния при проведении опытов.

Приведем пример одной из разработок. ***Новая установка кольцевого ребристого штампа с ребрами криволинейного очертания для испытаний мерзлых грунтов при различных температурах.*** С помощью кольцевого ребристого штампа можно проводить испытания в режиме ползучести-релаксации и проводить опыты по определению параметров прочности при различных температурах в ходе одного эксперимента не только в климокамере, но и в натуральных условиях (в шурфах и коротких скважинах). При использовании обычного кольцевого ребристого штампа с прямоугольными ребрами возникает проблема создания равномерного температурного поля под ребрами штампа. С целью усовершенствования метода было предложено ребра штампа делать не в виде прямоугольных пластин, а округлой формы, повторяющей кривую линии равных температур, которая формируется под подошвой кольцевого штампа при её нагревании. Тогда при приложении крутящей нагрузки сдвиг грунта будет осуществляться точно по границе слоя грунта с одинаковой температурой. Для этого были проведены численные температурные расчеты изменения температуры грунта в массиве при изменении её под кольцевой подошвой штампа. Расчеты проводились с помощью программного комплекса «Abacus». Как показали проведенные расчеты, форма линии равных температур при таком нагреве одинакова и не зависит от теплофизических свойств грунта (рис.3а). Это обстоятельство дает возможность для определения механических свойств грунта при различных температурах в натуральных условиях.

На рис.3а приведены результаты численных температурных расчетов при нагревании подошвы кольцевого штампа. На рис.3б показана принципиальная схема устройства [7].

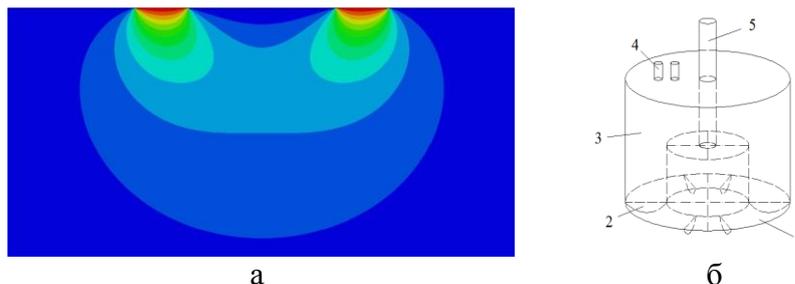


Рис.3. а) результаты численных расчетов изменения изолиний температуры в массиве мерзлого грунта при её изменении на поверхности под подошвой кольцевого штампа (стабилизированное установившееся состояние); б) схема установки: 1 – подошва кольцевого штампа; 2 – овалы ребра; 3 – бак с теплоносителем; 4 – подводящий и отводящий трубопроводы; 5 – вал штампа для передачи крутящего момента и вертикальной нагрузки.

### РАЗРАБОТКА ПОЛЕВЫХ ЭКСПРЕСС МЕТОДОВ ПОЛЕВЫХ ИСПЫТАНИЙ

Основным направлением инноваций в этой области являлось создание простых в реализации и более информативных способов проведения механических испытаний. Для этого разработаны (или усовершенствованы) способы испытаний наклонной и крутящей нагрузкой с применением инвентарного оборудования. Приведем примеры таких разработок.

#### Способ определения угла внутреннего трения и удельного сцепления с помощью крыльчатки с криволинейными лопастями

Отличием предлагаемого способа от известного способа испытания грунтов крыльчаткой является то, что лопасти крыльчатки имеют криволинейную поверхность. Таким образом, при вращении модифицированной крыльчатки в разные стороны или при использовании крыльчаток с различным радиусом кривизны лопастей реализуются различные напряженно-деформированные состояния. Равнодействующая напряжений, возникающих при повороте крыльчатки в разные стороны, направлена под разными углами, что дает возможность получить два уравнения для отдельного определения угла внутреннего трения и удельного сцепления [6].

На рис.4 показаны характерные эпюры нормальных и касательных напряжений для вышеописанных случаев и траектории нагружения крыльчаток с разной кривизной лопастей.

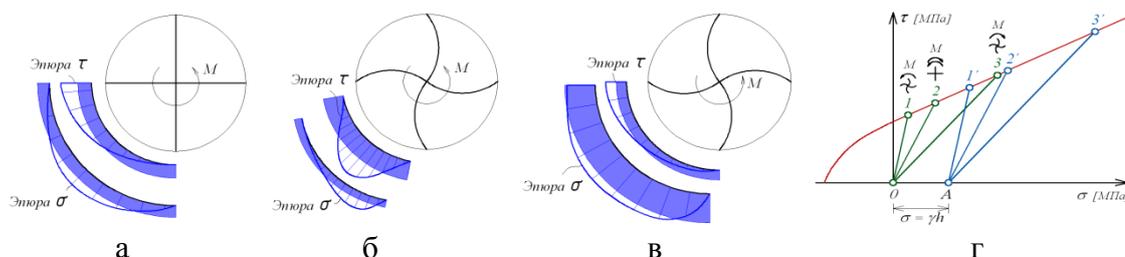


Рис.4. Эпюры касательных и радиальных напряжений, возникающих при кручении крыльчатки с разной формой лопастей. а) при прямолинейной форме лопастей; б) при вогнутой форме; в) при выпуклой форме; г) траектории нагружения в зависимости от формы лопастей крыльчатки.

## Новый способ определения параметров прочности грунта путем выдергивания буровых винтовых шнеков с разным шагом витков

Способ применяется для опробования массива грунта по глубине непосредственно при проходке скважины ручным бурением. Сущность метода заключается в том, что шнеки с различными углами атаки завинчиваются в грунт с минимальным его нарушением, для чего поступательное движение должно соответствовать вращательному движению шнека. Для определения прочностных характеристик грунтов после упора шнека в стопор он при кручении выдергивает грунт, с замером усилия выдергивания [6]. Благодаря применению шнеков с различным углом атаки, при выдергивании на цилиндрической поверхности среза действуют различные радиальные сжимающие и касательные нагрузки, соотношение которых зависит от угла атаки шнека, благодаря чему возможно построение зависимости предельных касательных напряжений от нормальных (рис.5б).

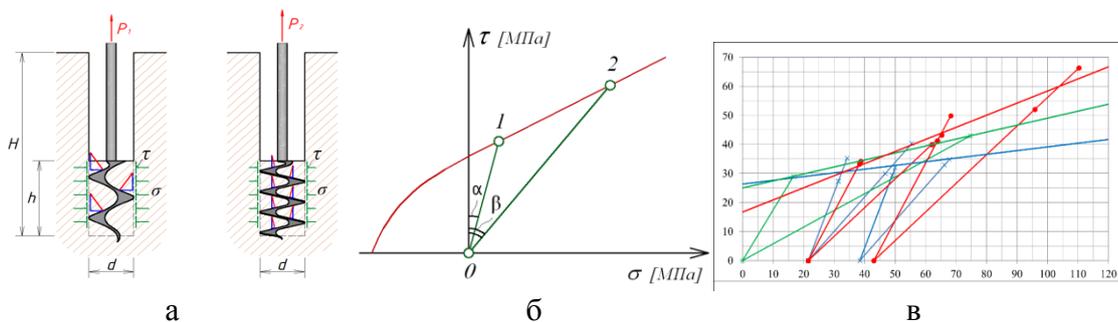


Рис.5. а) схема шнеков с различным углом атаки; б) траектория нагружения при выдергивании шнеков с различным углом атаки; в) сопоставление результатов экспериментов различными способами: красный цвет – испытания крыльчаткой с криволинейными лопастями; зеленый цвет – испытания цилиндров на сдвиг наклонной нагрузкой; голубой цвет – испытания с помощью шнеков с разным углом атаки, завинченных в грунт.

На основе вышеописанных экспресс методов разработана конструкция мобильной многофункциональной установки для проведения предварительных инженерно-геологических изысканий в труднодоступных местах и в условия плотной городской застройки. Установка использовалась при оценке устойчивости берегов Угличского водохранилища [7].

## ВЫВОДЫ

Инновационные разработки ИПРИМ РАН представляют собой взаимосвязанную систему методов, методик и приборов, позволяющих с достаточной для практических целей точностью определять значения механических характеристик грунтов при негативном воздействии дополнительных факторов. В настоящее время работы по созданию высокоэффективных методов и приборов продолжаются.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Королев М.В. *Перспективные методы определения механических свойств многолетнемерзлых грунтов* // Научный вестник Арктики. – 2022. – №12. – С.23-33. DOI: 10.52978/25421220\_12\_23-33.

2. Королев М.В. *Системные инновации в методах исследования механических свойств грунтов*. – М.: ООО «Сам Полиграфист», 2018. – 376 с., илл.
3. Королев М.В., Егоров В.Н., Власов А.Н., Знаменский В.В., Куцевич О.И., Икрамова А.Е. *Примеры и причины аварий сооружений. Вопросы оценки и обеспечения качества строительных объектов, надежной работы оснований и фундаментов в условиях меняющихся природных и техногенных воздействий: монография*. – М.: ООО «СамПолиграфист», 2020. – 216 с.
4. Королев М.В., Кыльчик Н.А. *Об эффективности и перспективах совершенствования методик и приборов, применяемых для определения механических характеристик многолетнемерзлых грунтов при различных температурах // Журнал «Фундаменты»*. – 2023. – №2. – С.26-30.
5. Королев М.В. *Инновационные разработки ИПРИМ РАН в области создания перспективных методов, методик и приборов геомеханических испытаний // Журнал «Фундаменты»*. – 2024. – №2(16). – С.12-16.
6. Королев М.В., Куцевич О.И., Кубецкий В.Л. *Определение механических свойств грунтов касательной крутящей нагрузкой // Журнал «Фундаменты»*. – 2022. – №1(7). – С.18-23.
7. Королев М.В., Власов А.Н., Остякова А.В., Лупанова И.А. *Угличское водохранилище. Переработка берегов. Мониторинг. Геомеханические исследования*. – М.: ООО «СамПолиграфист», 2017. – 308 с.



## ЧИСЛЕННЫЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СКАЛЬНЫХ МАССИВОВ

Митин В.В.<sup>1</sup>, Зерцалов М.Г.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ООО «НИЦ Тоннельной Ассоциации», г. Москва, Россия

<sup>2</sup>ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (МГСУ), г. Москва, Россия

**Ключевые слова:** трещиноватый скальный массив; модуль деформации; численное моделирование, штамповое испытание

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время одной из наиболее сложных проблем при проектировании подземных сооружений, основание которых сложено скальными грунтами, является определение прочностных и деформационных характеристик скального массива. Главной проблемой, возникающей при определении характеристик рассматриваемого массива, является масштабный фактор, который предполагает значительное изменение свойств скального массива в зависимости от размеров рассматриваемой области. Для решения этой проблемы было введено понятие представительного элементарного объема, который позволяет выделить область определённого размера внутри скального массива, механические свойства которой не будут изменяться при увеличении ее размера, на основании чего указанную область можно моделировать условно сплошной, упругой, изотропной средой.

В работе [1] приведены результаты штамповых испытаний блоков угля различных размеров, у которых изменение деформационных свойств варьировалось в пределах 70%.

При определении деформационных характеристик скальных массивов используются как прямые, так и косвенные (не прямые) методы испытаний. Прямые методы связаны непосредственно с испытанием пород в натуральных условиях, что, учитывая их трудоёмкость и стоимость, существенно ограничивает возможность использования методов в особенности на ранних стадиях проектирования. К косвенным методам относятся аналитические расчётные методы и эмпирические зависимости. Применение аналитических методов также в значительной степени ограничивается необходимостью моделирования структурных особенностей скального массива. Принимая это во внимание, в настоящее время для определения механических характеристик скальных массивов широко применяются эмпирические зависимости, связывающие значения характеристик со значениями показателей классификационных систем скальных массивов таких, как *RQD* [2,3], *RMR* [4] и *GSI* [5], не имеющих размерности и отражающих состояние и свойства массивов в неявном виде.

В большинстве своем аналитические и эмпирические методы рассматривают скальные массивы как линейно деформируемую среду, механические

характеристики которой определяются в условиях природного напряжённого состояния массива. В то же время многочисленные результаты натурных испытаний скальных массивов показывают, что кривая их деформирования  $\sigma = f(\varepsilon)$  характеризуется значительной нелинейностью и может быть разделена с достаточной точностью на три участка [6,7] (рис.1).

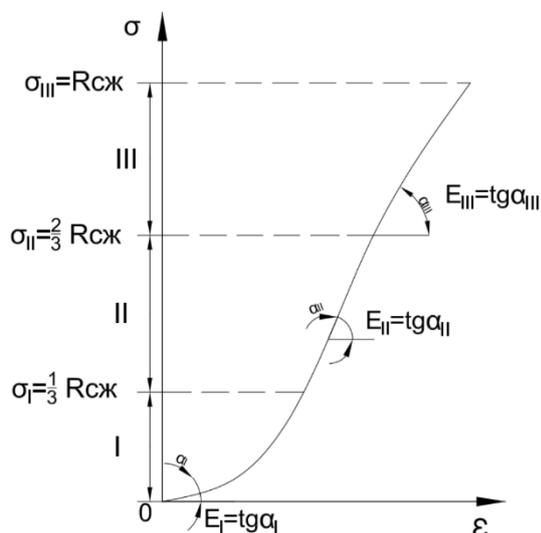


Рис.1. Общий вид кривой деформирования скального массива  $\sigma = f(\varepsilon)$ .

Нелинейность первого участка обусловлена только смыканием межблочных трещин. В пределах второго участка деформирование массива практически линейное, поскольку скальные отдельности деформируются упруго, а их относительные сдвиги по межблочным трещинам очень малы. Нелинейность третьего участка объясняется значительным увеличением относительных сдвигов скальных отдельностей и их поворотом. Результаты, указанных выше экспериментальных исследований, также показывают, что граница первого участка кривой деформирования определяется ориентировочно величиной сжимающих напряжений, равной  $\frac{1}{3}$  прочности на одноосное сжатие скальной

отдельности  $\left( \sigma_1 = \frac{1}{3} \sigma_{ci} \right)$  [6]. Аналогично, граница второго участка соответствует

напряжению, значение которого ориентировочно равно  $\frac{2}{3}$  прочности

на одноосное сжатие скальной отдельности  $\left( \sigma_1 = \frac{2}{3} \sigma_{ci} \right)$  [6]. Нелинейность кривой

деформирования  $\sigma = f(\varepsilon)$  приводит к увеличению модуля деформации массива при возрастании действующей на него нагрузки. Следует особо отметить, что в большинстве своем аналитические и эмпирические зависимости базируются на линейной модели деформирования скального массива в его естественном состоянии (без приложения внешней нагрузки). Принимая это во внимание, определяемые на основе эмпирических зависимостей, значения модуля деформации, характеризующие незагруженный массив, могут иметь существенно заниженные значения.

В работе [8] предлагается метод расчёта модуля деформации блочного скального массива, ослабленного системой двух взаимно ортогональных систем трещин, в пределах первого участка деформирования с учётом нелинейности, вызванной смыканием трещин.

Кроме того, в работе [9] предлагается уравнение регрессии, полученное численным моделированием штамповых опытов, для построения графика второго линейного участка кривой деформирования  $\sigma = f(\varepsilon)$  с учётом угла поворота взаимно ортогональных систем трещин относительно направления приложенной к поверхности массива внешней нагрузки. Используя результаты указанных двух работ, можно, используя численные расчёты, смоделировать штамповые полевые опыты и расчётным путём определить значения модуля деформации скального массива в пределах первого и второго участков кривой его деформирования  $\sigma = f(\varepsilon)$ .

## ОБСУЖДЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Предлагаемая работа является продолжением исследований, приведённых в [8,9]. В них, как указывалось выше, рассматриваются результаты исследований возможности использования численного моделирования для определения модуля деформации скального массива на основе штамповых опытов при произвольном угле взаимно пересекающихся систем трещин и произвольных углах их наклона к направлению внешней нагрузки. Исследовалось деформирование массива в пределах второго (линейного) участка деформирования. Модуль деформации на первом участке определялся с использованием метода, предложенного в [8].

В первой серии опытов проводилась калибровка (тестирование) расчётной конечно-элементной модели, реализуемой в программном комплексе ПВК ZSoil, путём сопоставления результатов численного моделирования и результатов лабораторного испытания скальных блочных образцов [10]. Образцы имели размеры  $54 \times 96.7$  мм и обладали следующими физико-механическими характеристиками: прочность на одноосное сжатие скальной отдельности –  $\sigma_{ci} = 123.35$  МПа, модуль упругости скальной отдельности –  $E_r = 27.95$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.17$ , удельный вес  $\gamma = 23$  кН/м<sup>3</sup>. Трещины моделировались специальными контактными элементами, упругие характеристики которых, нормальная –  $k_n$  и касательная –  $k_s$  жёсткости, определялись следующим образом. Жёсткость  $k_n$ , учитывая линейный характер деформирования на втором участке, рассчитывалась по формуле А.Н. Власова [11]

$$k_n = \frac{E_r E_m}{l(E_r - E_m)}, \quad (1)$$

где  $E_r$  и  $E_m$  – соответственно, модули деформации скальной отдельности и скального массива, а  $k_s$ , по формуле теории упругости

$$k_s = \frac{k_n}{2(1+\nu)}. \quad (2)$$

В качестве модели поведения контактного элемента использовалась модель Кулона – Мора. Значения характеристик  $\varphi$  и  $c$  принимались равными принятым в эксперименте [10]. Схемы испытанных образцов представлены на рис.2-4.

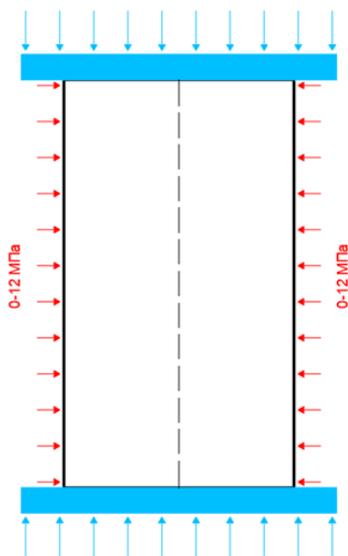


Рис.2. Расчетная схема ненарушенного образца.

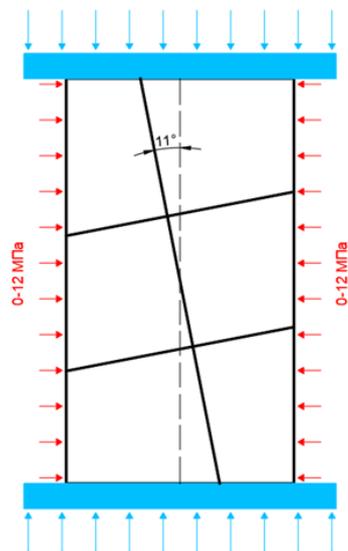


Рис.3. Расчетная схема скального фрагмента 1+2.

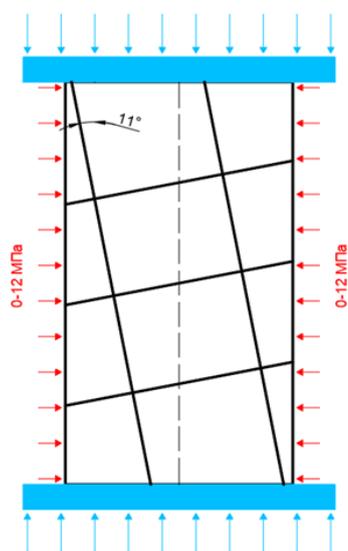


Рис.4. Расчетная схема скального фрагмента 2+3.

На основе сравнения полученных результатов численного и лабораторного эксперимента можно сделать вывод, что полученные результаты численных расчетов имеют достаточную сходимость с лабораторными (3-10%), что позволяет продолжить данное исследование скальных массивов.

В рамках основного цикла расчетов рассматривались модели (рис.5-8) скального массива, разделенные системами взаимно ортогональных трещин, характеризующихся различными значениями RQD и углами наклона трещин к направлению приложенной нагрузки от штампа, в условиях штампового испытания.

На основании результатов основного цикла расчетов с помощью метода планирования эксперимента и множественной линейной регрессии было получено уравнение регрессии с использованием статистической обработки полученных результатов в программном комплексе SPSS Statistics 27 (3)

$$E_m = 0.503E_r + 76.403RQD + 299.286\phi - 538.592\alpha + 27474.943 \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{0.33}} \quad (3)$$

Полученное уравнение было использовано для определения модуля деформации трещиноватых образцов скального массива. На основании полученных данных был произведен анализ сходимости результатов лабораторного эксперимента и значений модуля деформации скального массива на втором участке деформирования, полученных с помощью функции регрессии (3).

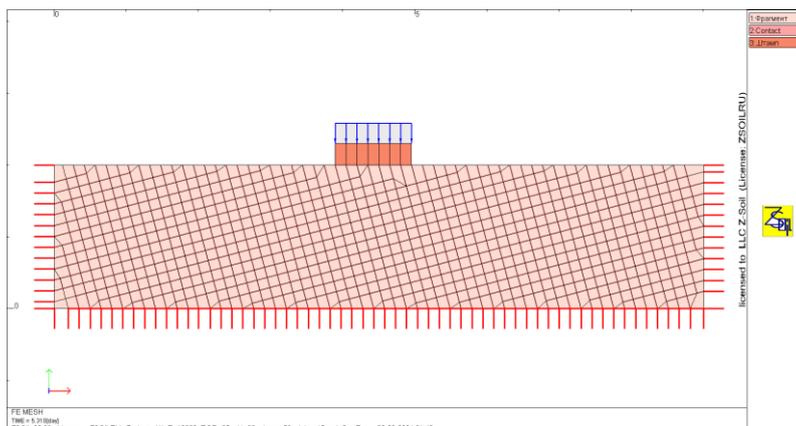


Рис.5. Расчетная схема в ПВК Zsoil при  $RQD = 85$ ,  $\alpha = 15^\circ$ .

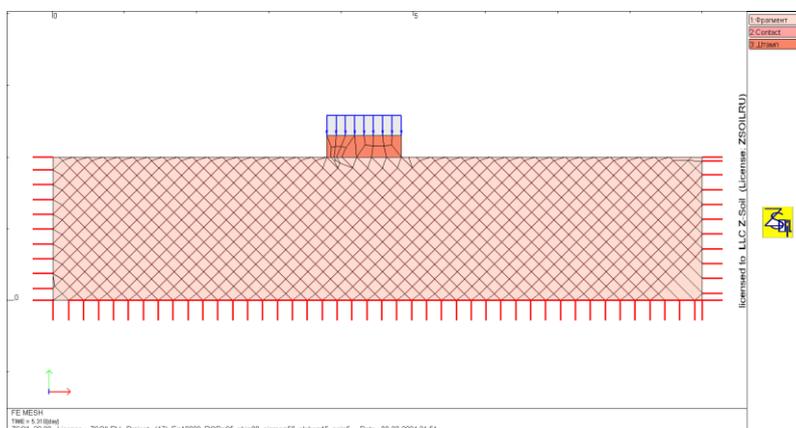


Рис.6. Расчетная схема в ПВК Zsoil при  $RQD = 85$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

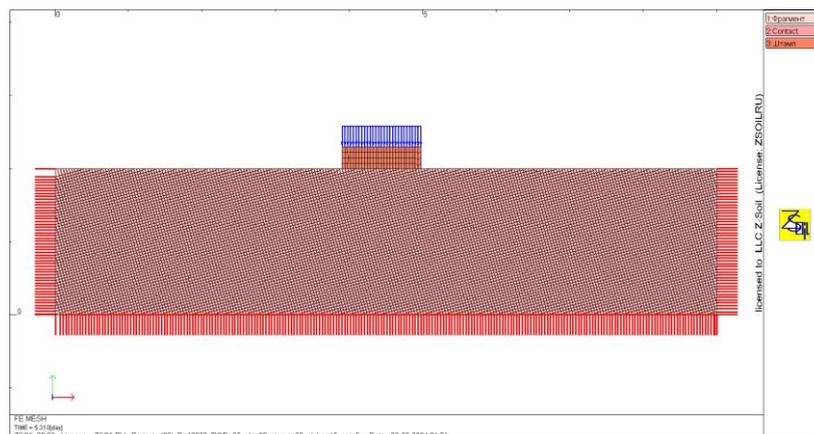


Рис.7. Расчетная схема в ПВК Zsoil при  $RQD = 25$ ,  $\alpha = 15^\circ$ .

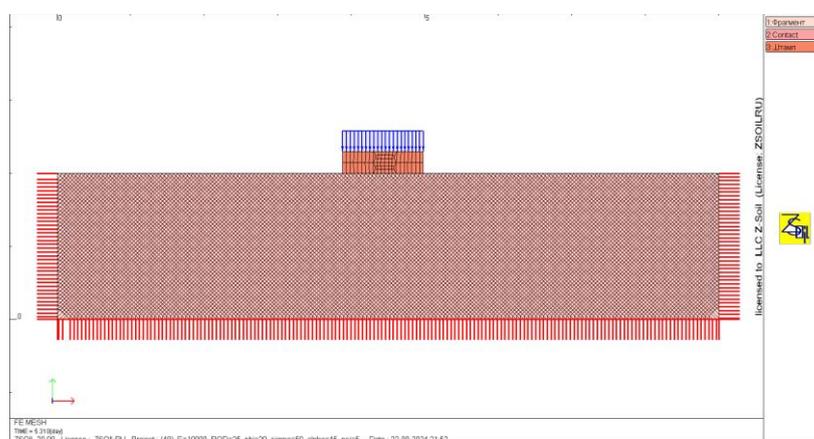


Рис.8. Расчетная схема в ПВК Zsoil при  $RQD = 25$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

Сопоставление результатов численного моделирования штамповых опытов и лабораторных испытаний образцов показано на рис.9,10.

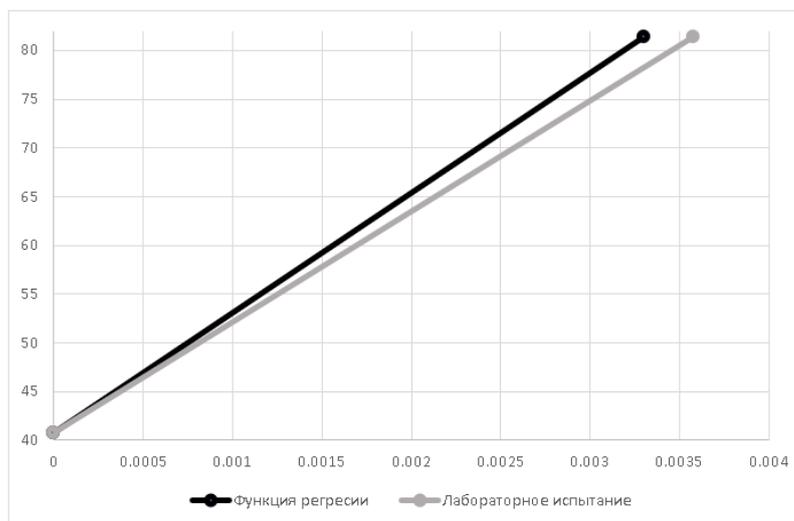


Рис.9. Сравнение графиков зависимости  $\sigma = f(\epsilon)$  на втором участке деформирования результатов при  $RQD = 80$  и  $\sigma_2 = 10$  МПа.

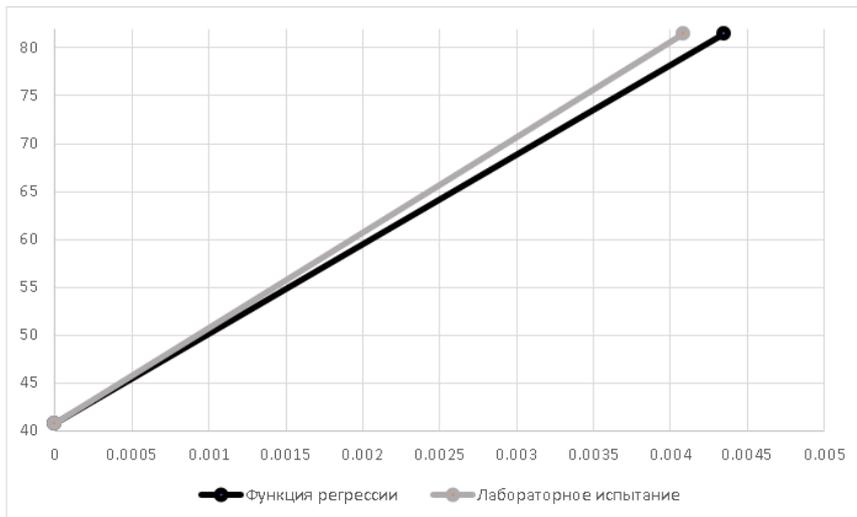


Рис.10. Сравнение графиков зависимости  $\sigma = f(\varepsilon)$  на втором участке деформирования результатов при  $RQD = 60$  и  $\sigma_2 = 10$  Мпа.

На рис.9,10 приведены случаи, в которых результаты численного моделирования и результаты лабораторного испытания образцов, имеющих одни и те же физико-механические характеристики скального массива, показали наименьшее и наибольшее расхождение значений модулей деформации в пределах 5-22%. Такое расхождение, в частности, может быть вызвано различием в условиях проведения исследований в том и другом случаях. В первом случае исследования проводились на образцах в приборах трёхосного сжатия, во втором случае, моделировались штамповые опыты в условиях «плоской» задачи. Кроме того, в испытаниях образцов не рассматривались деформационные характеристики межблочных трещин  $k_n$  и  $k_s$ , вследствие чего, они не учитывались при использовании уравнения регрессии. В то же время, известно, что изменение этих характеристик оказывает существенное влияние на величину модуля деформации скального массива. На точность полученных результатов может повлиять также несоблюдение в опытах на образцах условия «представительности» объёма. Исследования также показали необходимость дальнейшего развития метода определения модуля деформации скального массива на первом нелинейном участке деформирования скального массива, поскольку в работе [8] рассмотрен только случай одноосного сжатия.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании проведённых исследований можно сделать следующие выводы:

1. Конечно-элементная модель, реализуемая в программном комплексе ПВК ZSoil, позволяет проводить численные эксперименты для определения деформационных и прочностных характеристик скального массива с достаточной точностью.

2. Вместе с тем, учитывая, что точность сравнения результатов исследований, выполненных на основе физического и численного моделирования, составила 5-22%, что соответствует инженерной точности расчётов, полученное уравнение регрессии может быть использовано, как дополнение к ряду других

методов, для оценки модуля деформации скального массива на предварительной стадии проектирования.

3. Вопросы, возникшие в результате проведённых исследований, требуют дальнейшего изучения, как экспериментальным путём, так и с использованием численного моделирования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bieniawski Z.T. *The effect of specimen size on compressive strength of coal* // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr. – 1967. – Vol.5. – Pp.325-335.
2. Deere D. *Technical description of rock cores for engineering purposes* // Felsmechanik un Ingenieurgeologie. – 1963. – Vol.1(1). – Pp.16-22.
3. Deere D. *The rock quality designation (RQD) Index in practice* // Rock Classification Systems for Engineering Purposes, ASTM STP 984, American Society for Testing and Materials, Philadelphia. – 1988. – Pp.91-101.
4. Bieniawski Z.T. *Engineering rock mass classifications*. – John Wiley and Sons, 1989. – 252 p.
5. Hoek E. and Diederichs M. *Empirical Estimation of Rock Mass Modulus* // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2006. – Pp.203-215.
6. Ulusay R., Hudson J.A. *The complete ISRM suggested methods for rock characterization, testing and monitoring: 1974-2006. Prepared by the commission on testing methods*. Ankara, Turkey, 2007.
7. Bieniawski Z. *Determining Rock Mass Deformability: Experience from Case Histories* // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 1978. – Pp.237-245.
8. Минин К.Е. *Определение деформационных характеристик скальных массивов и их использование при строительстве подземных сооружений: дисс. канд. техн. наук*. М.: МГСУ, 2023. – 117 с.
9. Зерцалов М.Г., Минин К.Е. *Численное моделирование при определении деформационных характеристик трещиноватых скальных массивов* // Гидротехническое строительство. – 2020. – №11. – С.20-25.
10. Leandro R. Alejanoa, Javier Arzúab, Nezam Bozorgzadehc, John P. Harrisonc. *Triaxial strength and deformability of intact and increasingly jointed granite samples* // International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences. – 2017. – Vol.95. – Pp.87-103.
11. Мерзляков В.П., Власов А.Н. *Влияние полигональных сетей трещин на деформационные характеристики скальных пород* // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1993. – №3. – С.6-9.



## НЕЛИНЕЙНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ РАЗЖИЖЕНИЯ ДИСПЕРСНОЙ СРЕДЫ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ

Тишин Н.Р.<sup>1,2</sup>, Озмидов О.Р.<sup>2</sup>, Гаврилович А.С.<sup>2</sup>, Селиванова О.С.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,  
г. Москва, Россия

<sup>2</sup>АО МОСТДОРГЕОТРЕСТ, г. Москва, Россия

### ВВЕДЕНИЕ

Разжижением грунта принято называть переход его в текучее состояние вне зависимости от причины такого изменения и величины последующих деформаций [1-3], который также сопровождается разрывом структурных связей грунта (рис.1).

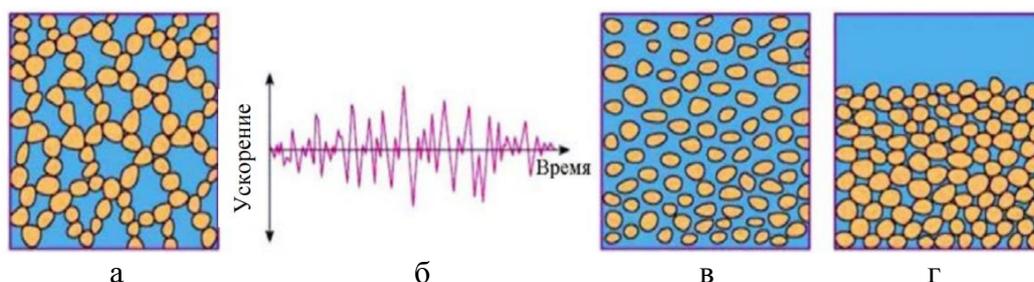


Рис.1. Разжижение и уплотнение песчаного грунта; а) исходное состояние грунта; б) динамическое воздействие на массив грунта; в) водонасыщенный грунт разжижен, связи между частицами разрушены; г) уплотненный грунт после отжатия воды и оседания частиц.

Разжижение грунтов представляет собой критическую проблему в инженерной геологии и сейсмическом проектировании, так как оно может привести к значительным повреждениям сооружений и инфраструктуры. Разжижение происходит, когда насыщенные водой несвязные грунты при сейсмических или других динамических воздействиях теряют свою прочность и переходят в полужидкое состояние. Это явление наблюдается чаще всего в районах с повышенной сейсмической активностью, но может проявляться и в других условиях.

Одним из ключевых аспектов в изучении разжижения грунтов является моделирование поверхности разжижения, которое позволяет прогнозировать, при каких параметрах нагрузок и характеристиках грунтов начинается это явление. Для проведения такого моделирования используют различные параметры грунта, такие как относительная плотность, коэффициент пористости, коэффициент демпфирования, поровое давление и другие. Построение трехмерных графиков на основе этих параметров позволяет наглядно представлять поверхностные кривые разжижения и выявлять критические точки, при которых происходит потеря устойчивости грунтов.

Цель данной работы заключается в разработке и анализе трехмерной модели поверхности разжижения грунтов на основе нескольких ключевых параметров

грунтового массива, что позволит создать основу для прогнозирования разжижения и минимизации его последствий.

Для анализа данных испытаний в компании АО МОСТДОРГЕОТРЕСТ была разработана специализированная система сбора и хранения данных (рис.2) [7], позволяющая проводить быстрый анализ архивных данных.

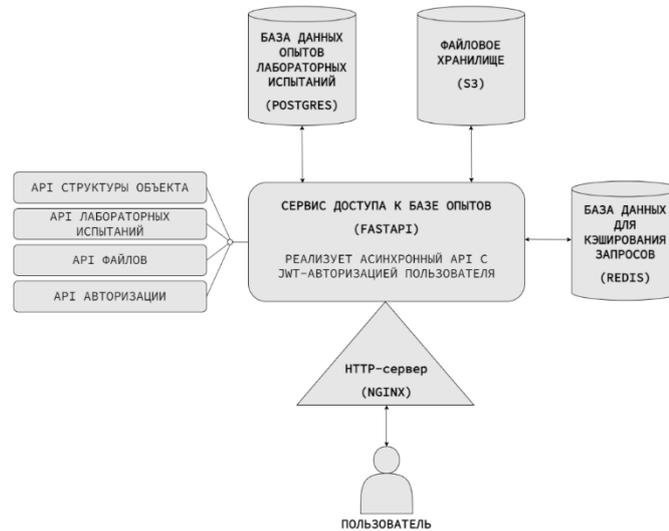


Рис.2. Схема сервиса хранения данных лабораторных испытаний.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Для моделирования поверхности разжижения грунтов в данной работе использовался комплексный подход, основанный на численном анализе и визуализации данных. Методы включают:

1. **Сбор данных:** были использованы экспериментальные данные различных типов грунтов, подверженных разжижению. В частности, такие характеристики, как плотность, коэффициент пористости и другие, а также лабораторные результаты динамических испытаний. Источники данных включают опубликованные экспериментальные исследования разжижения грунтов и динамических испытаний [4].

2. **Выбор параметров:** для построения модели использовались следующие параметры:

- **Коэффициент пористости;**
- **CSR** – коэффициент, определяющий уровень приложенных нагрузок;
- **Скорость распространения поперечных волн;**
- **PPR** – ключевой фактор, влияющий на развитие разжижения при сейсмических нагрузках.

3. **Построение трехмерных графиков:** для визуализации поверхности разжижения применялись методы трехмерного моделирования с использованием программного пакета Python с библиотеками Matplotlib и NumPy. Для каждого набора параметров было построено трехмерное представление поверхности разжижения, где оси представляли различные комбинации параметров (например, коэффициент пористости, напряжение, поровое давление).

4. **Поиск критических точек:** модель была проанализирована для выявления критических значений параметров, при которых происходит разжижение грунтов. Для этого использовались методы численной оптимизации, позволяющие находить минимальные значения функции устойчивости грунтового массива [5].

5. **Валидация модели:** результаты численного моделирования были сопоставлены с экспериментальными данными из литературы [6]. Для проверки адекватности модели использовались данные о фактических случаях разжижения грунтов, наблюдавшихся в полевых условиях, а также результаты лабораторных экспериментов.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Для анализа данных были использованы опыты на определение потенциала разжижения и на штормовое разжижение. Это связано с тем, что в таких опытах, как сейсморазжижение поровое давление и деформация не стабилизируются из-за малого числа циклов, поэтому прогнозы по данным опытам не могут быть использованы при анализе значений PPR, если не произошло разжижение.

В результате обработки данных были получены графики зависимости PPR (рис.3,4).

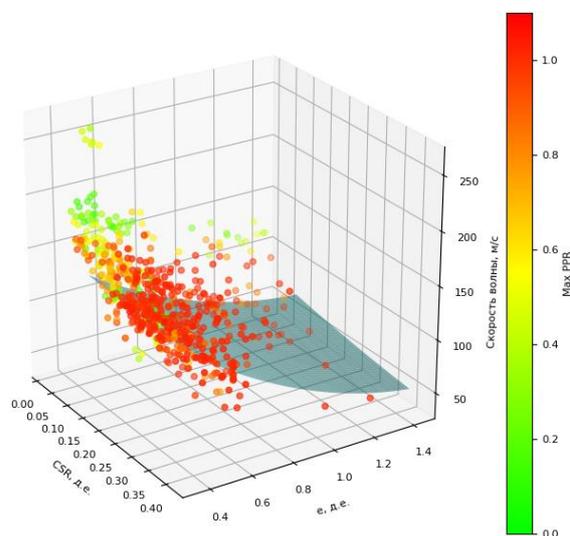


Рис.3. Зависимость PPR от скорости поперечной волны, коэффициента пористости и CSR.

Для построения поверхности использовался метод наименьших квадратов, аппроксимирующая поверхность задавалась следующим образом

$$Z = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2.$$

Для поверхности с параметрами скорость поперечной волны, коэффициент пористости и CSR (рис.3) результат аппроксимации имеет вид

$$V_S = a_0 + a_1 \cdot e + a_2 \cdot CSR + a_3e^2 + a_4 \cdot e \cdot CSR + a_5 \cdot CSR^2.$$

$$\begin{cases} a_0 = 203,249 \\ a_1 = -27,25 \\ a_2 = -166,213 \\ a_3 = -63,543 \\ a_4 = -46,457 \\ a_5 = 55,864 \end{cases}$$

Поверхность задавалась, как усредненное значение точек разжижения. На графике видно, что при таком анализе явно прослеживается зависимость

разжижения от коэффициента пористости, также прослеживается зависимость разжижения от CSR.

Также моделирование границы разжижения было произведено через параметры коэффициент демпфирования, CSR и коэффициент пористости (рис.4).

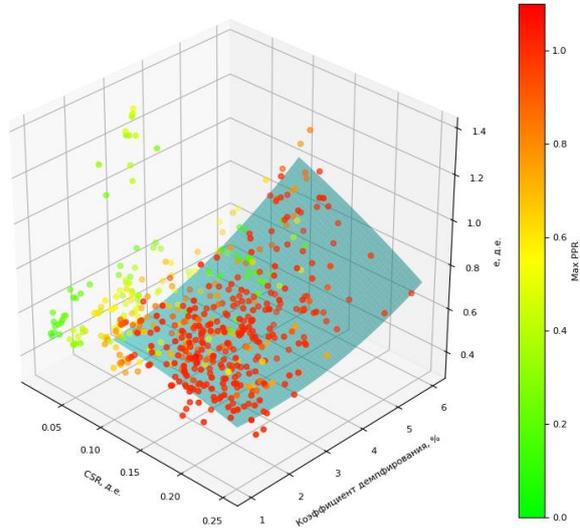


Рис.4. Зависимость PPR от коэффициента демпфирования, коэффициента пористости и CSR.

При анализе графика и рис.3 можно сделать вывод, что зависимость разжижения падает при росте CSR, что отвечает физическим законам механики грунтов. Зависимость от коэффициента демпфирования показывает небольшой рост устойчивости к разжижению при росте коэффициента демпфирования, что может быть объяснено большим рассеиванием энергии. Результаты аппроксимации поверхностью получились следующие

$$e = a_0 + a_1 \cdot CSR + a_2 \cdot \zeta + a_3 CSR^2 + a_4 \cdot CSR \cdot \zeta + a_5 \cdot \zeta^2$$

$$\begin{cases} a_0 = 0,6 \\ a_1 = 0,548 \\ a_2 = 0,003 \\ a_3 = -2,45 \\ a_4 = -0,281 \\ a_5 = 0,011 \end{cases}$$

## ОБСУЖДЕНИЕ

При построении графиков роста порового давления было выявлено, что многие области имеют низкие плотности точек. Это связано с тем, что опыты были выполнены по ГОСТ, и многие параметры опыта имеют низкую вариативность, например, частота для опыта на потенциал разжижения обычно берется из сейсмической нагрузки равной 0.5 Гц, а это приводит к тому, что коэффициент демпфирования имеет одно из наименьших возможных значений, поскольку минимум функции Релея для коэффициента демпфирования лежит в диапазоне 0.3-3 Гц. В дальнейшем база опытов будет дополнена опытами, заполняющими места с низкой плотностью распределения параметров.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Для анализа данных были использованы опыты на определение потенциала разжижения и на штормовое разжижение. Это связано с тем, что в остальных опытах, таких как сейсморазжижение, поровое давление и деформация не стабилизируются из-за малого числа циклов, поэтому прогнозы по данным опытам не могут быть использованы при анализе значений PPR, если не произошло разжижение.

Использование метода наименьших квадратов для аппроксимации поверхности разжижения позволило получить зависимости между параметрами. Результаты показали, что увеличение CSR ведёт к снижению вероятности разжижения, что подтверждает известные представления о поведении грунтов под нагрузкой.

Также было отмечено, что повышение коэффициента демпфирования увеличивает устойчивость грунта к разжижению за счёт более эффективного рассеивания энергии. Этот вывод важен для проектирования сейсмостойких сооружений, так как учет демпфирующих свойств грунтовых массивов может существенно снизить риски разрушения сооружений при землетрясениях.

Несмотря на достигнутые результаты, дальнейшие исследования должны быть направлены на расширение базы экспериментальных данных, особенно в тех областях, где плотность точек данных была низкой. Это позволит повысить точность модели и её применимость в реальных условиях, особенно для специфических регионов с высокой сейсмической активностью.

Таким образом, разработанная модель и полученные данные могут стать основой для дальнейших исследований в области прогнозирования разжижения грунтов, а также применяться при проектировании объектов инфраструктуры в сейсмоопасных районах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Крамаренко В.В. *Грунтоведение*. – М.: Изд-во Юрайт, 2020. – 430 с.
2. Болдырев Г.Г., Идрисов И.Х. *Оценка потенциала грунтов к разжижению* [Электронный ресурс]. ГеоИнфо. 20 июня 2019. Режим доступа: <https://geoinfo.ru/product/boldyrev-gennadij-grigorevich/ocenka-potenciala-gruntov-k-razzhizheniyu-40984.shtml>.
3. Моргунов К.П., Колосов М.А. *Проблемы разжижения грунтов в основаниях гидротехнических сооружений* // Наука и техника. – 2022. – Т.21. – №3.
4. Seed H.B., Idriss I.M. *Simplified Procedure for Evaluating Soil Liquefaction Potential* // Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. – 1971. – Vol.97(9). – Pp.1249-1273.
5. Youd T.L., Idriss I.M. *Liquefaction Resistance of Soils: Summary Report from the 1996 NCEER and 1998 NCEER/NSF Workshops on Evaluation of Liquefaction Resistance of Soils* // Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. – 2001. – Vol.127(10). – Pp.817-833.
6. Idriss I.M., Boulanger R.W. *Soil Liquefaction during Earthquakes*. Earthquake, 2008.
7. Тишин Н.Р., Озмидов О.Р., Пролетарский А.В. *Система комплексного хранения данных геологических лабораторных испытаний* // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2024. – Т.12. – №1(44). DOI: 10.26102/2310-6018/2024.44.1.007.

УДК 622.83  
EDN CGQSPU (<https://elibrary.ru/cgqspu>)  
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.38



## **ОЦЕНКА ДЕФОРМАЦИЙ ПОВТОРНО ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ ПОДЗЕМНЫХ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК**

Ягель Н.В.<sup>1,2</sup>, Загоршменный И.М.<sup>2</sup>, Блохин Д.И.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ООО «Инженерно-консультационный центр проблем фундаментостроения»,  
г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт проблем комплексного освоения недр РАН, г. Москва, Россия

### **ВВЕДЕНИЕ**

Стабильная работа угольных шахт может быть обеспечена только при своевременной подготовке фронта очистных работ, который создается проведением основных и подготовительных выработок [1,2]. Способ проведения горной выработки, вид крепления и условия ее поддержания в процессе эксплуатации зависят от свойств вмещающих пласт пород, мощности разрабатываемого пласта и глубины ведения работ [2]. В условиях, когда мощность разрабатываемого пласта не позволяет сформировать выработку требуемого сечения без присечки вмещающих пород, целесообразно применять технологические схемы с повторным использованием подготовительных выработок. Такое решение сопровождается необходимостью применения способов снижения величины смещений контура выработок [3]. Поэтому оценка эффективности применения инженерных решений по поддержанию повторно используемых выработок особенно важна в постоянно усложняющихся горно-геологических условиях. В данном сообщении представлены результаты численных расчетов смещений контура повторно используемой подготовительной выработки для конкретных горно-геологических условий разработки пологозалегающего угольного пласта. Оценка деформаций контура повторно используемой выработки необходима, так как в последующем она предназначается для отвода из лавы исходящей струи воздуха. Поэтому поддерживаемая выработка должна иметь определенное сечение для отвода расчетного количества воздуха, что снизит аэрологические риски при отработке выемочного участка [4].

Исследования выполнены для условий отработки пласта одной из шахт Печорского угольного бассейна. Рассматриваемая выработка (конвейерный бремсберг) пройдена комбайновым способом и закреплена на всем протяжении основной арочной крепью типа АП – ЗП, устанавливаемой через 0,67 м с затяжкой кровли и боков выработки.

Усиление основной крепи производится по мере перемещения очистного забоя:

– на расстояние не менее 40 м до очистного забоя балками из специального взаимозаменяемого профиля (СВП), которые располагаются в две непрерывные нити, под каждую нить производится установка канатных анкеров АК – 01 длиной 6 м, плотность их установки – 1,5 анкера на метр, схема установки крепи усиления представлена на рис.1;

– за лавой путем установки «костров» из бруса размером 1,3×4×3 м. Допустимое отставание «костров» за секциями механизированной крепи не более 4 м.

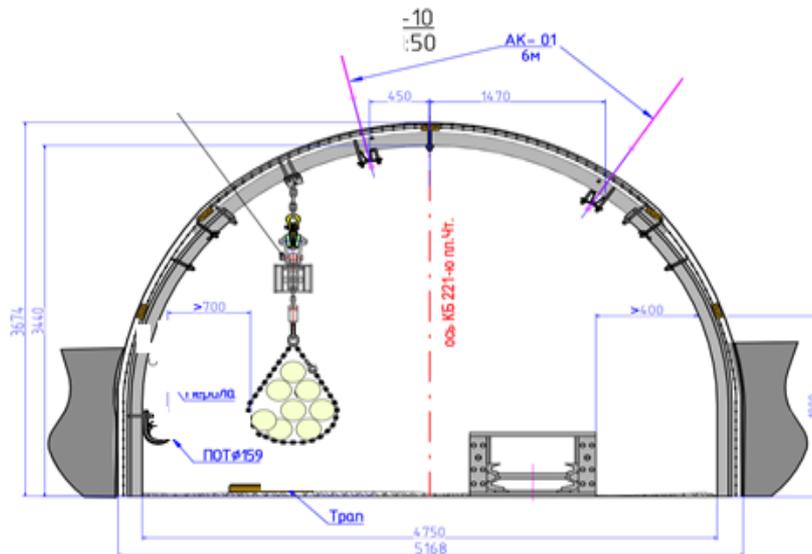


Рис.1. Схема установки крепи усиления на конвейерном бремсберге.

На рис.2 показано сопряжение лавы с конвейерным бремсбергом и представлены элементы крепления, поддержания и усиления крепления конвейерного штрека по мере перемещения очистного забоя.

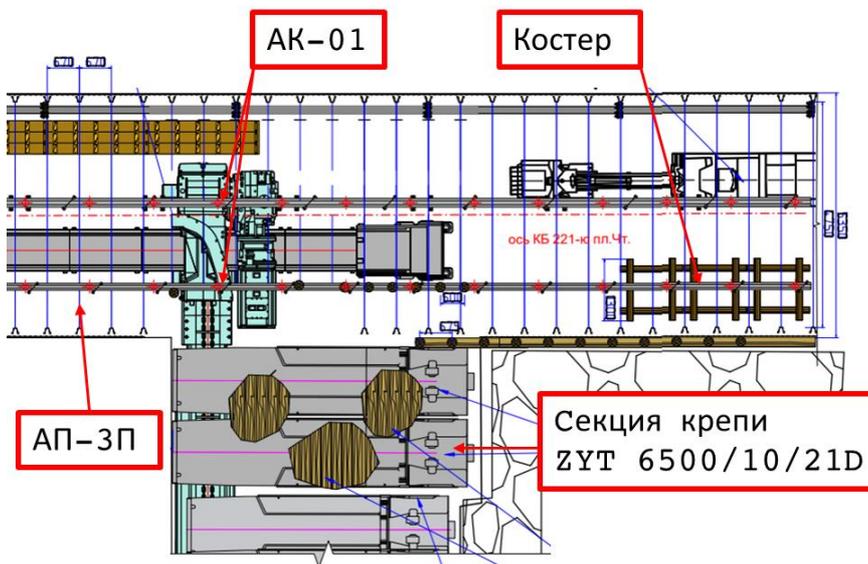


Рис.2. Сопряжение лавы с конвейерным бремсбергом.

Поддержание сопряжения лавы с исследуемой выработкой обеспечивается деревянными стойками, устанавливаемыми под ближнюю к лаве непрерывную нить из балок СВП с плотностью установки 1 стойка на метр. Для предотвращения просыпания пород кровли в лаву производится полная затяжка кровли доской на 3-х секциях крепи на сопряжении лавы с выработкой.

Длина лавы 152 м. Лава отрабатывается на глубинах 538-748 м. Угольный пласт имеет простое строение и состоит из крепкого полублестящего угля. Мощность пласта колеблется в пределах от 1,32 м до 1,58 м, средняя – 1,5 м.

**Задача описываемых исследований** – получить картину изменений напряженно-деформированного состояния рассматриваемого участка углепородного массива и оценить величины смещений приконтурных областей подготовительной горной выработки при различных положениях очистного забоя.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Для решения многих задач прикладной геомеханики, в том числе и для выполнения расчетов по оценке влияния горных работ на существующие выработки различного назначения, эффективно используются подходы численного моделирования [5]. Одним из общепринятых подходов являются методы численного моделирования, основанные на использовании нелинейных моделей механики сплошных сред [6,7]. Рассматриваемая задача решается методом конечных элементов в ПК MIDAS / GTS NX [8] с использованием критерия разрушения Кулона – Мора [9].

Общий вид расчётной схемы участка углепородного массива, включающего горные выработки, показан на рис.3.

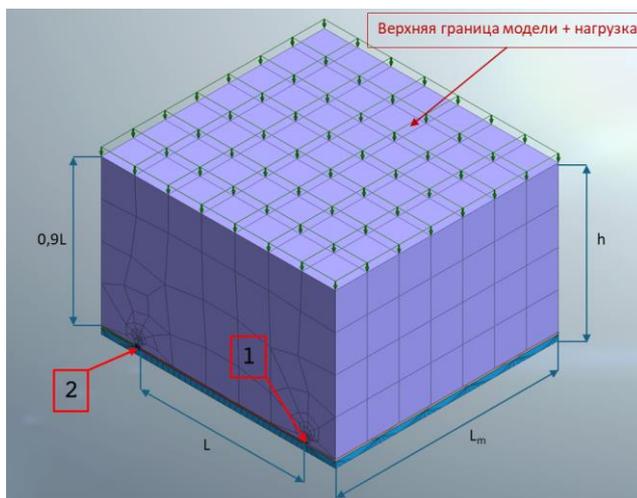


Рис.3. Общий вид расчётной схемы. 1) вентиляционный бремсберг; 2) конвейерный бремсберг.

Представленная на рис.3 расчётная схема состоит из двух слоёв вмещающих пород, общая толщина которых принимается равной  $0,9L = 137$  м [3], где  $L$  – длина лавы. Давление вышележащих пород учитывается, путём задания нагрузки на верхнюю границу модели [10]. При этом участок моделируемого выемочного столба  $L_m = 200$  м. Общая высота модели  $h = 144$  м. Расположение оконтуривающих выемочный участок подготовительных выработок и их крепление соответствует натурным условиям. Вентиляционный бремсберг в процессе продвижения забоя погашается. Конвейерный бремсберг поддерживается и используется для проветривания действующей лавы и в качестве вентиляционного бремсберга при отработке следующей лавы.

Углепородный массив рассматривается как неоднородный, изотропный (в пределах отдельных породных слоев и пластов) и нелинейно деформируемый. Значения используемых в расчетах деформационно-прочностных характеристик различных компонентов рассматриваемой геотехнической системы представлены в Таблица 1.

Таблица 1.

## Свойства пород.

№	Материал	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Модуль упругости, Е, ГПа	Коэффициент Пуассона, $\nu \cdot 10^3$	Сцепление С, кПа	Угол внутреннего трения $\varphi$ , °
1	Ослабленные аргиллиты	2200	1	250	1000	25
2	Песчаник	2600	14	200	6500	50
3	Уголь	1340	2	200	2600	50

Учитывая технологию отработки рассматриваемого пласта, рассмотрены следующие этапы моделирования напряженно-деформированного состояния углепородного массива в процессе эксплуатации подготовительной горной выработки (модель делится на расчётные блоки, каждый элемент технологической схемы является блоком, то есть под ВКЛ. и ВЫКЛ. подразумевается добавление и исключение блока из расчёта):

– S.0 (I.S.-initial stage) – задание информации, характеризующей условия залегания, свойства ненарушенного неоднородного массива горных пород;

– S.1 – обнуление деформаций массива, не подверженного техногенному влиянию (обязательная процедура для данного ПО);

– S.2 – в массиве пройдена подготовительная выработка (конвейерный бремсберг), закрепленная арочной крепью (размеры сечения и способ крепления соответствуют проекту);

– S.3-22 – моделируется перемещение очистного забоя. Перемещение забоя моделируется путём замены свойств, пройденных очистным забоем блоков массива (ослабленные аргиллиты в Таблице 1). В процессе моделирования предусмотрен цикл технологических операций от установки крепи усиления основной крепи в конвейерном бремсберге вне зоны влияния лавы до усиления основной крепи за лавой производится путем установки «костров».

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

На рис.4 представлены пространственные распределения результирующих деформаций рассматриваемой геомеханической системы, полученные в ходе моделирования и соответствующие вышеперечисленным этапам отработки угольного пласта.

Для использования полученных результатов с целью разработки инженерных решений по безаварийной эксплуатации повторно используемой горной выработки в течение всего срока службы необходимо выделить вертикальные и горизонтальные деформации. На рис.5 представлен финальный этап моделирования геомеханического состояния исследуемого массива горных пород в зоне влияния очистного забоя и представлено распределение указанных составляющих деформаций массива, вмещающего повторно используемую подготовительную выработку, закрепленную основной крепью и крепью усиления. Полученные значения вертикальных и горизонтальных деформаций позволяют оценить соответствие применяемых способов крепления и охраны выработки требованиям обеспечения расчетного сечения горной выработки расчетным показателям и могут быть использованы для оценки эффективности принимаемых решений.

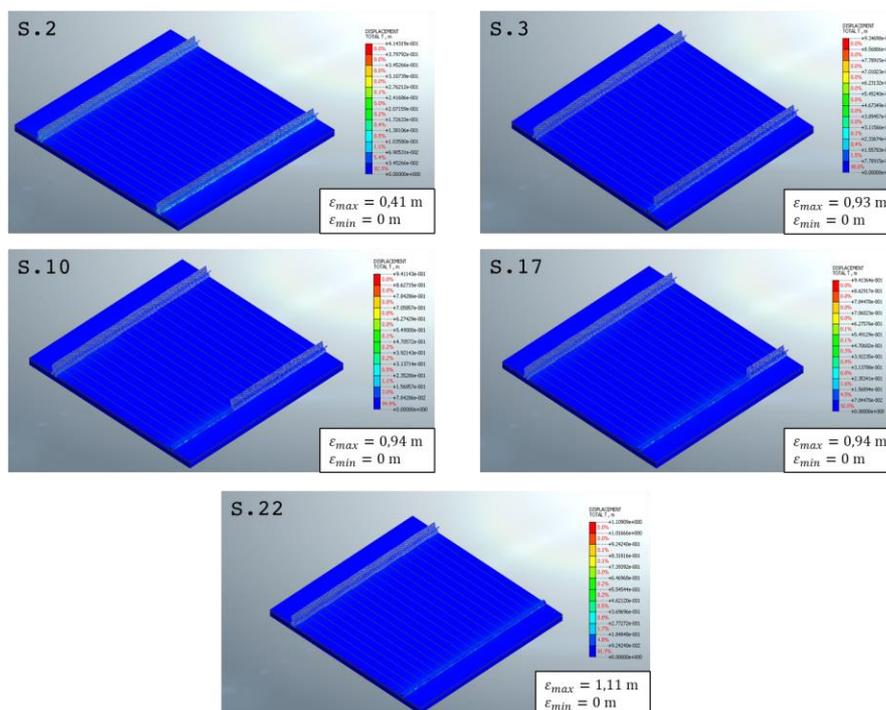


Рис.4. Результирующие деформации массива, полученные на каждом этапе моделирования:  $\epsilon_{max}$  – максимальное значение деформации, м;  $\epsilon_{min}$  – минимальное значение деформации, м.

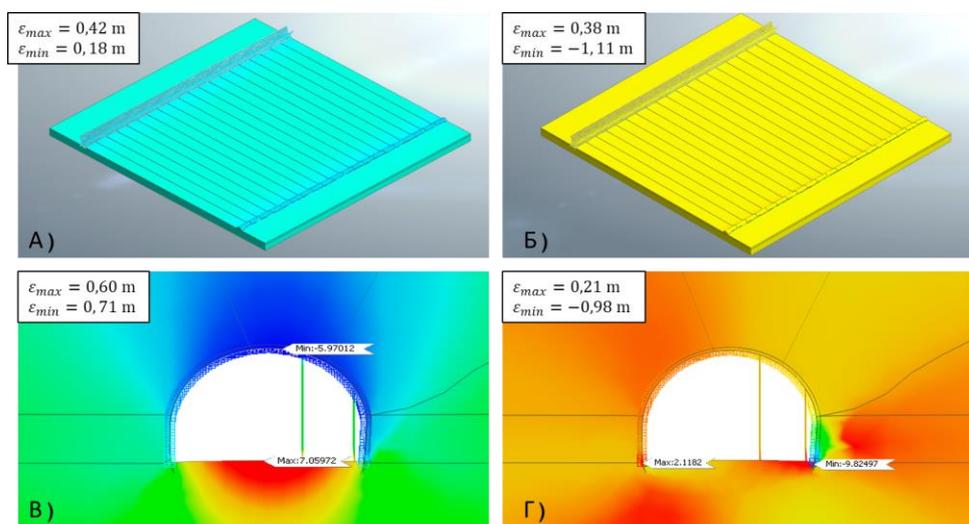


Рис.5. Распределение деформаций  $\epsilon$ : а) вертикальные деформации в пределах очистного забоя; б) горизонтальные деформации в пределах очистного забоя; в) вертикальные деформации вокруг выработки закрепленной арочной крепью; г) горизонтальные деформации вокруг выработки закрепленной арочной крепью.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Для оценки достоверности результатов моделирования выполнено сравнение с инструментальными замерами изменений геометрических параметров сечения, выполненными по длине выработки на  $N = 11$  измерительных станциях (пикетах).

План рассматриваемого выемочного с участка с расположением граничных пикетов в контролируемой выработке представлен на рис.6.

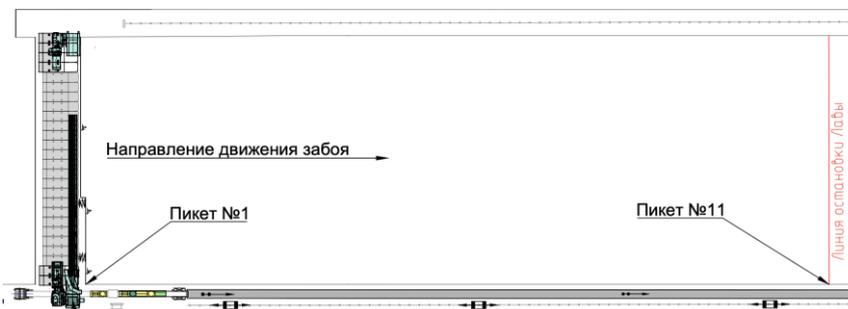


Рис.6. План выемочного с участка с расположением граничных пикетов в контролируемой выработке.

На рис.7А,В представлены значения параметров, характеризующих сечение выработки ( $H$  – высота,  $L$  – ширина) повторно используемого конвейерного бремсберга на 13.01.2023 и 20.04.2023 соответственно. Пикет 1 соответствует началу движения забоя, а пикет 11 – завершению отработки выемочного столба. При сравнении результатов замеров с результатами моделирования исключены данные измерений в зонах нарушения горных пород.

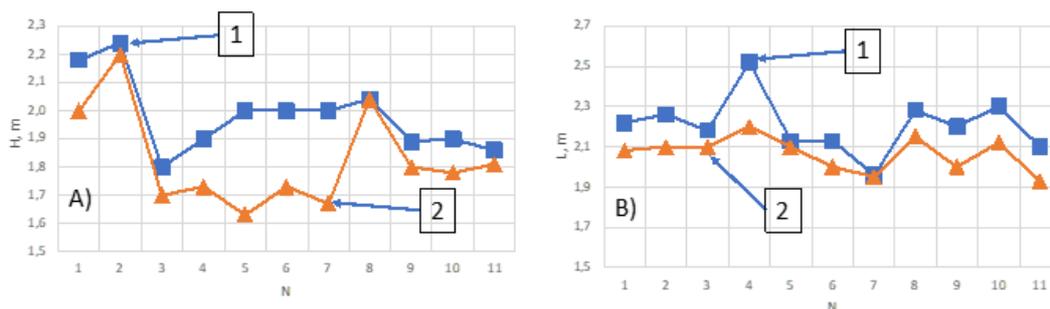


Рис.7. Результаты инструментальных измерений геометрических параметров горной выработки: А) изменение высоты ( $H$ ) выработки; В) изменение ширины ( $L$ ) выработки. (1 – на 13.01.2023; 2 – 20.04.2023).

Сравнение результатов натуральных исследований 13.01.2023 и 20.04.2023 и моделирования соответственно показано в Таблице 2. Значения деформаций, полученных инструментальным способом, определялись как разница значений геометрического параметра (ширины ( $L$ ) или высоты ( $H$ )) выработки для рассматриваемого временного интервала. В Таблице 2 представлены значения деформаций сечения выработки, соответствующие пикету  $N = 11$ . Для сравнения с данными инструментальных измерений использованы значения деформаций, полученные на финальном этапе моделирования на границе расчётной области, которая соответствует пикету  $N = 11$ .

Таблица 2.

Сравнение деформаций.

Геометрический параметр	Значения деформаций на основе инструментальных измерений, м	Значения деформаций на основе моделирования, м
Ширина ( $L$ )	0,13	0,11
Высота ( $H$ )	0,16	0,14

Из данных, приведенных в Таблице 2, следует, что: по вертикали отклонение значений деформации не превышают 13 %, по горизонтали – 15%. Таким образом, полученные результаты показывают удовлетворительную сходимость результатов моделирования с натурными исследованиями.

На основе проведенного исследования, была построена 2D модель изменения геометрических параметров контура выработки от изменения глубины ее заложения. На рис.8 представлены результаты данного исследования, в виде изополей вертикальных и горизонтальных деформаций.

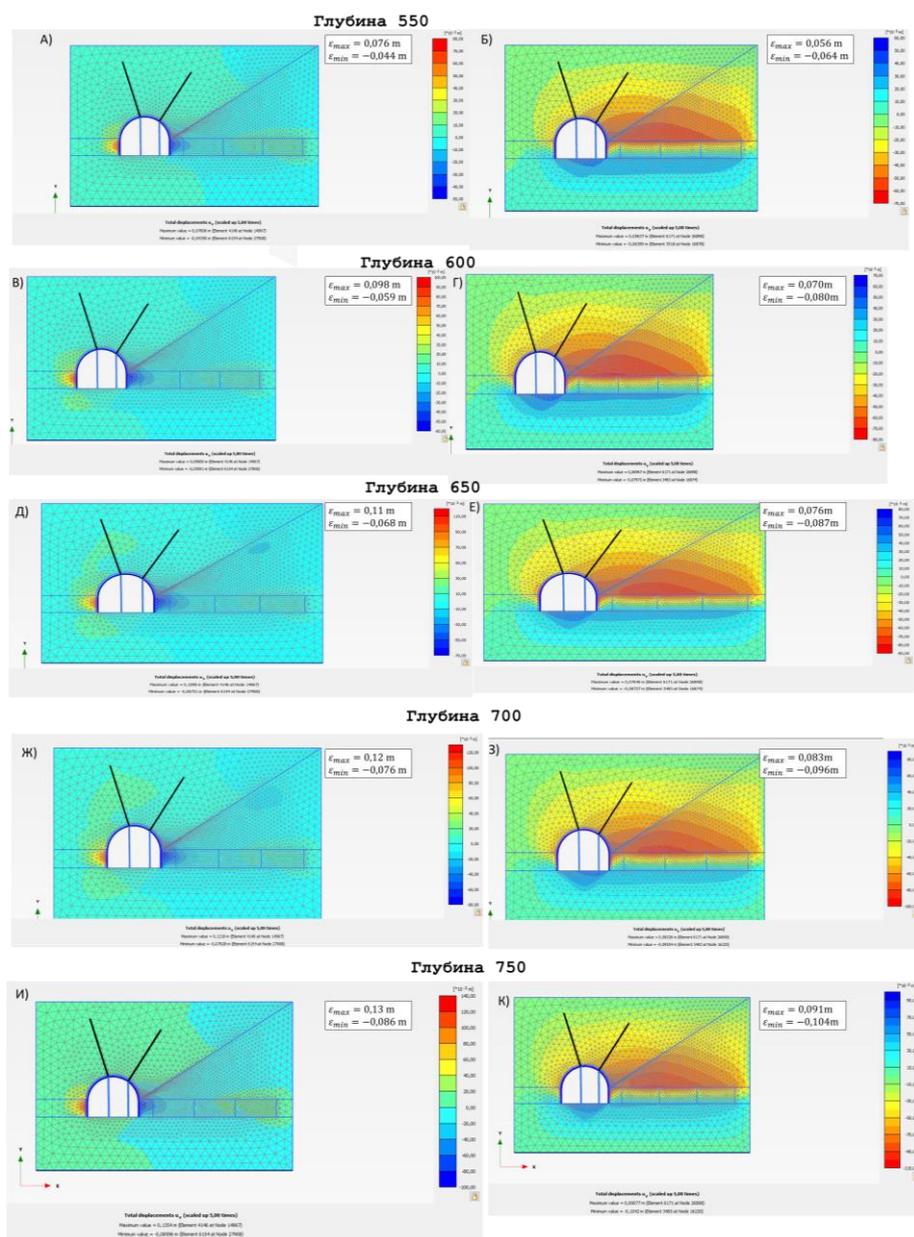


Рис.8. Изополя деформаций: А) вертикальные деформации на глубине 550; Б) горизонтальные деформации на глубине 550; В) вертикальные деформации на глубине 600; Г) горизонтальные перемещения на глубине 600; Д) Вертикальные деформации на глубине 650; Е) горизонтальные деформации на глубине 650; Ж) вертикальные деформации на глубине 700; З) горизонтальные деформации на глубине 700; И) вертикальные деформации на глубине 700; К) горизонтальные деформации на глубине 700.

На основе этих результатов были построены зависимости величин максимальных значений деформаций контура выработки в осях  $X$  и  $Y$  ( $\varepsilon_{\max}^X$  и  $\varepsilon_{\max}^Y$ ) от глубины заложения  $h$  рис.9.

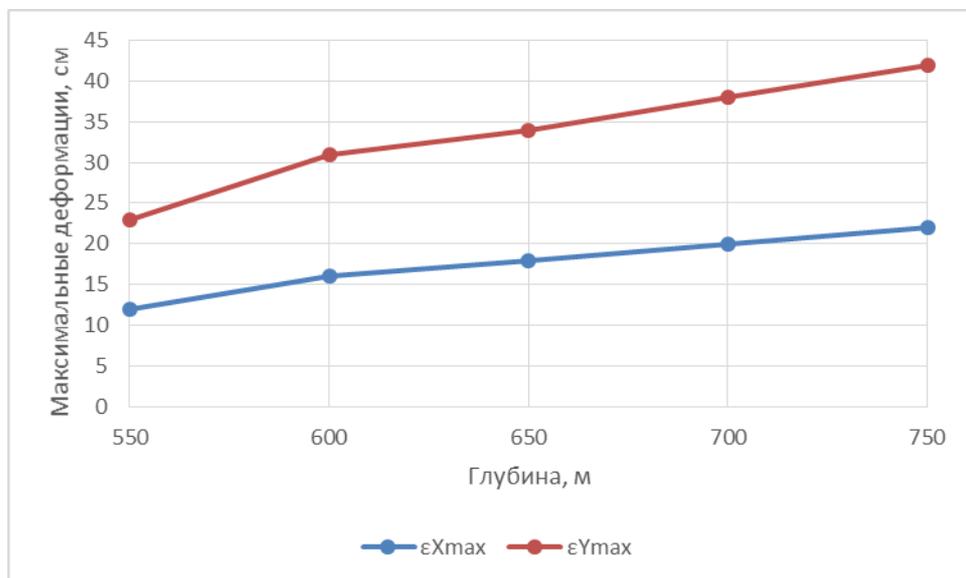


Рис.9. Зависимости  $\varepsilon_{\max}^X(h)$  и  $\varepsilon_{\max}^Y(h)$ .

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующее заключение:

1) Результаты исследования демонстрируют, что предложенная геомеханическая модель массива горных пород в полной мере отражает основные особенности его строения и изменения контура подготовительной горной выработки в процессе ее эксплуатации и может быть использована для оценки эффективности различных способов ее поддержания при повторном использовании.

2) Изменение смещений контура выработки с изменением глубины ведения работ происходит относительно линейно в соответствии с данными численных экспериментов. Такой результат связан с назначением в используемой геомеханической модели одних и тех же значений деформационных характеристик для пород одного типа на различных участках массива. Уточнение вида зависимостей  $\varepsilon_{\max}^X(h)$  и  $\varepsilon_{\max}^Y(h)$  в рамках рассматриваемой модели можно связать с повышением информативности исходной геологической информации, в частности, предусмотреть учет результатов испытаний образцов отобранных на каждом горизонте ведения горных работ.

3) Выполненное сравнение результатов моделирования с инструментальными замерами деформаций в повторно используемой выработке показало удовлетворительную сходимость.

4) Применение моделирования для оценки деформаций повторно используемой выработки позволяет на стадии проектирования проанализировать изменение геомеханического состояния выработки на всем цикле ее функционирования, что позволяет сократить затраты материальных и трудовых ресурсов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Казанин О.И. *Перспективные направления развития технологий подземной угледобычи в РФ* // Горный журнал. – 2023. – Т.9. – С.4-11.
2. Каунг П.А., Зотов В.В., Гаджиев М.А., Артемов С.И., Гиреев И.А. *Формализация процесса выбора технологий отработки месторождений полезных ископаемых* // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2022. – №2. – С.124-138.
3. Бажин Н.П., Мельников О.И., Пиховкин В.С., Райский В.В. *Охрана подрабатываемых подготовительных выработок*. – М.: Недра, 1978.
4. Баловцев С.В., Скопинцева О.В. *Оценка влияния повторно используемых выработок на аэрологические риски на угольных шахтах* // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2021. – №2-1. – С.40-53.
5. Соломойченко Д.А. *Определение величин напряжений и деформаций в окрестностях подготовительных выработок* // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. – 2015. – №1. – С.68-71.
6. Захаров В.Н., Шляпин А.В., Трофимов В.А., Филиппов Ю.А. *Изменение напряженно-деформированного состояния углеродного массива при отработке угольного пласта* // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2020. – №9. – С.5-24.
7. Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б., Знаменский В.В., Мнушкин М.Г. *Конечно-элементное моделирование задач геомеханики и геофизики* // Вестник МГСУ. – 2012. – №2. – С.52-65.
8. Хамидуллина Н.В., Олейников А.Д., Орел А.Г. *Применение программного комплекса MIDAS для моделирования инженерных сооружений* / Международная научно-практическая конференция «Транспорт: наука, образование, производство». Сборник научных трудов. – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный университет путей сообщения, 2023. – Т.1. – С.217-220.
9. Зерцалов М.Г. *Геомеханика. Введение в механику скальных грунтов: учебник для вузов*. – М: Издательство АСВ, 2014. – 352 с.
10. Zhuo H., Xie D., Sun J., Shi X. *Mining hazards to the safety of segment lining for tunnel boring machine inclined tunnels* // Frontiers in Earth Science. – 2022. – Vol.9. – 814672.

---

Типография ООО «Сам Полиграфист»      Подписано в печать 23.12.2024  
г. Москва, Волгоградский пр., д.42, корп.5    Объем 37,4 п.л. Тираж 250 экз. Зак. №1102