



**13-Я ВСЕРОССИЙСКАЯ НАУЧНАЯ
КОНФЕРЕНЦИЯ С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ**

**МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ
МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ,
СЛОЖНЫХ И ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД**

им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского

14 ноября – 16 ноября 2023 года

Москва, Ленинградский проспект, 7

СБОРНИК ТРУДОВ

МОСКВА
2023

**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт прикладной механики Российской академии наук**

**Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов
управления Российской академии наук**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ, СЛОЖНЫХ И ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД

**СБОРНИК ТРУДОВ
13-Й ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ
им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского**

(14 – 16 ноября 2023 года, г. Москва)

**МОСКВА
2023**

«Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред».

Сборник трудов 13-й Всероссийской научной конференции с международным участием.

Москва, 14 – 16 ноября 2023 г. – М.: ООО «Сам Полиграфист», 2023. – 342 с.

ISBN 978-5-00227-145-0

**Конференция проведена в рамках
Празднования 300-летнего юбилея Российской академии наук**

В Сборник трудов включены работы участников конференции по направлениям: «Механика гетерогенных сред, адаптивных материалов, композитов и конструкций», «Аэро-, гидромеханика, реология структурно-сложных сред», «Вычислительные методы механики гетерогенных сред», «Высокоскоростной удар, распространение и взаимодействие волн и вихрей в деформируемых твердых, жидких и газообразных средах» и «Геомеханика. Современные методы исследований».

Составители сборника:

Власов А.Н., Карнет Ю.Н., Муковникова И.И.

© ФГБУН Институт прикладной
механики РАН, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Секция «Механика гетерогенных сред, адаптивных материалов, композитов и конструкций»	7
Атомная силовая и электронная микроскопия силиконовых композитов с наноструктурированным железным наполнителем Валиев Х.Х., Степанов Г.В., Бахтияров А.В., Кириченко С.И., Минаев А.Я., Власов А.Н., Карнет Ю.Н., Корнилова А.А., Кудрявцев А.А., Базин А.Ю.	9
Разработка и опытная эксплуатация высокотехнологичных устройств для подавления низкочастотных колебаний проводов воздушных ЛЭП (обзор) Виноградов А.А., Котухов М.А., Привалов А.Н., Киселев А.В.	14
Применение метода Бубнова-Галеркина для управления поворотом космического аппарата по крену с устранением нелинейных колебаний упругих панелей солнечных батарей в момент его остановки Гришанина Т.В., Русских С.В.	25
Динамика композитных цилиндрических панелей с сотовым наполнителем с повреждениями под действием реактивной струи двигателя пассажирского самолета Дедова Д.В., Мартиросов М.И., Рабинский Л.Н.	33
Оценка прочности и долговечности однонаправленного стеклопластика при сжатии при различных значениях температуры Жаринов М.Ю., Марасанов А.И.	40
Модель изгиба ортотропной шарнирно-опертой балки Тимошенко под действием нестационарных, распределенных по длине термомеханодиффузионных нагрузок Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.	47
Приложение вариационных уравнений аналитической механики нетонких оболочек переменной толщины к моделированию искусственных интраокулярных линз Зябков П.С., Жаворонок С.И.	54
Практическое применение эффекта Брюстера для исследования приповерхностных слоев в газах и тонких пленок на поверхностях Ильин П.В., Ломакин М.В.	62
Некоторые задачи безмоментной теории оболочек с эффектом памяти формы Исаченко И.А., Курбатов А.С., Жаворонок С.И.	68
О силовом состоянии контакта цилиндра упруго закрепленного на вращающемся диске Киреенков А.А.	77
Методика исследования контактной задачи для сферической оболочки, опирающейся на две плоские поверхности Киреенков А.А., Федотенков Г.В.	82

Сравнение методов моделирования прогрессирующего разрушения композита В4С/АL	
Клементьев П.Д., Шешенин С.В.	90
Механические свойства эластомерных композитов, применяемых в качестве элементов конструкции гасителей колебаний	
Корнев Ю.В., Карнет Ю.Н., Джага А.О.	99
Стационарная задача о взаимодействии упругой среды и однородной пластины в ней при различных граничных условиях	
Локтева Н.А., Во Ван Дай	106
Особенности статического расчёта подкраново-подстропильной фермы	
Маркина Ю.Д.	113
Массоперенос с учетом геометрической и физической нелинейности в разномодульной среде (постановка задачи)	
Мошников М.С., Власов А.Н.	121
Расчётно-экспериментальный метод определения упругих механических свойств резины в сложном напряжённо-деформированном состоянии	
Потапова А.И., Гамлицкий Ю.А., Веселов И.В.	127
Оценка эффективного тензора жесткости композитного материала с периодическим расположением центров включений со случайным радиусом	
Сорокин Г.С., Власов А.Н.	137
Калибровка нелокальной модели динамического деформирования изгибаемой балки по результатам численного эксперимента	
Царев Р.О.	143
Использование спектральной пирометрии при плазменном нагреве тугоплавких силикатных материалов	
Шеховцов В.В., Улмасов А.Б., Бакшанский Р.Ю.	149
Асимптотическое исследование поперечного изгиба пластины	
Шешенин С.В., Артамонова Н.Б., Кузьмин М.А.	154
Исследование влияния поверхностной плёнки на трение и изнашивание волокнистого композита	
Шпенев А.Г., Буковский П.О.	162
<i>Секция «Аэро-, гидромеханика, реология структурно-сложных сред»</i>	171
Сравнение оптимальных и неоптимальных профилей и осесимметричных носовых частей при одинаковых габаритных ограничениях и объёме при разных числах Маха	
Большаянов И.П., Захаров Н.Н.	172

Исследование обтекания потоком воздуха перфорированных поверхностей (сеток), установленных в двумерном канале под углом атаки, и определение их газодинамических характеристик в зависимости от степени проницаемости сетки f_c, углов атаки α и коэффициента скорости λ	
Большаинов И.П., Захаров Н.Н., Уваров Т.Е.	177
Оценка возможных границ изменения коэффициентов теплопроводности в дисперсных средах	
Бошнятов Б.В.	189
О механизме турбулентных течений со сдвигом	
Воротилин В.П.	194
Метод исследования задач динамики жестких кластерных структур в идеальной жидкости	
Гуськов О.Б.	199
Новая концепция стабильности нанопузырей в воде	
Левин Ю.К.	207
Образование вязких пальцев при вытеснении вязкой жидкости в радиальной ячейке Хеле-Шоу	
Марфин Е.А., Галимзянова А.Р.	210
Течения Куэтта-Пуазейля в сжимаемом газе	
Шалаев В.И., Калугин С.Т., Толоко Г.В., Токарев В.А.	216
<i>Секция «Вычислительные методы механики гетерогенных сред»</i>	225
Некоторые подходы к разработке естественно-научных математических методов высокодетализированного кинетического описания процессов в дисперсных системах для управления ими в технологиях с целью создания материалов нового поколения при минимальных энергозатратах	
Аджиев С.З., Мелихов И.В., Веденяпин В.В., Гопин А.В., Батищева Я.Г.	226
Сходимость итерационного процесса решения связанной задачи консолидации	
Артамонова Н.Б., Шешенин С.В.	238
О развитии метода Трефтца для решения задач механики структурно-неоднородных сред	
Волков-Богородский Д.Б.	245
Квантово-химический анализ конформеров полимера Зилон	
Никитин С.М., Карнет Ю.Н.	255
Оценка эффективного тензора жесткости структурно неоднородных сред	
Семенов М.А., Власов А.Н.	258

Секция «Высокоскоростной удар, распространение и взаимодействие волн и вихрей в деформируемых твердых, жидких и газообразных средах»..... 263

Стационарные и нестационарные структуры разрывов в двухжидкостной плазме, описываемые уравнениями электромагнитной гидродинамики

Бахолдин И.Б. 264

Задача дифракции плоской нестационарной акустической волны на абсолютно твёрдом цилиндре с упругим неоднородным покрытием

Белкин А.Э. 274

Конечно-элементная модель распространения звуковых волн в жидкости с упругими включениями

Бирюков Д.Р. 283

Моделирование высокоскоростного взаимодействия деформируемого сетчатого ударника и деформируемой преграды

Головешкин В.А., Беклемишев С.А., Выборнов А.Н., Мягков Н.Н. 289

Газодинамические и пиротехнические устройства воспроизведения совместного теплового и механического действия потоков излучений и частиц на тонкостенные композитные конструкции

Острик А.В., Николаев Д.Н., Чепрунов А.А., Бугай И.В. 300

Секция «Геомеханика. Современные методы исследований» 309

Упругая полоса с остаточными напряжениями

Власов Д.А., Коваленко М.Д. 310

Проблемы достоверного определения механических характеристик многолетнемерзлых грунтов и новые рациональные подходы к проведению геомеханических испытаний

Королев М.В. 317

Новые приборы для определения механических характеристик мерзлых грунтов при различных температурах

Кыльчик Н.А., Королев М.В. 327

Решение нелинейных задач геотехники на несогласованных сетках конечных элементов

Нестеров И.В., Мерзлякова А.Д., Шейко Е.А. 335

**Механика гетерогенных сред,
адаптивных материалов,
композитов и конструкций**

УДК 539.24

EDN WGOOIR (<https://elibrary.ru/wgooir>)

DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.1



АТОМНАЯ СИЛОВАЯ И ЭЛЕКТРОННАЯ МИКРОСКОПИЯ СИЛИКОНОВЫХ КОМПОЗИТОВ С НАНОСТРУКТУРИРОВАННЫМ ЖЕЛЕЗНЫМ НАПОЛНИТЕЛЕМ*

Валиев Х.Х.¹, Степанов Г.В.², Бахтияров А.В.², Кириченко С.И.², Минаев А.Я.³,
Власов А.Н.¹, Карнет Ю.Н.¹, Корнилова А.А.⁴, Кудрявцев А.А.⁵, Базин А.Ю.⁶

¹ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

²АО Государственный НИИ химии и технологии элементоорганических соединений, г. Москва, Россия

³ФГБУН Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН,
г. Москва, Россия

⁴МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, Москва, Россия

⁵ООО «Тескан», г. Санкт-Петербург, Россия

⁶ПАО «НПО «Алмаз», г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Магнитоактивные эластомеры (МАЭ) относятся к классу так называемых «умных» материалов («smart materials»). Данный тип материалов обладает широким спектром свойств, таких как магнитореологический, магнитодеформационный и магнитострикционный эффект, магниторезистивный, магнитопьезорезистивный и магнитооптический эффект, эффект памяти формы и др. [1-6]. Данные материалы представляют собой композит из магнитных частиц, как правило, магнитомягких, в эластичной полимерной матрице. Создание композитов с таким сложным наполнением направлено на расширение свойств и применимости магнитореологических эластомеров в демпфирующих и сенсорных устройствах. Первичные исследования магнитных свойств магнитореологических эластомеров со сложным наполнителем показало у них наличие аномальных характеристик при процессе намагничивания и перемагничивания. Широко распространенным наполнителем в МАЭ является микроструктурное карбонильное железо при создании как изотропных, так и анизотропных композитов. Магнитные наночастицы в настоящее время также являются популярными объектами исследований. В данной работе для создания МАЭ в качестве наполнителя использовалось наноструктурированное железо. Для выявления особенностей микроструктуры поверхности синтезированных композитов использовались атомная силовая и электронная микроскопии.

* Работа поддержана грантом РФФИ №19-53-12039. Работа также выполнена в рамках Государственной программы исследований Института прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН), и по теме государственного задания в ИМАШ РАН.
Номер государственной регистрации: 01201355403.

МАТЕРИАЛЫ И ОБОРУДОВАНИЕ

Магнитные эластичные композиты можно изготавливать на основе высокоэластичных каучуков, таких как силиконовый, уретановый, бутадиеновый и различных магнитных порошков. В нашей работе были исследованы образцы с полимерной матрицей из силиконовых компаундов СИЭЛ (ГНИИХТЭОС, Москва, Россия) с наполнителем из нано-структурированного железного порошка со средним размером порядка 120 нм (ООО «Передовые порошковые технологии», Томск, Россия). Эти нано-порошки произведены методом электрического взрыва металлического железа в газовых средах. Такое наноструктурированное железо имеет уникальные характеристики: высокую химическую активность, слабую агломерация, возможность регулирования дисперсного состава. Нами дополнительно проводилась модификация полученного порошка наполнителя покрытием плёнкой полиметилсилоксанового масла, повышающим диспергируемость частиц в полимерной матрице. При приготовлении полимерной матрицы составляющие силиконового компаунда марки СИЭЛ смешивались в требуемых пропорциях и тщательно перемешивались. В полученную смесь добавлялся модифицированный порошок железного наполнителя с концентрацией 40% масс, все интенсивно перемешивалось, вакуумировалось и выливалось тонким слоем порядка 0.5 мм на бумажную или полимерную основу. Эту систему оставляли полимеризоваться в течение 40 минут при температуре 150°C. Готовые образцы вынимали и охлаждали до комнатной температуры. Структуру поверхности этих МАЭ композитов изучали на атомно-силовом микроскопе (АСМ) EasyScan (Nanosurf, Швейцария). Микроскоп работал в полу-контактном режиме на воздухе при комнатной температуре с дополнительным использованием моды фазового контраста. При этом применялась защита АСМ от внешних помех с помощью динамического антивибрационного столика TS-150 (Fabrik am Weiher, Швейцария). Особенности структуры синтезированных композитов исследовались также с помощью сканирующего электронного микроскопа (СЭМ) KYKY EM6900 (KYKY Technology Co., КНР) с вакуумной системой (турбомолекулярный насос) и термоэмиссионным вольфрамовым катодом (разрешение 6 нм при ускоряющем напряжении 30 кВ на полупроводниковом четырехсекционном детекторе BSE).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис.1а,б представлены АСМ снимки поверхности данных МАЭ композитов при начальной высоте сканирования 17.88 мкм с последующим переходом на высоту 8.74 мкм. В обычных композитах картины топографии поверхности исследуемых образцов не меняется при таких переходах. Просто улучшается контрастность и разрешение изображений. В данных композитах при таких переходах наблюдается существенное изменение топографии поверхности. Эти результаты демонстрируют существенную лабильность структуры поверхности синтезированных композитов, индуцируемых зондом АСМ.

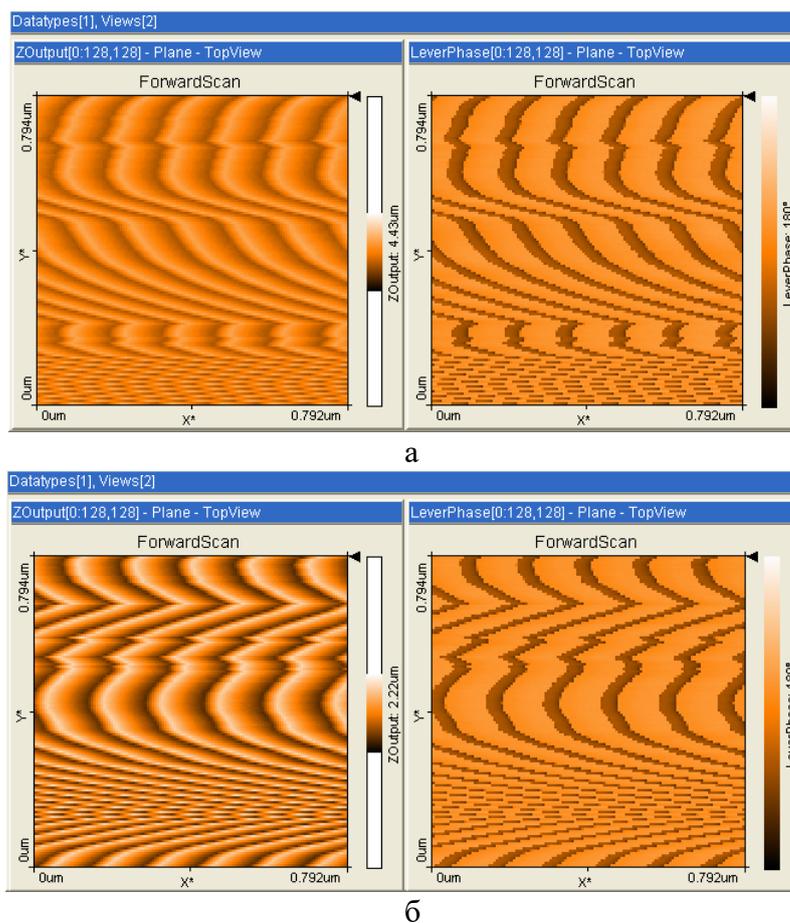


Рис.1. АСМ снимки поверхности синтезированных МАЭ композитов при начальной высоте сканирования: а) 17.88 мкм; б) 8.74 мкм (слева – топография, справа – фазовый контраст). Сканы 0.792x0.792 мкм.

Анализ топографии и фазовых контрастов АСМ (рис.2,3) выявляет также существенное изменение структурирования поверхности исследованных композитов в функции накладываемого внешнего магнитного поля 500 Ое.

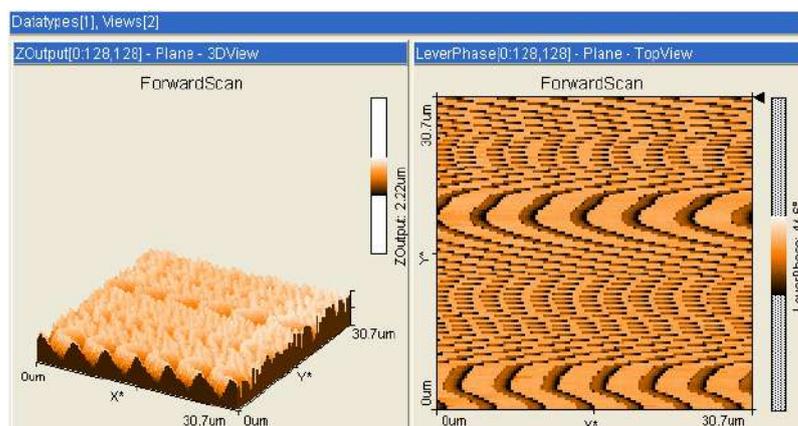


Рис.2. АСМ снимки структуры поверхности магнитоактивного эластомера в отсутствие внешнего магнитного поля (слева – 3D-топография, справа – фазовый контраст). Сканы 30.7x30.7 мкм.

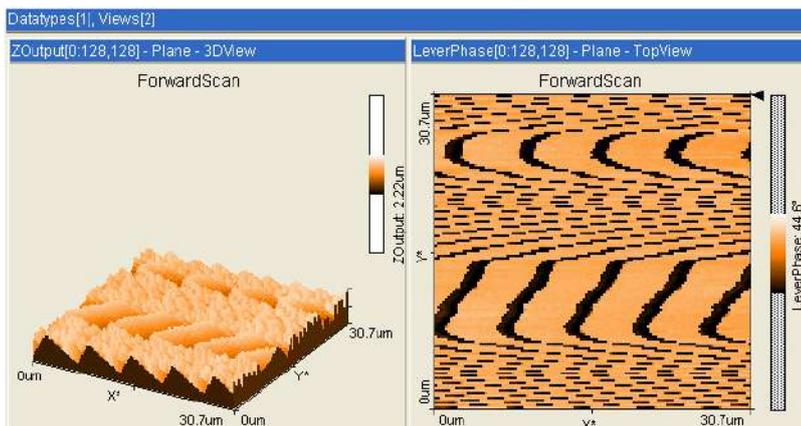


Рис.3. АСМ снимки структуры поверхности магнитоактивного эластомера при наложении внешнего магнитного поля 500 Ое (слева – 3D-топография, справа – фазовый контраст). Сканы 30.7x30.7 мкм.

Исследование синтезированных композитов с помощью СЭМ КУКУ EM6900 на низких ускоряющих напряжениях 10 кВ аналогично выявляет складчатую структуру поверхности этих МАЭ образцов (рис.4). Повышение ускоряющего напряжения до 20 кВ позволило определить размеры (в диапазоне 100 нм – 5 мкм) и распределение агломератов наполнителя в матрице полимера композита (рис.5).

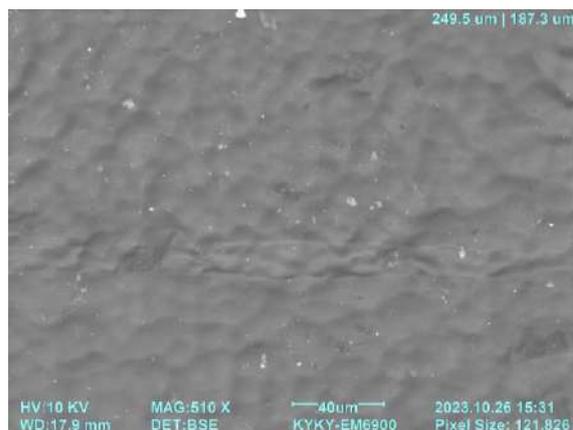


Рис.4. СЭМ снимки синтезированных МАЭ композитов при ускоряющем напряжении 10 кВ.

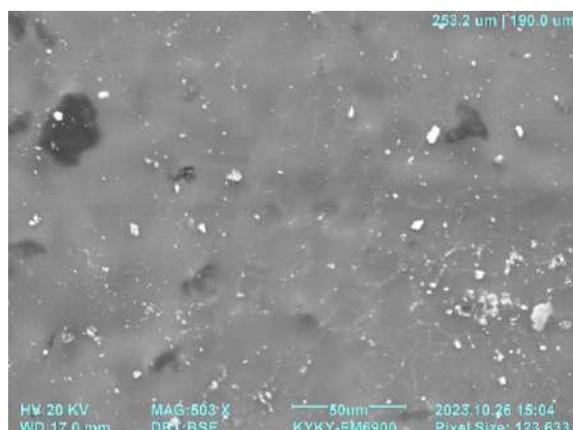


Рис.5. СЭМ снимки синтезированных МАЭ композитов при ускоряющем напряжении 20 кВ.

Такие композиционные системы с изменяемыми свойствами поверхности, обладающие перестраиваемой морфологией в результате управления небольшими внешними воздействиями, в настоящее время чрезвычайно востребованы [7-10].

ВЫВОДЫ

Установленные эффекты существенной лабильности структуры поверхности синтезированных МАЭ композитов, индуцируемых малыми внешними воздействиями, представляют большой интерес для практических приложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Borin D. *Targeted patterning of magnetic microparticles in a polymer composite.* // Phil. Trans. R. Soc. – 2020. – Vol.A378. – 20190256.
2. Bautinac V.A., Kostitsyna E.V., Perov N.S., Usova N.A. *Highly oriented ferromagnetic polymers based on Co- and Fe-rich amorphous microwires.* // Composites Commun. – 2020. – Vol.22. – Pp.1-4.
3. Watanabe M., Takeda Y., Maruyama T., Ikeda J., Kawai M., Mitsumata T. *Chain Structure in a Cross-Linked Polyurethane Magnetic Elastomer Under a Magnetic Field.* // Int. J. Mol. Sci. – 2019. – Vol.20. – 2879.
4. Borin D., Stepanov G., Dohmen E. *On anisotropic mechanical properties of heterogeneous magnetic polymeric composites.* // Phil Trans Royal Soc. – 2019. – Vol.A377. – 20180212.
5. Valiev H.H., Minaev A.Y., Stepanov G.V., Karnet Y.N., Yumashev O.B. *Scanning Probe Microscopy of Magnetorheological Elastomers.* // Surface. X-ray, synchrotron and neutron investigations. – 2019. – Vol.9. – 40.
6. Valiev H.H., Cherepanov V.M., Karnet Yu.N., Minaev A.Ya., Stepanov G.V. *Atomic force microscopy and Mössbauer spectroscopy of magnetically active silicone elastomers* // IOP Conf. Series Materials: Science and Engineering. – 2020. – Vol.862. – 022062.
7. Kramarenko E.Yu., Stepanov G.V., Khokhlov A.R. *Magnetically Active Silicone Elastomers: Twenty Years of Development.* // INEOS OPEN. – 2019. – Vol.2. – 178.
8. Hou H., Yin J.X. Jiang. *Smart patterned surface with dynamic wrinkles.* // Accounts. Chem. Res. – 2019. – Vol.52. – 1025.
9. Long Ma, Linghui He, Yong Ni. *Tunable hierarchical wrinkling: From models to application.* J. Appl. Physics. – 2020. – Vol.127. – 111101.
10. Le Ferrand H., Arrieta A.F. *Magnetically driven in-plane modulation of the 3D orientation of vertical ferromagnetic flakes.* // Soft Matter. – 2022. – Vol.18. – Pp.1054-1063.



РАЗРАБОТКА И ОПЫТНАЯ ЭКСПЛУАТАЦИЯ ВЫСОКОТЕХНОЛОГИЧНЫХ УСТРОЙСТВ ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ НИЗКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРОВОДОВ ВОЗДУШНЫХ ЛЭП (ОБЗОР)

Виноградов А.А.¹, Котухов М.А.², Привалов А.Н.³, Киселев А.В.⁴

¹ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

²ООО «ПРОМтайм-Энерго», г. Москва, Россия

³ООО АПП «ЭнергоМаш», г. Уфа, Россия

⁴ООО «МИК», г. Москва, Россия

ФГБУН Институт прикладной механики РАН начал научно-техническое сотрудничество с энергетиками, на предмет создания и внедрения высокотехнологичных устройств защиты проводов воздушных ЛЭП от вызываемых ветром колебаний. Это динамические гасители пляски, распорки-гасители со средствами гашения колебаний и т.д. На данный момент нами разработан Гаситель пляски (название Торсионный Демпфер и Детюнер) для ЛЭП с расщепленными фазами (напряжения 330, 500, 750 кВ). Принцип был предложен Канадско-Бельгийской исследовательской группой СИГРЭ, серьезно усовершенствован в России, прибор российской конструкции успешно эксплуатируется более 7 лет на линиях 400 и 500 кВ в Румынии (несколько сотен гасителей). Использован абсолютно новый принцип гашения. Применяется подвижный маятник с вязкоупругим демпфером, он заставляет провод запаздывать при его вращении, прекращается подкачка энергии из-за отсутствия синхронизма вертикальных и крутильных колебаний расщепленной фазы, амплитуды пляски падают в 8...12 раз.

Ключевые слова: галопирование; собственные частоты; колебания, вызванные ветром; коэффициент демпфирования; математическая модель; математическое моделирование; пролет

1. ПЛЯСКА И СУБКОЛЕБАНИЯ – НИЗКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОВОДОВ ВОЗДУШНЫХ ЛЭП. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПЛЯСКЕ ПРОВОДОВ

Стилизованное графическое изображение движения проводов при ветре приведено на рис.1, а общие характеристики низкочастотных колебаний (показаны крупным шрифтом) см. в таблице 1.



Рис.1. Вызываемые ветром колебания проводов воздушных линий.

Пляска или иначе галопирование – это тип колебаний одиночных или расщепленных проводов воздушных линий электропередачи (далее ВЛ или ЛЭП) при воздействии ветра на обледеневшие или покрытые мокрым снегом или изморозью провода, хотя зарегистрированы случаи пляски и без льда, возникающие из-за специфики профиля провода. Движения проводов характеризуются значительными амплитудами, которые могут приближаться к стреле провеса проводов в полете или даже превышать его.

Колебания проводов в аэродинамическом следе или субколебания (от английского subspan – подпролет), т.е. колебания проводов расщепленной фазы ВЛ сверхвысокого напряжения (СВН) на участках между внутрифазными дистанционными распорками, т.н. подпролетах, это второй вызываемый ветром вид низкочастотных колебаний, реально опасный для проводов воздушных линий. Данное явление свойственно лишь расщепленным фазам линий сверхвысокого напряжения, когда при поперечных ветрах один провод пучка (подветренный) попадает в вихревой след от другого (наветренного) провода. Более подробное описание этого явления дано в главе 3 данного обзора.

Пляска стала проблемой для электроэнергетических компаний с начала XX века. В течение многих лет она была предметом многочисленных исследовательских программ, что привело к лучшему пониманию механизмов ее возникновения и к разработке ряда устройств и процедур борьбы с последствиями. Пляска – это не просто эффектное и поражающее воображение явление (см. рис.2): в некоторых случаях она может приводить к обрывам проводов и разрушениям с очень дорогостоящими последствиями.



Рис.2. Три кадра видеосъемки процесса пляски проводов воздушной ЛЭП с расщепленными фазами (сняты с интервалом через примерно 1,5 сек каждый).

Таблица 1.

Основные характеристики и опасности низкочастотных колебаний проводов.

Объекты и характеристики / Виды колебаний	Пляска проводов	Колебания в аэродинамическом следе
Типы воздушных ЛЭП	любого типа	линии с расщепленными фазами (330,500,750 кВ)
Диапазон частот, Гц	0,08 ÷ 3	0,5 ÷ 6
Амплитуды колебаний пик-пик (в диаметрах провода)	5 ÷ 300	Субколебания: 0,5 ÷ 20 Колеб. фазы: 0,5 ÷ 80
Характер ветра Скорость ветра	Любой 5 ÷ 18 м/сек	Устойчивый ровный 4÷18 м/сек

Поверхность проводов	Несимметр. гололедные отложение на проводе	Голые, сухие
Параметры, влияющие на движение провода	Отношение вертикальной и крутильной собственных частот фазы, стрела провеса, форма гололеда, тип опор	Шаг расщепления, поворот фазы, расположение проводов в расщепленной фазе, длины подпролетов
Время появления повреждения	1 ÷ 48 час	1 мес ÷ 8 лет и более
Причины повреждения	Высокие динамич. нагрузки, быстрый износ арматуры	Соударение проводов, износ зажимов распорок, арматуры
Элементы линии, наиболее уязвимые для повреждений	Провода, вся арматура, изоляторы, траверсы и опоры	Подвесная арматура, распорки, повивы проводов

При возникновении пляски могут происходить перемежающиеся перекрытия на соседние фазы и на опоры с отключением линии, пережоги и обрывы проводов и гирлянд изоляторов, а в наиболее тяжелых случаях – разрушение траверс и даже опор. Главная трудность в изучении этого явления заключается в его непредсказуемости и в многообразии его проявлений. Соответственно, исследователи и инженеры испытывают трудности как в выборе адекватных моделей, так и в изыскании методов ограничения пляски.

К настоящему времени среди научно-технической общественности преобладает взгляд на пляску как на явление, обусловленное развитием низкочастотных колебаний проводов, покрытых гололедным осадком. Чаще всего, последовательность событий при этом такова: при температуре, близкой к температуре замерзания, на проводах появляется наледь. Далее, при изменении погоды, возникающий ветер, набегая на аэродинамически несимметричный профиль (провод, покрытый гололедом), порождает колебания. Совпадение этих условий, их тяжесть являются случайными, отсюда и возникает непредсказуемость возникновения пляски проводов воздушной линии и степень ее агрессивности.

2. ПОДХОДЫ К АНАЛИЗУ И СТАТИСТИКА ЯВЛЕНИЯ ПЛЯСКИ

Научная и техническая литература и периодика содержат много примеров конкретных наблюдений пляски и убедительных аналитических подходов, дающих объяснение наблюдаемым эффектам. Ставшее популярным обоснование возникающей нестабильности покрытых гололедом проводов при обтекании их потоком воздуха было дано еще в 1932 г. Ден-Гартогом [1] в виде неравенства, связывающего только аэродинамические характеристики самого асимметричного профиля провода с гололедом

$$\frac{\partial C_L}{\partial \theta_a} + C_D < 0, \quad (2.1)$$

где C_L , C_D – безразмерные аэродинамические коэффициенты подъемной силы и лобового сопротивления провода; θ_a – угол атаки. Это неравенство получило широкую известность как критерий Ден-Гартога и сыграло важную роль в понимании механизмов возникновения пляски.

Не вдаваясь пока в детали многочисленных исследований и расчетов пляски последних десятилетий [2-5] и др., обратимся к некоторым наглядным иллюстрациям. Интуитивно представляется, что приведенное на рис.3 движение сечения провода – условного аналога крыла самолета, – при поперечном движении воздуха [6] является самоподдерживающимся, что и будет показано в дальнейшем. И тогда важную роль начинают играть уже имеющиеся статистические данные о пляске. Это важно и при проектировании ВЛ (существуют национальные стандарты [7,8] и международные рекомендации [9]), а также и при разработке мер борьбы с пляской проводов.

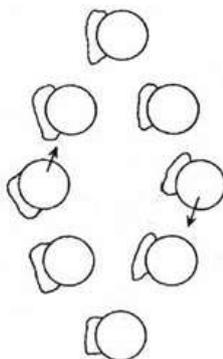


Рис.3. Комбинация вертикального и крутильного движения провода с гололедом при пляске.

К настоящему времени накоплена значительная информация о пляске проводов воздушных ЛЭП. Так как это природное явление очевидно имеет статистический характер, сведения о нем можно получить из накопленных метеорологами, а для нас важнее – энергосистемами, многолетних статистических данных о наблюдениях за пляской проводов в процессе эксплуатации воздушных ЛЭП. Ниже показаны его параметры на примере Актюбинской и Уральской областей в течение гололедных сезонов 1980-1990 гг. [10]. Было зафиксировано по обеим областям 72 случая пляски на линиях различных классов напряжения от 10 до 500 кВ. Результаты анализа показаны в таблице 2.

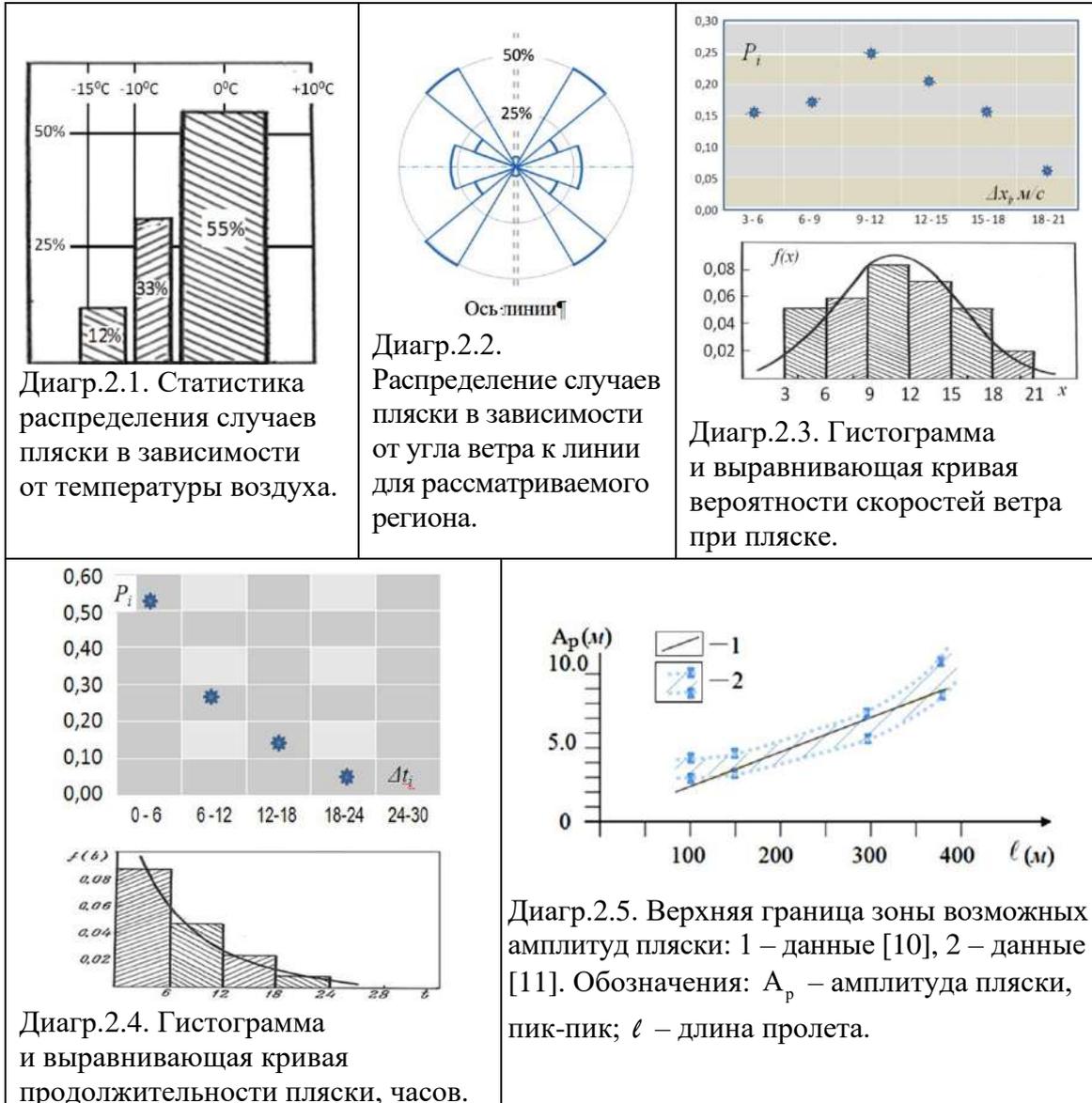
В течение холодного времени года пляска может возникать в широком диапазоне изменений температуры окружающего воздуха. Распределение зафиксированных случаев пляски по интервалам температуры показано на диаграмме 2.1 таблицы 2.

Определенный интерес представляют и статистические данные об ориентации (угле ветра) относительно расположения линии на местности (диаграмма 2.2) и о скоростях ветра при пляске (см. диаграмму 2.3).

Одним из важнейших факторов, от которых зависит возникновение пляски, являются форма и размер гололедного осадка. По имеющимся отчетам можно заключить, что значимое большинство случаев пляски (более 70%) наблюдалось при овальной форме гололедного осадка, причем с малой толщиной льда, до 8...10 мм, а зачастую и до 5 мм. Имели место случаи пляски, когда форма гололеда была близка к цилиндрической, однако это были отдельные эпизоды. Несколько сообщений засвидетельствовали факты возникновения пляски обледеневших проводов с толщиной гололедного / снежного осадка 25-30 мм.

Таблица 2.

Основные характеристики пляски проводов.



Из диаграммы 2.4 следует, что основная масса случаев пляски наблюдалась в течение довольно коротких промежутков времени. В процентном соотношении, число случаев пляски, имевших продолжительность до 6 часов, оказалось с вероятностью более 0,5. Этот вывод соответствует и более общим данным [8,9].

Наиболее важно было получить оценку интенсивности колебаний. Но пляске подвергались провода, имевшие разные сечения и длины пролетов, а колебания проходили с различным числом полуволн. Так как наибольшую опасность представляет однополуволновая пляска, и при этом увеличивается динамическая нагрузка на линию, было решено дать оценку амплитуд по методике [11]. Из всего количества имевшегося материала, в 14 случаях однополуволновой пляски были зафиксированы амплитуды колебаний (значения пик-пик). Результаты обработки показывают, что для $\approx 90\%$ зарегистрированных данных, отношение размаха колебаний к длине пролета (A_p/ℓ) лежит в диапазоне от 0,007 до 0,024 (длины пролетов были от 90 м до 367 м).

Имеются единичные случаи, когда это отношение достигало значения 0,03.

По соотношению

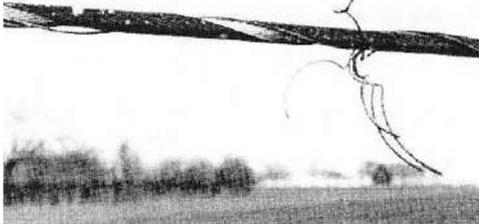
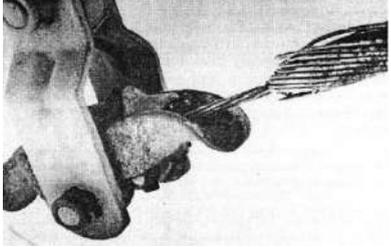
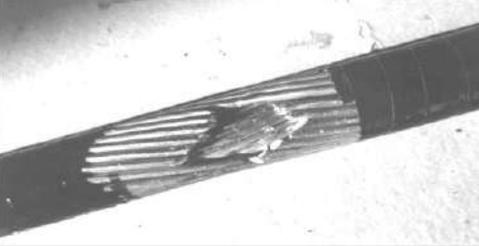
$$A_p \leq 0,024 * \ell \quad (2.2)$$

может быть построена верхняя граница области возможной интенсивности пляски для различных длин пролетов (диаграмма 2.5). Однако эти данные позволяют лишь приблизительно оценить амплитуды возможной интенсивности однополуволновой пляски, поскольку мы имеем дело с ограниченным количеством наблюдений. Приведенное на рисунке сопоставление с данными по наблюдавшимся амплитудам из [11] позволило привлечь больший статистический материал, но можно видеть, что показанные результаты лишь незначительно отличаются от авторских.

Энергетические предприятия по всему миру, оперирующие на широтах поясов примерно от 40° с. ш. и ю. ш. и выше, неминуемо сталкиваются в той или иной степени с явлением пляски проводов и с результатами воздействия ее на элементы энергетического оборудования. Колебания могут развиваться на первой (основной) частоте, или на 2-ой, или на 3-ей, для данной длины пролета. Возникают подпитываемые ветром поперечные колебания проводов, обычно в вертикальной плоскости, их изгибы, колебания тяжения. Запасаемая при этих перемещениях энергия (упругая, гравитационная) значительна, она может достигать десятков и сотен килоджоулей (кДж), поэтому возможны повреждения и разрушения, как самих проводов, так и арматуры, траверс, даже опор, зачастую катастрофически быстрые. Ниже, в таблице 3 представлены некоторые повреждения, часто возникающие на воздушных ЛЭП при пляске.

Таблица 3.

Примеры типичных разрушений из-за пляски проводов.

	
<p>Пр.3.1. Повреждение провода после 2х-фазного КЗ из-за высокоамплитудной пляски.</p>	<p>Пр.3.2. Усталостное разрушение проводящего алюминия из-за длительной пляски.</p>
	
<p>Пр.3.3. Типичное для малоцикловой усталости разрушение повивов провода.</p>	<p>Пр.3.4. Усталостное разрушение ослабленного коррозией пестика изолятора при пляске.</p>



Пр.3.5. Пружинный замок, деформированный и выпавший из гнезда шапки изолятора, из-за подброса и изгиба поддерживающей гирлянды (при синфазных колебаниях в соседних пролетах).



Пр.3.6. Разрушенная мощным ледяным штормом с пляской опоры ЛЭП, Канада, 1998 год. (В центре – поврежденный пляской гаситель вибрации).

3. КОЛЕБАНИЯ ПРОВОДОВ РАСЩЕПЛЕННОЙ ФАЗЫ В ПОДПРОЛЕТАХ МЕЖДУ РАСПОРКАМИ (СУБКОЛЕБАНИЯ) И РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ

Это явление прямо связано с возникновением, при поперечном к линии ветре, аэродинамического следа (далее АД следа), т.е. ветровой тени за каждым из проводов в расщепленных фазах воздушной линии, см. рис.4. Энергия этих колебаний сравнительно невелика, порядка 0,01...0,1 кДж. Но при длительном существовании колебаний, когда счет идет на тысячи часов, возникновение повреждений в алюминиевых повивах проводов становится неизбежным. Такая энергия может быть рассеяна посредством тех или иных демпферных устройств, как правило встроенных в распорки (распорки-гасители).

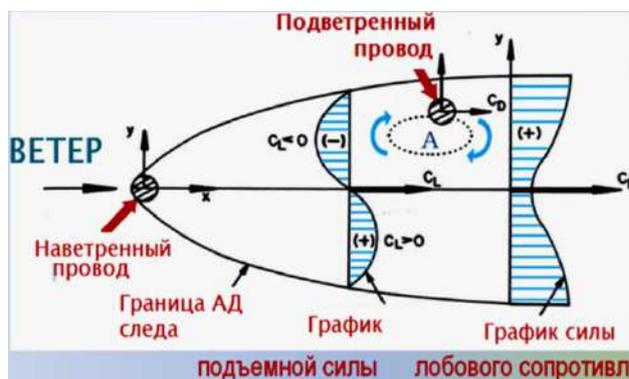


Рис.4. Наличие подъемной силы и переменной силы лобового сопротивления в ветровой тени наветренного провода определяет энергетически обеспеченную возможность движения подветренного провода (эллипс А).

3.1. Математическое моделирование низкочастотных колебаний проводов ВЛ.

При изучении и исследовании пляски и субколебаний сейчас широко применяются линейная теория, аналитические и численные методы. Они используются для изучения условий возникновения аэродинамической неустойчивости проводов, форм и частот их поперечных и крутильных колебаний, диапазонов изменения амплитуд пляски при разных сочетаниях параметров. После 1980-х годов математические модели пляски стали активно развиваться, благодаря общему прогрессу в создании численных методов расчета и вычислительных мощностей. Сложившиеся в ряде стран исследовательские

группы втянулись в соперничество в разработке различных вычислительных процедур и точных и адекватных моделей [3-5].

Начало и развитие пляски в очень большой мере зависит от формы и ориентации гололедного отложения на проводе относительно набегающего ветра. Провода начинают двигаться по эллиптическим траекториям, обычно с большой осью эллипса, расположенной преимущественно в вертикальной плоскости; при этом в полете формируются одна, две или три стоячих полуволны с амплитудами, которые при сильном ветре могут достигать стрелы провеса проводов [11].

3.2. Применяемый авторами публикации ансамбль расчетных комплексов (MR21, ВЕТЕР и др.) для исследований пляски проводов и субколебаний расщепленных фаз разработан группой научных сотрудников Белорусского Научно-Технического Университета (БНТУ) под руководством д.т.н., проф. И.И. Сергея.

При формулировании подробных исходных данных для этих задач стало возможным корректно учитывать все условия, влияющие на процесс пляски, и расчеты позволили объективно оценивать эффективность тех или иных устройств гашения пляски.

И здесь оказалось, что стремление учесть все особенности того или иного гололеда, типа ветра, конструкции узлов подвески проводов практически не приближает нас к решению задачи создания защиты воздушной ЛЭП от пляски, но в первую очередь лишь выявляет возможности того или иного расчетного инструмента.

Сказанное прямо относится и к субколебаниям, с той лишь корректировкой, что ситуация здесь гораздо более прозрачная – все исходные данные для расчетов налицо, и остается лишь решить, какую идеологию мы хотим вложить в создаваемую конструкцию устройства для «успокоения» проводов.

Провода в модели представляются как гибкие растяжимые по Гуку нити, обладающие крутильной жесткостью, на которые действуют распределенные и сосредоточенные нагрузки. Это ветер, концевые точки крепления, например, на опорах, и точки установки грузов, распорок, другой арматуры. Такая постановка задачи при тщательном выборе шагов разностной сетки позволяет получать корректные решения для интересующих нас параметров как при пляске, так и при субколебаниях (появление колебаний последнего типа, т.е. в подпролетах между распорками, довольно несложно объяснить, если внимательно присмотреться к ситуации в АД следе на рис.4). Рассмотрим, возможно ли самоподдерживающееся движение по траектории А. Оказывается, да, вполне возможно, на длине 3/4 орбиты имеются силы, которые будут гнать подветренный провод вдоль стрелки. Сила лобового сопротивления в верхней части эллипса наибольшая и направлена вдоль эллиптической траектории; далее, на правом плече и внизу эллипса тоже присутствуют силы, действующие на провод вдоль траектории. И остается последний участок в 1/4 эллипса, он будет пройден по инерции.

4. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕННЫХ РАСЧЕТОВ ПЛЯСКИ

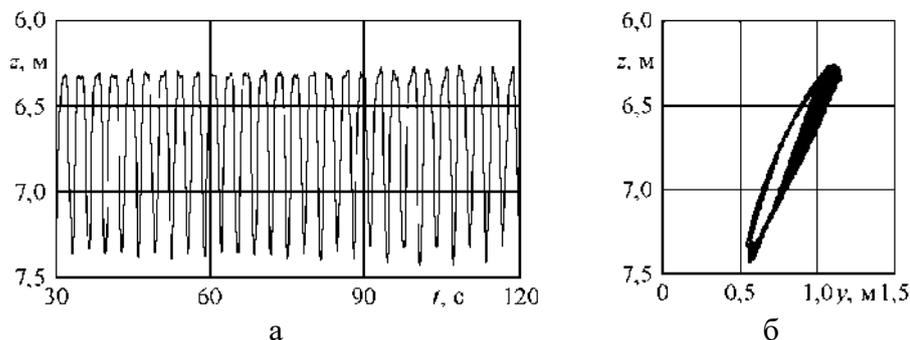


Рис.5. Расчет динамики параметров пляски фазы в средней точке опытного пролета КазНИИЭ при $\theta_0 = 10^\circ$ и $v = 10$ м/сек без гасителей: а) вертикальные колебания фазы; б) траектория движения средней точки фазы.

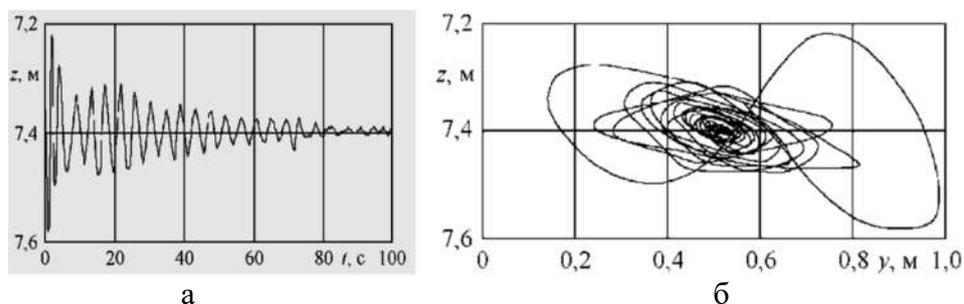


Рис.6. Расчет динамики параметров пляски (затухание) фазы в средней точке пролета КазНИИЭ при установке двух гасителей в 1/3 и 2/3 частях пролета: а) вертикальные колебания фазы; б) траектория движения средней точки фазы.

5. РЕАЛИЗАЦИЯ НОВОГО ПРИНЦИПА ДИНАМИЧЕСКОГО ГАШЕНИЯ ПЛЯСКИ ЛИНИЙ С РАСЩЕПЛЕННЫМИ ФАЗАМИ. ГАСИТЕЛЬ ТИПА ТДД (ТОРСИОННЫЙ ДЕМПФЕР И ДЕТЮНЕР) С ПОДВИЖНЫМ МАЯТНИКОМ



Рис.7. Этапы продвижения в эксплуатацию принципа динамического гашения пляски. Гаситель типа ТДД (Торсионный Демпфер и Детюнер) с подвижным маятником.

Гаситель указанного типа нашел применение в Румынии, где наблюдались многочисленные случаи пляски проводов и повреждения на линиях (рис.8,9).

Для данного применения гаситель был нами переработан по сравнению с первоначальной конструкцией проф. Ж.-Л. Лильена (см. рис.8).



Рис.8. Установка гасителя пляски TDD2.3 на ВЛ 400 кВ Исакча-Тульча в Румынии.

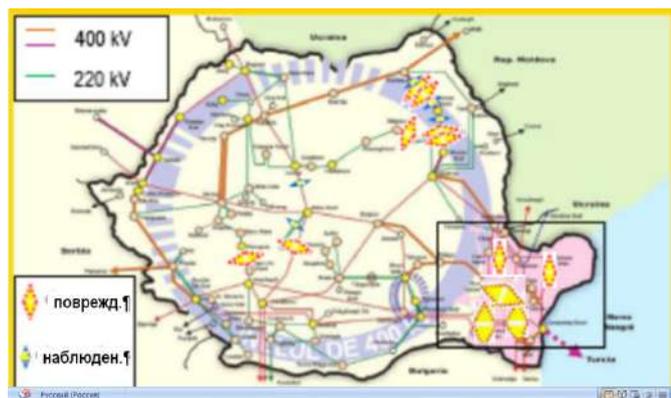


Рис.9. Карта Румынии с указанием мест, где часто наблюдалась пляска проводов и происходили повреждения и аварии на линиях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Никакой метод защиты не может гарантировать, что он предотвратит пляску при любых условиях.

2. Сложность явления пляски такова, что методы защиты от нее не могут быть адекватно протестированы в лаборатории, они обязательно должны также пройти проверку в полевых условиях. Эти испытания требуют значительного времени и средств и, тем не менее, могут оказаться неубедительными.

3. Для оценки связанных с пляской рисков и разработки соответствующих методов проектирования, очень полезны аналитические оценки, численные модели, а также и полевые испытания на стендах и в условиях опытно-промышленной эксплуатации.

4. Торсионные динамические маятниковые устройства для защиты от пляски проводов, которые обеспечивают расстройку крутильных и вертикальных колебаний и увеличивают торсионное демпфирование, перспективны и могут быть рекомендованы к дальнейшей разработке и проведению испытаний.

5. Конструкции распорок-гасителей продолжают совершенствоваться для их наиболее адекватного соответствия суровым условиям работы на воздушных ЛЭП СВН России [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Den Hartog J.P. *Transmission Line Vibration Due to Sleet* // AIEEE Transactions. – 1932. – Vol.51. – Pp.1074-1076.

2. Сергей И.И. *Математическое моделирование гасителей колебаний расщепленных проводов воздушных ЛЭП* // Энергетика... (Известия высших учебных заведений и энерг. объединений СНГ). – 1999. – №6. – С.11-24.
3. Данилин А.Н., Шклярчук Ф.Н. *Аэроупругие колебания проводов воздушных ЛЭП: Формулировка задачи, нелинейные уравнения движения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №3. – С.328-337.
4. Keutgen R. *Galloping Phenomena. A Finite Element Approach* / These de Doctorat. Universite de Liege, 1999. – 202 p.
5. Сергей И.И., Виноградов А.А. *Проектирование распорок с применением ЭВМ / Экспресс-информация. Серия «Линии электропередачи и подстанции».* – М.: Информэнерго, 1990.
6. *EPRI Transmission Line Reference Book. Wind-induced Conductor motion.* Based on EPRI Research Project 792 – Palo Alto, Ca., 1979. – 244 p.
7. *Правила устройства электроустановок.* 7-е изд. перераб. и доп. – М., 2017.
8. РД 34.20.184-91. *Методические указания по районированию территорий энергосистем по частоте повторяемости и интенсивности пляски проводов.* – ВНИИЭ, 1991. – 12 с.
9. *State of the Art of Conductor Galloping* // CIGRE Brochure. – 2007. – No.322. – 140 p.
10. Джаманбаев М.А. *Анализ случаев пляски проводов воздушных линий электропередачи* // Энергетика и топливные ресурсы Казахстана. Отраслевой журнал. – 2001. – №5. – С.12-19.
11. Lilien J.L. Havard D.G. *Galloping Data Base on Single and Bundle Conductors Prediction of Maximum Amplitudes* / IEEE Transactions on Power Delivery. – 2000. – Vol.15. – No.2.
12. *Международные нормы МЭК 61854. ГОСТ Р 51177-98.*

УДК 534.1

EDN RENXVI (<https://elibrary.ru/rehxvi>)

DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.3



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БУБНОВА-ГАЛЕРКИНА ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ПОВОРОТОМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПО КРЕНУ С УСТРАНЕНИЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ПАНЕЛЕЙ СОЛНЕЧНЫХ БАТАРЕЙ В МОМЕНТ ЕГО ОСТАНОВКИ*

Гришанина Т.В.¹, Русских С.В.^{1,2}

¹ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет)», г. Москва, Россия

²ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Космические аппараты (КА) являются нерегулярными составными сложными конструкциями, которые состоят как из достаточно жестких частей (отсеков), так и весьма гибких и податливых элементов. К последним, в первую очередь, относятся панели солнечных батарей (СБ), состоящих из нескольких секций. Поскольку такие элементы имеют очень низкие собственные частоты колебаний, то при их разворачивании на орбите из транспортировочного положения в рабочее или при выполнении маневра КА они оказывают значительное влияние на динамику и устойчивость возмущенного движения управляемых КА; этим общим вопросам посвящено достаточно много научных трудов, отметим [1-4].

В работе [5] были рассмотрены нестационарные нелинейные антисимметричные колебания двух одинаковых панелей СБ с произвольным числом недеформируемых секций, соединенных с симметричным относительно продольной плоскости КА и между собой упруговязкими шарнирами, при конечном повороте системы по крену. Формулы для всех коэффициентов нелинейных уравнений движения в связанной с КА системе координат, приведенные в [5], используются в данной работе.

В работе [6] для решения нелинейной задачи конечного перемещения за определенное время тяжелого твердого тела, подвешенного на тросе переменной длины, из одного положения покоя в другое за счет управляемого горизонтального перемещения точки подвеса предложен новый подход с одновременным использованием метода Бубнова-Галёркина и метода последовательных приближений. Этот подход используется здесь для управления нестационарными колебаниями панелей СБ при повороте КА на заданный конечный угол за заданное время.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоскую задачу поворота по крену на конечный угол φ_T за определенное время T симметричного относительно продольной плоскости

* Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования (номер государственной регистрации темы FSFF-2023-0007).

КА с двумя одинаковыми плоскими панелями СБ, каждая из которых состоит из произвольного числа n недеформируемых секций длиной l_k , последовательно соединенных с КА и между собой упруговязкими шарнирами с коэффициентами жесткости κ_k и демпфирования ν_k , $k=0,1,\dots,n-1$, рис.1.

Задача терминального управления поворотом КА на заданный угол за заданное время рассматривается в варианте пассивного кинематического управления – определяется закон изменения угла поворота по крену $\varphi(t)$; при этом в качестве обобщенных координат берутся относительные конечные углы поворота ψ_k секций СБ, $k=1,2,\dots,n$ в связанной с КА и вращающейся с угловой скоростью $\Omega = \dot{\varphi}$ системе координат Cxy , рис.1.

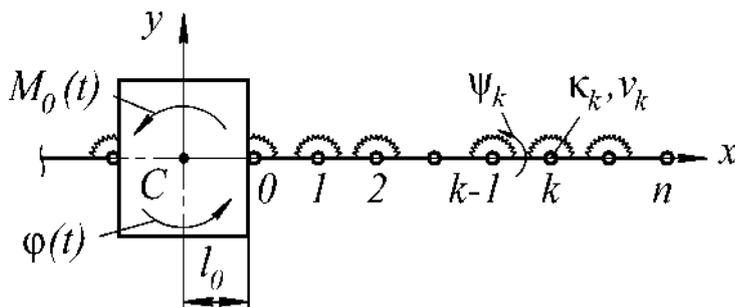


Рис.1. Модель КА с двумя упругими панелями СБ.

Начальные условия при $t=0$ и конечные условия при $t=T$, представляющие устойчивые положения покоя системы, записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \dot{\psi}_k = 0, \quad \psi_k = 0 \quad \text{при } t = 0; \\ \dot{\varphi} = 0, \quad \varphi = \varphi_T, \quad \dot{\psi}_k = 0, \quad \psi_k = 0 \quad \text{при } t = T. \end{aligned} \quad (1)$$

Задача заключается в следующем: найти закон изменения управляющего угла поворота $\varphi(t)$, при котором КА с двумя упругими панелями СБ за определенное время T повернется из начального положения покоя, (1) при $t=0$, в заданное конечное положение покоя, (1) при $t=T$, с устранением колебаний секций СБ при $t \geq T$. В данной работе задача решается в нелинейной постановке для умеренно больших углов поворота секций панелей СБ ($|\psi_k| < 1$ рад, $k=1,2,\dots,n$).

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Уравнения движения рассматриваемой системы для произвольного числа секций СБ с необходимыми пояснениями были получены в работе [5]. Система $n+1$ нелинейных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат $\varphi(t)$, ψ_k , $k=1,2,\dots,n$, полученная на основании принципа возможных перемещений, записывается в виде

$$\begin{aligned} L_0 = M_0(t); \\ L_k + 2 \left[-\kappa_{k-1} \psi_{k-1} + (\kappa_{k-1} + \kappa_k) \psi_k - \kappa_k \psi_{k+1} - \right. \\ \left. - \nu_{k-1} \dot{\psi}_{k-1} + (\nu_{k-1} + \nu_k) \dot{\psi}_k - \nu_k \dot{\psi}_{k+1} \right] = 0, \quad k=1,2,\dots,n, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\psi_0 = \dot{\psi}_0 = 0$, $\kappa_n = \nu_n = 0$. Здесь нелинейные дифференциальные операторы L_0 и L_k , $k = 1, 2, \dots, n$ записываются как

$$\begin{aligned} L_0 &= J\ddot{\phi} + \sum_{k=1}^n g_{0k} (2\dot{\phi}\dot{\psi}_k + \dot{\psi}_k^2) + \sum_{k=1}^n m_{ok} \ddot{\psi}_k; \\ L_k &= m_{ok} \ddot{\phi} - g_{0k} \dot{\phi}^2 + \sum_{j=1}^n g_{kj} (2\dot{\phi}\dot{\psi}_j + \dot{\psi}_j^2) + \sum_{j=1}^n m_{kj} \ddot{\psi}_j, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} J &= J_0 + 2 \sum_{k=1}^n \left\{ [\mu_k + m_k l_k] \left[\left(\sum_{j=1}^k l_j s_j \right)^2 + \left(l_0 + \sum_{j=1}^k l_j c_j \right)^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - m_k l_k^2 \left[s_k \sum_{j=1}^k l_j s_j + c_k \left(l_0 + \sum_{j=1}^k l_j c_j \right) \right] + \frac{1}{3} m_k l_k^3 \right\}; \end{aligned}$$

$$g_{0k} = - \sum_{j=k}^n l_k l_j s_{kj} M_j - M_k \left(l_0 l_k s_k + \sum_{j=1}^k l_k l_j s_{kj} \right);$$

$$m_{ok} = \sum_{j=k}^n l_k l_j c_{kj} M_j + M_k \left(-l_k^2 + l_0 l_k c_k + \sum_{j=1}^k l_k l_j c_{kj} \right) - \frac{1}{3} m_k l_k^3;$$

$$g_{kj} = l_k l_j s_{kj} M_j \quad \text{при } k \leq j;$$

$$g_{kj} = l_k l_j s_{kj} M_k \quad \text{при } k > j;$$

$$m_{kj} = l_k l_j c_{kj} M_j - \delta_{kj} \frac{1}{3} m_k l_k^3 \quad \text{при } k \leq j;$$

$$m_{kj} = l_k l_j c_{kj} M_k \quad \text{при } k > j;$$

$$M_j = 2 \sum_{i=j}^n (\mu_i + m_i l_i) - m_j l_j;$$

$$\delta_{kj} = 1 \quad \text{при } k = j, \quad \delta_{kj} = 0 \quad \text{при } k \neq j;$$

$$s_k = \sin \psi_k, \quad c_k = \cos \psi_k;$$

$$s_{kj} = \sin(\psi_k - \psi_j), \quad c_{kj} = \cos(\psi_k - \psi_j).$$

Здесь J_0 – момент инерции КА; l_0 – координата крепления панели СБ к КА; μ_k – масса k -го узла с пружиной и демпфером; m_k – погонная масса k -ой секции СБ.

Линеаризованная по углам ψ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ система уравнений записывается в виде, аналогичном (2)

$$\begin{aligned} \tilde{L}_0 &= M_0(t); \\ \tilde{L}_k &+ 2 \left[-\kappa_{k-1} \psi_{k-1} + (\kappa_{k-1} + \kappa_k) \psi_k - \kappa_k \psi_{k+1} - \right. \\ &\quad \left. - \nu_{k-1} \dot{\psi}_{k-1} + (\nu_{k-1} + \nu_k) \dot{\psi}_k - \nu_k \dot{\psi}_{k+1} \right] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

Линеаризованные дифференциальные операторы \tilde{L}_0 и \tilde{L}_k , $k = 1, 2, \dots, n$ имеют вид

$$\tilde{L}_0 = \tilde{J} \ddot{\phi} + \sum_{k=1}^n \tilde{m}_{ok} \ddot{\psi}_k, \quad \tilde{L}_k = \tilde{m}_{ok} \ddot{\phi} + \sum_{j=1}^n \tilde{m}_{kj} \ddot{\psi}_j, \quad (5)$$

где

$$\tilde{J} = J_0 + 2 \sum_{k=1}^n \left[(\mu_k + m_k l_k) \left(l_0 + \sum_{j=1}^k l_j \right)^2 - m_k l_k^2 \left(l_0 + \sum_{j=1}^k l_j \right) + \frac{1}{3} m_k l_k^3 \right];$$

$$\tilde{m}_{ok} = \sum_{j=k}^n l_k l_j M_j + M_k l_k \left(l_0 + \sum_{j=1}^k l_j - l_k \right) - \frac{1}{3} m_k l_k^3;$$

$$\tilde{m}_{kj} = l_k l_j M_j - \delta_{kj} \frac{1}{3} m_k l_k^3 \quad \text{при } k \leq j;$$

$$\tilde{m}_{kj} = l_k l_j M_k \quad \text{при } k > j.$$

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

При кинематическом управлении поворотом КА с упругими панелями СБ на конечный угол за заданное время будем использовать вторые уравнения в (2) и (4). Для приближенного решения этой задачи, описываемой нелинейными дифференциальными уравнениями (2) с управляющей функцией $\ddot{\phi}(t)$ и с переменными коэффициентами на конечном интервале времени $0 \leq t \leq T$ будем использовать метод Бубнова–Галеркина совместно с методом последовательных приближений [6].

Для того чтобы при использовании метода последовательных приближений первое приближение представляло решение линеаризованных уравнений (4), их объединим, соответственно, с уравнениями (2), одновременно складывая и вычитая. Полученные уравнения запишем в виде

$$U_k(\phi, \psi_j) + N_k(\phi, \psi_j) = 0, \quad k, j = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Здесь U_k и N_k – соответственно, линейные и нелинейные операторы, с учетом (3) и (5) представляются как

$$U_k = \tilde{m}_{ok} \ddot{\phi} + \sum_{j=1}^n \left[\tilde{m}_{kj} \ddot{\psi}_j + \tilde{v}_{kj} \dot{\psi}_j + \tilde{\kappa}_{kj} \psi_j \right]; \quad (7)$$

$$N_k = (m_{ok} - \tilde{m}_{ok}) \ddot{\phi} - g_{ok} \dot{\phi}^2 + \sum_{j=1}^n g_{kj} (2\dot{\phi} \dot{\psi}_j + \dot{\psi}_j^2) + \sum_{j=1}^n (m_{kj} - \tilde{m}_{kj}) \ddot{\psi}_j,$$

где

$$\tilde{v}_{kj} = -2v_{k-1} \quad \text{при } 2 \leq k \leq n-1, \quad j = k-1;$$

$$\tilde{v}_{kj} = 2(v_{k-1} + v_k) \quad \text{при } 2 \leq k \leq n-1, \quad j = k;$$

$$\tilde{v}_{kj} = -2v_k \quad \text{при } 2 \leq k \leq n-1, \quad j = k+1;$$

$$\tilde{v}_{kj} = 2(v_0 + v_1) \quad \text{при } k = 1, \quad j = 1;$$

$$\tilde{v}_{kj} = -2v_1 \quad \text{при } k = 1, \quad j = 2;$$

$$\tilde{v}_{kj} = -2v_{n-1} \quad \text{при } k = n, \quad j = n-1;$$

$$\tilde{v}_{kj} = 2v_{n-1} \quad \text{при } k = n, \quad j = n.$$

Выражение для коэффициента $\tilde{\kappa}_{kj}$ записывается аналогично, путем замены $v \rightarrow \kappa$.

Закон управления углом поворота по крену с учетом начальных и конечных условий (1) будем искать в виде

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}(t) &= \sum_{r=1}^R b_r \sin\left(\frac{2\pi r t}{T}\right), & \dot{\phi}(t) &= \sum_{r=1}^R b_r \frac{T}{2\pi r} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi r t}{T}\right)\right); \\ \phi(t) &= \sum_{r=1}^R b_r \frac{T}{2\pi r} \left(t - \frac{T}{2\pi r} \sin\left(\frac{2\pi r t}{T}\right)\right),\end{aligned}\tag{8}$$

где b_r – неизвестные коэффициенты; R – определенное в каждом конкретном случае число коэффициентов b_r , которое требуется, чтобы удовлетворялись все начальные и конечные условия (1). В конечный момент времени $t = T$ должно выполняться условие для конечного угла поворота по крену $\phi(T) = \phi_T$, из которого получается одно уравнение для коэффициентов b_r ,

$$\sum_{r=1}^R b_r \frac{T^2}{2\pi r} = \phi_T.\tag{9}$$

Приближенное решение уравнений (6) с учетом (7) и (8) на интервале $0 \leq t \leq T$ будем искать в конечных рядах

$$\psi_j(t) = \sum_{z=1}^{Z_j} C_{j,z} \sigma_z(t),\tag{10}$$

где $C_{j,z}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие, как и b_r , определению; $\sigma_z(t)$ – заданные базисные аппроксимирующие функции времени, которые удовлетворяют части условий (1) для функций ψ_j , $j = 1, 2, \dots, n$.

В качестве набора базисных функций $\sigma_z(t)$ можно использовать [6]

$$\sigma_z(t) = \cos\left(\frac{(z-1)\pi t}{T}\right) - \cos\left(\frac{z\pi t}{T}\right);\tag{11}$$

$$\sigma_z(0) = 0, \quad \sigma_z(T) = 2(-1)^{z-1}, \quad \dot{\sigma}_z(0) = 0, \quad \dot{\sigma}_z(T) = 0.$$

Уравнения (6) удовлетворяем по методу Бубнова–Галеркина как

$$\int_0^T \left[U_k(\phi, \psi_j) + N_k(\phi, \psi_j) \right] \sigma_{p_k} dt = 0, \quad p_k = 1, 2, \dots, Z_k, \quad k, j = 1, 2, \dots, n.\tag{12}$$

С учетом выражений (7) и (10) уравнения (12) запишем в виде

$$\sum_{j=1}^n \sum_{z=1}^{Z_j} \gamma_{kj, zp_k} C_{j,z} + \sum_{r=1}^R \rho_{k, p_k} b_r + \beta_{k, p_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,\tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}\gamma_{kj, zp_k} &= \tilde{m}_{kj} \int_0^T \ddot{\sigma}_z \sigma_{p_k} dt + \tilde{\nu}_{kj} \int_0^T \dot{\sigma}_z \sigma_{p_k} dt + \tilde{\kappa}_{kj} \int_0^T \sigma_z \sigma_{p_k} dt; \\ \rho_{k, p_k} &= \tilde{m}_{0k} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi r t}{T}\right) \sigma_{p_k} dt, \quad \beta_{k, p_k} = \int_0^T N_k(\phi, \psi_j) \sigma_{p_k} dt.\end{aligned}$$

Система уравнений (13) должна быть дополнена уравнением (9), а также уравнениями, представляющими невыполненные начальные и конечные условия для функций ψ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, которым не удовлетворяют заданные базисные аппроксимирующие функции $\sigma_z(t)$.

При использовании базисных функций (11) дополнительные условия наряду с (9) получаются из условий $\psi_j(T) = 0, j = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{z=1}^{Z_j} (-1)^{z-1} C_{j,z} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

В результате будем иметь систему $Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n + n + 1$ уравнений (13), (9) и (14), из которых определяются коэффициенты $C_{j,z}, j = 1, 2, \dots, n, z = 1, 2, \dots, Z_j$ и $R = n + 1$ коэффициентов $b_r, r = 1, 2, \dots, R$.

Для решения полученной системы алгебраических уравнений (13) с нелинейными членами β_{k,p_k} используется метод последовательных приближений. В качестве первого приближения ($\lambda = 1$) берется решение по методу Бубнова–Галеркина линеаризованных уравнений (13) при $\beta_{k,p_k} = 0$ (т.е. при $N_k(\varphi, \psi_j) \equiv 0, k = 1, 2, \dots, n$). В λ -м приближении ($\lambda = 2, 3, \dots$) интегралы для коэффициентов β_{k,p_k} вычисляются численно с использованием выражений (7) для $N_k(\varphi, \psi_j), k = 1, 2, \dots, n$ с функциями $\varphi(t)$ и $\psi_j(t), j = 1, 2, \dots, n$, полученными в предыдущем, $(\lambda - 1)$ -м, приближении

$$\beta_{k,p_k}^{(\lambda)} = \int_0^T N_k(\varphi^{(\lambda-1)}, \psi_j^{(\lambda-1)}) \sigma_{p_k} dt.$$

Приближения выполняются пока не будет достигнута требуемая точность.

4. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Рассмотрим КА с двумя упругими панелями СБ, каждая из которых состоит из $n = 2$ недеформируемых секций. Исходные данные: $l_0 = 0,5$ м; $l_k = 3$ м, $m_k = 2$ кг/м, $\mu_k = 0,5$ кг, $k = 1, 2$; $\nu_0 = \nu_1 = 0,05$ Н·м·с/рад, $\kappa_0 = 100$ Н·м/рад, $\kappa_1 = 50$ Н·м/рад; $\varphi_T = \pi/2$ рад, $T = 10$ с. Параметры φ_T и T были выбраны таким образом, чтобы углы поворота секций панелей СБ были умеренно большими, $|\psi_k| < 1$ рад, $k = 1, 2$.

Точность приближенного решения задачи по методу Бубнова–Галеркина о нестационарных колебаниях секций панелей СБ при повороте КА по крену на заданный конечный угол за заданное время оценивается путем сравнения с численным решением по методу Рунге–Кутты с постоянным шагом 10^{-4} с прямой задачи, которая описывается нелинейными дифференциальными уравнениями (2) с начальными условиями $\dot{\psi}_k(0) = 0, \psi_k(0) = 0, k = 1, 2$. При этом финитная управляющая функция $\ddot{\varphi}(t)$ на интервале $0 \leq t \leq T$ берется в виде (8) при $n = 2$ с использованием найденных в приближенном решении коэффициентов $b_r, r = 1, 2, \dots, R$. Для оценки остаточных колебаний при найденном управляющем воздействии интегрирование системы уравнений (2) ведется на интервале $0 \leq t \leq 2T$.

При использовании базисных функций (11) при $Z_1 = Z_2 = 8$ имеем $R = 3$ коэффициента b_r в разложении управляющей функции (8). В результате,

получаем систему из 19-ти уравнений (13), (9) и (14), из которых численно с точностью по последовательным приближениям равной 10^{-6} находятся коэффициенты $C_{j,z}$, $j = 1, 2$, $z = 1, 2, \dots, Z_j$ и b_r , $r = 1, 2, 3$. Количество шагов итерационного процесса в данном случае равно 551.

На рис.2 показан график изменения управляющей функции $\ddot{\varphi}(t)$ и угла поворота $\varphi(t)$ по крену КА на интервале управления $0 \leq t \leq T$. На рис.3,4 представлены графики изменения углов поворота $\psi_k(t)$, $k = 1, 2$ и их скоростей $\dot{\psi}_k(t)$, $k = 1, 2$, соответственно, секций панелей СБ на интервале управления $0 \leq t \leq T$, а также для $t > T$ при численном интегрировании по методу Рунге–Кутта. Видно, что в масштабах графиков на всем интервале управления $0 \leq t \leq T$ полученные по методу Бубнова–Галеркина (Б-Г, сплошные линии) функции изменения углов и скоростей поворота секций панелей СБ совпадают с численными результатами интегрирования системы дифференциальных уравнений по методу Рунге–Кутта (Р-К, штрихпунктирные линии) при найденном управляющем воздействии. В данном случае максимальные амплитуды остаточных колебаний при $t > T$ по углам поворота секций ψ_k , $k = 1, 2$ не превышают 0,013 рад при максимальной амплитуде на интервале управления $0 \leq t \leq T$, равной 0,518 рад (для крайней панели $k = 2$).

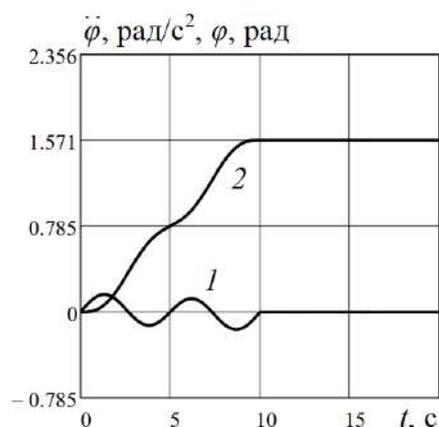


Рис.2. Искомые законы управления: 1 – $\ddot{\varphi}(t)$; 2 – $\varphi(t)$.

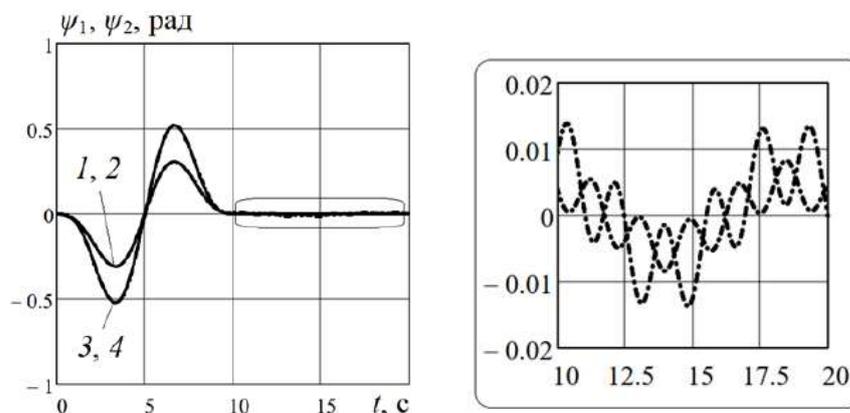


Рис.3. Изменение углов поворота секций панелей СБ. 1 – $\psi_1(t)$, Б-Г; 2 – $\psi_1(t)$, Р-К; 3 – $\psi_2(t)$, Б-Г; 4 – $\psi_2(t)$, Р-К.

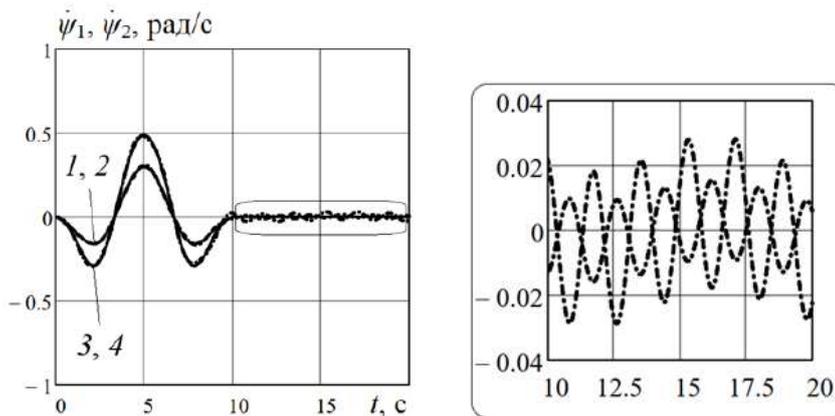


Рис.4. Изменение скоростей поворота секций панелей СБ. 1 – $\dot{\psi}_1(t)$, Б-Г; 2 – $\dot{\psi}_1(t)$, Р-К; 3 – $\dot{\psi}_2(t)$, Б-Г; 4 – $\dot{\psi}_2(t)$, Р-К.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено решение терминальной задачи управления нелинейными колебаниями панелей солнечных батарей космического аппарата при его повороте по крену на конечный угол за заданное время.

На примере расчета с анализом точности показано совпадение результатов решения задачи с прямым численным интегрированием нелинейной системы дифференциальных уравнений, описывающей нестационарное движение космического аппарата с упругими панелями солнечных батарей, при найденном управляющем воздействии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К. *Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами*. – М.: Машиностроение, 1986. – 216 с.
2. Докучаев Л.В. *Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами*. – М.: Машиностроение, 1987. – 261 с.
3. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Динамика упругих управляемых конструкций*. – М.: Издательство МАИ, 2007. – 328 с.
4. Русских С.В. *Управляемый поворот космического аппарата с упругими панелями солнечных батарей* // Известия ВУЗов. Машиностроение. – 2016. – №12. – С.89-97.
5. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. *Нелинейные колебания упругих панелей солнечных батарей космического аппарата при конечном повороте по крену* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2018. – №2. – С.34-43.
6. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. *Передвижение тяжелого твердого тела, подвешенного на тросе переменной длины, с гашением колебаний* // Прикладная математика и механика. – 2019. – №4. – С.549-561.

УДК 539.422.5
EDN YANPOJ (<https://elibrary.ru/yanpoj>)
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.4



ДИНАМИКА КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ С СОТОВЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ С ПОВРЕЖДЕНИЯМИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РЕАКТИВНОЙ СТРУИ ДВИГАТЕЛЯ ПАССАЖИРСКОГО САМОЛЕТА*

Дедова Д.В.^{1,2}, Мартиросов М.И.^{1,2}, Рабинский Л.Н.¹

¹ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет)», г. Москва, Россия

²ПАО «Яковлев», г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Трехслойные панели с сотовыми заполнителями широко применяются в различных отраслях современной промышленности, так, например, в авиастроении такие панели используются в конструкциях закрылков, предкрылков, рулей направления и высоты, интерьеров пассажирских самолетов и других элементов [1].

Такое широкое применение трехслойные панели получили благодаря их малому весу, высокой удельной прочности и жесткости, устойчивости при сжимающих нагрузках, высокой технологичности.

В процессе производства и эксплуатации в трехслойных панелях могут возникать дефекты различного рода, которые оказывают влияние на несущую способность и остаточную прочность готового изделия. Все дефекты изделий можно разделить на допустимые и недопустимые [2].

Допустимыми называются технологические и производственные дефекты, допускаемые в изделии в состоянии, полученном при изготовлении или сборке, либо допускаемые с проведением минимальных доработок, не влияющих на эксплуатационные показатели.

Недопустимыми называются технологические и производственные дефекты, которые не допускаются в изделии, в подавляющем большинстве случаев требующие значительных доработок конструкции, без устранения которых эксплуатация изделия невозможна.

В элементах конструкций из трехслойных сотовых панелей допустимым являются дефекты типа расслоения, непроклей, пористость, волнистость, складки, коробление, нахлест, посторонние включения, вмятины, отклонение от прямолинейности по скосам, неполное заполнение пастой сотовой ячейки (в случае необходимости).

В данной работе рассматриваются межслоевые дефекты типа расслоения (нарушение адгезионной связи между слоями в композитном пакете, вызванное механическими воздействиями ударного характера или внутренними напряжениями в изделии после формования или после проведения сборочно-монтажных работ).

*Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта РНФ №23-49-10061, выданного Московскому авиационному институту

Ранее в работах [3-7] проводилось численное исследование поведения панелей с сотовым наполнителем и панелей из полимерных композиционных материалов (ПКМ) под действием нагрузок различного характера.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассматриваются трехслойные цилиндрические панели с сотовым наполнителем и обшивкой из ПКМ. Форма панели – прямоугольная в плане с размерами $a = 600$ мм и $b = 400$ мм.

В центре панели присутствуют дефекты произвольной формы с характерными размерами $m = 200$ мм и $n = 155$ мм (рис.1).

Панели представляют собой конструкцию, состоящую из двух тонких прочных внешних слоев – обшивок, связанных между собой слоем заполнителя [8].

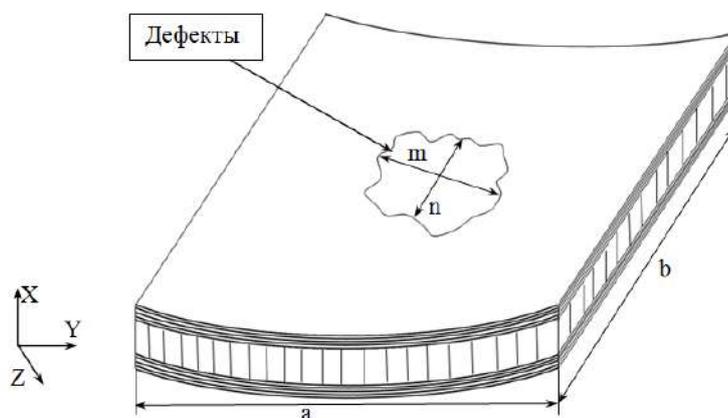


Рис.1. Трехслойная цилиндрическая панель.

Дефекты расположены между монослоями обшивки сотовой панели и между обшивкой панели и сотовым наполнителем (рис.2). Высота сот $H = 10$ мм. Стрела подъема 48 мм.

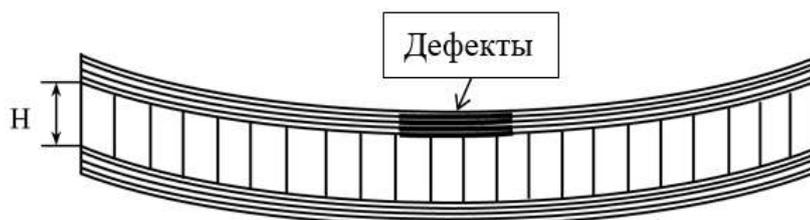


Рис.2. Расположение дефектов.

Сотовые наполнители в панелях выполнены из стеклосотопласта ССП-1-2,5 (гексагональная форма ячейки со стороной $c = 2,5$ мм) – материал на основе стеклоткани и полимерного связующего и полимеросотопласта ПСП-1-2,5-48 (гексагональная форма ячейки со стороной $c = 2,5$ мм) на основе арамидноволоконистой синтетической каландрированной бумаги (типа Номекс по зарубежной терминологии) и фенольного связующего.

Характеристики наполнителей – паспортные от производителей этих материалов (таблица 1).

Таблица 1.

Характеристики сотовых заполнителей.

Характеристика	ПСП-1-2,5-48	ССП-1-2,5
Предел прочности при сжатии, МПа	1,4	3,5
Предел прочности при сдвиге в направлении параллельном плоскости ячеек, МПа	1	2,5
Предел прочности при сдвиге в направлении перпендикулярном плоскости ячеек, МПа	0,6	2
Модуль упругости при сдвиге в направлении параллельном плоскости склейки ячеек, МПа	35	130
Модуль упругости при сдвиге в направлении перпендикулярном плоскости склейки ячеек, МПа	20	80

Обшивки (несущие слои) панелей состоят из четырех монослоев, каждый из которых выполнен из клеевого препрега КМКУ-2м.120.P2009 (углеродная ткань фирмы «Porsher» и клеевая композиция). Укладка монослоев – смешанная и имеет следующий вид: $[-45^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}/+45^{\circ}]$.

Характеристики клеевого препрега – паспортные также представлены производителем этого материала (таблица 2).

Таблица 2.

Характеристика клеевого препрега КМКУ-2м.120.P2009.

Характеристика	Значение
Толщина монослоя, мм	0,28
Предел прочности при растяжении в направлении оси ОХ, МПа	920
Модуль упругости при растяжении в направлении оси ОХ, ГПа	67
Предел прочности при растяжении в направлении оси ОУ, МПа	800
Модуль упругости при растяжении в направлении оси ОУ, ГПа	67
Предел прочности при сжатии в направлении оси ОХ, МПа	900
Модуль упругости при сжатии в направлении оси ОХ, ГПа	66
Предел прочности при сжатии в направлении оси ОУ, МПа	700
Модуль упругости при сжатии в направлении оси ОУ, ГПа	66
Коэффициент Пуассона	0,145
Предел прочности при межслоевом сдвиге, МПа	75

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ

Создание конечно-элементной модели (КЭМ) осуществлялось в программном комплексе Simcenter Femap. Каждый монослой обшивки рассматриваемых панелей моделировался отдельным набором объемных конечных элементов (КЭ). Сотовый заполнитель моделировался отдельным набором оболочечных КЭ.

Затем модель импортировалась в программный комплекс LS-DYNA, где задавались условия закрепления, нагружения и контакта.

Соединение сотового заполнителя со слоями обшивки осуществлялось при помощи клеевого контакта «TIED_SHELL_EDGE_TO_SOLID_OFFSET», склеивание несущих слоёв между собой проводилось с помощью контакта «AUTOMATIC_ONE_WAY_SURFACE_TO_SURFACE_TIEBREAK».

Взаимодействие зон дефектов моделировалось с помощью контакта «AUTOMATIC_NODES_TO_SURFACE» и «AUTOMATIC_SURFACE_TO_SURFACE» [4].

На рис.3 представлена КЭМ цилиндрической панели.

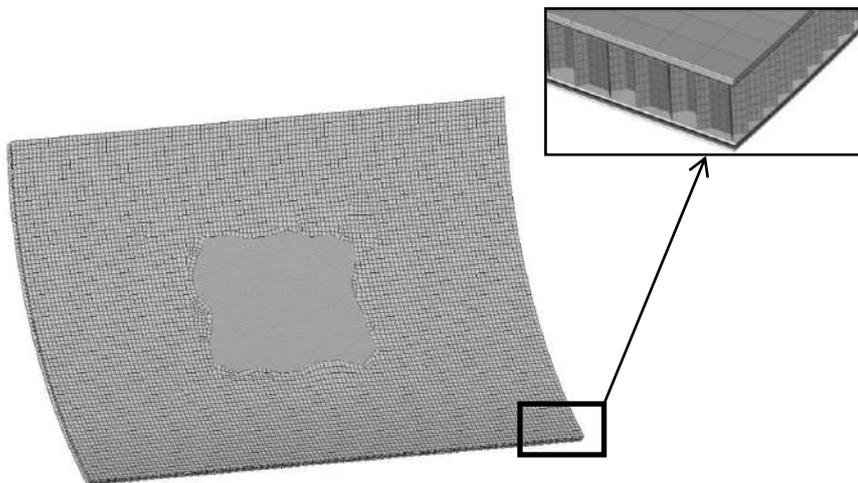


Рис.3. Конечно-элементная модель панели.

В качестве нагрузки рассматривается воздействие равномерно распределенной по поверхности панели набегающей волны давления заданной интенсивности, имитирующей действие реактивной струи двигателя пассажирского самолета на корневой закрылок (рис.4).

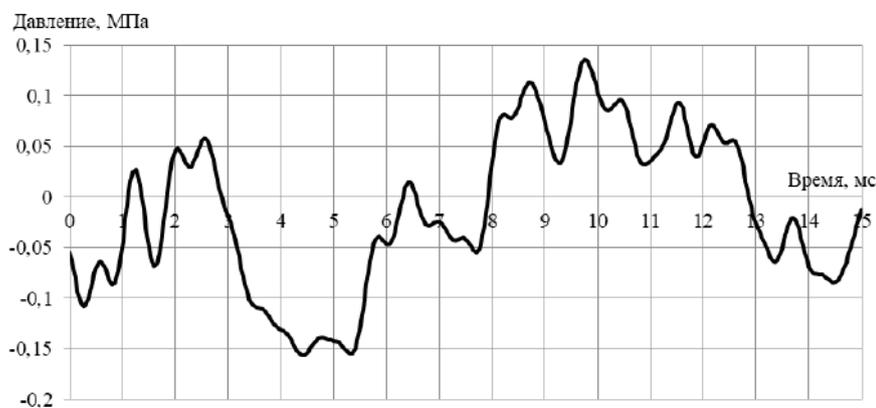


Рис.4. Зависимость давления от времени.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

В результате проведенного численного исследования определяется распределение полей напряжений в несущих слоях панели в различные моменты времени. На основе полей напряжений определяется распределение индексов разрушения f по критерию разрушения LaRC04 (Langley Research Center) [9]. Разрушение наступает, когда выполняется условие $f > 1$.

На рис.5 показано распределение продольных напряжений в первом слое обшивки при наличии дефектов для панелей с сотовым наполнителем из ПСП-1-2,5-48 и ССП-1-2,5 в момент времени 3 мс.

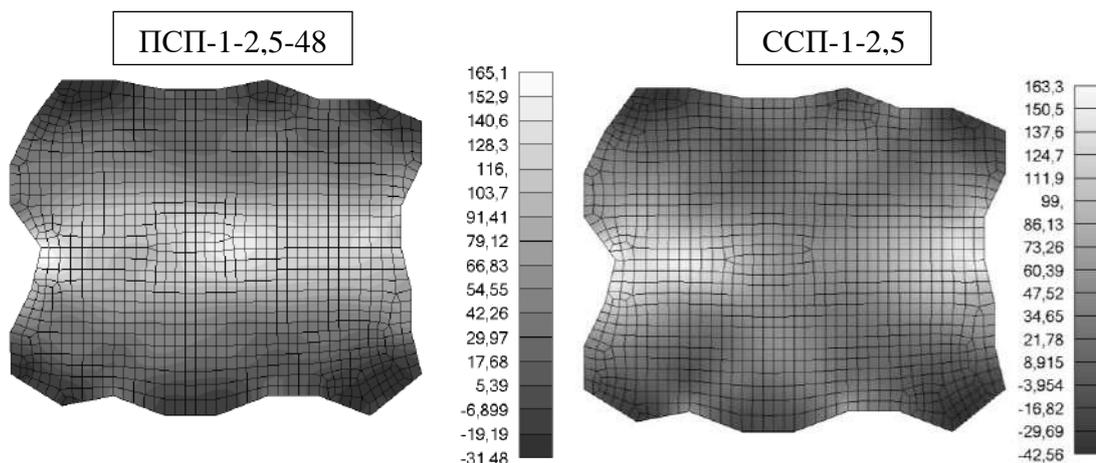


Рис.5. Распределение продольных напряжений в 1 слое обшивки при наличии дефектов, МПа.

Из рис.5 следует, что в зоне дефектов максимальные продольные напряжения в панели с наполнителем из ПСП-1-2,5-48 больше, чем в панели с наполнителем из ССП-1-2,5.

На рис.6 представлено распределение индексов разрушения в первом слое обшивки при наличии дефектов для панелей с сотовым наполнителем из ПСП-1-2,5-48 и ССП-1-2,5 в момент времени 3 мс.

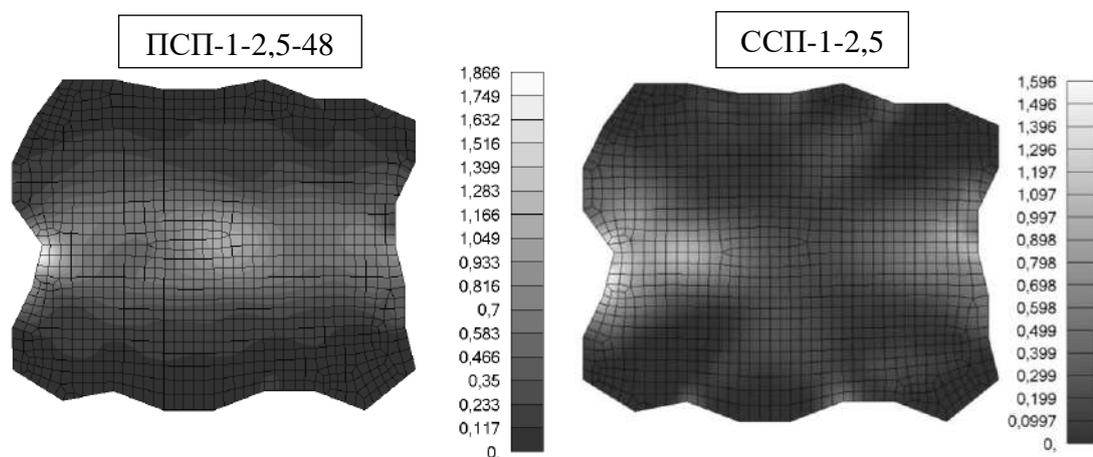


Рис.6. Распределение индексов разрушения в панелях с дефектами.

Из рис.6 видно, что в данных сотовых панелях при наличии дефектов в момент времени 3 мс по критерию разрушения LaRC04 происходит разрушение верхнего слоя обшивки панели, так как индекс разрушения $f > 1$.

На рис.7 показано распределение продольных напряжений в первом слое обшивки без дефектов для панелей с сотовым наполнителем из ПСП-1-2,5-48 и ССП-1-2,5 в момент времени 3 мс.

Из рис.7 следует, что максимальные продольные напряжения в панели в зоне дефектов в панели с наполнителем из ССП-1-2,5 в 1,28 раза больше, чем в панели с наполнителем из ПСП-1-2,5-48.

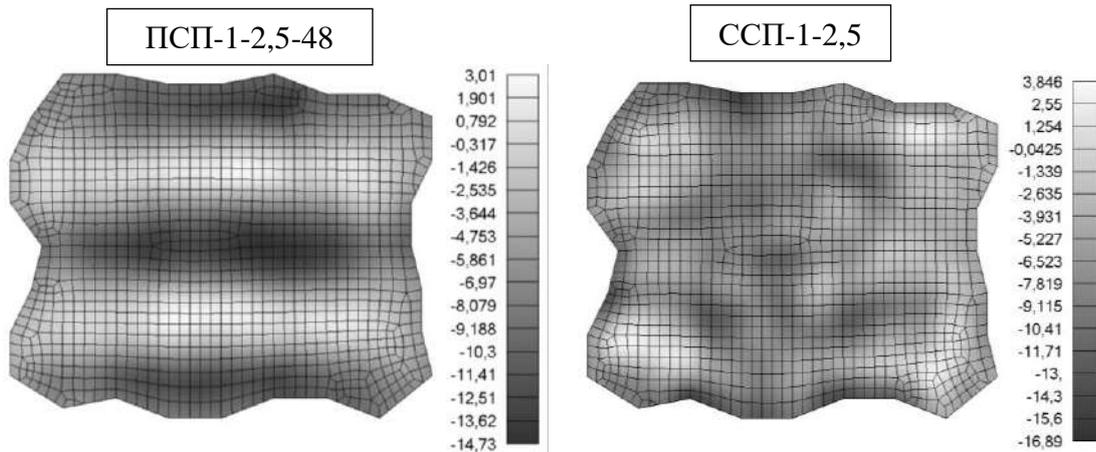


Рис.7. Распределение продольных напряжений в 1 слое обшивки без дефектов, МПа.

На рис.8 дано распределение индексов разрушения в первом слое обшивки без дефектов для панелей с сотовым заполнителем из ПСП-1-2,5-48 и ССП-1-2,5 в момент времени 3 мс.

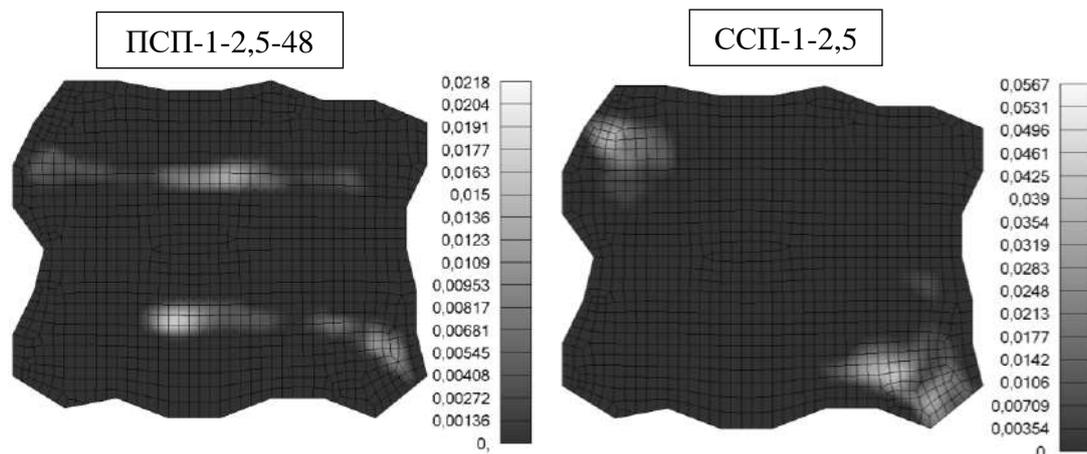


Рис.8 Распределение индексов разрушения в панелях без дефектов.

Из рис.8 следует, что в панели с сотовым заполнителем из ССП-1-2,5 индекс разрушения f в 2,6 раза больше, чем в панели с заполнителем из ПСП-1-2,5-48.

ВЫВОДЫ

В результате проведенного численного исследования получено распределение полей напряжений и индексов разрушений по критерию разрушения для ПКМ LaRC04. Анализ результатов показал, что наличие дефектов заданной формы в панели с сотовыми заполнителями из ПСП-1-2,5-48 и ССП-1-2,5 при действии заданной нагрузки влияет на распределение полей напряжений. Напряжения в панелях с дефектами в 11,53 (ПСП-1-2,5-48) и 9,66 (ССП-1-2,5) раза выше, чем в панелях без дефектов. При заданной нагрузке наблюдается разрушение верхнего слоя обшивок панелей при наличии дефектов. Также наблюдается отличие в распределении полей индексов разрушения и напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузева Р.И., Феоктистов С.И. Особенности формирования трехслойных панелей с наполнителем для хвостовых отсеков рулей направления пассажирских самолетов // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. – 2018. – №4. – С.4-12.
2. Александров А.Я., Куршин Л.М. Трехслойные пластинки и оболочки. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 2. – М.: Машиностроение, 1968. – С.243-326.
3. Медведский А.Л., Мартиросов М.И., Хомченко А.В., Дедова Д.В. Численный анализ поведения трехслойной панели с сотовым наполнителем при наличии дефектов под действием динамической нагрузки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2021. – Т.17. – №4. – С.357-365.
4. Medvedskiy A.L., Martirosov M.I., Khomchenko A.V., Dedova D.V. Behaviour of a cylindrical reinforced carbon fibre shell under impact load // TEM Journal. – 2021. – Vol.10. – No.4. – Pp.1597-1604.
5. Medvedskiy A.L., Rabinskiy L.N., Martirosov M.I., Ershova A.Yu., Khomchenko A.V. The study of changes in strength of polymer composite panels with interlayer defects under the action of unsteady load // The Asian International Journal of Life Sciences. – 2019. – Vol.21(1). – Pp.565-576.
6. Дедова Д.В., Кузнецова Е.Л., Мартиросов М.И., Хомченко А.В. Численное исследование влияния внутренних дефектов на напряженно-деформированное состояние трехслойной панели с различными типами сотового наполнителя // СТИН. – 2023. – №10. – С.27-30.
7. Babaytsev A.V., Kuznetsova E.L., Rabinskiy L.N., Tushavina O.V. Investigation of permanent strains in nanomodified composites after molding at elevated temperatures // Periodico Tche Quimica. – 2020. – Vol.17. – Iss.34. – Pp.1055-1067.
8. Александров А.Я., Брюккер Л.Э., Куршин Л.М. Расчет трехслойных панелей. – М.: Оборонгиз, 1960. – 270 с.
9. Муйземнек А.Ю., Карташова Е.Д. Механика деформирования и разрушения полимерных слоистых композиционных материалов. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2017. – 56 с.



ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА ПРИ СЖАТИИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ТЕМПЕРАТУРЫ

Жаринов М.Ю., Марасанов А.И.

Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия

Рассмотрены результаты экспериментальных исследований прочности и долговечности стержней из однонаправленного стеклопластика на эпоксидном связующем при соотношении связующего и заполнителя 0,3:0,7 при сжатии вдоль волокон при различных значениях температуры. На основе результатов кратковременных испытаний определены характеристики прочности стеклопластиковых стержней. Показано, что при повышении температуры испытания на 60°C (с $T = 20^\circ\text{C}$ до $T = 80^\circ\text{C}$) прочность стеклопластика снижается незначительно (на 4,4%). Полученные характеристики прочности стеклопластика при различных температурах сопоставлены с соответствующими данными, опубликованными ранее другими авторами. На основе длительных испытаний на сжатие даны оценки долговечности при разных уровнях нагружения и температуры испытания, а также получены прямые линейной регрессии для логарифма долговечности. Показано, что при повышении температуры испытания на 60°C долговечность стеклопластика при прочих равных условиях снижается весьма существенно. Проведено сравнение полученных характеристик долговечности стеклопластика при температуре испытания $T = 20^\circ\text{C}$ с соответствующими характеристиками, имеющимися в литературе.

Ключевые слова: однонаправленный стеклопластик; кратковременная прочность; долговечность; прямая линейной регрессии

ВВЕДЕНИЕ

Представленная работа посвящена экспериментальному исследованию прочности и долговечности стержней из однонаправленного стеклопластика на эпоксидном связующем при соотношении связующего и заполнителя 0,3:0,7 при сжатии вдоль волокон при различных значениях температуры. Цилиндрические образцы стеклопластиковых стержней поступили в лабораторию «Испытания материалов» Российского университета транспорта из СКТБ (Специальное конструкторско-технологическое бюро по арматуре и изоляторам). Они были изготовлены методом непрерывной протяжки. Диаметр образцов – 15 мм, высота – 45 мм.

Кратковременные испытания были проведены на серийной испытательной машине УЭИМ-10т при температурах $T = 20^\circ\text{C}$ и $T = 80^\circ\text{C}$. Скорость изменения деформаций при испытаниях составляла 0,0008 1/с с тем, чтобы избежать искажения результатов опытов из-за вязких свойств материала. В опытах при повышенной температуре образец выдерживался в испытательной машине в течение одного часа при температуре $T = 80^\circ\text{C}$ и только затем нагружался до разрушения.

Длительные испытания при температуре $T = 20^{\circ}\text{C}$ были проведены на пружинной установке, разработанной в лаборатории «Испытания материалов» Российского университета транспорта, на которой можно создавать сжимающее усилие до 10 тонн.

Длительные испытания при температуре $T = 80^{\circ}\text{C}$ были проведены на испытательной машине УЭИМ-10т.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В таблице 1 приведены результаты кратковременных испытаний при температуре $T = 20^{\circ}\text{C}$. На рис.1 представлена гистограмма предела прочности, построенная на основе данных таблицы 1. Получены следующие значения оценок среднего значения и среднеквадратического отклонения указанной характеристики: $m = 438,0$ МПа и $s = 117,4$ МПа. Для описания вероятностного распределения предела прочности при $T = 20^{\circ}\text{C}$ не удалось подобрать какого-либо вероятностного закона.

Таблица 1.
Результаты кратковременных испытаний
при температуре $T = 20^{\circ}\text{C}$.

№ образца	$F_{разр}$, кН
1	100,06
2	55,43
3	93,20
4	82,60
5	91,43
6	96,14
7	68,67
8	58,86
9	94,18
10	94,18
11	40,22
12	53,96

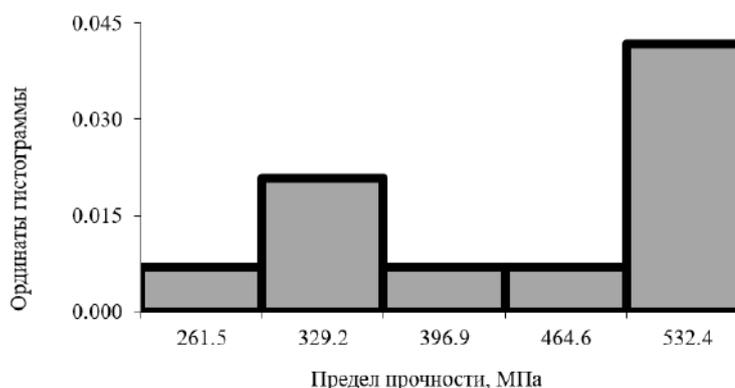


Рис.1. Гистограмма случайной величины предела прочности стеклопластика при сжатии при температуре испытания $T = 20^{\circ}\text{C}$.

В таблице 2 приведены результаты кратковременных испытаний при температуре $T = 80^\circ\text{C}$. На основе данных этой таблицы найдены следующие значения оценок среднего значения и среднеквадратического отклонения случайной величины предела прочности: $m = 418,8$ МПа и $s = 65,1$ МПа.

На рис.2 показаны гистограмма предела прочности и плотность распределения вероятностей в предположении справедливости закона Гаусса. Проверка по критерию согласия χ^2 Пирсона [1] показала, что принятая гипотеза не противоречит опытным данным.

Как следует из представленных данных, при повышении температуры испытания на 60°C (с $T = 20^\circ\text{C}$ до $T = 80^\circ\text{C}$) прочность стеклопластика снижается незначительно (на 4,4%).

Таблица 2.
Результаты кратковременных испытаний
при температуре $T = 80^\circ\text{C}$.

1	85,54
2	72,59
3	72,20
4	43,56
5	87,90
6	74,56
7	68,67
8	76,52
9	84,37
10	62,78
11	80,44
12	74,56
13	78,48

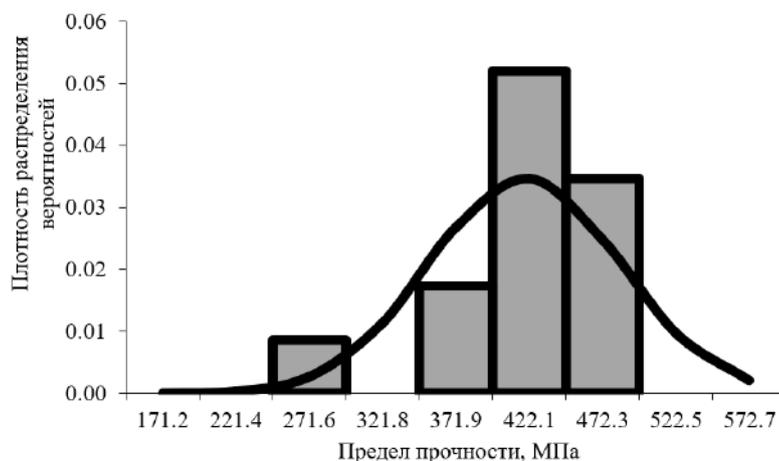


Рис.2. Гистограмма случайной величины предела прочности стеклопластика при сжатии при температуре испытания $T = 80^\circ\text{C}$ и плотность распределения вероятностей в предположении справедливости закона Гаусса.

В таблице 3 проведено сопоставление полученных характеристик кратковременной прочности однонаправленного стеклопластика на эпоксидном связующем с соответствующими характеристиками, приведенными в работе [2]. Как видим из указанной таблицы, результаты оказались близкими.

Таблица 3.
Оценки средних значений предела прочности стеклопластика (МПа).

Предел прочности при $T = 20^{\circ}\text{C}$ в настоящей работе	Предел прочности при $T = 20^{\circ}\text{C}$ в работе [2]	Предел прочности при $T = 80^{\circ}\text{C}$ в настоящей работе	Предел прочности при $T = 100^{\circ}\text{C}$ в работе [2]
438,0	431,0	418,8	406,0

В связи с тем, что при длительных испытаниях при температуре $T = 20^{\circ}\text{C}$ при сравнительно низких уровнях нагрузки образцы не разрушались в течение долгого времени, указанные испытания были проведены при значениях нагрузки в долях от разрушающей в диапазоне 0,63-0,96. Результаты этих испытаний представлены в таблице 4.

В таблице 5 приведены оценки средних значений долговечности при различных уровнях нагружения. Под долговечностью здесь понимается время, проходящее с момента нагружения до разрушения образца.

Таблица 4.
Результаты длительных испытаний при температуре $T = 20^{\circ}\text{C}$.

№ образца	Уровень нагружения, $F/F_{\text{разр}}$	Долговечность t_* , мин
1	0,96	0,5
2	0,96	0,017
3	0,82	0,017
4	0,82	0,017
5	0,76	0,017
6	0,76	45
7	0,76	0,017
8	0,70	0,333
9	0,70	0,333
10	0,70	8
11	0,70	0,017
12	0,63	8
13	0,63	0,017
14	0,63	18720

По результатам испытаний получено уравнение линейной регрессии для Int_* , мин

$$\text{Int}_* = 41,963 - 52,356F/F_{\text{разр}}. \quad (1)$$

Прямая линейной регрессии для логарифма долговечности представлена на рис.3. Точками здесь показаны экспериментальные данные.

Таблица 5.

Оценки средних значений долговечности при температуре $T = 20^\circ\text{C}$ при различных уровнях нагружения.

Уровень нагружения $F/F_{\text{разр}}$	Число испытанных образцов	Оценка среднего значения долговечности t^* , мин	Логарифм среднего значения долговечности $\ln t^*$, мин
0,96	2	0,258	-1,354
0,82	2	0,017	-4,094
0,76	3	15,011	2,709
0,70	4	2,171	0,775
0,63	3	6243	8,739

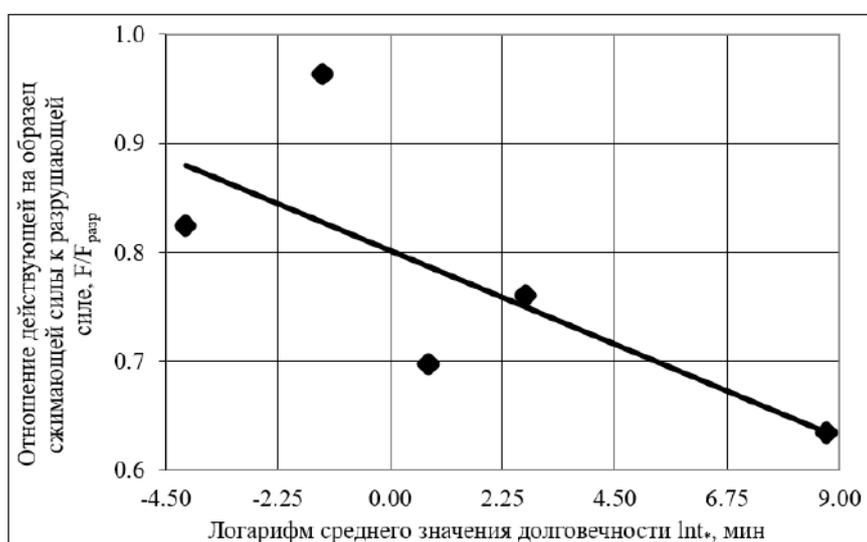


Рис.3. Прямая линейной регрессии для $\ln t^*$, мин, при $T = 20^\circ\text{C}$ и экспериментальные данные.

В таблице 6 приведены результаты длительных испытаний однонаправленного стеклопластика на сжатие при температуре $T = 80^\circ\text{C}$, а в таблице 7 представлены оценки средних значений долговечности при различных уровнях нагружения.

Таблица 6.

Результаты длительных испытаний при температуре $T = 80^\circ\text{C}$.

№ образца	Уровень нагружения, $F/F_{\text{разр}}$	Долговечность t^* , мин
1	0,74	0,017
2	0,74	1,500
3	0,66	65
4	0,66	0,5
5	0,66	5
6	0,63	10
7	0,63	5
8	0,56	55

9	0,56	0,017
10	0,53	5
11	0,53	180
12	0,51	65
13	0,51	205
14	0,51	105

Таблица 7.

Оценки средних значений долговечности при температуре $T = 80\text{ }^{\circ}\text{C}$
при различных уровнях нагружения.

Уровень нагружения, $F/F_{разр}$	Количество образцов	Среднее значение долговечности t_* , мин	Логарифм среднего значения долговечности $\ln t_*$, мин
0,74	2	0,758	-0,277
0,66	3	23,5	3,157
0,63	2	7,5	2,015
0,56	2	27,508	3,314
0,53	2	92,5	4,527
0,51	3	125	4,828

Уравнение линейной регрессии для $\ln t_*$ (мин), полученное по результатам испытаний, имеет вид

$$\ln t_* = 14,939 - 20,335 F/F_{разр}. \quad (2)$$

Соответствующая прямая линейной регрессии для логарифма долговечности, а также опытные данные (точки) показаны на рис.4.

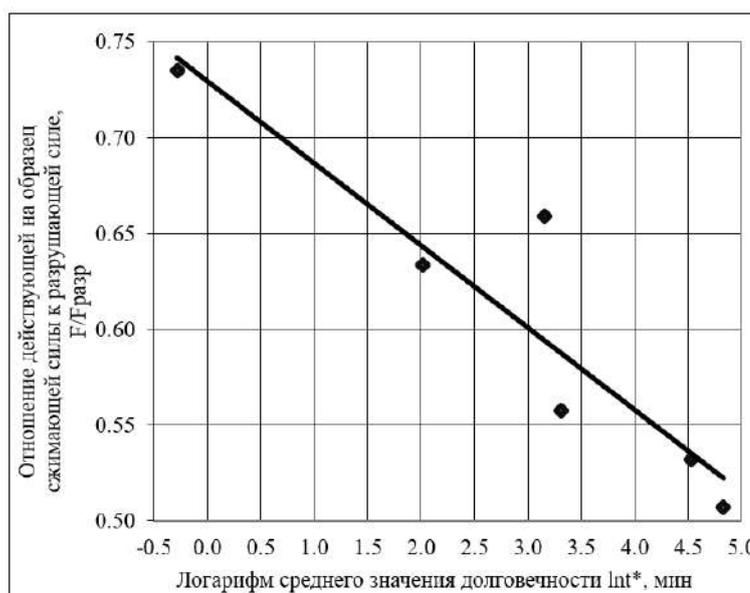


Рис.4. Прямая линейной регрессии для $\ln t_*$, мин, при $T = 80\text{ }^{\circ}\text{C}$ и экспериментальные данные.

В таблице 8 представлены оценки долговечности, выполненные экспериментально и теоретически при различных значениях нагрузки и температуры. В столбце 5 данной таблицы показаны экспериментальные оценки долговечности при $T = 20^{\circ}\text{C}$, приведенные в работе [3].

Таблица 8.

Оценки долговечности при различных уровнях нагружения и различных температурах.

Нагрузка F , кН	$F/F_{разр}$	Оценка долговечности t_* при $T = 20^{\circ}\text{C}$ из опытов, час	Оценка долговечности t_* при $T = 20^{\circ}\text{C}$ по уравнению (1), час	Оценка долговечности t_* при $T = 20^{\circ}\text{C}$ из опытов в работе [3], час	Оценка долговечности t_* при $T = 80^{\circ}\text{C}$ из опытов, час	Оценка долговечности t_* при $T = 80^{\circ}\text{C}$ по уравнению (2), час
1	2	3	4	5	6	7
43	0,56	-	5163,2	457,0	0,46	0,58
49	0,63	104	113,0	106,2	0,13	0,13
59	0,76	0,25	0,13	0,003	0,013	0,016
				При $T = 20^{\circ}\text{C}$ в [3] $F = 58$ кН, $F/F_{разр} = 0,75$	При $T = 80^{\circ}\text{C}$ $F = 57$ кН, $F/F_{разр} = 0,74$	

ВЫВОДЫ

1. Характеристики прочности и долговечности стеклопластика при сжатии имеют большой статистический разброс.
2. Оценки предела прочности однонаправленного стеклопластика на эпоксидном связующем при различных температурах близки к соответствующим значениям, приведенным в работе [2].
3. Выполненные теоретические оценки долговечности не всегда удовлетворительно согласуются с имеющимися опытными данными.
4. Повышение температуры испытания на 60°C по сравнению с комнатной приводит к незначительному снижению прочности (на 4,4%) и резкому снижению долговечности.
5. Из-за небольшого количества испытанных образцов при разных уровнях нагружения и температуры экспериментальные оценки долговечности, выполненные в данной работе, можно рассматривать как предварительные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов М.Н. *Статистические методы обработки результатов механических испытаний*. – М.: Машиностроение, 1985. – 232 с.
2. Потапов В.Д., Горошков Ю.И., Лукьянов А.М. и др. *Полимерные материалы в устройствах контактной сети*. – М.: Транспорт, 1988. – 224 с.
3. Хлебцов П.В. *Исследование долговечности однонаправленных стеклопластиков* // Межвузовский сборник научных трудов. – 1991. – Вып.857. – С.100-105.

УДК 539.3, 539.8
EDN MRDFOY (<https://elibrary.ru/mrdfoy>)
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.6



МОДЕЛЬ ИЗГИБА ОРТОТРОПНОЙ ШАРНИРНО-ОПЕРТОЙ БАЛКИ ТИМОШЕНКО ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ, РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПО ДЛИНЕ ТЕРМОМЕХАНОДИФфуЗИОННЫХ НАГРУЗОК*

Земсков А.В.^{1,2}, Тарлаковский Д.В.^{2,1}

¹ФГБОУ «Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет)», г. Москва, Россия

²НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Рассматривается нестационарная задача об изгибе однородной ортотропной шарнирно опертой балки Тимошенко, находящейся под действием распределенной по поверхности механической нагрузки. Исходная математическая постановка задачи включает в себя систему уравнений нестационарных изгибных колебаний балки с учетом термодиффузии. Решение ищется с помощью преобразования Лапласа и разложения в ряды Фурье. Оригиналы находятся аналитически, с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления.

ВВЕДЕНИЕ

Балки, пластины и оболочки являются основой большинства механических конструкций. При этом, ввиду развития современных технологий производства и условий эксплуатации технических систем, важным вопросом является учет взаимодействия полей различной физической природы в упругих телах, находящихся под действием многофакторных нестационарных внешних воздействий.

Обзор публикаций по данной тематике свидетельствует о том, что проблема анализа взаимодействия механического, температурного и диффузионных полей в сплошных средах и элементах конструкций на сегодняшний день является очень актуальной. Применительно к тонкостенным элементам конструкций следует отметить работы [1,2], где исследуется влияние диффузионных процессов на несущую способность пологой трансверсально-изотропной оболочки. Контактное взаимодействие стержня с упругим полупространством с учетом тепломассопереноса рассматривается в работах [3,4]. Публикации [5-7] посвящены исследованию механодиффузионных процессов в пластинах. Расчет сферических оболочек с учетом диффузии рассмотрен в [8].

В данной работе предложена модель нестационарных термомеханодиффузионных колебаний балки, основанная на гипотезах Тимошенко и предложен метод решения, основанный на использовании преобразования Лапласа и разложения в ряды Фурье. Используемый подход позволяет существенно упростить проблему обращения преобразования Лапласа,

* Работа выполнено при финансовой поддержке РНФ (№23-21-00189,
<https://rscf.ru/project/23-21-00189/>).

сведя ее к обращению рациональных функций с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассматривается нестационарная задача о плоском термоупругодиффузионном изгибе шарнирно закрепленной однородной ортотропной многокомпонентной балки Тимошенко под действием распределённой поперечной нагрузки.

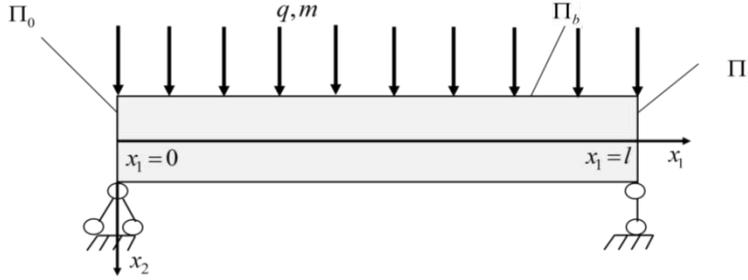


Рис.1. Иллюстрация к постановке задачи.

Для математической постановки задачи используется модель термоупругодиффузионных процессов в сплошных средах в прямоугольной декартовой системе координат, которая в случае однородной $N + 1$ -компонентной среды имеет вид (точки обозначают производную по времени) [9-11]

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i, \quad \dot{\theta} + B_{ij} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \sum_{q=1}^N v^{(q)} \eta^{(q)} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = Q^{(j)}, \\ \dot{\eta}^{(q)} &= -\frac{\partial J_i^{(q)}}{\partial x_i} + Y^{(q)}, \quad \eta^{(N+1)} = -\sum_{q=1}^N \eta^{(q)} \quad (q = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (1.1)$$

где σ_{ij} , q_i и $J_i^{(q)}$ – компоненты тензора напряжений и векторов теплового диффузионного потоков, которые определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - b_{ij} \theta - \sum_{q=1}^N \alpha_{ij}^{(q)} \eta^{(q)}, \quad \sum_{k=0}^M \frac{\tau_0^k}{k!} \frac{\partial^k q_i}{\partial \tau^k} = -\kappa_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}, \\ \sum_{k=0}^K \frac{\tau_q^k}{k!} \frac{\partial^k J_i^{(q)}}{\partial \tau^k} &= -\sum_{r=1}^N D_{ij}^{(q)} g^{(r)} \frac{\partial \eta^{(r)}}{\partial x_j} + \Lambda_{ijkl}^{(q)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + M_{ij}^{(q)} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \quad (q = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Используемая здесь модель учитывает конечную скорость распространения диффузионных возмущений, что обусловлено релаксацией тепловых и диффузионных потоков [12]. Случай $K, M = 0$ соответствует классической модели тепломассопереноса с бесконечной скоростью распространения тепловых и диффузионных возмущений, $K, M = 0$ – модели Максвелла-Каттанео-Лыкова.

Все величины в (1.1), (1.2) являются безразмерными. Для них приняты следующие обозначения

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{x_i^*}{l}, \quad u_i = \frac{u_i^*}{l}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_0}, \quad \tau = \frac{Ct}{l}, \quad C_{ijkl} = \frac{C_{ijkl}^*}{C_{1111}}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}^*}{\rho}, \\ \alpha_{ij}^{(q)} &= \frac{\alpha_{ij}^{*(q)}}{C_{1111}}, \quad b_{ij} = \frac{b_{ij}^* T_0}{C_{1111}}, \quad \kappa_{ij} = \frac{\kappa_{ij}^*}{\rho c_0 CL}, \quad B_{ij} = \frac{b_{ij}^*}{\rho c_0}, \quad \tau_t = \frac{C \tau_T}{L}, \quad \tau_q = \frac{C \tau^{(q)}}{L}, \end{aligned}$$

$$D_{ij}^{(q)} = \frac{D_{ij}^{*(q)}}{Cl}, \quad \nu^{(q)} = \rho RT_0 \frac{\ln \left[n_0^{(q)} \gamma^{(q)} \right]}{m^{(q)}}, \quad M_{ij}^{(q)} = \frac{n_0^{(q)} D_{ij}^{*(q)}}{T_0} \ln \left(n_0^{(q)} \gamma^{(q)} \right), \quad (1.3)$$

$$\Lambda_{ijkl}^{(q)} = \frac{m^{(q)} D_{ij}^{*(q)} \alpha_{kl}^{*(q)} n_0^{(q)}}{\rho RT_0 Cl}, \quad F_i = \frac{\rho l F_i^*}{C_{1111}}, \quad Y^{(q)} = \frac{l Y^{*(q)}}{C}, \quad Q^{(j)} = \frac{L Q^{*(j)}}{T_0 c_0 C},$$

где t – время; x_i^* – прямоугольные декартовы координаты; u_i^* – компоненты вектора перемещений; l – длина балки; $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$ – приращение концентрации q -ой компоненты вещества в составе $N+1$ -компонентной среды; $n^{(q)}$ и $n_0^{(q)}$ – актуальная и начальная концентрации q -го вещества; T – актуальная температура среды; T_0 – начальная температура среды; C_{ijkl}^* – компоненты тензора упругих постоянных; ρ – плотность; κ_{ij}^* – компоненты тензора теплопроводности; c_0 – удельная теплоемкость; b_{ij}^* – температурные коэффициенты, характеризующие деформации за счет нагрева; $\alpha_{ij}^{*(q)}$ – коэффициенты, характеризующие объёмные деформации за счёт диффузии; $D_{ij}^{*(q)}$ – коэффициенты диффузии; $\nu^{(q)}$ – коэффициенты, характеризующие нагрев среды за счет диффузии; R – газовая постоянная; $m^{(q)}$ – молярная масса q -го вещества; τ_T и $\tau^{(q)}$ – времена релаксации тепловых и диффузионных потоков; F_i^* , $Y^{*(q)}$ и $Q^{*(j)}$ – внешние массовые возмущения.

Соотношения (1.1), (1.2) дополняются начально-краевыми условиями, соответствующими физической постановке задачи.

Исходя из того, что балка изначально находится в невозмущенном состоянии, начальные условия полагаются нулевыми.

2. МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕРМОУПРУГОДИФФУЗИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ ТИМОШЕНКО

Для построения уравнений изгиба балки переходим к вариационной формулировке задачи (1.1), (1.2). Согласно обобщенному принципу виртуальных перемещений соотношения (1.1), (1.2) представляем в виде следующего вариационного равенства

$$\int_G \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - F_i \right) \delta u_i dG + \sum_{q=1}^N \int_G \sum_{k=0}^K \frac{\tau_q^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \left(\frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial \tau} + \frac{\partial J_i^{(q)}}{\partial x_i} - Y^{(q)} \right) \delta \eta^{(q)} dG +$$

$$+ \int_G \sum_{k=0}^M \frac{\tau_0^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + B_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \tau} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sum_{q=1}^N \nu^{(q)} \eta^{(q)} - Q^{(j)} \right) \delta \theta dG +$$

$$+ \iint_{\Pi_\sigma} (\sigma_{ij} n_j - P_i) \delta u_i dS + \sum_{q=1}^N \iint_{\Pi_j} \left(\sum_{k=0}^K \frac{\tau_q^k}{k!} \frac{\partial^k J_i^{(q)}}{\partial \tau^k} - I_i^{(q)} \right) n_i \delta \eta^{(q)} dS +$$

$$+ \iint_{\Pi_q} \left(\sum_{k=0}^M \frac{\tau_0^k}{k!} \frac{\partial^k q_i}{\partial \tau^k} - Q_i \right) n_i \delta \theta dS = 0. \quad (2.1)$$

Здесь P_i , Q_i , $I_i^{(q)}$ – внешние поверхностные возмущения (далее полагаются нулевыми), n_j – компоненты вектора нормали к поверхности балки, δu_i , $\delta \theta$, $\delta \eta^{(q)}$ – виртуальные перемещения, приращения температуры и концентраций.

Далее полагаем, что:

– поперечные прогибы считаются малыми. Сечения, перпендикулярные к оси балки до деформации, остаются плоскими и после деформации (гипотеза плоских сечений);

– деформации в поперечном направлении отсутствуют.

В этом случае искомые величины можно представить в виде (балка Тимошенко)

$$u_1(x_1, x_2, \tau) = u(x_1, \tau) - x_2 \chi(x_1, \tau), \quad u_2(x_1, x_2, \tau) = v(x_1, \tau),$$

$$\theta(x_1, x_2, \tau) = \varphi(x_1, \tau) + x_2 \vartheta(x_1, \tau), \quad \eta^{(q)}(x_1, x_2, \tau) = N_q(x_1, \tau) + x_2 H_q(x_1, \tau).$$

Вычисляя компоненты тензора напряжений и векторов теплового и диффузионного потоков по формулам (1.2) и подставляя результат в равенство (2.1), приходим к модели поперечных колебаний балки Тимошенко с учетом тепломассопереноса

$$\ddot{v} - C_{66} k^2 (v'' - \chi') - \frac{q}{F} = 0,$$

$$\ddot{\chi} - \chi'' - \frac{F}{J_3} C_{66} k^2 (v' - \chi) - b_1 \vartheta' - \sum_{q=1}^N \alpha_1^{(q)} H_q' - \frac{m}{J_3} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^M \frac{\tau_0^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \left(\dot{\vartheta} - B_1 \dot{v}'' + \sum_{q=1}^N v^{(q)} \dot{H}_q \right) - \kappa_1 \vartheta'' - \frac{q^{(Q)}}{J_3} = 0, \quad (2.2)$$

$$\sum_{k=0}^K \frac{\tau_q^k}{k!} \frac{\partial^k \dot{H}_q}{\partial \tau^k} - \sum_{r=1}^N D_1^{(qr)} H_r'' - \Lambda_{11}^{(q)} \chi''' + M_1^{(q)} \vartheta'' - \frac{z^{(q)}}{J_3} = 0,$$

где F – площадь сечения балки, J_3 – момент инерции балки относительно оси Ox_3 , m – распределённый погонный момент, q – распределённая погонная поперечная нагрузка (рис.1), $q^{(Q)}$, $z^{(q)}$ – линейные плотности объемных источников теплопереноса и массопереноса, $k = \sqrt{5/6}$ – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению балки.

Для физических характеристик среды введены следующие обозначения

$$C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\alpha\beta\beta}, \quad C_{44} = C_{2323}, \quad C_{55} = C_{1313}, \quad C_{66} = C_{1212},$$

$$b_\alpha = b_{\alpha\alpha}, \quad B_\alpha = B_{\alpha\alpha}, \quad \kappa_\alpha = \kappa_{\alpha\alpha}, \quad D_\alpha^{(q)} = D_{\alpha\alpha}^{(q)}, \quad D_\alpha^{(qr)} = D_\alpha^{(r)} g^{(qr)},$$

$$\alpha_\alpha^{(q)} = \alpha_{\alpha\alpha}^{(q)}, \quad \Lambda_{\alpha\beta}^{(q)} = \Lambda_{\alpha\alpha\beta\beta}^{(q)}, \quad M_\alpha^{(q)} = M_{\alpha\alpha}^{(q)}.$$

Уравнения (2.2) дополняются краевыми условиями, которые также получаются из вариационного равенства (2.1) и в случае шарнирного опирания балки имеют вид

$$\left(\chi' + b_1 \vartheta + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H_j \right) \Big|_{x_1=0} = 0, \quad \left(\chi' + b_1 \vartheta + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H_j \right) \Big|_{x_1=l} = 0, \quad (2.3)$$

$$v|_{x_1=0} = 0, \quad v|_{x_1=l} = 0, \quad \vartheta|_{x_1=0} = 0, \quad \vartheta|_{x_1=l} = 0, \quad H_q|_{x_1=0} = 0, \quad H_q|_{x_1=l} = 0.$$

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решения задачи (1), (2) ищется в интегральной форме

$$\begin{pmatrix} v(x, \tau) \\ \chi(x, \tau) \\ \vartheta(x, \tau) \\ H_q(x, \tau) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{N+3} \int_0^\tau \int_0^l \begin{pmatrix} G_{1k}(x, \xi, \tau-t) \\ G_{2k}(x, \xi, \tau-t) \\ G_{3k}(x, \xi, \tau-t) \\ G_{q+3,k}(x, \xi, \tau-t) \end{pmatrix} F_k(\xi, t) d\xi dt. \quad (3.1)$$

Здесь $x = x_1$, $F_1(x, \tau) = q/F$, $F_2(x, \tau) = m/J_3$, $F_3(x, \tau) = q^{(Q)}/J_3$ и $F_{q+3}(x, \tau) = z^{(q)}/J_3$ – распределенные по длине балки силовые факторы, входящие в уравнения (2.2), G_{mk} – поверхностные функции Грина, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \ddot{G}_{1k} - C_{66} k_T^2 (G_{1k}'' - G_{2k}') - \delta_{1k} \delta(x-\xi) \delta(\tau) &= 0, \\ \ddot{G}_{2k} - G_{2k}'' - a C_{66} k_T^2 (G_{1k}' - G_{2k}) - b_1 G_{3k}' - \sum_{q=1}^N \alpha_1^{(q)} G_{q+3,k}' + \\ + \delta_{2k} \delta(x-\xi) \delta(\tau) &= 0, \\ \sum_{k=0}^M \frac{\tau_0^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \left(\dot{G}_{3k} - B_1 \dot{G}_{2k} + \sum_{q=1}^N v^{(q)} G_{q+3,k} \right) - \kappa_1 G_{2k}'' - \\ - \delta_{3k} \delta(x-\xi) \delta(\tau) &= 0, \\ \sum_{k=0}^K \frac{\tau_q^k}{k!} \frac{\partial^k \dot{G}_{q+3,k}}{\partial \tau^k} - D_1^{(q)} G_{q+2,k}'' - \Lambda_{11}^{(q)} G_{2k}''' + M_1^{(q)} G_{3k}'' - \\ - \delta_{q+3,k} \delta(x-\xi) \delta(\tau) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$G_{1k}|_{x=0} = 0, \quad G_{1k}|_{x=l} = 0, \quad G_{3k}|_{x=0} = 0, \quad G_{3k}|_{x=l} = 0,$$

$$G_{q+3,k}|_{x=0} = 0, \quad G_{q+3,k}|_{x=l} = 0.$$

$$\left(G_{2k}' + b_1 G_{3k} + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+3,k} \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad (3.3)$$

$$\left(G_{2k}' + b_1 G_{3k} + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+3,k} \right) \Big|_{x=l} = 0.$$

Решение задачи (3.2), (3.3) ищется с помощью преобразования Лапласа и разложения в ряды Фурье (индекс L обозначает трансформанту Лапласа, s – параметр преобразования Лапласа)

$$G_{mkn}^L(s) = 2 \int_0^1 G_{mkn}^L(x, s) \sin \lambda_n x dx \quad (m \neq 2),$$

$$\begin{aligned}
G_{2kn}^L(s) &= 2 \int_0^1 G_{2k}^L(x, s) \cos \lambda_n x dx, \\
G_{mk}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{mkn}^L(s) \sin \lambda_n x, \\
G_{2k}^L(x, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_{2kn}^L(s) \cos \lambda_n x \quad (\lambda_n = \pi n).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

В результате приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
k_{1n}(s) G_{1kn}^L(s) - C_{66} \lambda_n k_T^2 G_{2kn}^L(s) &= 2\delta_{1k} \sin \lambda_n \xi, \\
-a C_{66} k_T^2 \lambda_n G_{1kn}^L(s) + k_{2n}(s) G_{2kn}^L(s) - b_1 \lambda_n G_{3kn}^L(s) - \\
-\lambda_n \sum_{q=1}^N \alpha_1^{(q)} G_{q+3, kn}^L(s) &= 2\delta_{2k} \cos \lambda_n \xi, \\
B_1 \lambda_n k_0(s) G_{2kn}^L(s) + k_{3n}(s) G_{3kn}^L(s) + k_0(s) \sum_{q=1}^N \nu^{(q)} G_{q+3, kn}^L(s) &= 2\delta_{3k} \sin \lambda_n \xi, \\
-\Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n^3 G_{2kn}^L(s) - M_1^{(q)} \lambda_n^2 G_{3kn}^L(s) + k_{q+3, n}(s) G_{q+3, kn}^L(s) &= 2\delta_{q+3, k} \sin \lambda_n \xi, \\
k_{20}(s) G_{2k0}^L(s) &= \delta_{2k},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$\begin{aligned}
k_{1n}(s) &= s^2 + C_{66} k_T^2 \lambda_n^2, \quad k_{2n}(s) = s^2 + \lambda_n^2 + a C_{66} k_T^2, \\
k_{3n}(s) &= k_0(s) + \kappa_1 \lambda_n^2, \quad k_0(s) = \sum_{r=0}^M \frac{\tau_0^r s^{r+1}}{r!}, \quad k_{q+3, n}(s) = \sum_{l=0}^K \frac{\tau_q^l s^{l+1}}{l!} + D_1^{(q)} \lambda_n^2.
\end{aligned}$$

Решение системы (3.5) имеет вид

$$\begin{aligned}
G_{2kn}^L(\xi, s) &= \frac{2P_{kn}(s) \cos \lambda_n \xi}{Q_n(s)}, \quad G_{1kn}^L(s) = \frac{2\delta_{1k} \sin \lambda_n \xi + C_{66} \lambda_n k_T^2 G_{2kn}^L(s)}{k_{1n}(s)}, \\
G_{3kn}^L(s) &= \frac{2\delta_{3k} \sin \lambda_n \xi - 2k_0(s) \sin \lambda_n \xi \sum_{q=1}^N \nu^{(q)} \delta_{q+3, k} \Pi_{qn}(s) - \lambda_n k_0(s) S_{2n}(s) G_{2kn}^L(s)}{S_{1n}(s)}, \\
G_{2k0}^L(s) &= \frac{\delta_{2k}}{k_{20}(s)}, \quad G_{q+3, kn}^L(s) = \frac{2\delta_{q+3, k} \sin \lambda_n \xi + \Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n^3 G_{2kn}^L(s) + M_1^{(q)} \lambda_n^2 G_{3kn}^L(s)}{k_{q+3, n}(s)},
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где $P_{kn}(s)$, $Q_n(s)$, $S_{1n}(s)$, $S_{2n}(s)$ и $\Pi_{qn}(s)$ – многочлены от s .

Переход в пространство оригиналов осуществляется с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления.

ВЫВОДЫ

Таким образом, построена модель нестационарных колебаний шарнирно опертой ортотропной балки Тимошенко с учетом релаксации тепловых и диффузионных потоков, описывающая взаимосвязь между механическими, температурными и диффузионными полями в изгибаемой балке. Предложен алгоритм решения задачи об изгибе шарнирно опертой балки под действием

распределенной поперечной нагрузки с учетом тепломассопереноса, основанный на использовании преобразования Лапласа, разложений в тригонометрические ряды Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Швец Р.Н., Флячок В.М. *Уравнения механодиффузии анизотропных оболочек с учетом поперечных деформаций* // Математические методы и физико-механические поля. – 1984. – №20. – С.54-61.
2. Швец Р.Н., Флячок В.М. *Вариационный подход к решению динамических задач механотермодиффузии анизотропных оболочек* // Математическая физика и нелинейная механика. – 1991. – №16. – С.39-43.
3. Aouadi M., Copetti M.I.M. *Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory* // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. – 2015. – Vol.96. – No.3. – Pp.1-24.
4. Copetti M.I.M., Aouadi M. *A quasi-static contact problem in thermoviscoelastic diffusion theory* // Applied Numerical Mathematics. – 2016. – Vol.109. – Pp.157-183.
5. Aouadi M., Miranville A. *Smooth attractor for a nonlinear thermoelastic diffusion thin plate based on Gurtin-Pipkin's model* // Asymptotic Analysis. – 2015. – Vol.95. – Pp.129-160.
6. Aouadi M. *On thermoelastic diffusion thin plate theory* // Appl. Math. Mech. Engl. Ed. – 2015. – Vol.36. – No.5. – Pp.619-632.
7. Aouadi M., Miranville A. *Quasi-stability and global attractor in nonlinear thermoelastic diffusion plate with memory* // Evolution equations and control theory. – 2015. – Vol.4. – No.3. – Pp.241-263.
8. Bhattacharya D., Kanoria M. *The influence of two temperature generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell* // International Journal of Engineering and Technical Research (IJETR). – 2014. – Vol.2. – Iss.5. – Pp.151-159.
9. Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. *Моделирование механодиффузионных процессов в многокомпонентных телах с плоскими границами.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2021. – 288 с.
10. Князева А.Г. *Введение в термодинамику необратимых процессов.* – Томск: Издательство «Иван Федоров», 2014. – 172 с.
11. Келлер И.Э., Дудин И.С. *Механика сплошной среды. Законы сохранения: учеб. пособие.* – Пермь: Изд-во ПНИПУ, 2022. – 142 с.
12. Формалев В.Ф. *Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 280 с.



ПРИЛОЖЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ НЕТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ИСКУССТВЕННЫХ ИНТРАОКУЛЯРНЫХ ЛИНЗ*

Зябков П.С., Жаворонок С.И.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных проблем обеспечения работоспособности интраокулярных линз (ИОЛ) при проведении фактоэмульсификации представляется предотвращение аберраций, связанных с неоднородностью сетчатки, развивающейся в результате дистрофических процессов. В случае мультифокальных и аккомодирующих ИОЛ прогрессирующее изменение свойств сетчатки является противопоказанием к их применению. Следовательно, одной из ключевых задач является исследование деформирования ИОЛ при развитии неоднородности свойств тканей глаза, взаимодействующих с линзой.

Элементом ИОЛ, фиксирующим линзу, взаимодействующим с системой аккомодации глаза и обеспечивающим изменение кривизны линзы при фокусировке является гаптика (рис.1). Следовательно, описание деформирования ИОЛ в первом приближении подразумевает решение задачи о локальном нагружении линзы силами, передаваемыми гаптикой.

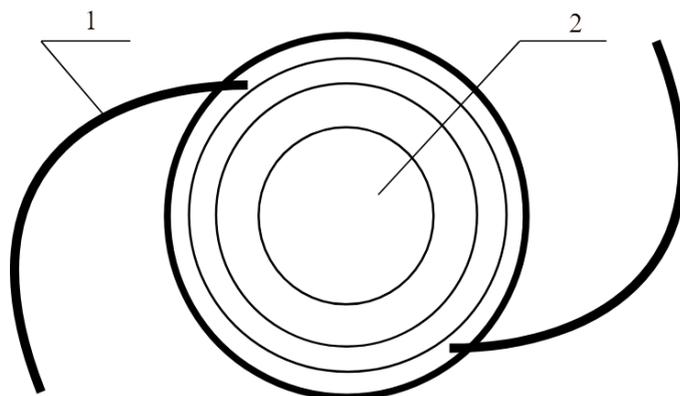


Рис.1. Схема типовой интраокулярной линзы: 1 – гаптика, 2 – линза.

Решения подобного класса, однако, немногочисленны и, как правило, представляют собой моделирование некоторых частных случаев на базе метода конечных элементов [1]. Качественное исследование проблемы сводится к аналитическим решениям задач о точечном нагружении линзы сосредоточенными силами и моментами [2,3]. Основное внимание в работах [2,3] уделено деформированию гаптики, в качестве модели ИОЛ принят изотропный

*Работа выполнена в рамках Государственного задания ИПРИМ РАН (номер гос. регистрации темы 121112200124-1).

упругий плоский диск, что, с одной стороны, позволяет построить точное решение плоской задачи теории упругости методом Г.В. Колосова – Н.И. Мухелишвили, с другой стороны – может оцениваться только как первое, весьма грубое приближение (не учтена геометрия линзы, существенно отличающаяся от плоского диска, не рассматриваются изгибные деформации).

В качестве следующего приближения может быть введена в рассмотрение модель полой оболочки существенно переменной и, вообще говоря, не малой толщины на круглом плане, лежащей на неоднородном вязкоупругом основании. Модели такого класса, способные описывать трехмерное напряженно-деформированное состояние в некоторых областях (в частности, в окрестности локальных нагрузок, передаваемых гапстикой), могут быть построены на базе одного из вариантов теории нетонких оболочек. Одним из универсальных подходов является метод построения иерархической теории оболочек [4], основанный на редукции пространственной размерности трехмерных задач механики деформируемого твердого тела, и его дальнейшее развитие [5-8]. Ниже рассмотрена постановка задачи для модели ИОЛ на базе теории оболочек [5-8].

1. ЛАГРАНЖЕВА ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА РАСШИРЕННОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК N-ГО ПОРЯДКА

Определим оболочку как некоторое тело $V \in \mathbb{R}^3$, $\partial V = S_{\pm} \oplus S_B$, где S_B – боковая поверхность оболочки, S_{\pm} – ее лицевые поверхности [5]. Модель оболочки N-го порядка определена на расслоении TS гладкого двумерного многообразия S с границей $\Gamma = \partial S$, соответствующего реперной поверхности [5]

$$TS = \bigcup_{M \in S} \{M \times d\xi^{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \mid \mathbf{r}_{\alpha} = \partial_{\alpha} \mathbf{r}\}, \quad \partial_{\alpha} \equiv \partial / \partial \xi^{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2;$$

$\xi^{\alpha} \in D_{\xi} \subseteq \mathbb{R}^2$ – координаты на S , $\forall M \in S \quad \mathbf{r}(M) = x^i(\xi^{\alpha}) \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ – радиус-вектор, \mathbf{e}_i – орты декартова базиса в \mathbb{R}^3 , $\mathbf{r}_{\alpha}(M)$ – базис расслоения TS , так что

$$\forall M' \in \bar{V} \quad \mathbf{R}(M') = \mathbf{r}(\xi^{\beta}) + \xi^3 \mathbf{n}(\xi^{\beta}),$$

$\xi^3 \in [h_-, h_+]$ – нормальная координата, $h_{\pm} = h_{\pm}(\xi^{\beta})$ задают лицевые поверхности оболочки $S_{\pm} : \mathbf{R} = \mathbf{r}(\xi^{\beta}) + h_{\pm}(\xi^{\beta}) \mathbf{n}(\xi^{\beta})$. ξ^{β} , ξ^3 определяют пространственную систему криволинейных координат, нормально связанную с поверхностью S . Кинематика оболочки определена вектором перемещения, заданном в базисе TS

$$\mathbf{u} = u^{\alpha}(M, \zeta) \mathbf{r}_{\alpha} + u_3(M, \zeta) \mathbf{n}, \quad [-1, 1] \ni \zeta = h^{-1}(\xi^3 - \bar{h}), \quad (1.1)$$

$2h = h_+ - h_-$ – толщина оболочки, $\bar{h} = (h_+ + h_-) / 2$. Пусть u_{α} , u_3 интегрируемы с квадратом на множестве значений безразмерной координаты $\zeta \in [-1, 1]$, $\mathbf{p}_{(k)}(\zeta)$, $\mathbf{p}^{(m)}(\zeta)$ – биортогональная система, образующая базис в $L^2[-1, 1]$

$$\left(\mathbf{p}_{(k)}, \mathbf{p}^{(m)} \right)_1 \equiv \int_{-1}^1 \mathbf{p}_{(k)}(\zeta) \mathbf{p}^{(m)}(\zeta) d\zeta = \delta_{(k)}^{(m)}; \quad (1.2)$$

тогда существует разложение поля перемещения \mathbf{u} (1.1) в следующем виде (1.3)

$$\forall \xi^{\alpha} \in D_{\xi}, \quad \zeta \in [-1, 1] \quad \mathbf{u}(\xi^{\alpha}, \zeta) = \mathbf{u}^{(k)}(\xi^{\alpha}) \mathbf{p}_{(k)}(\zeta) = \mathbf{u}_{(m)}(\xi^{\alpha}) \mathbf{p}^{(m)}(\zeta); \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u}^{(k)}(M, t) = \left(\mathbf{u}(M, \zeta, t), \mathbf{p}_{(k)}(\zeta) \right)_1 = u_{\alpha}^{(k)}(M, t) \mathbf{r}^{\alpha} + u_3^{(k)}(M, t) \mathbf{n}. \quad (1.4)$$

В качестве базисной системы $p_{(k)}(\zeta)$ могут быть приняты, в частности, ортогональные полиномы [4-6], кусочно-линейные финитные функции и т.д. Статика упругой оболочки описывается вариационным принципом Лагранжа [4]

$$\delta\Lambda = 0, \quad \Lambda = \int_V L_V(\mathbf{u}, \nabla \otimes \mathbf{u}) dV + \int_{\partial V} L_{\partial V}(\mathbf{u}) dS_V; \quad (1.5)$$

с учетом представления интегралов в (1.5) для оболочки в следующем виде [6,7]

$$\int_V L_V dV = \int_S h dS \int_{-1}^1 L_V \sqrt{g/a} d\zeta, \\ \int_{\partial V} L_{\partial V} dS_V = \int_S L_{S_{\pm}} \sqrt{a_{\pm}/ah_{\pm}} dS + \int_{\Gamma} L_{S_B} \sqrt{g/ah} \Big|_{\Gamma} d\zeta d\Gamma,$$

где $S_B = \Gamma \times [h_-, h_+]$ – боковая поверхность. В силу (1.4) интегралы по $\zeta \in [-1, 1]$ могут быть вычислены, тем самым осуществляется редукция пространственной размерности модели оболочки, являющейся континуальной Лагранжевой системой, определенной множеством переменных поля $\mathbf{u}^{(k)}$ на расслоении TS двумерного многообразия S и плотностями функционала Лагранжа L_S, L_{Γ} [4-6]

$$\delta\Lambda = 0, \quad \Lambda = \int_S L_S(\mathbf{u}^{(k)}, \nabla \otimes \mathbf{u}^{(k)}) dS + \int_{\Gamma} L_{\Gamma}(\mathbf{u}^{(k)}) d\Gamma, \quad (1.6)$$

$$L_S(u_{\alpha}^{(k)}, u_3^{(k)}, \dot{u}_{\alpha}^{(k)}, \dot{u}_3^{(k)}, \bar{\nabla}_{\beta} u_{\alpha}^{(k)}, \bar{\nabla}_{\beta} u_3^{(k)}) = \frac{1}{2} \rho_{(k)}^{(m)} (\dot{u}_{(m)\alpha}^{\alpha} \dot{u}_{\alpha}^{(k)} + \dot{u}_{(m)3}^3 \dot{u}_3^{(k)}) + \\ + F_{(k)}^i u_i^{(k)} + s_{(k)}^{\alpha\beta} (\bar{\nabla}_{\beta} u_{\alpha}^{(k)} + H_{\beta(m)}^{(k)} u_{\alpha}^{(m)} - b_{\beta\alpha} u_3^{(k)}) - \\ - \frac{1}{2} \left[s_{(k)}^{3\beta} (\bar{\nabla}_{\beta} u_3^{(k)} + H_{\beta(m)}^{(k)} u_3^{(m)} + b_{\gamma}^{\alpha} u_{\alpha}^{(k)}) + \right. \\ \left. + h^{-1} D_{(m)}^{(k)} (s_{(k)}^{\alpha 3} u_{\alpha}^{(m)} + s_{(k)}^{33} u_3^{(m)}) \right], \quad (1.7)$$

$$L_{\Gamma}(u_{\alpha}^{(k)}, u_3^{(k)}) = q_{B(k)}^{\alpha} u_{\alpha}^{(k)} + q_{B(k)}^{\alpha} u_{\alpha}^{(k)},$$

$$\sqrt{g/a} = 1 - \xi^3 b_{\gamma}^{\gamma} + (\xi^3)^2 \det(b_{\alpha}^{\beta}); \quad k, m \in [0, N] \cap \mathbb{Z};$$

L_S, L_{Γ} – поверхностная и контурная плотности лагранжиана теории оболочек N-го порядка; $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$ – метрический тензор и тензор кривизны S ; $\bar{\nabla}_{\beta}$ обозначает ковариантное дифференцирование на расслоении TS; $s_{ij}^{(k)}$ – обобщенные усилия; определяющие соотношения [5-7] для обобщенных усилий $s_{ij}^{(k)}$ имеют вид (1.8)

$$s_{(k)}^{ij} = h(s^{ij}, p_{(k)})_1 \Rightarrow \\ s_{(k)}^{i\beta} = \bar{C}_{(km)}^{i\beta j\delta} \bar{\nabla}_{\delta} u_j^{(m)} + \bar{C}_{(km)}^{i\beta j} u_j^{(m)}; \quad s_{(k)}^{i3} = \bar{C}_{(km)}^{i3 j\delta} \bar{\nabla}_{\delta} u_j^{(m)} + \bar{C}_{(km)}^{i3 j} u_j^{(m)}; \quad (1.8)$$

физические постоянные модели N-го порядка неоднородной оболочки определяются скалярными произведениями (1.2) [7]

$$\bar{C}_{(km)}^{i\beta\gamma} = H_{\delta(k)}^{(n)} \bar{C}_{(nm)}^{i\beta\gamma\delta} + b_{\delta}^{\gamma} \bar{C}_{(km)}^{i\beta 3\delta} + h^{-1} D_{(k)}^{(n)} \bar{C}_{(nm)}^{i\beta 3\delta}, \dots \\ \bar{C}^{i\beta j\delta} = A_{\lambda}^{\beta} A_{\mu}^{\delta} C^{i\lambda j\mu}; \quad \bar{C}^{i3 j\delta} = A_{\mu}^{\delta} C^{i3 j\mu}; \quad i, j = \overline{1, 3}; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots = \overline{1, 2}; \quad (1.9) \\ A_{\alpha}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} - \xi^3 b_{\alpha}^{\beta}; \quad A_{\alpha}^{\beta} = \sqrt{g} \left[(1 - 2\xi^3 b_{\gamma}^{\gamma}) \delta_{\alpha}^{\beta} - \xi^3 b_{\alpha}^{\beta} \right],$$

моменты k -го порядка главного вектора внешних сил на S и Γ_{σ} заданы (1.10)

$$\begin{aligned} F_{(k)}^i &= h\left(\sqrt{g/a}F^i, p_{(k)}\right)_1 + q_{+p_{(k)}}(1) - q_{-p_{(k)}}(-1); \\ q_{B(k)}^i &= h\left(\sqrt{g/a}q_B^i, p_{(k)}\right)_1; \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь и далее использованы обозначения линейных операторов на $\{p_{(k)}\}_{k=0, \bar{N}}$

$$\begin{aligned} G_{(km)} &= (p_{(k)}, p_{(m)})_1; \quad H_{\alpha(m)}^{(k)} = -\left[\partial_\alpha \bar{h} \delta_{(m)}^{(n)} - \partial_\alpha h Z_{(m)}^{(n)}\right] D_{(n)}^{(k)}; \\ Z_{(m)}^{(n)} &= (\zeta p_{(m)}, p_{(n)})_1; \quad D_{(k)}^{(m)} = (\partial_\zeta p_{(k)}, p_{(m)})_1. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Вариационная постановка задачи (1.6)-(1.10) обеспечивает приближенное удовлетворение краевым условиям на лицевых поверхностях S_\pm по мере сходимости приближенного решения. Точное удовлетворение условиям на S_\pm при любом N обеспечивается при переходе к расширенной теории оболочек [7,8]. Краевые условия, перенесенные с лицевых поверхностей S_\pm на реперную поверхность S и записанные относительно $u_\alpha^{(k)}$, $u_3^{(k)}$ и их ковариантных производных, порождают уравнения связей либо в виде $f_\pm^i(u_i^{(k)}, \bar{\nabla} u_i^{(k)}) = 0$ [7]

$$\begin{aligned} f_\pm^i &\equiv C_{(k)\pm}^{ij\delta} \left(\bar{\nabla}_\delta u_j^{(k)} + H_{\delta(m)}^{(k)} u_j^{(m)} \right) + C_{(k)\pm}^{ij3} D_{(m)}^{(k)} u_j^{(m)} - C_{(k)\pm}^{i\gamma\delta} b_{\gamma\delta} u_3^{(k)} + \\ &+ C_{(k)\pm}^{i3\delta} b_\delta u_\gamma^{(k)} \pm \bar{q}_\pm^i = 0; \quad C_{(k)\pm}^{ij\delta} = \left(\bar{C}_{(km)}^{i3j\delta} - h_\pm^\pm \bar{C}_{(km)}^{i\beta j\delta} \right) p_\pm^{(m)}, \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

либо в записи относительно компонентов тензора обобщенных усилий $s_{(k)}^{i3}$ [8]

$$\left[s_{(k)}^{i3} - h_\pm^\pm s_{(k)}^{i\beta} \right] p_\pm^{(k)} = \bar{q}_\pm^i; \quad \mathbf{q}^\pm = \left(\sqrt{a_\pm / av_\pm} \right)^{-1} (q_\pm^\alpha \mathbf{r}_\alpha + q_\pm^3 \mathbf{n}). \quad (1.13)$$

Уравнения равновесия оболочки являются обобщенными уравнениями Лагранжа II рода (1.14) системы с лагранжианом (1.7) и связями (1.12) [7,8]

$$\bar{\nabla}_\beta \frac{\partial \tilde{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_i^{(k)}} - \frac{\partial \tilde{L}_S}{\partial u_i^{(k)}} = 0, \quad \left[v_\beta \frac{\partial \tilde{L}_S}{\partial \bar{\nabla}_\beta u_i^{(k)}} - \frac{\partial L_\Gamma}{\partial u_i^{(k)}} \right] \delta u_i^{(k)} \Big|_\Gamma = 0; \quad (1.14)$$

$\tilde{L}_S = L_S + \lambda_i^\pm f_\pm^i$ – расширенный лагранжиан системы, λ_j^\pm – множители Лагранжа.

Уравнения равновесия оболочки (1.14) имеют следующий общий вид (1.15) [7,8]

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_\beta \tilde{s}_{(k)}^{\alpha\beta} - H_{\beta(k)}^{(m)} \tilde{s}_{(m)}^{\alpha\beta} - b_\beta^{\alpha\tilde{3}\beta} \tilde{s}_{(k)}^{\alpha\beta} - h^{-1} D_{(k)}^{(m)} \tilde{s}_{(m)}^{\alpha 3} + F_{(k)}^\alpha &= 0; \\ \bar{\nabla}_\beta \tilde{s}_{(k)}^{3\beta} - H_{\beta(k)}^{(m)} \tilde{s}_{(m)}^{3\beta} + b_{\alpha\beta} \tilde{s}_{(k)}^{\alpha\beta} - h^{-1} D_{(k)}^{(m)} \tilde{s}_{(m)}^{33} + F_{(k)}^3 &= 0; \end{aligned} \quad (1.15)$$

$\tilde{s}_{(k)}^{i\beta} = s_{(k)}^{i\beta} + \lambda_j^+ C_{(k)+}^{ji\beta} + \lambda_j^- C_{(k)-}^{ji\beta}$, $\tilde{s}_{(k)}^{i3} = s_{(k)}^{i3} + \lambda_j^+ C_{(k)+}^{ji3} + \lambda_j^- C_{(k)-}^{ji3}$ – обобщенные усилия, учитывающие эффект связей (1.12), следующих из краевых условий на S_\pm .

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ИНТРАОКУЛЯРНОЙ ЛИНЗЫ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Пусть моделью ИОЛ (рис.1) в первом приближении является нетонкая полая оболочка переменной толщины на круглом плане, т.е. $S: \xi^3 = 0$ – плоскость, так что $b_{\alpha\beta} \equiv 0$. Оболочка отнесена к полярной системе координат:

$\xi^1 = r$, $\xi^2 = \theta$, $D_\xi = [0, R] \times [0, 2\pi)$, следовательно, $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = r^2$.

Область $V \in \mathbb{R}^3$, занимаемая линзой, ограничена лицевыми поверхностями вращения $S_\pm : \xi^3 = h_\pm(r)$ и цилиндрической боковой поверхностью $S_B = \{\Gamma : r = R\} \times [h_-, h_+]$. Таким образом, по сравнению с моделью плоской пластины [2,3] в предлагаемом варианте постановки задачи учитывается близкая к реальной геометрия линзы. Материал оболочки примем однородным изотропным аналогично [2,3]; с учетом $b_{\alpha\beta} \equiv 0$ физические константы (1.9) теории N-го порядка однородной изотропной оболочки записываются следующим образом

$$C_{(km)}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} a^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta} + \frac{1}{2} (a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} + a^{\alpha\delta} a^{\beta\gamma}) \right] G_{(km)}; \quad C_{(km)}^{\alpha 3\beta 3} = \frac{E}{2+2\nu} G_{(km)};$$

$$C_{(km)}^{\alpha\beta 33} = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} G_{(km)}; \quad C_{(km)}^{3333} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} G_{(km)}.$$

Так как $b_{\alpha\beta} \equiv 0$, $A_{\alpha\cdot}^\beta = \delta_{\alpha\cdot}^\beta$, тензоры обобщенных сил симметричны: $\tilde{s}_{(k)}^{ij} = \tilde{s}_{(k)}^{ji} = \tilde{\sigma}_{(k)}^{ij}$, где $\sigma_{(k)}^{ij}$ – момент k -го порядка компонентов тензора напряжения

$$\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[a^{\alpha\beta} (\bar{\nabla}_\gamma u_{(k)}^\gamma + H_{(km)}^\gamma u_{(k)}^\gamma) + h^{-1} D_{(mk)} u_3^{(m)} \right] +$$

$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\bar{\nabla}_\gamma (a^{\beta\gamma} u_{(k)}^\alpha + a^{\alpha\gamma} u_{(k)}^\beta) + H_{(km)}^\alpha u_{(k)}^{\beta(m)} + H_{(km)}^\beta u_{(k)}^{\alpha(m)} \right]; \quad (2.1)$$

$$\sigma_{(k)}^{\alpha 3} = \frac{E}{1+\nu} \left(a^{\alpha\beta} \bar{\nabla}_\beta u_{3(k)} + H_{(km)}^\alpha u_3^{(m)} + h^{-1} D_{(mk)} u_{(k)}^{\alpha(m)} \right); \quad (2.2)$$

$$\sigma_{(k)}^{33} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[\nu (\bar{\nabla}_\alpha u_{(k)}^\alpha + H_{(km)}^\alpha u_{(k)}^\alpha) + (1-\nu) h^{-1} D_{(mk)} u_3^{(m)} \right], \quad (2.3)$$

где с учетом (1.11) $H_{(km)}^\gamma = a^{\beta\gamma} G_{(mn)} H_{\beta(k)\cdot}^{(n)}$, и т.п.

Рассмотрим далее осесимметричное деформирование линзы, т.е. $F_{\theta(k)} \equiv 0$, $\bar{q}_{\theta(k)} \equiv 0$, $u_0^{(k)} \equiv 0$, $\sigma_{r\theta(k)} \equiv 0$, $\sigma_{z\theta(k)} \equiv 0$, где введены физические компоненты

$$u_r^{(k)} = u_1^{(k)}, \quad u_\theta^{(k)} = r^{-1} u_2^{(k)}, \quad \tilde{\sigma}_{rr(k)} = \tilde{\sigma}_{(k)}^{11}, \quad \tilde{\sigma}_{rz(k)} = \tilde{\sigma}_{(k)}^{13}, \quad \tilde{\sigma}_{\theta\theta(k)} = r^2 \tilde{\sigma}_{(k)}^{22}.$$

Уравнения статики (1.15) в координатной записи имеют вид

$$\frac{d}{dr} \tilde{\sigma}_{rr(k)} + r^{-1} \tilde{\sigma}_{rr(k)} + r^{-1} \tilde{\sigma}_{\theta\theta(k)} - H_{r(k)\cdot}^{(m)} \tilde{\sigma}_{rr(m)} - h^{-1} D_{(k\cdot)}^{(m)} \tilde{\sigma}_{rz(m)} + F_{r(k)} = 0; \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dr} \tilde{\sigma}_{zr(k)} + r^{-1} \tilde{\sigma}_{zr(k)} - H_{r(k)\cdot}^{(m)} \tilde{\sigma}_{zr(m)} - h^{-1} D_{(k\cdot)}^{(m)} \tilde{\sigma}_{zz(m)} + F_{z(k)} = 0; \quad (2.5)$$

$$H_{r(k)\cdot}^{(m)} = -D_{(k\cdot)}^{(n)} \left[h^{-1} \frac{d}{dr} \bar{h} \delta_{(k\cdot)}^{(m)} + \frac{d}{dr} (\ln h) Z_{(k\cdot)}^{(m)} \right].$$

При отсутствии массовых внешних сил компоненты векторов $F_{r(k)}$, $F_{z(k)}$ для оболочки, взаимодействующей по лицевой поверхности S_- с упруго деформируемым основанием Винклера типа, при действии заданного давления $p_+(r)$ на лицевой поверхности S_+ могут быть представлены следующим образом

$$F_{r(k)} \equiv 0 \quad \forall k \in [0, N] \cap \mathbb{Z};$$

$$F_{z^{(k)}}(r) = -\sqrt{1 + \left(r^{-1} \frac{d}{dr} h_+\right)} p_+(r) p_{(k)}(1) + \sqrt{1 + \left(r^{-1} \frac{d}{dr} h_-\right)} p_-(r) p_{(k)}(-1); \quad (2.6)$$

$$p_-(r) = \kappa(r) u_z|_{S_-} = -\kappa(r) u_z^{(k)} p_{(k)}(-1),$$

$\kappa(r)$ – коэффициент постели по Винклеру. В частном случае базиса $p_{(k)}(\zeta)$, образованного полиномами Лежандра, выражение (2.6) принимает вид (2.7)

$$F_{z^{(k)}}(r) = -\sqrt{1 + \left(r^{-1} \frac{d}{dr} h_+\right)^2} p_+(r) - \kappa(r) \sqrt{1 + \left(r^{-1} \frac{d}{dr} h_-\right)^2} \sum_{m=0}^N u_z^{(m)}(r) p_{(m)}(-1) p_{(k)}(-1). \quad (2.7)$$

Определяющие уравнения (2.1)-(2.3) в физических компонентах имеют вид

$$\sigma_{rr^{(k)}} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(\frac{du_{r^{(k)}}}{dr} + H_{r^{(km)}} u_r^{(m)} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{u_{r^{(k)}}}{r} + \frac{1}{h} D_{(mk)} u_z^{(m)} \right) \right];$$

$$\sigma_{\theta\theta^{(k)}} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{du_{r^{(k)}}}{dr} + H_{r^{(km)}} u_r^{(m)} + \frac{1}{h} D_{(mk)} u_z^{(m)} \right) + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{1}{r} u_{r^{(k)}} \right]; \quad (2.8)$$

$$\sigma_{rz^{(k)}} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{du_{z^{(k)}}}{dr} + H_{r^{(km)}} u_z^{(m)} + \frac{1}{h} D_{(mk)} u_r^{(k)} \right);$$

$$\sigma_{zz^{(k)}} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[\nu \left(\frac{du_{r^{(k)}}}{dr} + \frac{u_{r^{(k)}}}{r} + H_{r^{(km)}} u_r^{(m)} \right) + \frac{1-\nu}{h} D_{(mk)} u_z^{(m)} \right].$$

Пусть на лицевых поверхностях S_{\pm} поставлены следующие условия

$$\left(\sigma_{rz} - \frac{d}{dr} h_{\pm} \sigma_{rr} \right) \Big|_{\zeta=\pm 1} = 0, \quad (2.9)$$

что соответствует нулевой касательной внешней силе на верхней поверхности S_+ : $\zeta = 1$ и контакту без трения с основанием на нижней поверхности S_- : $\zeta = -1$;

$$\left(\sigma_{zz} - \frac{d}{dr} h_+ \sigma_{rz} \right) \Big|_{\zeta=1} = -p_+, \quad (2.10)$$

$$\left(\sigma_{zz} - \frac{d}{dr} h_- \sigma_{rz} \right) \Big|_{\zeta=-1} = -\kappa(r) u_z \Big|_{\zeta=-1}, \quad (2.11)$$

что, в свою очередь, соответствует действию давления $p_+(r)$ на верхнюю поверхность S_+ и контакту нижней поверхности S_- с упругим основанием.

Уравнения связей, следующие из краевых условий (2.9) на лицевых поверхностях S_{\pm} , с учетом (2.8) запишутся следующим образом

$$\frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{du_z^{(k)}}{dr} + H_{r^{(km)}} u_z^{(m)} + \frac{1}{h} D_{(mk)} u_r^{(m)} - \frac{dh_+}{dr} \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(\frac{du_r^{(k)}}{dr} + H_{r^{(km)}} u_r^{(m)} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{u_r^{(k)}}{r} + \frac{1}{h} D_{(mk)} u_z^{(m)} \right) \right] \right\} p_{(k)}(1) = 0; \quad (2.12)$$

$$\frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{du_z^{(k)}}{dr} + H_{r(m)}^{(k)} u_z^{(m)} + \frac{1}{h} D_{(m)}^{(k)} u_r^{(m)} - \frac{dh_-}{dr} \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(\frac{du_r^{(k)}}{dr} + H_{r(m)}^{(k)} u_r^{(m)} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{u_r^{(k)}}{r} + \frac{1}{h} D_{(m)}^{(k)} u_z^{(m)} \right) \right] \right\} p_{(k)}(-1) = 0.$$

Уравнения связей, соответствующие условиям (2.10), (2.11), имеют вид

$$-\frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{du_r^{(k)}}{dr} + \frac{u_r^{(k)}}{r} + H_{r(m)}^{(k)} u_r^{(m)} \right) + \frac{1-\nu}{h(1-2\nu)} D_{(m)}^{(k)} u_z^{(m)} - \frac{dh_+}{dr} \left(\frac{du_z^{(k)}}{dr} + H_{r(m)}^{(k)} u_z^{(m)} + \frac{1}{h} D_{(m)}^{(k)} u_r^{(m)} \right) \right] p_{(k)}(1) = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} h_+ \right)^2} p_+(r); \quad (2.13)$$

$$-\frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{du_r^{(k)}}{dr} + \frac{u_r^{(k)}}{r} + H_{r(m)}^{(k)} u_r^{(m)} \right) + \frac{1-\nu}{h(1-2\nu)} D_{(m)}^{(k)} u_z^{(m)} - \frac{dh_+}{dr} \left(\frac{du_z^{(k)}}{dr} + H_{r(m)}^{(k)} u_z^{(m)} + \frac{1}{h} D_{(m)}^{(k)} u_r^{(m)} \right) \right] p_{(k)}(1) = \kappa(r) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} h_+ \right)^2} \sum_{k=0}^N u_z^{(k)} p_{(k)}(-1). \quad (2.14)$$

Определяющие уравнения для обобщенных сил, учитывающих эффект связей, содержат множители Лагранжа λ_α^\pm , λ_3^\pm

$$\tilde{\sigma}_{rr(k)} = \sigma_{rr(k)} - \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \left(\lambda_z^+ p_{(k)}(1) + \lambda_z^- p_{(k)}(-1) \right) - \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(\lambda_r^+ \frac{dh_+}{dr} p_{(k)}(1) + \lambda_r^- \frac{dh_-}{dr} p_{(k)}(-1) \right) \right]; \quad (2.15)$$

$$\tilde{\sigma}_{\theta\theta(k)} = \sigma_{\theta\theta(k)} - \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \left(\lambda_z^+ p_{(k)}(1) + \lambda_z^- p_{(k)}(-1) \right) - \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(\lambda_r^+ \frac{dh_+}{dr} p_{(k)}(1) + \lambda_r^- \frac{dh_-}{dr} p_{(k)}(-1) \right) \right]; \quad (2.16)$$

$$\tilde{\sigma}_{rz(k)} = \sigma_{rz(k)} + \frac{E}{1+\nu} \left[\left(\lambda_r^+ p_{(k)}(1) + \lambda_r^- p_{(k)}(-1) \right) - \left(\lambda_z^+ \frac{dh_+}{dr} p_{(k)}(1) + \lambda_z^- \frac{dh_-}{dr} p_{(k)}(-1) \right) \right]; \quad (2.17)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz(k)} = \sigma_{zz(k)} - \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(\lambda_z^+ p_{(k)}(1) + \lambda_z^- p_{(k)}(-1) \right) - \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\lambda_r^+ \frac{dh_+}{dr} p_{(k)}(1) + \lambda_r^- \frac{dh_-}{dr} p_{(k)}(1) \right) - \kappa(r) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} h_+ \right)^2} p_{(k)}(-1) \right]. \quad (2.18)$$

Задачу (2.4)-(2.15) замыкают однородные статические краевые условия

$$\tilde{\sigma}_{rr(k)} \Big|_{r=R} = 0; \quad \tilde{\sigma}_{rz(k)} \Big|_{r=R} = 0, \quad (2.19)$$

соответствующие свободной от силового воздействия боковой поверхности S_B .

Постановка задачи (2.4)-(2.15), (2.19) обеспечивает приближенное решение краевой задачи, точно удовлетворяющее краевым условиям на лицевых поверхностях S_{\pm} .

Учет определяющих уравнений (2.8) и (2.15) приводит систему (2.4), (2.5), (2.12)-(2.14) к $2(N+1)$ уравнению статики и 4 уравнениям связей, содержащим производные второго порядка по r . Альтернативным вариантом является приведение задачи к уравнениям статики, разрешенным относительно производных первого порядка по r аналогично [9,10], и уравнениям связей, также содержащим производные по r не выше первого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ameku K.A., Pedrigi R.M. *A biomechanical model for evaluating the performance of accommodative intraocular lenses* // Journal of Biomechanics. – 2022. – Vol.136. – 111054.
2. Даль Ю.М., Морщанина Д.А. *О напряженно-деформированном состоянии интраокулярной линзы (ИОЛ)* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2008. – №4. – С.118-124.
3. Морщанина Д.А. *Математические модели интраокулярных линз* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2009. – №4. – С.166-171.
4. Амосов А.А. *Приближенная трехмерная теория нетонких упругих оболочек и плит* / Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. – Ташкент: Ташкентский политехнический ин-т им. Р.А. Бериуни, 1989. – 343 с.
5. Жаворонок С.И. *Вариационные уравнения трехмерной теории анизотропных оболочек* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – №4-5. – С.2154-2156.
6. Жаворонок С.И. *Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода трехмерной теории анизотропных оболочек* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №1. – С.116-132.
7. Zhavoronok S.I. *On the variational formulation of the extended thick anisotropic shells theory of I.N. Vekua type* // Procedia Engineering. – 2015. – Vol.111. – Pp.888-895.
8. Жаворонок С.И. *Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода расширенной трехмерной теории N-го порядка анизотропных оболочек* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №3. – С.370-381.
9. Амосов А.А., Жаворонок С.И. *К проблеме редукции плоской задачи теории упругости к последовательности одномерных краевых задач* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1997. – Т.3. – №1. – С.69-80.
10. Амосов А.А., Князев А.А., Жаворонок С.И. *О решении некоторых краевых задач о плоском напряженном состоянии криволинейной трапеции* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1999. – Т.5. – №1. – С.60-72.



ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ЭФФЕКТА БРЮСТЕРА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРИПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ В ГАЗАХ И ТОНКИХ ПЛЕНОК НА ПОВЕРХНОСТЯХ

Ильин П.В., Ломакин М.В.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

Эффект Брюстера давно известен и используется в научных и бытовых целях. Однако, явление имеет ряд следствий, которые можно использовать для изучения процессов в газовых средах, приповерхностных слоях, тонких пленках и т.д. Об этом явлении много сказано и написано, поэтому углубляться в эту тему нет смысла, но для ясности отметим несколько ключевых определений.

1. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

По своей природе, свет представляет собой суммарное электромагнитное излучение множества атомов. Они излучают световые волны независимо друг от друга, поэтому световая волна, излучаемая телом в целом, характеризуется всевозможными равновероятными ориентациями колебаний светового вектора \mathbf{E} . Свет со всевозможными равновероятными ориентациями вектора \mathbf{E} (и, следовательно, \mathbf{H}) называется естественным (рис.1а).

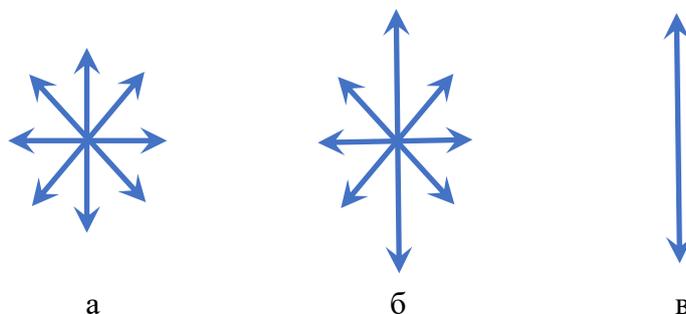


Рис.1. Направления колебаний вектора \mathbf{E} в световом луче.

Если появляется преимущественное направление колебаний вектора \mathbf{E} (рис.1б), то имеем дело с частично поляризованным светом. Свет, в котором вектор \mathbf{E} (и, следовательно, \mathbf{H}) колеблется только в одном направлении, перпендикулярном лучу, называется плоскополяризованным (рис.1в) [1].

2. ЗАКОН БРЮСТЕРА

Закон оптики, выражает связь показателей преломления двух диэлектриков с таким углом падения света, при котором свет, отражённый от границы раздела диэлектриков, будет полностью поляризованным в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. [1]

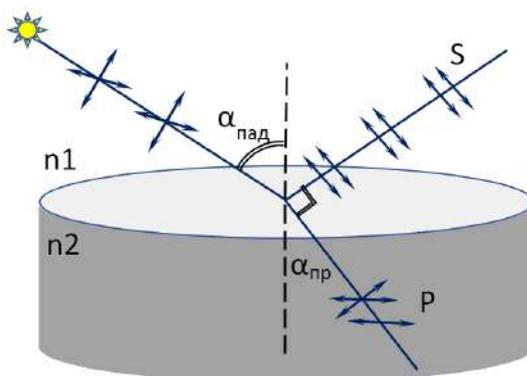


Рис.2. Направления поляризации света по закону Брюстера.

$$\alpha_b = \operatorname{arctg}\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \quad (1)$$

Формула (1) выражает величину угла Брюстера [1].

Приняты два типа плоской поляризации: *s-типа* – перпендикулярно плоскости падения, *p-типа* – параллельно плоскости падения. Степень поляризации (степень выделения световых волн с определенной ориентацией электрического (и магнитного) вектора) зависит от угла падения лучей и показателя преломления.

$$P_n = \frac{R_p - R_s}{R_p + R_s}; \quad (2)$$

$$R_p = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha_{\text{пр}} - \alpha_{\text{пад}})}{\operatorname{tg}^2(\alpha_{\text{пр}} + \alpha_{\text{пад}})}; \quad R_s = \frac{\sin^2(\alpha_{\text{пр}} - \alpha_{\text{пад}})}{\sin^2(\alpha_{\text{пр}} + \alpha_{\text{пад}})}.$$

Здесь P_n – степень поляризации, R_p – интенсивность преломленной волны, R_s – интенсивность отраженной волны, при выполнении условий закона Брюстера [2].

Стоит отметить важное следствие: если использовать излучение, уже имеющее поляризацию, можно добиться полного отсутствия отраженной волны и, таким образом, получить эффект полного внутреннего преломления. Такое излучение можно получить, используя известные в оптике приемы, такие как отражение от диэлектрика (опять же, по закону Брюстера), использовать поляризатор, использовать лазерный луч от полупроводникового лазера.

Из формулы (1) следует, что изменение коэффициентов n_1 и n_2 приводит к изменению величины угла Брюстера и, соответственно интенсивностей излучений R_p и R_s из (2) [2]. Здесь можно найти первое практическое применение закона Брюстера – измерение оптической плотности (как следствие изменения удельной массы). Допустим, коэффициент n_1 (рис.1), интересующая нас переменная, соответствует газовой среде, а n_2 – минеральное стекло, тогда есть возможность контролировать ряд параметров, влияющих на n_1 . Так для воздуха (в классическом химическом составе) существует соотношение

$$n_b^{P,T} = 1 + 0,079 \times \left(\frac{P}{T}\right). \quad (3)$$

Соотношение (3) выражает зависимость коэффициента преломления воздуха от давления и температуры. Существует множество формул и законов, выражающих как эту зависимость, так и множество других для газов, жидкостей и многокомпонентных смесей, в рамках данной статьи рассматривается только один пример.

Графическое изображение зависимости (1) в диапазоне давлений от 0 до 10 МПа и постоянной температуре изображено на рис.3.

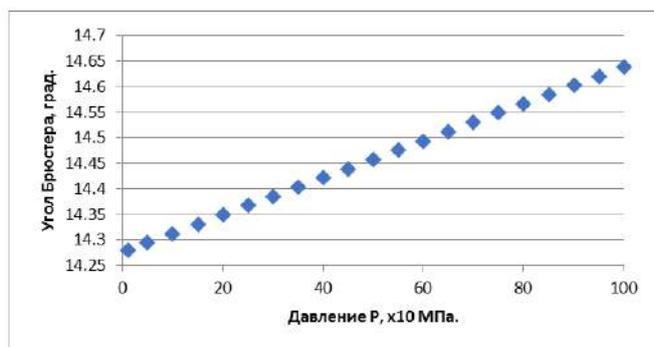


Рис.3. Зависимость величины угла Брюстера от давления.

Перечисленные соображения удалось пронаблюдать в экспериментах на устройстве, созданном инженерами НПО «Вымпел». Общая схема устройства приведена на рис.4.

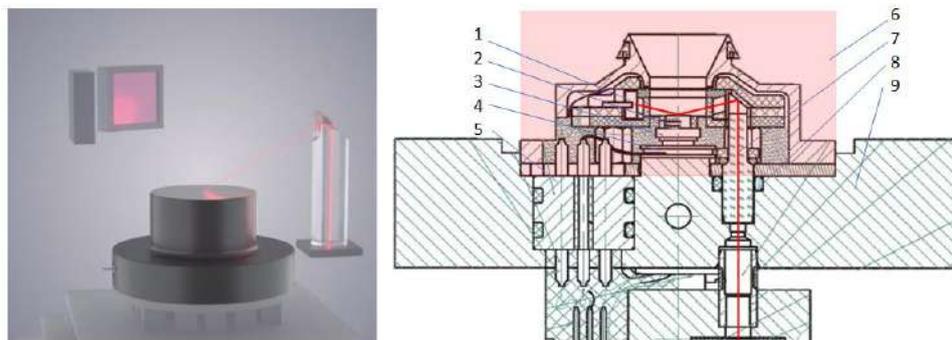


Рис.4. Схема измерительного преобразователя НПО «Вымпел». Обозначения: 1 – фотодиод, 2 – термометр сопротивления, 3 – монокристаллический кремний (зеркало), 4 – термоэлектрический модуль Пельтье, 5 – гермоввод, 6 – зона повышенного давления, 7 – луч лазера, 8 – стеклянный световод, 9 – массивный корпус.

На массивный корпус установлен термоэлектрический модуль Пельтье, позволяющий охлаждать и нагревать кремниевое зеркало. Обратная связь по температуре обеспечивается термометром сопротивления. Излучение от полупроводникового лазерного диода собирается в пучок и через систему световодов и призмы направляется на зеркало под углом Брюстера. Интенсивность отраженного луча контролируется фотодиодом.

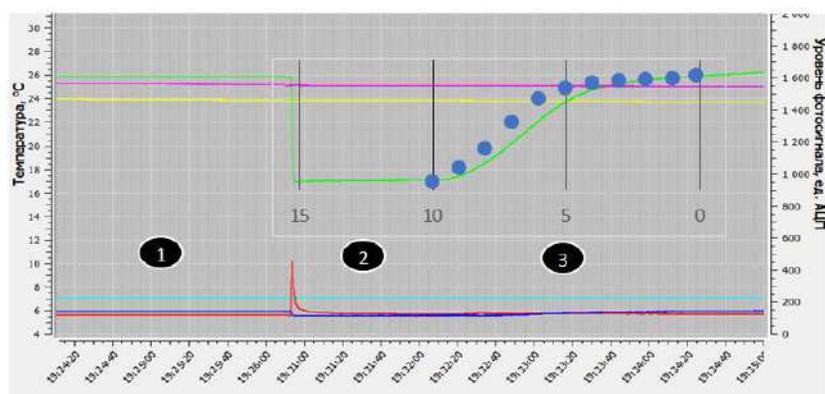


Рис.5. Практическое наблюдение влияния давления воздуха на изменение угла Брюстера.

В начальный момент времени (маркер 1) давление в измерительной камере атмосферное, уровни фотосигналов $U_{hc} = 1600$ (зеленая линия) температура зеркала $T_z = +5^\circ\text{C}$ (красная линия). Затем давление воздуха повышается до 10 МПа (маркер 2). При этом изменяется плотность газа и его коэффициент преломления. Далее, давление плавно снижается до атмосферного при постоянном расходе 2 нл/мин (маркер 3). При снижении давления оптическая плотность газа снижается и сигнал совершенно равномерно повышается до исходного значения. Зависимость оптической плотности от давления имеет криволинейную характеристику. На экспериментальную кривую наложены расчетные значения. Следует отметить, что данный эксперимент проводился с целью доказательства нарушения технологии производства измерительного преобразователя. Подозрение вызвал высокий отраженный сигнал, а при повышении давления он падает. Это свидетельствует об изменении угла Брюстера, а в данном случае в соотношении (1) величина угла приближается к жестко зафиксированному углу падения лазерного луча на зеркало и отраженный сигнал падает.

Второй эксперимент, следующий из (3), это изменение температуры. Поскольку измерительный преобразователь позволяет в широких пределах изменять температуру зеркала – будем рассматривать падение луча на холодное зеркало.

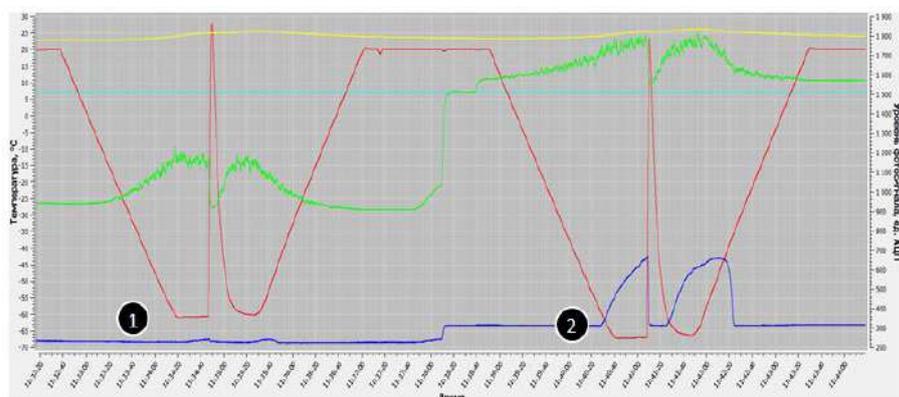


Рис.6. Практическое наблюдение поведения приграничного слоя при изменении температуры поверхности отражения.

При давлении 10 МПа (маркер 1) и 3 МПа (маркер 2) температура зеркала (красная линия) снижается от +20 до -70°С. При снижении температуры зеркала наблюдается рост отраженного сигнала (зеленая линия). Это объясняется возникновением тонкого приграничного слоя, плотность которого несколько выше, чем плотность среды. В этом слое возникает нарушение угла Брюстера и сигнал растёт. «Шум» сигнала объясняется конвекционным процессом в приграничном слое, поскольку зеркало сориентировано отражающей поверхностью к земле, если перевернуть вверх – «шум» пропадает. Примечательно, что рост сигнала при большом и малом давлении, начинается при разной температуре и это объясняется законами термодинамики.

Холодный, плотный приграничный слой в газовой среде, по сути, является тонкой пленкой. Отсюда следующее логичное применение закона Брюстера это наблюдение параметров тонких пленок на зеркале. Это может быть нанесенное вещество или пленка конденсата. Описанный выше измерительный преобразователь создавался именно для этого.

На рис.7 изображена схема работы измерительного преобразователя при работе с тонкой пленкой. В первом случае, при появлении пленки тоньше 1/4 длины волны падающего излучения (для описанного измерительного преобразователя 135 нм) нарушается полное внутреннее преломление, и отраженный сигнал появляется и возрастает до тех пор, пока не начнется интерференция.

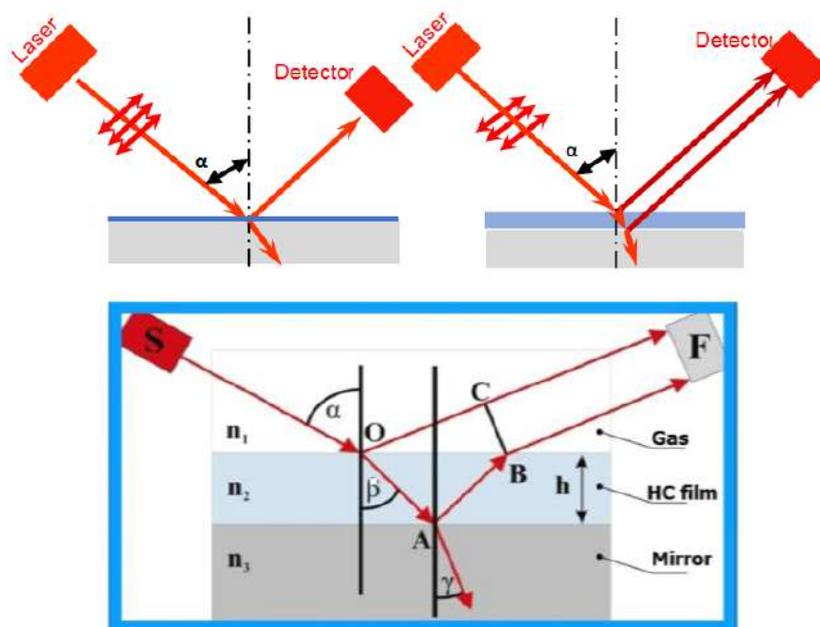


Рис.7. Схема возникновения когерентных лучей, интерферирующих на тонкой пленке.

Для схемы на рис.7, реализованной в измерительном преобразователе, справедлива следующая формула

$$U = \frac{U_{\max}}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi \cdot h}{h_m} \right) \right] + U_0, \quad (4)$$

где U_{\max} – максимальное значение АЦП в системе обработки сигнала, h – толщина пленки, h_m – 1/4 длины волны падающего излучения,

U_0 – начальный уровень сигнала при не идеальности поверхности зеркала или условий Брюстера. Соответственно, из (4) можно вычислить толщину пленки на поверхности зеркала.

Касаясь темы изучения тонких пленок, необходимо упомянуть относительно новый метод брюстеровской микроскопии. Суть метода в том, что на поверхность раздела сред двух диэлектриков падает поляризованный пучок света поперечной площадью много больше длины волны, и на эту границу наносится тонкая пленка. Возникает нарушение соотношения (1) и появляется отраженная волна, которую можно наблюдать. Структура отраженного света будет соответствовать структуре пленки. На рис.9 приведены фотографии, полученные методом брюстеровской микроскопии.

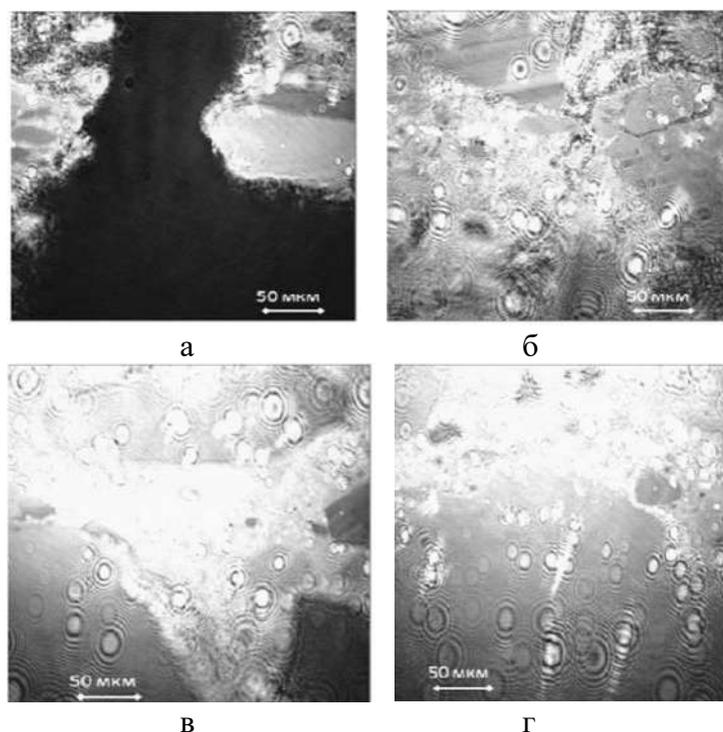


Рис.9. Изображения, полученные методом брюстеровской микроскопии. а) формирование монослоя (пленки); б, в, г) возникновение неоднородностей и трехмерных образований. Локальные толщины вычисляются аналогично (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин Д.В. *Общий курс физики. Учеб, пособие: Для вузов. В пяти томах. Т.IV. Оптика.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 792 с.
2. Берикашвили В.Ш., Засовин Э.А., Черепанов А.К. *Оптоэлектронные и радиооптические устройства и системы.* – МИРЭА, 2010. – 200 с.
3. Дьякова Ю.А. *Комплексное исследование структур монослоев порфиринофуллереновых диад / Диссертационная работа на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.* – М.: ФГБУН Институт кристаллографии им. А.В. Шубникова РАН, 2014. – 149 с.



НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ*

Исаченко И.А., Курбатов А.С., Жаворонок С.И.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается деформирование тонкостенных оболочек, выполненных из бинарного сплава с эффектом памяти формы, в процессе фазовых переходов в системе «мартенсит – аустенит» при последовательном охлаждении и нагреве через интервалы температур фазовых превращений и при постоянном напряженном состоянии. За основу приняты однократно связная модель термоупругих фазовых превращений [1] в варианте [2], учитывающем зависимость точной верхней грани главных компонент девиатора деформации от вида напряженного состояния, и общая формулировка теории тонких оболочек [3] применительно к тонкостенным элементам с памятью [4,5] при стремлении к нулю моментных напряжений [6,7].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТАТИКИ БЕЗМОМЕНТНОЙ ОБОЛОЧКИ С ПАМЯТЬЮ ПРИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ

В соответствии с [3] модель тонкой оболочки определена на расслоении TS многообразия $S \subset \mathbb{R}^3$, соответствующего срединной поверхности, заданными на ней координатами $\xi^\alpha \in D_\xi \subset \mathbb{R}^2$, и оснащенном двумя фундаментальными формами – метрическим тензором $a_{\alpha\beta}$ и тензором кривизны $b_{\alpha\beta}$. Деформирование канонической модели оболочки [3] описано изменением метрики – тензором тангенциальной деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и изменением кривизны $\varkappa_{\alpha\beta}$; в рамках безмоментной теории $\varkappa_{\alpha\beta}$ является зависимой переменной поля и определяется уравнениями совместности [3,7]. Напряженное состояние оболочки описано одним тензором тангенциальных сил с контравариантными компонентами $N^{\alpha\beta}$, определяемыми решением краевой задачи статики в следующем виде [3,5,7]

$$\nabla_\beta N^{\alpha\beta} = -q^\alpha \quad \forall M \in S; \quad (1.1)$$

$$v_\beta N^{\alpha\beta} \Big|_{M \in \Gamma_\sigma} = N_\Gamma^\alpha \quad \forall M \in \Gamma_\sigma \equiv \partial S. \quad (1.2)$$

Предполагается, что главный момент внешних сил на ∂S стремится к нулю, кинематические связи на ∂S либо отсутствуют, либо удовлетворяют критериям безмоментности напряженного состояния оболочки [3]. В противном случае полученное на основе безмоментной теории решение рассматривается как частное решение моментной теории оболочек [3]; следует заметить, что проблема

*Работа выполнена в рамках Государственного задания ИПРИМ РАН (номер гос. регистрации темы 121112200124-1).

расщепления напряженного состояния оболочки, претерпевающей термоупругие фазовые превращения [1], требует детального исследования.

В соответствии с [1,2,4-6] вводится аддитивное разложение тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^E + \varepsilon_{\alpha\beta}^T + \varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm}, \quad (1.3)$$

$\varepsilon_{\alpha\beta}^E$ – упругая, $\varepsilon_{\alpha\beta}^T$ – температурная деформации, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm}$ – деформация, порождаемая фазовыми превращениями материала с памятью. Определяющие соотношения для упругой и температурной деформации могут быть записаны в конечной форме [7]

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^E = h^{-1} E(q^0) \Delta_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\gamma\delta}, \quad \Delta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(1 + \nu)(a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} + a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma}) - \nu a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta}; \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^T = \alpha(q^0) a_{\alpha\beta} (T^0 - T_0^0), \quad (1.5)$$

h – толщина оболочки, ν – коэффициент Пуассона, E , α – модуль упругости и коэффициент линейного расширения, зависящие от фазового состава материала, T^0 , T_0^0 – усредненная по толщине температура и ее некоторое начальное значение.

Фазовый состав материала определяется одной переменной поля – объемной долей мартенситной фазы q [1], в безмоментном приближении теории оболочек – усредненной по толщине величиной $q^0 = q|_s$ [4-7]. Зависимости $E(q^0)$, $\alpha(q^0)$ задаются правилом смеси [1] следующим образом [6,7]

$$E^{-1}(q^0) = E_A^{-1} + q^0 E_{\Delta}^{-1}, \quad E_{\Delta}^{-1} = E_M^{-1} - E_A^{-1}; \quad (1.6)$$

$$\alpha(q^0) = \alpha_A + q^0 \alpha_{\Delta}, \quad \alpha_{\Delta} = \alpha_M - \alpha_A; \quad (1.7)$$

E_M , α_M соответствуют мартенситной фазе (M); E_A , α_A – аустенитной (A) [1].

Фазовая деформация определяется инкрементальным уравнением [6,7]

$$\delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm} = (\omega_{\alpha\beta}^{\pm} + \varepsilon_0 a_{\alpha\beta}) \delta q^0, \quad (1.8)$$

ε_0 – объемный эффект полного прямого ($A \rightarrow M$) превращения,

$$\omega_{\alpha\beta}^{\pm} = \frac{3}{2} \rho_D^{\pm}(s) \left[1 - q^0 f^{\pm}(q^0) \right] \Phi_1(\sigma_i / \sigma_0) \Sigma_{\alpha\beta} + f^{\pm}(q^0) (\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm} - \varepsilon_0 q^0 a_{\alpha\beta});$$

$$\rho_D^{\pm}(s) = \rho_D^{\pm} \left[\Theta(s) + \Delta \rho_D^{\pm} s (1 - \Theta(s)) \right]; \quad \Phi_1(x) = \operatorname{erf}(x / \sqrt{2});$$

$$s = -\frac{2}{4} \sigma_i^{-3} h^{-2} a_{\alpha\beta} \epsilon^{\nu\omega} \epsilon^{\rho\sigma} \bar{\Delta}_{\nu\rho\gamma\delta} \bar{\Delta}_{\omega\sigma\lambda\mu} N^{\alpha\beta} N^{\gamma\delta} N^{\lambda\mu},$$

$$\sigma_i = h^{-1} \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\alpha\beta} N^{\gamma\delta}}, \quad \Sigma_{\alpha\beta} = \sigma_i^{-1} \bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\gamma\delta};$$

$$\bar{\Delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} + a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma}) - \frac{1}{3} a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta};$$

s – параметр вида напряженного состояния [2,7], ρ_D^{\pm} – точная верхняя грань деформации изменения формы при полном фазовом превращении, $\Delta \rho_D^{\pm}$ – перепад величины ρ_D^{\pm} при переходе от напряженного состояния чистого растяжения ($s = 1$) к чистому сжатию ($s = -1$), σ_0 – пороговое напряжение, $\Theta(x)$ – функция Хевисайда, $\epsilon^{\alpha\beta}$ – компоненты дискриминантного тензора на TS, $f^{\pm}(q^0) = 1 \pm 1 + q^0$ – функция, определяющая соотношение процессов зарождения и роста (исчезновения) кристаллов мартенсита при фазовом переходе [1].

Приращение объемной доли мартенситной фазы δq^0 определяется также инкрементальным эволюционным уравнением [5-7], следующим из [2]

$$\delta q^0 = \Phi^\pm(q^0, t^0) [\delta T^0 - \delta T_S^\pm(N^{\alpha\beta})], \quad (1.9)$$

$$\Phi^+(q^0, t^0) = \frac{1}{2} \frac{1-q^0}{T_S^+ - T_F^+} \operatorname{tg} \frac{\pi t^0}{2}, \quad \Phi^-(q^0, t^0) = \frac{1}{2} \frac{q^0}{T_F^- - T_S^-} \operatorname{ctg} \frac{\pi t^0}{2},$$

$$t^0 = \frac{T^0 - T_F^+(N^{\alpha\beta})}{T_S^+ - T_F^+} \quad (A \rightarrow M), \quad t^0 = \frac{T^0 - T_S^-(N^{\alpha\beta})}{T_F^- - T_S^-} \quad (M \rightarrow A);$$

$$T_{S,F}^\pm(\sigma_i) = T_{S,F}^\pm(0) - \Delta S^{-1} \left(\omega^\pm + W_\Delta + \frac{1}{3} \varepsilon_0 a_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} \right) \quad (1.10)$$

– зависящие от напряженного состояния границы температурных интервалов $A \rightarrow M$ перехода $[T_F^+, T_S^+]$ и $M \rightarrow A$ перехода $[T_S^-, T_F^-]$,

$$\begin{aligned} \omega^\pm = \rho_D(s) [1 - q^0 f^\pm(q^0)] \varphi_1(\sigma_i/\sigma_0) \sigma_i + \\ + f^\pm(q_0) h^{-1} \left[\varepsilon_{\alpha\beta}^\pm - \frac{1}{3} (\varepsilon_{33}^\pm + q^0 \varepsilon_0) a_{\alpha\beta} \right] N^{\alpha\beta}; \quad W_\Delta = \frac{1}{2} E_\Delta^{-1} \Delta_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\alpha\beta} N^{\gamma\delta}. \end{aligned}$$

Вариация температуры начала прямого или обратного перехода $T_S^\pm(N^{\alpha\beta})$ (1.10) определяется соотношением $\delta T_S^\pm(N^{\alpha\beta}) = Q_{\alpha\beta}^\pm \delta N^{\alpha\beta}$ [6,7] и при неизменном в процессе нагрева-охлаждения тензоре напряжения $N^{\alpha\beta}$ обращается в нуль.

Таким образом, решение задачи о деформированном состоянии безмоментной оболочки с памятью в процессе фазовых превращений, протекающих при постоянном нагружении, сводится к следующим этапам:

– интегрирование уравнений статики безмоментной оболочки (1.1) с крайвыми условиями (1.2);

– определение интервалов температур прямого и обратного фазовых переходов на основе соотношения (1.10);

– определение приращения объемной доли мартенситной фазы при условии $T^0 \in [T_S^\pm, T_F^\pm]$ на базе соотношения (1.9) и текущей величины q^0 ;

– определение приращения фазовой деформации $\delta \varepsilon_{\alpha\beta}^\pm$ из уравнения (1.8) и накопленной фазовой деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}^\pm$;

– определение текущих величин упругой и температурной тангенциальных деформаций оболочки $\delta \varepsilon_{\alpha\beta}^E, \delta \varepsilon_{\alpha\beta}^T$, соответствующих q^0 , из (1.4)-(1.7);

– вычисление суммарной тангенциальной деформации (1.3);

– определение изменения кривизны $\varkappa_{\alpha\beta}$ по $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и дальнейшее вычисление компонентов вектора перемещения по $\varepsilon_{\alpha\beta}, \varkappa_{\alpha\beta}$ осуществляется стандартными методами и ниже не рассматривается.

2. О ПРОЯВЛЕНИИ ЭФФЕКТА РАЗНОСОПРОТИВЛЯЕМОСТИ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ПРИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК В ПРОЦЕССЕ ТЕРМОУПРУГИХ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Рассмотрим цилиндрическую оболочку условно неограниченной длины, диаметром $2R = 2$ м и толщиной $h = 1$ мм, отнесенную к цилиндрической системе координат $Oz\theta$, выполненную из равноатомного никелида титана марки ТН-1 (физические постоянные приведены в таблице 1). Оболочка находится

в полностью аустенитном начальном состоянии ($t = t_0 : \forall M \in S \ q^0(M) = 0$) при температуре $T_0^0 > T_S^+(\sigma_i)$ под действием давления $p = \text{Const}$ на S и погонным усилием N_z^* на торцевых сечениях, удаленных от исследуемой области. Краевые условия предполагаются удовлетворяющими условиям безмоментности напряженного состояния [3] (по крайней мере, допускающими построение безмоментного частного решения краевой задачи). Оболочка охлаждается через интервал температур $[T_F^+, T_S^+]$ ($A \rightarrow M$) до $T_1^0 < T_F^+(\sigma_i)$, затем последовательно нагревается через интервал $[T_S^-, T_F^-]$ ($M \rightarrow A$) до температуры $T_2^0 > T_F^-(\sigma_i)$, в результате чего осуществляется полный цикл термоупругих фазовых превращений $A \rightarrow M \rightarrow A$. Напряжение и поле температуры – однородны, следовательно, постановка задачи является осесимметричной, $q_z \equiv 0$.

Уравнения статики (1.1) имеют вид

$$\frac{d}{dz} N_z = 0; \quad N_0 = pR,$$

откуда следует $N_z = N_z^*$. Данное напряженное состояние предполагается неизменным в процессе фазового перехода.

Значения физических констант приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Физические константы сплава с памятью формы

E_M , ГПа	E_A , ГПа	ν	ρ_D	$\delta\rho_D$	ε_0	σ_0 , ГПа	α_M , К ⁻¹	α_A , К ⁻¹	ΔS , Дж/К
30	70	0,31	0,08	0.45	10^{-3}	0,1	$0,6 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$6,44 \cdot 10^5$

Далее рассмотрены следующие характерные случаи, демонстрирующие эффект разносопротивляемости сплава с памятью.

Случай 1. Оболочка нагружена внутренним постоянным давлением амплитудой $p = 100$ кПа, $N_z^* = 0$. Начальная температура равна $T_0^0 = 90^\circ\text{C}$. Оболочка охлаждается до температуры $T_1^0 = 20^\circ\text{C}$, затем нагревается до $T_2^0 = 90^\circ\text{C}$, претерпевая, таким образом, полный цикл фазовых переходов $A \rightarrow M \rightarrow A$. Зависимость параметра фазового состава $q^0(T^0)$ показана на рис.1.

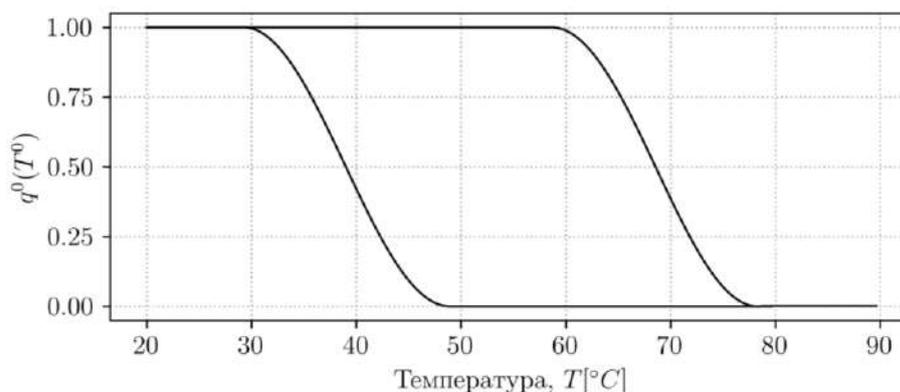


Рис.1. Диаграмма фазового состояния оболочки при полном цикле фазовых превращений: $p = 100$ кПа, $N_z^* = 0$.

Зависимости фазовых деформаций в оболочке от температуры показаны ниже на рис.2. Параметр вида напряженного состояния $s=1,0$, наибольшее значение фазовой деформации при полном $A \rightarrow M$ переходе – $\max |\varepsilon_{00}^{+(1)}| = 0,056$.

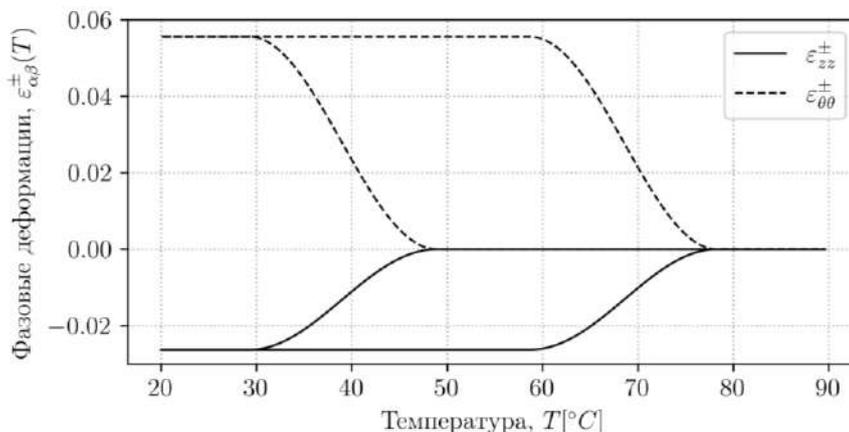


Рис.2. Фазовые деформации оболочки при полном цикле фазовых превращений: внутреннее давление $p = 100$ кПа, $N_z^* = 0$.

Случай 2. Пусть оболочка нагружена внешним постоянным давлением амплитудой $p = 100$ кПа, $N_z^* = 0$; $s = -1,0$. Диапазон температур – тот же, что и в случае 1. Зависимости фазовых деформаций от температуры показаны на рис.3.

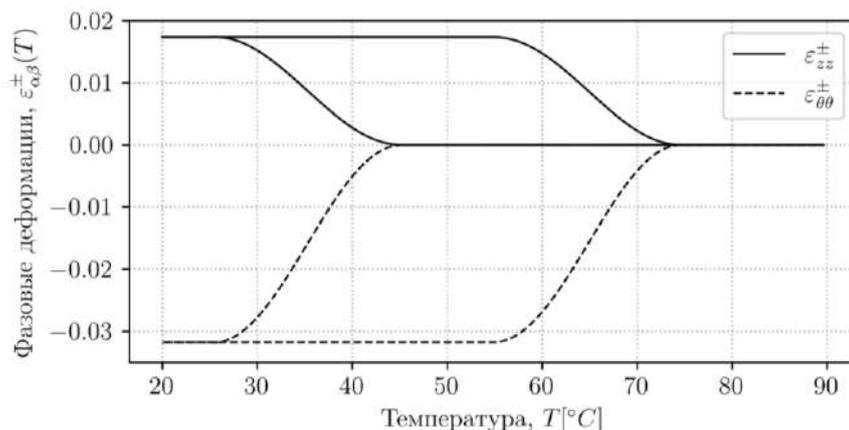


Рис.3. Фазовые деформации оболочки при полном цикле фазовых превращений: внешнее давление $p = 100$ кПа, $N_z^* = 0$.

Во втором случае наибольшее по модулю значение фазовой деформации меньше, чем в первом: $\max |\varepsilon_{00}^{+(2)}| = 0,032 < \max |\varepsilon_{00}^{+(1)}|$, так как $\rho_D^{\pm}(-1) = 0,6\rho_D^{\pm}(1)$.

Случай 3. Оболочка нагружена внутренним давлением $p = 100$ кПа и продольным усилием $N_z^* = 50$ кН/м; при этом в силу $N_{zz}^* - \frac{1}{3}N_{zz}^* - \frac{1}{3}N_{\theta\theta}^* = 0$ показатель $s = 0,0$, $\max |\varepsilon_{zz}^*| = \varepsilon_0$, $\max |\varepsilon_{00}^{+(3)}| = 0,042$. Зависимости фазовых деформаций от температуры показаны на рис.4.

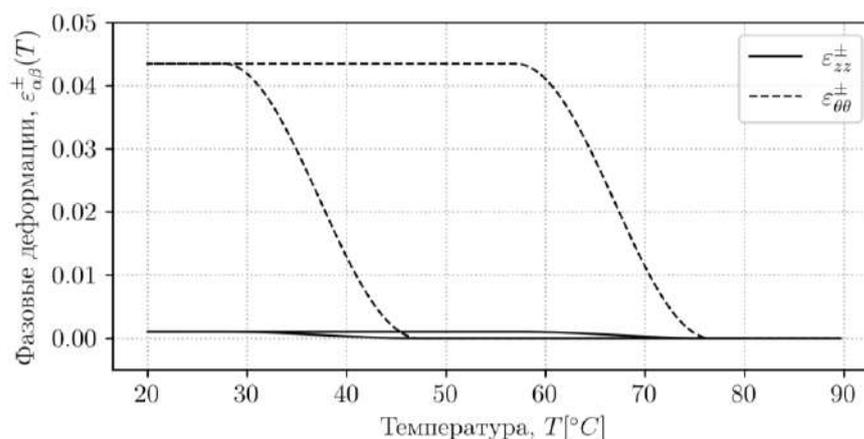


Рис.4. Фазовые деформации оболочки при полном цикле фазовых превращений: внутреннее давление $p = 100$ кПа, $N_z^* = 50$ кН/м.

Случай 4. Оболочка нагружена внешним давлением $p = 100$ кПа и продольным растягивающим усилием $N_z^* = 50$ кН/м, $s = -0.54$, $\max|\varepsilon_{\theta\theta}^{+(4)}| = 0,047$. Зависимости фазовых деформаций от температуры показаны на рис.5.

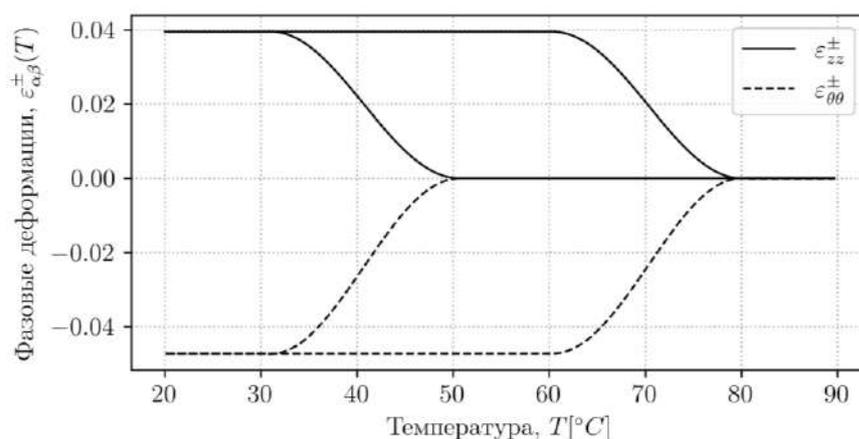


Рис.5. Фазовые деформации оболочки при полном цикле фазовых превращений: внешнее давление $p = 100$ кПа, $N_z^* = 50$ кН/м.

Случай 5 противоположен случаю 4: внутреннее давление $p = 100$ кПа, сжимающее продольное усилие $N_z^* = -50$ кН/м: $s = 0,54$, $\max|\varepsilon_{\theta\theta}^{+(5)}| = 0,062$. Зависимости фазовых деформаций от температуры показаны на рис.6.

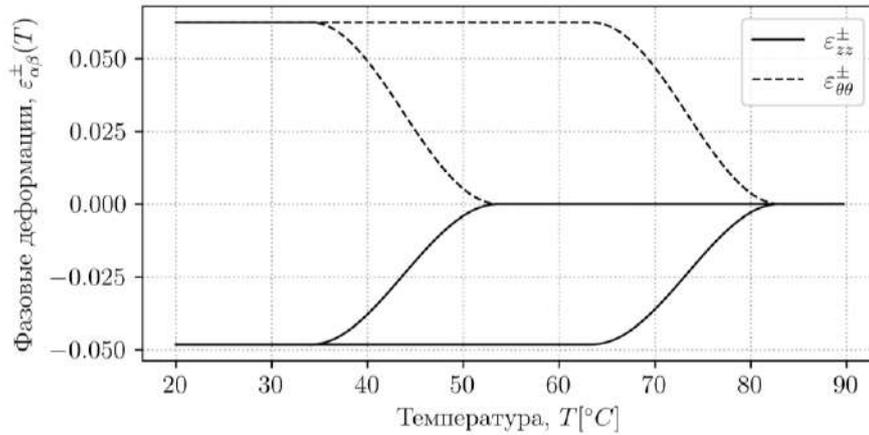


Рис.6. Фазовые деформации оболочки при полном цикле фазовых превращений: внутреннее давление $p = 100$ кПа, $N_z^* = -50$ кН/м.

Случай 6. Оболочка нагружена внешним давлением $p = 100$ кПа и сжимающей погонной силой $N_z^* = -50$ кН/м, при этом $s = 0$, $\max|\varepsilon_{\theta\theta}^{+(6)}| = 0,042$. Данный случай с точностью до знака совпадает со случаем 3. Зависимости фазовых деформаций от температуры показаны на рис.7.

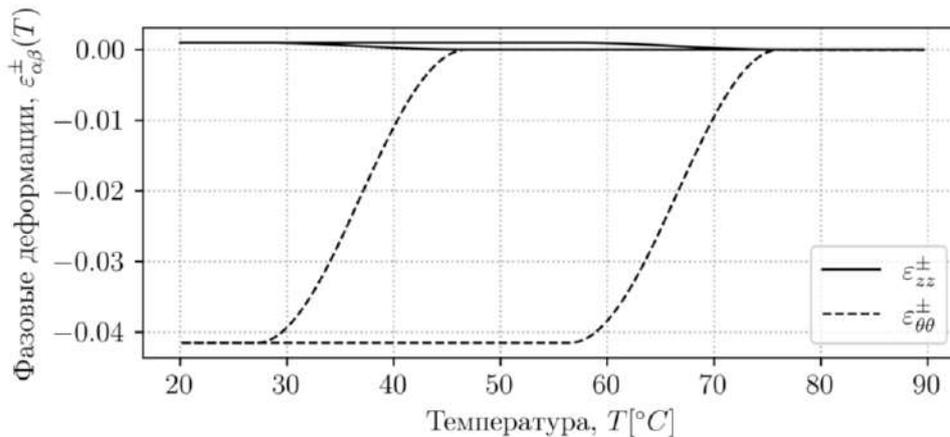


Рис.7. Фазовые деформации оболочки при полном цикле фазовых превращений: внешнее давление $p = 100$ кПа, $N_z^* = -50$ кН/м.

Как и в случае 3, нулевой продольный компонент девиатора напряжений приводит к амплитуде фазовой деформации $\varepsilon_{zz}^{+(6)}$, равной объемному эффекту фазового перехода $A \rightarrow M$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты решения задачи о деформировании безмоментной оболочки вращения из сплава с памятью в процессе неизотермических фазовых переходов при учете разносопротивляемости сплава в первом приближении (учет зависимости точной верхней грани деформации формоизменения от параметра вида напряженного состояния в соответствии с [2]) показывают существенную зависимость максимальных амплитуд деформаций оболочек, претерпевающих полное фазовое превращение при постоянной нагрузке, от схемы нагружения.

Так, например, нагружение условно-бесконечной цилиндрической оболочки внутренним давлением при отсутствии продольных напряжений, т.е. одноосное растяжение в окружном направлении, приводит к амплитуде фазовой деформации, в 1,67 раза превосходящей амплитуду деформации при нагружении той же оболочки внешним давлением, что соответствует одноосному сжатию в окружном направлении. При приложении продольной погонной силы, условно соответствующей действию внутреннего или внешнего давления на днища оболочки, стремление к нулю одного из компонентов девиатора напряжения приводит к нулевому показателю вида напряженного состояния (аналогично чистому сдвигу), вследствие чего перемена знака действующих внешних сил не изменяет амплитуду фазовых деформаций при полном мартенситном превращении. В то же время случай нагружения оболочки внутренним или внешним давлением и противоположной по знаку продольной силой (т.е. растяжение в окружном направлении при сжатии в осевом и обратно) приводит к перемене знака параметра вида напряженного состояния; для сжатия внешним давлением и растяжению в осевом направлении $s > 0$, тогда как в случае растяжения оболочки внутренним давлением и сжатия в осевом направлении $s < 0$, что приводит к падению амплитуды фазовой деформации в 1,32 раза. При столь значительных различиях абсолютных величин деформации определение поля перемещения, формы и размеров оболочки с памятью в актуальной конфигурации после фазового превращения учет разносопротивляемости сплава представляется необходимым, если, в свою очередь, интенсивность напряжения достаточно велика по сравнению с пороговой величиной σ_0 [7].

Аккуратное описание процессов деформирования тонких безмоментных оболочек с памятью, претерпевающих термоупругие фазовые переходы, представляется основой как для построения общих решений моментной теории оболочек с памятью, так и для оценки критических напряжений устойчивости тонкостенных систем с эффектом памяти формы в процессе фазовых превращений [8-10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач* // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.
2. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Экспериментальная идентификация модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Деформация и разрушение материалов. – 2018. – №12. – С.2-11.
3. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. *Линейная теория тонких оболочек*. – Л.: Политехника, 1990. – 656 с.
4. Zhavoronok S.I. *Constitutive relations and compatibility equations for thin shape memory alloy shells* // AIP Conf. Proceedings. – 2022. – Vol.2611. – 100004.
5. Zhavoronok S.I. *On the incremental constitutive relations and compatibility equations for thin shape memory alloy shells undergoing non-isothermal phase transitions* // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An Int. Journal. – 2023. – Vol.14. – No.1. – Pp.1-27.

6. Kurbatov A.S., Zhavoronok S.I. *On the theory of shape memory membrane shells undergoing thermoelastic phase transitions* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol.44. – No.6. – Pp.2326-2335.
7. Курбатов А.С., Исаченко И.А., Жаворонок С.И. *О решении некоторых задач статики безмоментных оболочек с памятью формы при неизотермических фазовых переходах* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т.29. – №3. – С.402-423.
8. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Dynamics of martensite phase transitions in shape memory beams under buckling and postbuckling conditions* // IFAC-PAPERSONLINE. – 2018. – Pp.873-878.
9. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Abnormal buckling of thin-walled bodies with shape memory effects under thermally induced phase transitions* // Advanced Structured Materials. – 2019. – Vol.110. – Pp.493-524.
10. Zhavoronok S.I., Nushtaev D.V. *Buckling of thin-walled structures with shape memory effect under thermoelastic phase transitions* / 41st Solid Mechanics Conference. Book of Abstracts. – 2018. – Pp.344-345.

УДК 539.3

EDN NXBFUE (<https://elibrary.ru/nxbfue>)

DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.10



О СИЛОВОМ СОСТОЯНИИ КОНТАКТА ЦИЛИНДА УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННОГО НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ*

Киреенков А.А.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Основная цель предлагаемого исследования состоит в разработке эффективных численно-аналитических методов исследования силового состояния внутри пятен контакта упругих тел в условиях комбинированной кинематики с учетом анизотропии сухого трения.

Для корректного учета влияния анизотропии коэффициентов сухого трения в таких системах, требуется построение приближенных аналитических моделей силового состояния внутри пятна контакта с учетом реального распределения нормальных и касательных контактных напряжений.

Наиболее эффективной при изучении упомянутых систем является теория многокомпонентного сухого трения [1-10], которая позволяет корректно описать возникающие эффекты трения, с помощью построения физически согласованных феноменологических моделей трения.

В соответствии с этой теорией, при построении моделей трения используется локальная формулировка закона Кулона для каждого малого элемента пятна контакта, где соответствующая суммарная скорость скольжения обусловлена продольным скольжением и вращением. Поэтому результирующий вектор силы сухого трения и момент получаются в результате интегрирования по площади контакта; оба зависят как от скорости скольжения, так и от угловой скорости вращения.

Точные интегральные представления для результирующего вектора силы и момента трения слишком сложные, чтобы использовать их в инженерном анализе динамики систем с сухим трением. Поэтому они заменяются приближенными выражениями, сохраняющими все аналитические свойства интегральных моделей, без использования негладких функций.

Основное преимущество приближенных моделей трения состоит в том, что их коэффициенты представляют собой числа, которые возможно определить аналитически, в случае априорного представления о распределении нормальных контактного давления или экспериментально.

Для экспериментального определения коэффициентов многокомпонентных приближенных моделей комбинированного трения был разработан лабораторный стенд, позволяющий измерять силу сухого трения при прямолинейном проскальзывании трущихся тел при наличии верчения для различных форм областей контакта [7-8]. Комбинированное движение в этом блоке создается с помощью круглой стальной платформы (рис.1), приводимой во вращение

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-29-00987, <https://rscf.ru/project/23-29-00987>.

червячным мотор-редуктором, который дает возможность изменять частоты вращения платформы.

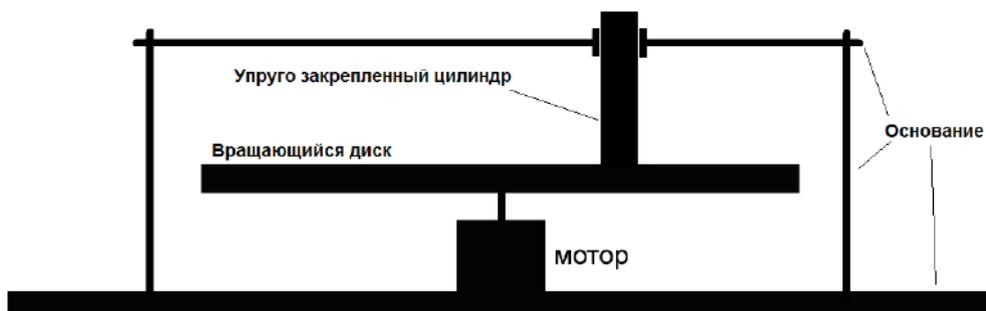


Рис.1. Схема экспериментального стенда.

Экспериментальное измерение коэффициентов моделей силы трения проводилось для цилиндрических инденторов, упруго закрепленных в измерительной балке. При проведении экспериментов наблюдалось возникновение автоколебаний при некоторых скоростях вращения платформы и зависимость компонент силы и момента трения от положения основания цилиндра относительно платформы. Последнее связано с анизотропией коэффициента трения, что требует учета этого фактора при построении моделей трения. Устранение автоколебательных эффектов при определении коэффициентов моделей может быть проведено как аналитически [7], так и численно [8].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ СИЛОВОЕ СОСТОЯНИЕ ВНУТРИ ПЯТНА КОНТАКТА

Динамическое взаимодействие слабо деформированного твердого тела с шероховатой опорной плоскостью определяется нормальной реакцией \mathbf{N} , результирующим вектором касательных сил \mathbf{T} и моментом сухого трения \mathbf{M}_v [1-6]. Эти величины могут быть найдены с помощью интегрирования нормального контактного напряжения σ_v , а также суммарного тангенциального напряжения, полученного в предположении справедливости дифференциальной формы закона Амонтона-Кулона для маленького элемента площади внутри пятна контакта [1-6]

$$\mathbf{t} = -|\sigma_v| \frac{\mathbf{f} \cdot (\mathbf{v}_0 + (\mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau))}{|\mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau|}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{v}_0(\mathbf{q})$ – продольная абсолютная скорость; $\mathbf{r}_\tau(M)$ – радиус-вектор точки $M \in S$ в плоскости контакта; \mathbf{t} – тангенциальные контактные напряжения в пятне контакта S , $\mathbf{h} = h_{\alpha\beta} \mathbf{e}^\alpha \mathbf{e}^\beta$ – «тензор трения качения» для анизотропного упруго тела

$$\mathbf{h} \neq \mathbf{h}(M); \quad \forall \mathbf{w}_\tau = \mathbf{w}_\tau(\mathbf{q}) \quad \mathbf{w}_\tau^T \cdot \mathbf{h} \cdot \mathbf{w}_\tau > 0.$$

С учетом анизотропии сухого трения, интегральная модель силового состояния внутри пятна контакта, получаемая интегрированием формул по площадке контакта S , имеет вид [1-6]

$$\mathbf{N} = \int_S \sigma_v \mathbf{e}_3 dS, \quad \mathbf{T} = - \int_S \sigma_v \frac{\mathbf{f} \cdot (\mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau)}{|\mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau|} dS, \quad (2)$$

$$\mathbf{M}_v = - \int_S \sigma_v \frac{\mathbf{r}_\tau \times [\mathbf{f} \cdot (\mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau)]}{|\mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau|} dS$$

В формуле (2) результирующая сила \mathbf{N} статического контактного давления σ_v може быть записана следующим образом: $\mathbf{N} = N_0 \mathbf{e}_3$, $N_0 = \int_S \sigma_0 dS$.

Построенная модель описывает эффекты сцепления при комбинированном скольжении, вращении и качении деформированного твердого тела с конечной площадью контакта с плоскостью опоры в случае произвольной анизотропии трения.

В большинстве инженерных задач достаточно рассматривать ортотропное сухое трение, определяемое следующим тензором трения [1-6]

$$\mathbf{f} = f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad f \neq 0, \quad k \neq 0, \quad (3)$$

где f и k – главные компоненты тензора трения.

В этом случае, предложенную модель трения (1)-(2), удобно записать в системе координат Oxy , с началом в центре пятна контакта, такой что соответствующие базисные векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 коллинеарны главным направлениям тензора трения \mathbf{f} . Кроме того, естественно предположить, что статическое контактное давление (отсутствие движения) обладает свойством осевой симметрии: $\sigma_0(x, y) = \sigma_0(\pm x, \pm y)$.

При наличии движения возникают касательные напряжения, приводящие к искажению симметричной диаграммы распределения нормальных контактных напряжений.

Предполагая, что смещение центра тяжести пятна контакта относительно геометрического центра описывается вектором \mathbf{d} , модуль которого был рассчитан в работах [5-6] искажения в симметричной форме распределения диаграмме могут быть описаны следующей простой, линейной ассимптотикой:

$$\sigma(x, y) = \sigma_0(x, y)(1 + d_x x + d_y y), \quad (4)$$

где d_x и d_y – проекции вектора \mathbf{d} на оси x и y , соответственно. В силу симметрии составляющая d_y в формуле (4), возникающая за счет верчения мала по сравнению с d_x , описывающей сдвиг в направлении мгновенного проскальзывания, и, поэтому ей можно пренебречь. В результате формула (4) приобретает вид

$$\sigma_v(x, y) = \sigma_0(x, y)(1 + d_x x).$$

Приближенная аналитическая модель силового взаимодействия внутри пятна контакта строится в предположении наличия проскальзывания с продольной скоростью $\mathbf{v}_0 = v \mathbf{e}'_1$ вдоль оси глобальной неподвижной системы координат. Предполагается, что площадка контакта обладает осевой симметрией с характерным размером пятна контакта R (например, диаметр соответствующего множества на плоскости $\{x, y\}$).

При сделанных допущениях результирующий вектор силы трения может

быть представлен в виде суммы двух компонент $\mathbf{T} = T_{\parallel}\mathbf{e}_1 + T_{\perp}\mathbf{e}_2$, T_{\parallel} – продольная, а T_{\perp} – поперечная составляющие силы трения. Как было показано в [1-10] последняя из них возникает из-за перекоса в симметричной диаграмме распределения нормальных контактных напряжений.

В результате интегральные представления (2) существенно могут быть упрощены, как это было реализовано в [1-10].

Однако, интегральные соотношения слишком сложны, чтобы применить их к анализу динамики реальных систем, в то время как их аппроксимации аналитическими функциями достаточно точны и просты одновременно. С помощью методики, подробно описанной в предыдущих работах [1-6] приближенная аналитическая модель трения, описывающая взаимодействие упругой оболочки качения с твердой поверхностью, в случае комбинированной кинематики и ортотропного трения может быть представлена в следующем виде

$$F_{\parallel} = \frac{F_0 v}{\sqrt{v^2 + au^2}}, \quad F_{\perp} = \frac{\mu k F_0 v u^2}{\sqrt{(v^6 + bu^6)}}, \quad M_v = \frac{M_0 u}{\sqrt{u^2 + mv^2}}. \quad (5)$$

Здесь $u = \omega_v R$, F_0 – продольная компонента силы трогания, а M_0 – момент силы трогания.

Однако, модель (5) не позволяет описать возникновение автоколебаний, которое наблюдалось в экспериментах [7-8]. Для учета этого эффекта необходимо использование обобщенной дифференциальной формы закона Амонтона-Кулона, как это было сделано в [9-10].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена методика описания силового состояния внутри пятен контакта упругих тел с учетом анизотропии сухого трения в условиях комбинированной кинематики: одновременное верчение и скольжение.

Для корректного учета влияния анизотропии коэффициентов сухого трения в таких системах, используются приближенные аналитические модели силового состояния внутри пятна контакта с учетом реального распределения нормальных и касательных контактных напряжений. Для определения коэффициентов моделей применяется сочетание численно-аналитических методов обработки результатов экспериментов. Дано объяснение наблюдаемых при проведении экспериментов побочных эффектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киреенков А.А., Федотенков Г.В. *Движение композитной сферической оболочки по твёрдой поверхности с учётом комбинированного сухого трения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №3. – С.327-340. DOI: 10.33113/mkmc.ras.2020.26.03.327_340.03.
2. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Anisotropic Combined Dry Friction in Problems of Pneumatics' Dynamics* // Journal of Vibrational Engineering and Technologies. – 2020. – Vol.8(2). – Pp.365-372.
3. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Coupled dry friction models in problems of aviation pneumatics' dynamics* // International Journal of Mechanical Sciences. – 2017. – Vol.127. – Pp.198-203. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.02.004.

4. Zhavoronok S.I., Kireenkov A.A. *On the effect of the anisotropic dry friction and the deformed state of tires on the shimmy initiation* / Proceedings of the VII International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering. – 2017. – Pp.216-226. ISBN: 978-84-946909-2-1, WOS: 000426876100018.
5. Киреенков А.А., Семендяев С.В. *Связанные модели трения скольжения и верчения: от теории к эксперименту* // Труды МФТИ. – 2010. – Т.2. – №2. – С.178-185.
6. Киреенков А.А., Семендяев С.В., Филатов В.Ф. *Экспериментальное исследование связанных двумерных моделей трения скольжения и верчения* // Известия РАН. МТТ. – 2010. – №6. – С.192-202.
7. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Numeric-Analytical Methods of the Coefficients Definition of the Rolling Friction Model of the Pneumatic Aviation Tire* / Proceedings of the 8th International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering. COUPLED PROBLEMS. – 2019 (2021). – Pp.204-212.
8. Киреенков А.А. *О крутильных колебаниях в системах с комбинированным сухим трением* // Известия РАН. МТТ. – 2009. – №3. – С.36-40.
9. Киреенков А.А. *Обобщенная двумерная модель трения скольжения и верчения* // ДАН. – 2010. – Т.431. – №4. – С.482-486.
10. Киреенков А.А. *Закон Кулона в обобщенной дифференциальной форме в задачах динамики твердых тел с комбинированной кинематикой* // Известия РАН. МТТ. – 2010. – №2. – С.15-26.



МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ОПИРАЮЩЕЙСЯ НА ДВЕ ПЛОСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ*

Киреенков А.А.¹, Федотенков Г.В.²

¹*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

²*ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет)», г. Москва, Россия*

ВВЕДЕНИЕ

Основная цель предлагаемого исследования состоит в разработке эффективных численно-аналитических методов исследования силового состояния внутри пятен контакта упругих композитных сферических оболочек, опирающихся на две наклоненные под углом друг к другу плоские поверхности.

Контактная задача для сферической оболочки, опирающейся на две плоские поверхности, порождена необходимостью подробного исследования динамики различных робототехнических систем, для построения более эффективных законов управления. Основными управляемыми элементами этих систем являются упругие сферические оболочки, осуществляющие сложные кинематические движения по различным поверхностям.

В случае не точечного контакта трущихся тел существенное влияние на динамику оболочек оказывают эффекты комбинированного сухого трения, возникающие из-за нелинейной взаимосвязи параметров, описывающих силовое состояние внутри пятна контакта (компоненты силы и момента трения) с кинематическими параметрами. Для определения этой взаимосвязи, вычисления коэффициентов так называемой многокомпонентной модели трения, требуется знание законов распределения нормальных и касательных напряжений внутри пятна контакта с учетом характера движения исследуемых объектов.

Задача значительно усложняется, если оболочка движется, контактируя одновременно с двумя поверхностями, как это имеет место в случае так называемого «робота-бабочки» [1-3]. Основной управляемый элемент «робота-бабочки» – тонкая сферическая оболочка, катящаяся с одновременным верчением и проскальзыванием по двум параллельным пластинам, как по рельсам.

В первых разработанных алгоритмах управления пренебрегалась эффектами комбинированного сухого трения в условиях сложной кинематики, что приводит к их не эффективности при некоторых комбинациях кинематических параметров движения оболочки [4]. Для их улучшения были разработаны приближенные модели сухого трения внутри пятен контакта в предположении, что в качестве управляемого элемента используется упругий шар, что позволяет использовать классические законы Герца распределения нормальных контактных напряжений.

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-29-00987, <https://rscf.ru/project/23-29-00987>.

В результате были выработаны эффективные подходы к построению моделей трения для подобных систем, основанные на простых асимптотических представлениях для функций распределения внутри пятен контакта [1-3].

Использованная методика построения моделей трения и определения их коэффициентов была ранее разработана для изучения сложной динамики пневматиков различной структуры [5]. В соответствии с этой методикой, распределение нормального давления внутри пятна контакта аппроксимируется линейным приближением разложения в ряд Тейлора по полярным или Декартовым координатам внутри пятна контакта. При этом нулевой член разложения, вносящий основной вклад в расчет коэффициентов моделей трения, представляет собой стационарное распределение (состояние покоя). Эффективность данного подхода позволило применить его в случае когда, в качестве основного управляемого элемента выступает композитная, сферическая оболочка. При этом расчет стационарного распределения нормального давления был произведен в предположении, что оболочка находится на горизонтальной плоскости.

Наличие контакта по двум симметрично расположенным, не горизонтальным площадкам существенно отличает рассматриваемую задачу от изученных в предыдущих работах [1-3]. Вектор нормальной реакции теперь не является противоположно направленным вектору силы тяжести (весу оболочки), что, в свою очередь, может привести к существенному изменению формы распределения нормальных контактных напряжений внутри пятен контакта.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЕ РАЗРЕШАЮЩЕЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассматривается контактная задача для сферической оболочки типа Тимошенко [7], опирающейся на две плоские твёрдые поверхности, пересекающиеся под углом раствора α (рис.1). R и h – радиус и толщина оболочки. Полагается, что $h \ll R$.

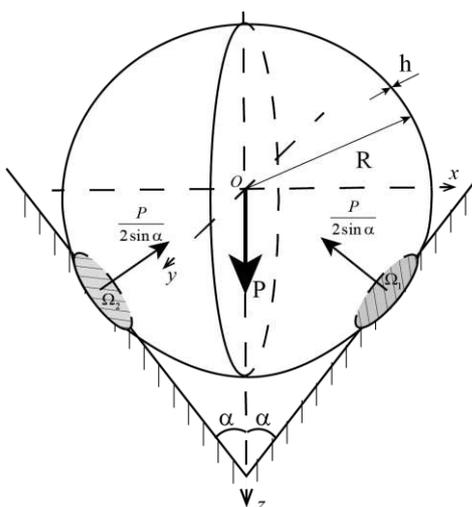


Рис.1. Постановка задачи.

Положим, что контакт происходит в условиях свободного проскальзывания.

В процессе деформации образуются две поверхности контакта Ω_1 и Ω_2 , размеры и положения границ которых заранее неизвестны и подлежат

определению в процессе решения задачи. Целью контактной задачи является определение контактных давлений p_1 и p_2 , распределённых, соответственно, по поверхностям Ω_1 и Ω_2 .

Отметим, что в такой постановке задача является пространственной, однако, обладающей двумя плоскостями симметрии: Oxz и Oyz (рис.1). Следовательно, $p_1 = p_2 = p$, а также размеры и геометрия областей Ω_1 и Ω_2 совпадают. Это даёт возможность снизить размерность задачи и представить её в виде суперпозиции двух осесимметричных состояний с осями симметрии L_1 и L_2 (рис.2).

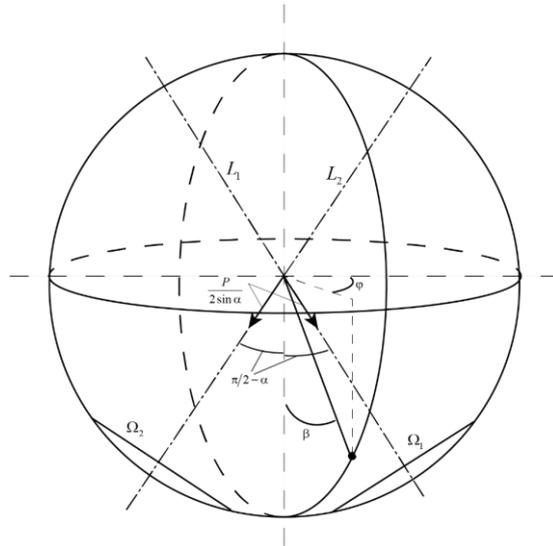


Рис.2. Суперпозиция осесимметричных состояний.

Свяжем с оболочкой сферическую систему координат с углами $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $\beta \in [0, \pi]$ (рис.2). При записи всех уравнений и соотношений далее используется следующая система безразмерных величин (при одинаковом начертании величин они обозначены верхним символом «*», который в последующем изложении опускается)

$$u^* = \frac{u}{R}, \quad w^* = \frac{w}{R}, \quad p^* = \frac{p}{\lambda + 2\mu} \frac{R}{h}, \quad \eta^2 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \gamma^2 = \frac{h^2}{12R^2}, \quad k^2 = \frac{5}{6}, \quad (1)$$

где u , w – тангенциальное и нормальное перемещения; χ – угол поворота нормального к срединной поверхности до деформации волокна за счет сдвиговых деформаций; λ , μ – упругие постоянные Ламе материала оболочки, p – нормальное давление. При этом безразмерный радиус оболочки равен 1.

Дополнительно введём две локальные сферические системы координат. Их центры совпадают с центром оболочки, а оси, относительно которых отсчитываются меридиональные углы, совпадают с осями симметрии L_1 и L_2 . Точка $M(\beta, \varphi)$ на поверхности сферы с координатами β , φ , заданными в основной системе координат, характеризуется меридиональными углами β_1 и β_2 в дополнительных системах координат. Эта же точка принадлежит секущим плоскостям Π_1 и Π_2 с единичными нормальными, заданными в декартовой системе

координат $Oxyz$ $\mathbf{n}_1 = (\cos \alpha, 0, \sin \alpha)^T$ и $\mathbf{n}_2 = (-\cos \alpha, 0, \sin \alpha)^T$ (рис.3).

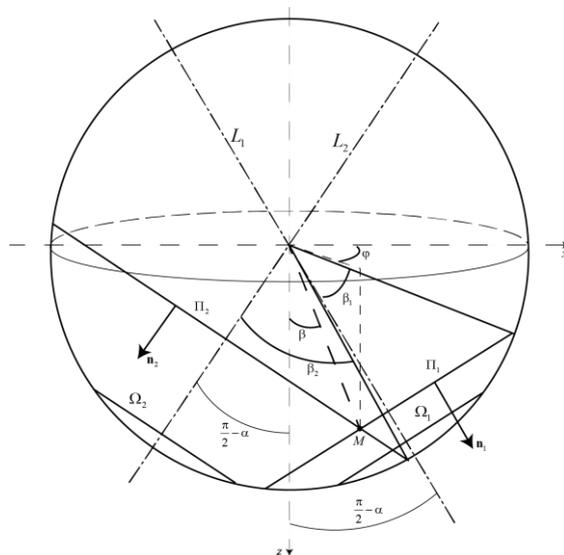


Рис.3. Связь координат точки на поверхности оболочки.

Тогда связи углов $\beta_1 = \beta_1(\beta, \varphi)$ и $\beta_2 = \beta_2(\beta, \varphi)$ с координатами β , φ определяются из условия пересечения срединной поверхности оболочки с плоскостями Π_1 и Π_2

$$\begin{aligned} & [\cos(\alpha - \beta_1) - \sin \beta \cos \varphi] \cos \alpha + [\sin(\alpha - \beta_1) - \cos \beta] \sin \alpha = 0, \quad \beta_1 > 0; \\ & [\cos(\alpha + \beta_2) - \sin \beta \cos \varphi] \cos \alpha + [\sin(\alpha + \beta_2) - \cos \beta] \sin \alpha = 0, \quad \beta_2 > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, достаточно построить решение осесимметричной контактной задачи для оболочки, опирающейся на плоскую поверхность и находящейся под воздействием вдавливающей силы $Q = \frac{P}{2 \sin \alpha}$. Это решение зависит только от меридионального угла β (в локальных системах координат $\beta = \beta_1$ или $\beta = \beta_2$). Решение исходной задачи в произвольной точке оболочки $M(\beta, \varphi)$ будет представлять суперпозицию двух решений, полученных из решения осесимметричной задачи, в которых меридиональные углы β следует заменить углами β_1 и β_2 , связанными с β и φ формулами (2). В частности

$$w(\beta, \varphi) = W[\beta_1(\beta, \varphi)] + W[\beta_2(\beta, \varphi)], \quad (3)$$

где $W(\beta)$ – нормальные перемещения оболочки, полученные из решения осесимметричной задачи.

Для решения осесимметричной задачи используем систему уравнений для оболочки, учитывающую сдвиг и инерцию вращения поперечных сечений согласно гипотезам С.П. Тимошенко [6]

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{W} + \mathbf{p} &= 0, \quad \mathbf{L} = (L_{ij})_{3 \times 3}, \\ \mathbf{W} &= (U, W, X)^T, \quad \mathbf{p} = (0, p, 0)^T, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \eta^2 (2 - k^2) - \frac{1}{\sin^2 \beta}, \\
L_{12} &= [2(1 - \eta^2) + \eta^2 k^2] \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad L_{13} = -\gamma^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) + \eta^2 k^2, \\
L_{21} &= -[2(1 - \eta^2) + \eta^2 k^2] \left(\frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ctg} \beta \right), \quad L_{22} = \eta^2 k^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) - 4(1 - \eta^2), \\
L_{23} &= \eta^2 k^2 \left(\frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ctg} \beta \right), \quad L_{31} = \gamma^{-2} L_{13}, \quad L_{32} = -\eta^2 k^2 \gamma^{-2} \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad L_{33} = -\gamma^{-2} L_{13}.
\end{aligned}$$

Основываясь на принципе суперпозиции [1,7-9], для нормальных перемещений $W(\beta)$ оболочки справедливо следующее интегральное представление

$$W(\beta) = 2\pi \int_0^\pi G_w(\beta, \xi) p(\xi) d\xi, \quad (5)$$

где $G_w(\beta, \xi)$ – функция влияния для оболочки, являющаяся решением задачи о воздействии на оболочку единичной сосредоточенной силы [1,7-9]

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}\mathbf{G} + \mathbf{p} &= 0, \\
\mathbf{G} &= (G_u, G_w, G_\chi)^T, \quad \mathbf{p} = [0, \delta(\beta - \xi), 0]^T,
\end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что с учётом свойств симметрии задачи достаточно определить распределение контактного давления по области Ω_1 , поскольку в области Ω_2 распределение будет аналогичным.

С использованием функции влияния $G_w(\beta, \xi)$, интегрального представления (5) и формул (2) и (3) можно построить основное разрешающее интегральное уравнение контактной задачи

$$\begin{aligned}
2\pi \int_0^\pi G(\beta, \varphi, \xi) p(\xi) d\xi &= w(\beta, \varphi), \\
G(\beta, \varphi, \xi) &= G_w[\beta_1(\beta, \varphi), \xi] + G_w[\beta_2(\beta, \varphi), \xi].
\end{aligned} \quad (7)$$

Перемещения $w(\beta, \varphi)$ в области контакта Ω_1 определяются расстоянием (с учётом знака) от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ на поверхности сферы с координатами $x_0 = \sin \beta \cos \varphi$, $y_0 = \sin \beta \sin \varphi$, $z_0 = \cos \beta$ до плоскости $\Omega_1: x \cos \alpha + z \sin \alpha - 1 + w_0 = 0$ (рис.4)

$$w(\beta, \varphi) = 1 - \sin \beta \cos \varphi \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha - w_0. \quad (8)$$

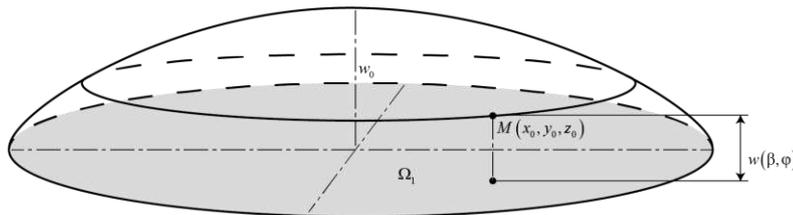


Рис.4. Определение нормальных перемещений в области контакта.

Таким образом, основное разрешающее интегральное уравнение контактной задачи примет вид

$$2\pi \int_0^{\pi} G(\beta, \varphi, \xi) p(\xi) d\xi = 1 - \sin \beta \cos \varphi \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha - w_0, \quad (9)$$

$$(\beta, \varphi): 1 - \sin \beta \cos \varphi \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha - w_0 \leq 0.$$

2. ФУНКЦИЯ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ ОБОЛОЧКИ

Функцию влияния $G_w(\beta, \xi)$ для оболочки в осесимметричной постановке построим с использованием разложений в ряды Фурье по полиномам Лежандра $P_n(\cos \beta)$ и Гегенбауэра $-\sin \beta C_{n-1}^{3/2}(\cos \beta)$ [1,7-9]

$$\begin{pmatrix} G_u(\beta, \xi) \\ G_\chi(\beta, \xi) \end{pmatrix} = -\sin \beta \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} G_{un}(\xi) \\ G_{\chi n}(\xi) \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2}(\cos \beta),$$

$$\begin{pmatrix} G_w(\beta, \xi) \\ \delta(\beta - \xi) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} G_{wn}(\xi) \\ \delta_n(\xi) \end{pmatrix} P_n(\cos \beta), \quad (10)$$

$$\delta_n(\xi) = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} \delta(\beta - \xi) P_n(\cos \beta) \sin \beta d\beta = \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \xi) \sin \xi.$$

Подстановка (10) в (6) с учётом известных соотношений для полиномов Лежандра и Гегенбауэра [1,7-9] приводит к системе уравнений относительно коэффициентов рядов (10)

$$\mathbf{L}_n \mathbf{G}_n + \mathbf{p}_n = 0, \quad \mathbf{L}_n = (L_{nij})_{3 \times 3}, \quad (11)$$

$$\mathbf{G}_n = (G_{un}, G_{wn}, G_{\varphi n})^T, \quad \mathbf{p}_n = [0, \delta_n(\xi), 0]^T,$$

$$L_{n11} = \eta^2(2 - k^2) - n(n+1),$$

$$L_{n12} = 2(1 - \eta^2) + \eta^2 k^2, \quad L_{n13} = \gamma^2 n(n+1) + \eta^2 k^2,$$

$$L_{n21} = [2(1 - \eta^2) + \eta^2 k^2] n(n+1), \quad L_{n22} = -\eta^2 k^2 n(n+1) - 4(1 - \eta^2),$$

$$L_{n23} = -\eta^2 k^2 n(n+1), \quad L_{n31} = \gamma^{-2} L_{n13}, \quad L_{n32} = -\eta^2 k^2 \gamma^{-2}, \quad L_{n33} = -\gamma^{-2} L_{n13}.$$

Решая систему (11), находим коэффициенты ряда для функции влияния

$$G_{wn}(\xi) = \frac{Q_{2n}}{Q_{3n}} \delta_n(\xi), \quad Q_{2n} = Q_2 [n(n+1)],$$

$$Q_{3n} = Q_3 [n(n+1)], \quad Q_2(l) = (\eta^2 k^2 + \gamma^2 l) [2\eta^2 + l(\gamma^2 - 1)],$$

$$Q_3(m) = k^2 \eta^2 l^3 \gamma^2 (\gamma^2 - 1) + 2\gamma^2 l^2 [\eta^4 (k^2 + 2) - 2\eta^2 (\gamma^2 + 1) + 2\gamma^2] +$$

$$+ \eta^2 l [k^2 \eta^4 - ((\gamma^2 + 1)k^2 + 2\gamma^2) 4\eta^2 + (4\gamma^2 k^2 + 8\gamma^2)] + 8\eta^4 k^2 (1 - \eta^2). \quad (12)$$

Это уравнение является одномерным интегральным уравнением относительно функции распределения контактного давления $p(\xi)$. Для его решения необходимо построить ядро $G(\beta, \varphi, \xi)$ этого интегрального уравнения.

3. РАЗРЕШАЮЩАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Разложим контактное давление $p(\xi)$ в ряд по полиномам Лежандра

$$p(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m P_m(\cos \xi). \quad (13)$$

Подставим (10), (12) и (13) в уравнение (9). С учётом свойства ортогональности для полиномов Лежандра [1,7-9] приходим к уравнению

$$2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Q_{2m}}{Q_{3m}} p_m \left\{ P_m[\cos \beta_1(\beta, \varphi)] + P_m[\cos \beta_2(\beta, \varphi)] \right\} = \\ = 1 - \sin \beta \cos \varphi \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha - w_0. \quad (14)$$

Решение уравнения (14) может быть получено путем его сведения к системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов p_m .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен эффективный численно-аналитический метод исследования силового состояния внутри пятен контакта упругих композитных сферических оболочек, опирающихся на две наклоненные под углом к друг другу плоские поверхности.

Метод основан на построении функции влияния для оболочки в осесимметричной постановке, с последующим ее разложением в ряд Фурье по полиномам Лежандра и Гегенбауэра. Получена разрешающая система уравнений для соответствующих коэффициентов.

Разработанная методика позволит провести более корректное исследование динамики различных робототехнических систем, основными управляемыми элементами которых являются упругие сферические оболочки, осуществляющие сложные кинематические движения по различным поверхностям. К числу этих систем, в частности, относится «робот-бабочка», основной управляемый элемент которого, тонкая сферическая оболочка, катящаяся с одновременным верчением и проскальзыванием по двум параллельным пластинам, как по рельсам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киреевков А., Федотенков Г., Ширяев А., Жаворонок С. *Применение теории многокомпонентного сухого трения в некоторых управляемых робототехнических системах* // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2022. – Vol.18(1). – Pp.14-23. DOI: 10.22337/2587-9618-2022-18-1-14-23.
2. Kireenkov A.A. *Modelling of the force state of contact of a ball rolling along the boundaries of two rails* // AIP Conference Proceedings. – 2021. – Vol.2343. – 120002. DOI: 10.1063/5.0047955.
3. Kireenkov A.A. *Influence of the Combined Dry Friction on the Dynamics of the Rigid Ball Moving Along Two parallel Rails* / 9th edition of the International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering (COUPLED PROBLEMS). – 2021. https://www.scipedia.com/public/Kireenkov_2021b.

4. Surov M., Shiriaev A. et al. *Case study in non-prehensile manipulation: Planning and orbital stabilization of one-directional rolling for the Butterfly robot* / Proceedings – IEEE International Conference on Robotics and Automation. – 2015. – Pp.1484-1489.
5. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Coupled Dry Friction Models in Problems of Aviation Pneumatics' Dynamics* // International Journal of Mechanical Sciences. – 2017. – Vol.127. – Pp.198-203.
6. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Transient contact problem for spherical shell and elastic half-space* / In: Shell Structures: Theory and Applications, Vol.4. – CRC Press, Balkema, Taylor & Francis Gr., Leiden, 2018. – Pp.301-304.
7. Fedotenkov G.V., Zhavoronok S.I. *Transient contact of a cylindrical shell and a rigid body* // AIP Conference Proceedings. – 2021. – Vol.2343. – 120010.
8. Киреенков А.А., Федотенков Г.В. *Модель силового контакта композитной сферической оболочки с твёрдой поверхностью с учётом комбинированного анизотропного сухого трения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №4. – С.558-569.
9. Киреенков А.А., Федотенков Г.В. *Движение композитной сферической оболочки по твёрдой поверхности с учётом комбинированного сухого трения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №3. – С.327-340.



СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОГРЕССИРУЮЩЕГО РАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИТА В4С/А1

Клементьев П.Д., Шешенин С.В.

*ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»,
г. Москва, Россия*

Объектом исследования данной работы является дисперсный композитный материал, состоящий из сплава алюминия Al2024 и частиц карбида бора В4С. Карбид бора – универсальный керамический материал, известный своей исключительной твердостью, высокой температурой плавления, низкой плотностью и отличной химической стабильностью. Он нашел широкое применение в таких отраслях, как производство брони и режущих инструментов, используется в областях ядерных технологий и абразивной обработки [1]. Однако значительный интерес вызвало включение В4С в алюминиевую матрицу для получения композитного материала.

ВВЕДЕНИЕ

Композит В4С/А1 обеспечивает уникальный баланс между легкостью конструкции и улучшенными механическими свойствами, что делает его особенно привлекательным для применений, требующих одновременно высокой прочности и малого веса материала [2]. Дисперсия частиц В4С в матрице из сплава алюминия обеспечивает дополнительное армирование, способствуя повышению твердости, жесткости и износостойкости по сравнению с алюминием. В связи с этим композиты В4С/А1 нашли применение в аэрокосмической, автомобильной, оборонной и других отраслях промышленности [3].

Определение эффективных свойств и микроструктурных механизмов деформирования композита В4С/А1 имеет первостепенное значение для эксплуатации данного материала. Экспериментальные исследования позволяют получить сведения о механических свойствах композитов на уровне микроструктуры. Исследование деформированной микроструктуры, определение типов и количества повреждений при различных НДС является значимой областью современных исследований [4]. Выделяются основные типы разрушения – хрупкое разрушение включений, отслоение на границе фаз материалов, трещины в матрице [5]. Также указывается различное поведение материала при сжатии и растяжении – области разрушения и характеристики отличаются при рассмотрении НДС на микроуровне [6]. В работе численно решены краевые задачи, выполнено моделирование разрушения В4С/А1 на микро и мезоуровнях, основанное на изображениях микроструктуры. Для моделирования разрушения использовался критерий напряжений Мизеса. Получены результаты, соответствующие имеющимся экспериментальным данным. Проведено моделирование микроструктуры, основанное на создании геометрических форм подобных формам включений В4С [7]. В ходе исследований сделан вывод, что в процессе деформирования первым начинает разрушаться материал включений, инициируя разрушения всего композита. Показано, что сложная геометрическая форма

включений требует учета при моделировании разрушения на мезоуровне, при растяжении в В4С могут возникать области сжатия, а при сжатии, наоборот, области растяжения.

Выбор метода моделирования прогрессирующего разрушения карбида бора является актуальной темой исследований. В работе [8] исследуются современные подходы к моделированию разрушения при решении задач методом конечных элементов. Проведено сравнение методов, основанных на деградации свойств конечного элемента и деградации свойств в точках интегрирования. Показана разница двух методов, заключающаяся в том, что удаление всего элемента влияет более существенно на жесткость исследуемой конечно элементной модели.

В данной работе мы рассматриваем задачу моделирования материала В4С/Al на мезоуровне. Имеющиеся экспериментальные данные и расчеты [9] показывают, что локальное разрушение материала может возникать на уровне микроструктуры материала в процессе деформирования при нагрузках, далеких от разрушающих для всего образца. В частности, сравнение расчетных и экспериментальных $\sigma - \varepsilon$ диаграмм показывает, что расчетная диаграмма оказывается выше экспериментальной с увеличением деформаций (рис.1). Это свойство требует учета при моделировании композитного материала на макроуровне.

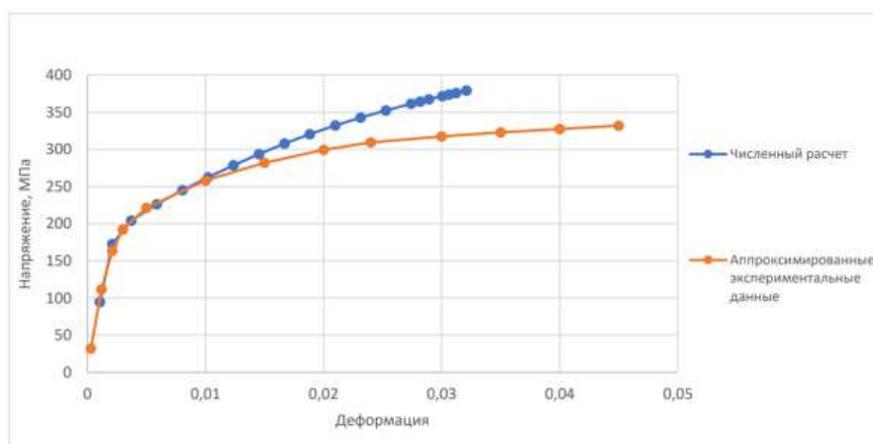


Рис.1. Сравнение численных и экспериментальных диаграмм В4С/AL.

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ МОДЕЛИ МАТЕРИАЛОВ

Материал матрицы Al2024 изучен в литературе. Для его моделирования в расчетах использована упругопластическая модель с мультилинейным изотропным упрочнением. Полное приращение деформации складывается из приращений упругой и пластической деформации соответственно

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p.$$

Для определения приращения пластических деформаций используется ассоциированный закон течения

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}},$$

где λ – множитель Лагранжа, $f(\sigma_{ij})$ – условие текучести Мизеса.

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_{eqv} - \sigma_A(\varepsilon_{pq}^p),$$

$$\sigma_{eqv} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}},$$

где S_{ij} – девиатор напряжений.

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}.$$

Объемные свойства остаются упругими

$$\sigma = K\theta,$$

σ – объемное напряжение, K – объемный модуль упругости, θ – объемная деформация.

Для моделирования упрочнения использован набор точек экспериментально определенной диаграммы $\sigma - \varepsilon$ материала матрицы, соединенный прямыми линиями. Материал включений предполагается изотропно упругим, при достижении критерия разрушается хрупко.

В качестве критериев разрушения взяты критерий Мизеса и максимальных напряжений. Критерий Мизеса, учитывающий разную прочность материала на сдвиг при растяжении и сжатии, взят в виде

$$\sigma_{eqv}^{crit} = \begin{cases} \sigma_{eqv}^{tens}, & \theta > 0 \\ \sigma_{eqv}^{comp}, & \theta < 0 \end{cases}$$

σ_{eqv}^{tens} и σ_{eqv}^{comp} – параметры материала, характеризующие прочность на сдвиг при растяжении и сжатии соответственно. Из литературы известно, что типу хрупкого разрушения также хорошо соответствует критерий максимального главного напряжения, кратко записанный в виде

$$\sigma_1^{crit} = \sigma_1^{tens}, \quad \sigma_1^{tens} > 0.$$

Рассматриваются два метода моделирования прогрессирующего разрушения. Оба они применяются к материалу включений В4С и моделируют хрупкое разрушение. Методы реализованы в МКЭ программе в качестве оригинальных командных файлов и подпрограмм. Первый подход основан на полной деградации свойств конечного элемента при наступлении условия разрушения в нем. Матрица жесткости этого элемента умножается на ноль, исключая его жесткость из прочностных характеристик всей модели. Процедура решения задачи этим методом реализована в цикле, который можно описать следующей последовательностью действий на каждом шаге по параметру нагружения: приращение нагрузки, решение краевой задачи, определение разрушенных элементов, деградация свойств в разрушенном элементе. Вторым методом моделирования прогрессирующего разрушения используется деградацию упругих свойств в каждой точке интегрирования конечного элемента. Определяющие соотношения заданы таким образом, чтобы материал являлся упругим, пока не достигнет критерия разрушения. После начала разрушения происходит постепенное разупрочнение материала в точке интегрирования. С этого момента материал в точке интегрирования предполагается поврежденным. Уменьшение напряжений продолжается до достижения нуля параметром поврежденности. После этого касательный модуль приравняется нулю, материал в данной точке считается полностью разрушенным. Вводится параметр D , определенный от 0 до 1, соответствующий положению материала на кривой деформирования в данной точке интегрирования.

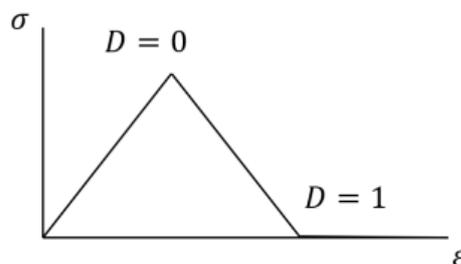


Рис.2. σ - ϵ диаграмма материала с учетом разрушения.

РЕЗУЛЬТАТЫ 2D РАСЧЕТОВ

В работе использованы снимки микроструктуры композитного материала (рис.3а). Экспериментальные данные любезно предоставлены из Харбинского технологического университета. На снимке серое с белыми включениями – алюминиевый сплав, черное – включения.

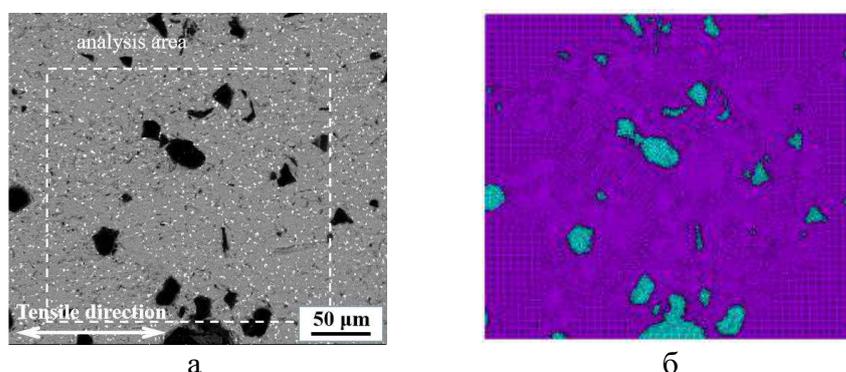


Рис.3. а) изображение микроструктуры материала V4C/Al, б) КЭ сетка после оцифровки.

Эти снимки были оцифрованы, по ним построена конечно-элементная сетка (рис.3б), используемая для численных экспериментов.

Во всех численных экспериментах реализовано одноосное растяжение образца. После решения краевой задачи вычисляются осредненные величины, которые потом сравниваются между собой и с экспериментальными данными. Осредненные величины вычисляются по области

$$\langle \bar{g} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \bar{g}(\bar{x}) dV, \quad V \geq RVE.$$

Интегрирование заменено на суммирование при использовании сетки конечных элементов. Тогда, обозначая $\sigma_{\alpha\beta}^i$ как найденное напряжение в i -ом элементе с объемом V_i , можно выписать осредненное напряжение и деформацию

$$\langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \sigma_{\alpha\beta}^i V_i,$$

$$\langle \epsilon_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \epsilon_{\alpha\beta}^i V_i.$$

На рис.4а представлены экспериментальные данные и семейство рассчитанных диаграмм в случае использования техники разрушения всего элемента. Проведены линии экспериментальных данных, расчета без учета

разрушения и три значения прочности при растяжении материала. Прочность на сжатие во всех расчетах принималась равной 4000 МПа. Видно, что диаграммы, соответствующие разрушению В4С, имеют тенденцию к слишком быстрому падению. От величины прочности зависит только момент наступления разрушения. На рис.4б показана соответствующая диаграмма в случае использования техники прогрессирующего разрушения с критерием напряжений Мизеса в точках интегрирования.

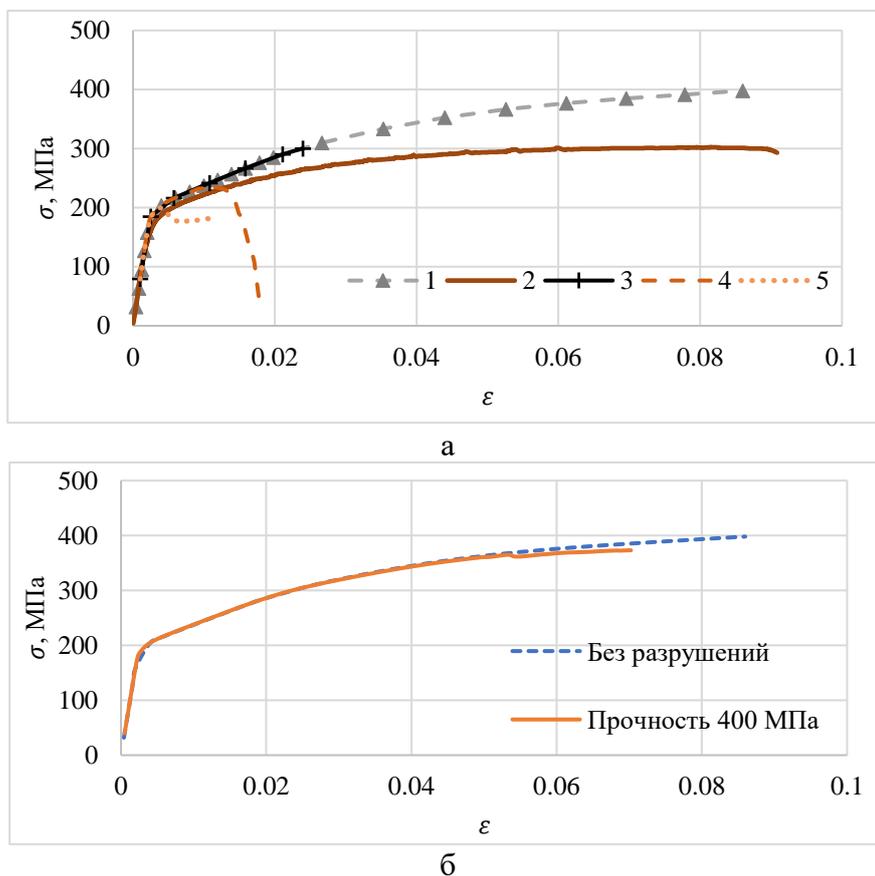


Рис.4. а) диаграмма $\sigma - \varepsilon$ для техники разрушения элемента: 1 – расчет без учета разрушения, 2 – экспериментальные данные, 3 – расчет с прочностью 4000 МПа, 4 – прочность 600 МПа, 5 – прочность 400 МПа; б) диаграмма $\sigma - \varepsilon$ при реализации разрушения в точках интегрирования.

Поверхность испытуемого образца фотографировалась не только в момент времени до нагружения, но и в последующие моменты во время деформирования. В процессе были построены изображения распределения деформаций на поверхности образца при различном уровне нагружения (рис.5).

На рис.5 внизу каждого отдельного снимка видна область с концентрацией деформаций. Эта область определена, как место наибольших повреждений. Результаты моделирования техники разрушения в точке интегрирования в этой области представлены на рис.6.

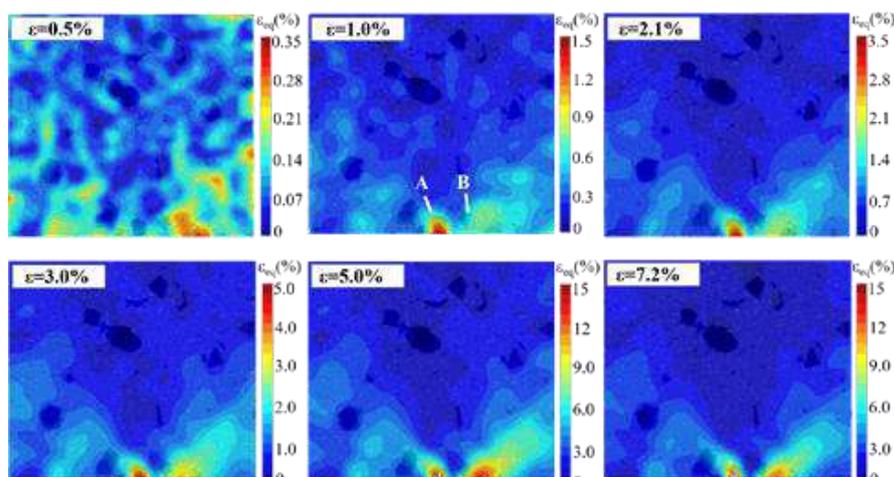


Рис.5. Распределение поверхностных деформаций.

На рис.6 показано распределение поврежденности при средней деформации 7% в случае использования техники разрушения в точке интегрирования. Черными линиями обозначены границы материалов. Центральное включение полностью разрушено, повреждена практически вся граничная часть разделов сред композита.

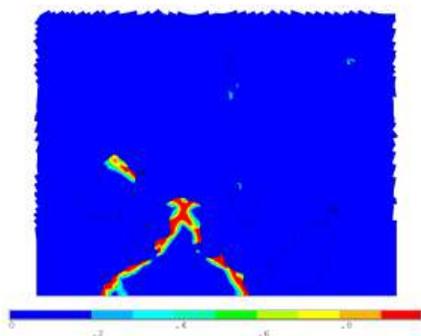


Рис. 6. Параметр D в области наибольшего разрушения.

На рис.7а,б представлено сравнение двух критериев разрушения в случае реализации разрушения в точках интегрирования. Изображен параметр поврежденности для случая применения каждого из критериев. Критерий главного напряжения демонстрирует проникновение разрушения вглубь включения и образование трещинообразного повреждения. В случае разрушения по Мизесу разрушение происходит в основном на границе материалов.

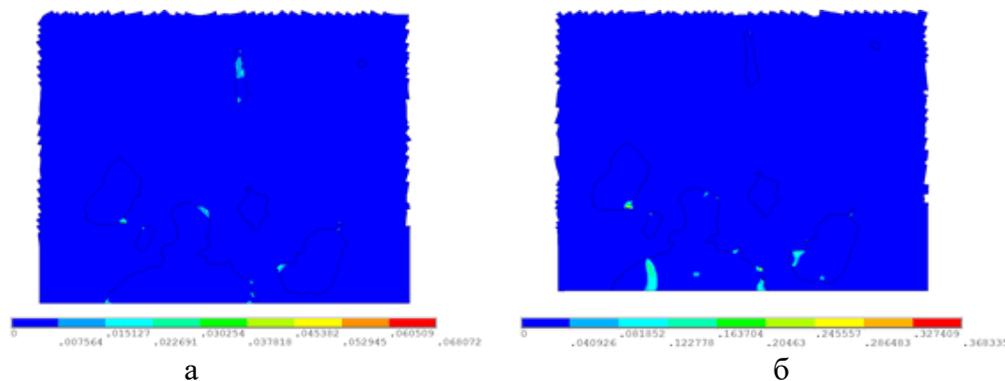


Рис.7. Распределение параметра поврежденности. а) критерий напряжения Мизеса; б) критерий главного напряжения.

РЕЗУЛЬТАТЫ 3D РАСЧЕТОВ

Трехмерные модели реальной структуры В4С/Al были получены путем послойного сканирования рентгеновским излучением образцов материала. На основе этих моделей построены КЭ сетки. Примеры подобной сетки приведены на рис.8.

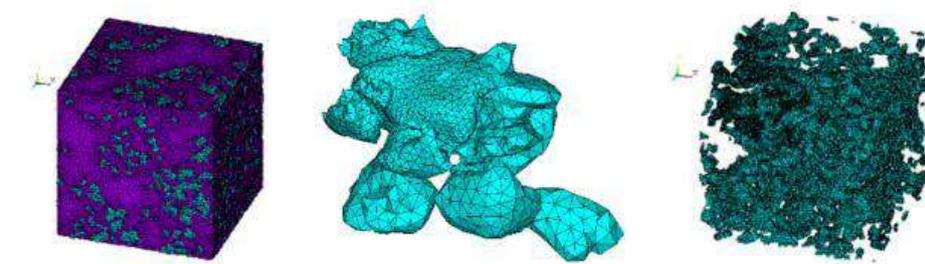


Рис.8. 3D сетки В4С/Al.

Аналогично 2D случаю проводились расчеты с использованием двух методов моделирования прогрессирующего разрушения включений. Диаграммы с результатами представлены на рис.9,10. В случае разрушения конечного элемента целиком диаграмма падает слишком быстро после начала разрушения. Этот эффект уже был показан в двумерном случае и подтверждается трехмерным расчетом. Для метода моделирования разрушения в точке интегрирования эта особенность не наблюдается. Кривая идет ниже или выше, в зависимости от величины критериального напряжения, вниз не падает. Таким образом, удастся подобрать параметры критерия разрушения, чтобы диаграмма численного решения совпадала с экспериментальной.

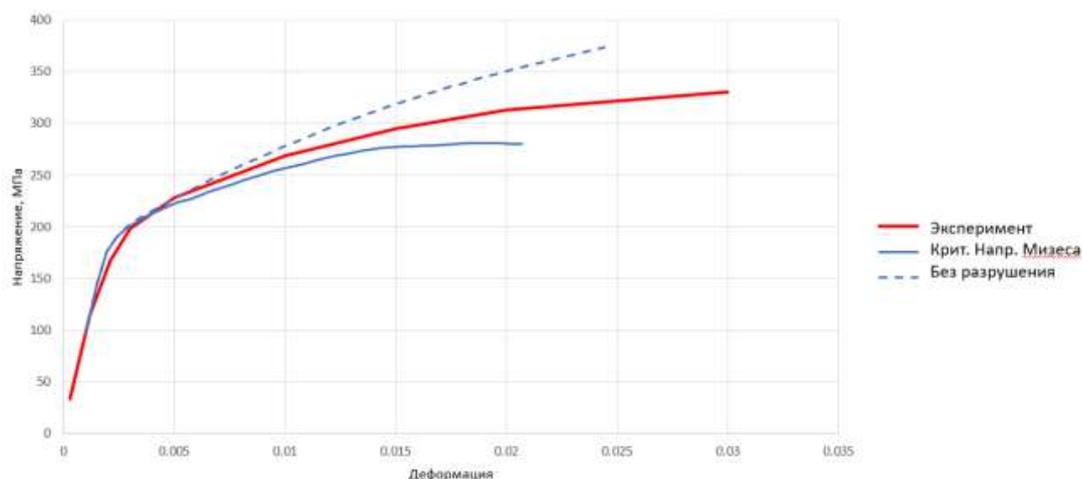


Рис.9. Диаграмма $\sigma - \varepsilon$ в случае применения метода разрушения конечного элемента.

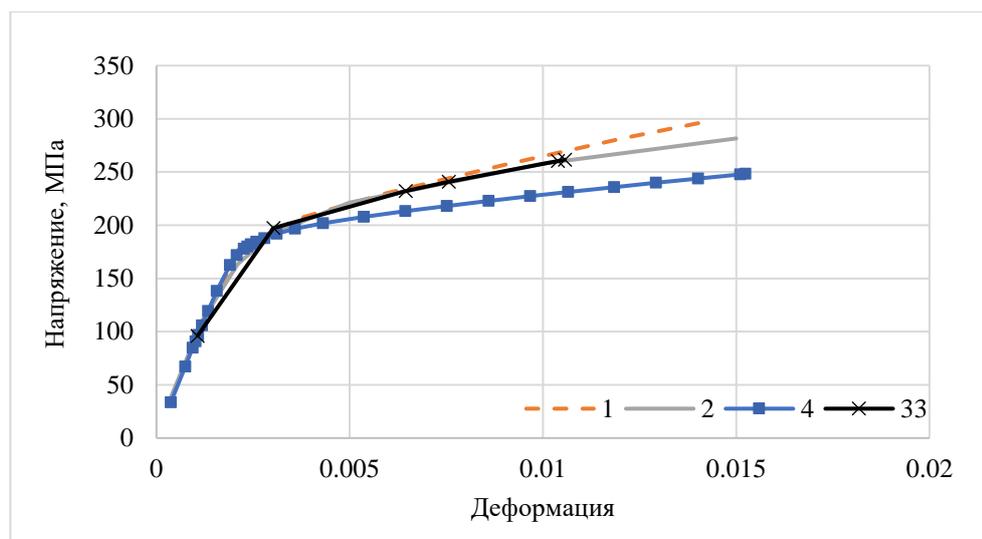


Рис.10. Диаграмма $\sigma - \varepsilon$ в случае применения метода разрушения в точке интегрирования. 1 – расчет без разрушений, 2 – экспериментальные данные, 3 – расчет с прочностью 2000 МПа, 4 – с прочностью 400 МПа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспериментальные данные демонстрируют необходимость учета разрушения материала на локальном уровне при моделировании неразрушающего нагружения на макроуровне всего образца. Проведенное исследование показывает, что учет хрупкого прогрессирующего разрушения включений оказывает существенное влияние на поведение материала В4С/А1 в ходе моделирования. Двумерные расчеты демонстрируют качественно схожую с имеющимися экспериментальными данными картину деформаций и разрушений. Показано, что разрушение включения оказывает эффект на концентрацию деформаций в металлической матрице, окружающей поврежденный участок. Образуются области с большими деформациями, в которых, вероятно, при дальнейшей нагрузке образуются новые повреждения.

Применены два варианта моделирования разрушения: полное разрушение всего конечного элемента и постепенное разрушение материала в точках интегрирования. Метод полного разрушения конечного элемента продемонстрировал слишком быстрое разрушение образца по отношению к экспериментальным данным. Лавинообразное разрушение следует практически сразу после начала разрушений в образце. Эта картина не соответствует экспериментальным данным. В случае разрушения в точках интегрирования разрушение происходит плавно, постепенно снижая кривую напряжение – деформация, что более соответствует реальному поведению материала.

Рассмотрены два различных критерия хрупкого разрушения включений и два способа реализации разрушения в рамках метода конечных элементов. Исследованы различия развития разрушений при использовании критерия максимальной интенсивности касательных напряжений и критерия наибольшего главного напряжения. В случае критерия Мизеса области разрушения образуются на границе включение/матрица, демонстрируя поведение схожее с эффектом отслоения. При использовании критерия максимально главного напряжения

эффекта отслоения на ранних этапах нагружения не наблюдается. Область разрушения проникает вглубь включений, образуя трещинообразную область.

Сравниваемые методы применены к трехмерным задачам. Результат в целом соответствует двумерному случаю. Методика разрушения всего конечного элемента оказывается слишком грубой, образец в таком случае разрушается быстрее, чем согласно экспериментальным данным. Применение метода разрушения в точках интегрирования позволяет добиться лучшего совпадения с экспериментальными данными. А вариация параметров модели позволяет достичь количественного совпадения расчетной и экспериментальной кривых.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zhang Y., Dong H., Liang K., Huang Y. *Impact simulation and ballistic analysis of B4C composite armour based on target plate tests* // *Ceramics International*. – 2021. – No.47. – Pp.10035-10049.
2. Liu Zhang, Guopu Shi, Xu Kun, Hao Wu, Qinggang Li, Junyan Wu, Zhi Wang *Phase transformation and mechanical properties of B4C/Al composites* // *Journal of Materials Research and Technology*. – 2020. – No.9(2). – Pp.2116-2126.
3. Huang X., Yin C., Ru H., Zhao S., Deng Y., Guo Y., Liu S. *Hypervelocity impact damage behavior of B4C/Al composite for MMOD shielding application* // *Materials and Design*. – 2020. – No.186. – 108323.
4. He Y., Xu H., Jiang B., Ji Z., Hu M. *Microstructure, mechanical and tribological properties of (APC+B4C)/Al hybrid composites prepared by hydrothermal carbonized deposition on chips* // *Journal of Alloys and Compounds*. – 2021. – No.888. – 161578.
5. Alihosseini H., Dehghani K. *Microstructure characterization, mechanical properties, compressibility and sintering behavior of Al-B4C nanocomposite powders* // *Advanced Powder Technology*. – 2017. – No.28. – Pp.2126-2134.
6. Balokhonov R.R., Romanova V.A., Schmauder S., Emelianova E.S. *A numerical study of plastic strain localization and fracture across multiple spatial scales in materials with metal-matrix composite coatings* // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2019. – No.101. – Pp.342-355.
7. Balokhonov R., Romanova V., Kulkov A. *Microstructure-based analysis of deformation and fracture in metal-matrix composite materials* // *Engineering Failure Analysis*. – 2020. – No.110. – 104412.
8. Шалимов А.С., Ташкинов М.А. *Моделирование деформирования и разрушения пористых неоднородных сред с учетом особенностей их морфологического строения* // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2020. – №4. – С.175-187.
9. Sheshenin S.V., Artamonova N.B., Klement'ev P.D., Orlov E.A., Frolova J.V. *Image-based simulation of dispersed composites and porous rocks* // *MATEC Web of Conferences*. – 2022. – No.362. – Pp.1-10.

УДК 539.3

EDN IOQRQS (<https://elibrary.ru/ioqrqs>)

DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.13



МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭЛАСТОМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В КАЧЕСТВЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ ГАСИТЕЛЕЙ КОЛЕБАНИЙ

Корнев Ю.В., Карнет Ю.Н., Джага А.О.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Существует проблема уменьшения уровня колебаний различных конструкций, во многом она связана с необходимостью повышения прочности и снижения материалоемкости конструкций и выполнением технологических требований, предъявляемых условиями эксплуатации. Эта проблема возникает в различных областях техники: промышленном и гражданском строительстве, авиастроении, тяжелом, транспортном и энергетическом машиностроении, приборостроении и т.п.

К настоящему времени известны различные методы и средства борьбы с недопустимыми колебаниями конструкций, например, изменение жесткостных и инерционных параметров конструкций, применение виброизоляции, повышение демпфирующих свойств с использованием материалов и конструкций с высокой поглощающей способностью и т.д. Но особое место среди них занимают гасители колебаний [1,2]. Их достоинством является достаточно простое получение желаемого эффекта уменьшения уровня колебаний при сравнительно малых затратах. Также плюсом является возможность их учета и использования, как на начальных этапах проектирования конструкции, так и в самом процессе её эксплуатации после выявления неудовлетворительных динамических качеств.

Гасители колебаний являются эффективным средством уменьшения колебаний различных конструкций при действии на них динамических нагрузок от машин или ветровой нагрузки.

В составе гасителей колебаний в различных областях промышленности часто применяются элементы конструкции из эластомерных композитов. Отличительной особенностью эластомерных композитов является высокие обратимые деформации при небольших нагрузках (модуль упругости до 50 МПа) которые обеспечивают данному классу материалов восприимчивость к воздействию колебаний малой частоты и интенсивности [3]. В состав эластомерных композитов входят полимерная основа (каучуки и их смеси) а также упрочняющие наполнители (как правило, частицы высокодисперсного диоксида кремния или углерода), а также ряд органических и неорганических компонентов – ингредиентов.

К гасителям колебаний предъявляются высокие требования, как по механическим свойствам, так и по устойчивости к внешним воздействиям. При этом длительное воздействие ультрафиолетового излучения существенно влияет на комплекс свойств эластомерных композитов и требует дополнительного изучения [4-7].

При разработке изделий из эластомерных композитов с заданными

свойствами важным фактором является оценка структурных эффектов в данных материалах, важно понимать как структура дисперснонаполненного композита влияет на комплекс как механических, так и технологических свойств. Структурные эффекты существенно влияют на процессы переработки данных материалов и связаны с затратами энергии при переработке. В связи с этим, исследование эффекта Пейна где оценивается взаимодействие наполнитель-эластомерная матрица (связано со значением $\text{tg}\delta$), а также способность наполнителя образовывать структуру со связями наполнитель-наполнитель (что связано со значением G') является актуальной задачей.

Суть эффекта Пейна объясняется следствием изменения структуры материала на микроуровне в ходе увеличения амплитуды деформации. Происходит разрушение слабых физических связей, связывающих соседние агломераты/кластеры частиц наполнителя в объеме дисперснонаполненной эластомерной матрицы. Эффект Пейна зависит от концентрации, дисперсности, химии поверхности и других параметров наполнителя в составе эластомерного композита. При этом, данный эффект практически не наблюдается для ненаполненных эластомеров. На механическое поведение эластомерных композитов при исследовании эффекта Пейна так же влияют протяженность межфазного слоя, стеклообразная оболочка вокруг частиц наполнителя и другие параметры структуры материала [8].

Учитывая вышесказанное, целью настоящей работы является разработка и исследование комплекса физико-механических свойств эластомерных композитов, применяемых в качестве элементов конструкции гасителей колебаний.

1. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В данной работе изготовление резиновых смесей проводилось в ИПРИМ РАН с использованием смесителя НААКЕ PolyLab Rheomix 3000 QC с рабочим объемом камеры 379 см^3 , датчиками крутящего момента и температуры на стенках смесителя и самой смеси. Заполняемость камеры в ходе изготовления смесей составляла 75%. Процесс смешения осуществлялся в две стадии максимальная температура при смешении составляла 154°C .

Были исследованы составы на основе каучука СКЭПТ-50 и Бутил каучука БК-1675Н (БК). Данные каучуки выбраны, потому что они имеют широкий рабочий диапазон температур, устойчивы к внешним (погодным) воздействиям и резины на их основе обладают повышенными значениями гистерезиса.

В качестве усиливающего (упрочняющего) компонента в смесь был добавлен технический углерод П-324 (ТУ), далее вводился ещё один наполнитель – микродисперсный шунгит (средний диаметр частиц порядка 5 мкм), т.е. были получены гибридно-наполненные образцы эластомерных композитов (2 наполнителя различной дисперсности: ТУ П-324 и микрошунгит) для улучшения сопротивления воздействию ультрафиолетового излучения и износостойкости полученных резин. Составы и номера образцов представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Составы исследуемых образцов.

Ингредиенты		Номер образца / масс.ч.					
		1	2	3	4	5	6
1	Бутил Каучук (БК-1675Н)	100	100	–	–	100	–
2	Каучук СКЭПТ-50	–	–	100	100	–	100
3	Вулканизирующая группа	5	5	5,5	5,5	5	5,5
4	Оксид цинка	5	5	5	5	5	5
5	Техуглерод П-324	–	50	–	50	50	50
6	Шунгит микро	–	–	–	–	20	20

Исследование кинетики отверждения (вулканизации) проводилось на безроторном реометре Монсанто (ГОСТ 12535-67), кинетики набухания по ГОСТ 1817-2016.

Эффект Пейна исследовался на высокоточном ротационном вискозиметре НААКЕ Rheostress 150 (НААКЕ GmbH). Определение действительной составляющей комплексного динамического модуля проводилось с измерительной системой плоскость – плоскость (угол 0 градусов, зазор между рабочими поверхностями 0,105 мм, диаметр рабочей поверхности вала 35 мм) в диапазоне скоростей деформаций сдвига от 0,0001 до 0,1 1/сек. Вращение производилось по принципу Side-to-side с частотой в 1 Гц. Предварительно производилось термостатирование образца на рабочей поверхности лифта реометра при 60°C с отклонением в $\pm 1,5^\circ\text{C}$. Измерения производились за 21 шаг (1600 секунд) для каждого образца.

Упруго-прочностные свойства определяли на универсальной разрывной машине UTS-10 по ГОСТ (ГОСТ 270-75). Скорость деформирования 500 мм/мин, комнатная температура. Контроль деформации осуществлялся с помощью датчиков механического экстензометра (L-датчика), нагрузка контролировалась датчиком нагрузки на верхней траверсе. Полученные зависимости $P(\varepsilon)$ напряжение – относительная деформация для всех образцов экспортировались в программу AdvancedGrapher v. 2.08. В этой программе подбирались функции и затем проводилось интегрирование полученных зависимостей. Найденный интеграл для зависимости напряжение (в МПа) – относительная деформация (%) является значением удельной работы деформации на разрушение образца.

Упруго-гистерезисные свойства определялись на высокоточном измерительном комплексе NanoTest 600 с применением сфероконического индентора с углом при вершине 60° и радиусом закругления 10 мкм. Индентирование проводилось в режиме контролируемой нагрузки, с преднагрузкой 0,01 мН, максимальная нагрузка 1,5 мН. Снимались зависимости нагрузка – глубина индентирования, на стадиях нагрузки и разгрузки. Для расчета приведённого модуля упругости экспериментальные данные обрабатывались по методу Герца (multipoint) [9].

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

После изготовления резиновых смесей данные составы обрабатывались на вальцах и затем оценивались их вулканизационные характеристики с целью

определения оптимума вулканизации (отверждения) с применением безроторного реометра. Результаты обработки полученных кинетических кривых (зависимость крутящего момента от времени) представлены в таблице 2.

Таблица 2.

Данные кинетики отверждения.

Свойства/ № образца	1	2	3	3 (170)	4	5	6	6 (170)
$M_{\min} [dN \cdot m]$	9,45	13,99	8,21	8,17	11,82	15,76	12,79	12,79
$M_{\max} [dN \cdot m]$	19,09	33,08	15,69	16,89	28,67	38,11	30,99	29,91
$t_{ind} [min]$	5	2,9	13	8,02	6	3,2	5,4	3,9
$t_{90} [min]$	18,5	12	22,5	16,4	19,99	18,5	19,5	11,6
$v [\%/min]$	7,4	11	10,5	11,9	7,15	6,5	7,1	13

Здесь: M_{\min} – минимальный крутящий момент; M_{\max} – максимальный крутящий момент;
 t_{ind} – время начала вулканизации; t_{90} – оптимальное время вулканизации;
 v – скорость вулканизации.

Из таблицы 2 видно, что оптимум отверждения варьируется от 12 до 22 минут, что является типичным значением для большинства эластомерных композитов. Максимальная скорость наблюдается у составов с добавлением ТУ (образцы 2, 4), а добавление шунгита снижает скорость вулканизации в случае с бутилкаучуком (образец 5).

В ходе экспериментов определяли действительную составляющую комплексного динамического модуля сдвига в зависимости от относительной деформации (эффект Пэйна [8]) для резиновых смесей с различными наполнителями. Полученные результаты представлены на рис.1.

Результаты, полученные в ходе экспериментов и представленные на рис.1, показывают, что значения действительной составляющей комплексного динамического модуля сдвига (G') возрастают при добавлении микрочастиц породы шунгит в состав эластомерных композитов. Рост составляет порядка 10% для образцов на основе бутилкаучука. Более выраженный рост G' (порядка 50%) наблюдается с добавлением частиц микрошунгита для образцов на основе СКЭПТ.

Из данных, представленных на рис.1 видно, что для образцов 5 и 6 отмечается выраженное резкое уменьшение параметра G' при больших значениях скорости деформации, чем для образцов 2 и 4. Это свидетельствует о том, что эффект Пэйна более выражен в образцах эластомерных композитов, где в состав добавлены микрочастицы породы шунгит. Данное механическое поведение отмечается как для образцов на основе бутилкаучука, так и для образцов на основе этиленпропилендиенового каучука. Минимальное значение G' получено для образцов на основе БК, что связано с меньшей вязкостью данных композиций. Добавление микрочастиц шунгита снижает минимальное значение G' в составах на основе СКЭПТ, это говорит о некотором снижении вязкости композиций с добавлением микрочастиц шунгита, а также к некоторому снижению взаимодействия наполнитель-матрица в таких составах.

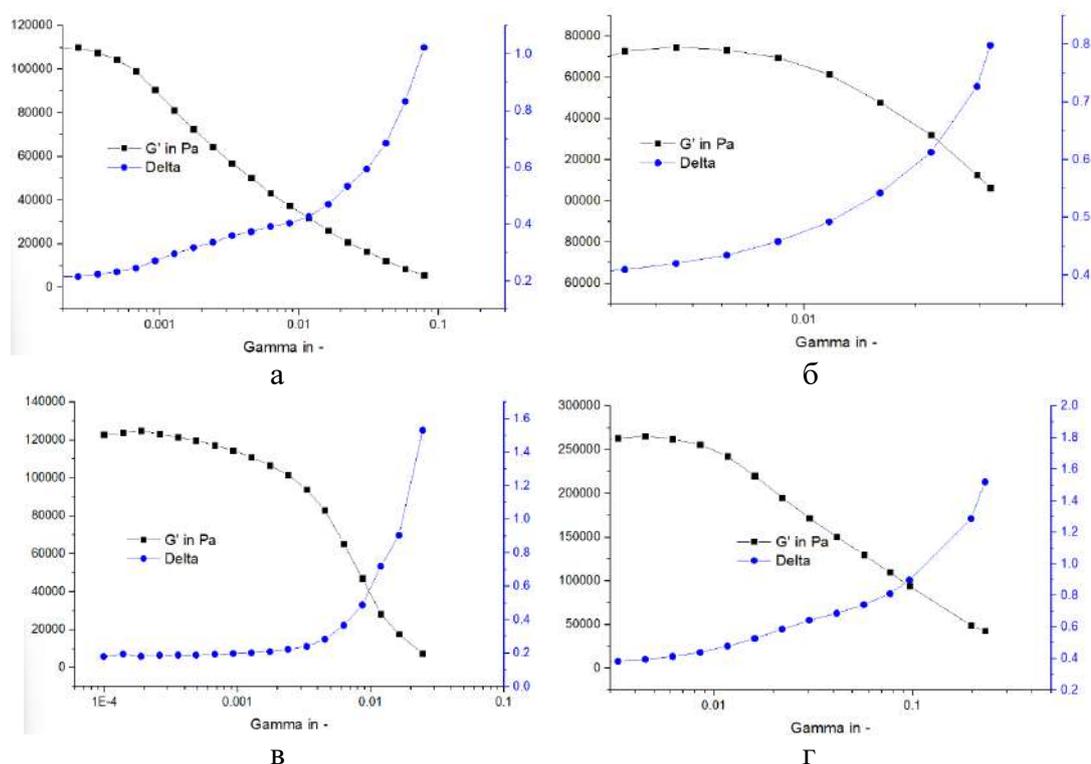


Рис.1. Зависимость действительной составляющей комплексного динамического модуля сдвига (G') и $\text{tg}\delta$ (Delta) от амплитуды деформации ($\dot{\gamma}$, Gamma in): а) образец 2 – БК+ТУ; б) образец 4 – СКЭПТ+ТУ; в) образец 5 – БК+ТУ+микрошунгит; г) образец 6 – СКЭПТ+ТУ+микрошунгит.

Добавление микрошунгита в составы как на основе СКЭПТ, так и на основе БК приводит к росту гистерезисных потерь ($\text{tg}\delta$), рис.1. Наибольшие значения параметра $\text{tg}\delta$ были получены для образцов эластомерных композитов на основе бутилкаучука, как до, так и после добавления частиц микрошунгита в состав данных композитов. Это связано с особенностями структуры эластомерной матрицы бутилкаучука и подтверждается литературными данными [3].

Следующим этапом работы было исследование упруго-прочностных свойств эластомерных композитов при растяжении. Полученные в резиносмесителе смеси были отверждены в оптимуме вулканизации, изготавливались заготовки в виде пластин толщиной 2 мм, далее из них вырубались образцы в виде лопаток по ГОСТ и квадратов 0,5 на 0,5 см и проводились испытания на разрывной машине и методом наноиндентирования. Результаты проведённых испытаний представлены в таблице 3.

Таблица 3.

Упруго-прочностные свойства эластомерных композитов.

№ образца	1	2	3	4	5	6
Показатели	Значение показателя (коэффициент вариации, %)					
Напряжение при удлинении 100%, МПа	0,64 (4,4)	1,9 (3,9)	0,6 (1,5)	1,6 (1,1)	2,8 (5,0)	1,8 (1,0)

Напряжение при удлинении 200%, МПа	1,13 (6,17)	4,7 (3,6)	0,73 (3,38)	2,9 (1,0)	6,3 (4,6)	3,2 (1,0)
Напряжение при удлинении 300%, МПа	-	8,8 (6,2)	0,9 (3,7)	4,7 (2,0)	10,3 (4,5)	4,6 (1,8)
Прочность при растяжении, МПа	1,7 (8,5)	14,4 (15,8)	2,4 (12,6)	8,9 (1,0)	14,6 (3,7)	6,1 (5,3)
Относительное удлинение при разрыве, %	292,1 (8,7)	434,0 (13,0)	720,7 (7,7)	548,4 (11,1)	416,3 (3,4)	421,1 (5,8)
Удельная работа деформации на разрушение, МДж/м ³	1,39	26,5	8,1	24,1	28,9	14,3
Отн. гистерезис при наноиндентировании	0,007	0,504	0,369	0,478	0,432	0,583

Данные, представленные в таблице 3, показывают степень изменения упругих, прочностных и гистерезисных свойств эластомерных композитов при добавлении в их состав микродисперсных частиц породы шунгит. Наибольшее значение прочности установлено для образца эластомерного композита на основе бутилкаучука с введением в его состав двух наполнителей – технического углерода, а также микрочастиц породы шунгит (образец 5). Но отличие в значениях прочности с образцом, наполненным только техуглеродом (образец 2) минимально. Для образцов на основе БК добавка частиц шунгита практически не влияет на уровень прочности, но приводит к некоторому росту напряжения при удлинении от 100 до 300%. При этом несколько снижается относительное удлинение при разрыве, но не критично. Что касается образцов на основе СКЭПТ (образцы 4 и 6), то в данных композициях добавка частиц шунгита приводит к заметному снижению прочности (на 68%). Абсолютные значения прочности для образцов на основе СКЭПТ ниже на более, чем 60% по сравнению с составами на основе БК. Однако максимальные значения относительного гистерезиса при наноиндентировании были получены для образца 6, что является положительным результатом с точки зрения применения данного материала в составе конструкции гасителей колебаний.

ВЫВОДЫ

Установлено, что среди наполненных образцов эластомерных композитов, максимальной прочностью обладают составы на основе бутилкаучука, а максимальный относительный гистерезис при наноиндентировании получен для образца 6 на основе СКЭПТ с добавлением ТУ и микрошунгита.

При изучении эффекта Пейна в данных составах установлено, что максимальный рост G' (порядка 50%) наблюдается в образце с добавлением частиц микрошунгита на основе СКЭПТ (образец 6). Показано, что для образцов 5 и 6 отмечается наиболее выраженный эффект Пейна, чем для образцов 2 и 4.

Установлено, что минимальное значение G' получено для образцов на основе БК, что связано с меньшей вязкостью данных композиций. Показано, что добавление микрочастиц шунгита снижает минимальное значение G' в составах на основе СКЭПТ, это говорит о некотором снижении вязкости композиций с добавлением микрочастиц шунгита, а также к некоторому

снижению взаимодействия наполнитель – матрица в таких составах. Это подтверждается в экспериментах по определению упруго-прочностных свойств эластомерных композитов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шклярчук Ф.Н., Данилин А.Н. *Нелинейные колебания и галотирование провода с обледенением* // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2013. – Вып.11. – С.188-197.
2. Данилин А.Н., Келбышева Е.С., Курдюмов Н.Н., Рабинский Л.Н., Семенов Н.А. *Моделирование нестационарного гистерезиса в задачах о колебании механических систем.* – М.: Издательство МАИ, 2021. – 164 с.: ил.
3. Резниченко С.В., Морозов ЮЛ. *Большой Справочник Резинщика. Часть 1. Каучуки и ингредиенты.* – М.: ООО «Издательский центр «Техинформ» МАИ», 2012. – 744 с.; ил.
4. Резниченко С.В., Морозов ЮЛ. *Большой Справочник Резинщика. Часть 2. Резины и резинотехнические изделия.* – М.: ООО «Издательский центр «Техинформ» МАИ», 2012. – 648 с.; ил.
5. Rizwan M., Chandan M.R. *Mechanistic insights into the ageing of EPDM micro/hybrid composites for high voltage insulation application* // Polymer Degradation and Stability. – 2022. – Vol.204. – 110114.
DOI: 10.1016/j.polymdegradstab.2022.110114
6. Costa P., Ribeiro S., Botelho G., Machado A.V., Lanceros Mendez S. *Effect of butadiene/styrene ratio, block structure and carbon nanotube content on the mechanical and electrical properties of thermoplastic elastomers after UV ageing* // Polymer Testing. – 2015. – Vol.42. – Pp.225-233.
DOI: 10.1016/j.polymertesting.2015.02.002
7. Bhowmick A.K., White J.R. *Thermal, UV- and sunlight ageing of thermoplastic elastomeric natural rubber-polyethylene blends* // Journal of materials science. – 2002. – Vol.37. – Pp.5141-5151.
8. Xuanyu Shi, Shihao Sun, An Zhao, Haimo Zhang, Min Zuo, Yihu Song, Qiang Zheng. *Influence of carbon black on the Payne effect of filled natural rubber compounds* // Composites Science and Technology. – 2021. – Vol.203. – 108586.
DOI: 10.1016/j.compscitech.2020.108586
9. Fischer-Cripps A.C. *Nanoindentation, Mechanical Engineering Series 1.* – Springer Science + Business Media, LLC, 2011. DOI: 10.1007/978-1-4419-9872-9_10



СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГОЙ СРЕДЫ И ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ В НЕЙ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Локтева Н.А., Во Ван Дай

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний момент существуют два подхода в организации виброзащиты фундаментов зданий и сооружений [1]: виброзащита, закладываемая в конструкцию на уровне проектирования и включающая в себя виброгасящие устройства; и подход, основанный на создании вибропоглощающих барьеров [2,3,4]. Частичное решение данного вопроса, заключающееся в установке виброизолирующих преград в виде панелей различной конфигурации. В данной работе изучается движение однородной изотропной пластины, выполняющей функции вибропоглощающего экрана, в упругой среде, моделирующей грунт. Для решения поставленной задачи использован метод компенсирующих нагрузок [5], который позволяет решать подобные задачи для любых реальных видов закрепления преград, а не только для шарнирного закрепления преград, традиционно рассматриваемых в подобных задачах. Решение подобных задач строится на определении так называемых функций влияния, определяемых как в вышеуказанных работах. В данной работе внимание будет сосредоточено на определении перемещений в полупространстве, расположенном за защитным экраном. Также в статье приведены результаты верификации полученных результатов, путем решения аналогичной задачи известными методами. Полученные результаты позволят в дальнейшем оценить виброзащитные свойства преграды.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ С ПРЕГРАДОЙ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

В данной работе рассматривается движение вибропоглощающей преграды, бесконечной по координате y и имеющей длину L по оси x , расположенной в грунте и подвергающейся воздействию плоской гармонической волны, набегающей из одного из полупространств (рис.1а). Вибропоглощающий экран делит грунт на два полупространства – среду «1» и «2». Движение вибропоглощающей преграды описывается уравнениями Кирхгофа [6]. Невозмущенное состояние грунта является недеформированным. Со стороны отрицательного направления оси Oz на препятствие набегают гармоническая волна растяжения с амплитудой нормального напряжения p_* на фронте и частотой ω . Нормальный вектор к фронту волны лежит в плоскости Oxy ,

поэтому компоненты напряженно-деформированного состояний оболочки и грунта не зависят от координаты y .

Основной целью данной работы является получение решения для задачи с граничными условиями, соответствующими любому из существующих способов закрепления пластин, а также верификация подхода, основанного на методе компенсирующих нагрузок. Для этого решение задачи о взаимодействии плоской гармонической волны в упругой среде с шарнирно закрепленной преградой ищется двумя способами:

- на основе метода компенсирующих нагрузок;
- с помощью разложения функций в ряды тригонометрические Фурье, удовлетворяющие граничным условиям.

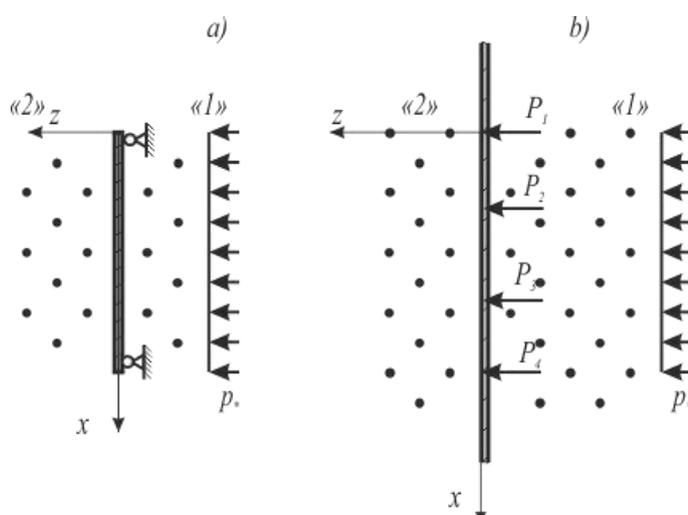


Рис.1. Взаимодействие плоской гармонической волны с преградой в упругой среде: а) шарнирно опертая преграда; б) эквивалентная шарнирно закреплённой преграде бесконечная пластина с приложенными к ней компенсирующими нагрузками, обеспечивающими выполнение граничных условий.

Для решения задачи о движении однородной преграды с произвольными граничными условиями будет использован подход, основанный на удовлетворении граничных условий с помощью компенсирующих нагрузок (рис.1) [5], аналогично реализованному в статье [7]. Тогда нормальные перемещения однородной преграды будут определяться как

$$w(x, \omega) = w^\infty(\omega) + \sum_{n=1}^4 G_w * P_n, \quad (1)$$

где $w(x, \omega)$ – нормальное перемещение средней линии пластины; $w^\infty(\omega)$ – перемещение бесконечной пластины под воздействием плоской гармонической волны; G_w – функция влияния для перемещений, полученная для бесконечной пластины под воздействием дельта-функции; P_n – величина компенсирующей нагрузки. Таким образом, для граничных условий, отличных от шарнирного закрепления, перемещения будут определяться как сумма перемещений бесконечной преграды под воздействием гармонической волны и суммы сверток функций влияния с компенсирующими нагрузками [5], значения которых определяются из условия удовлетворения граничных условий.

В данной работе были рассмотрены граничные условия (2), соответствующие шарнирному опиранию (рис.1), что позволит сравнить результаты с задачей о движении шарнирно опертой преграды в упругой среде, решенной методом разложения функций в ряды Фурье

$$w|_{x=0,l} = 0, \quad w''|_{x=0,l} = 0. \quad (2)$$

Задача для бесконечной преграды сводится к двум этапам решения: первоначально определяется движение преграды в грунте в бесконечной постановке задачи, далее определяются компенсирующие нагрузки и находится решение задачи с заданными граничными условиями. После чего выполняется сравнение полученных результатов с решением, полученным для ограниченной пластины с помощью рядов Фурье.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПЛАСТИНЫ КИРХГОФА

В качестве модели преграды используется однородная пластина, движение которой описывается уравнениями Кирхгофа [6]. С учетом бесконечной постановки задачи и гармоничности всех функций, а также после применения преобразования Фурье, уравнение движения пластины примут вид

$$-\omega^2 \rho h w^F = -D q^4 w^F + p^F, \quad (3)$$

где $D = \frac{E_{\Pi} h^3}{12(1-\nu^2)}$, ρ , E_{Π} , ν – плотность, модуль упругости первого рода,

коэффициент Пуассона материала пластины; L , h – длина и толщина пластины, $w_0(x, t)$ – прогиб середины поверхности (линии) пластины; где q – параметр преобразования Фурье.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ

В качестве модели грунта будем использовать однородную упругую изотропную среду [8]. Замкнутая система уравнений, описывающая ее плоское движение, включает в себя соотношения Коши, физический закон, систему уравнений относительно скалярного потенциала φ и компонент ψ векторного потенциала перемещений и связь потенциалов и перемещений. После применения преобразование Фурье [9] к вышеперечисленным соотношениям, получим следующие выражения

$$\varepsilon_{11}^F = q u^F, \quad \varepsilon_{33}^F = \frac{\partial w^F}{\partial z}, \quad \varepsilon_{13}^F = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^F}{\partial z} + q w^F \right), \quad \theta^F = q u^F + \frac{\partial w^F}{\partial z}; \quad (4)$$

$$\sigma_{11}^F = \lambda \theta^F + 2\mu \varepsilon_{11}^F, \quad \sigma_{33}^F = \lambda \theta^F + 2\mu \varepsilon_{33}^F, \quad \sigma_{13}^F = 2\mu \varepsilon_{13}^F; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^F}{\partial z^2} + k_1^2 \varphi^F = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi^F}{\partial z^2} + k_2^2 \psi^F = 0; \quad (6)$$

$$w^F = \frac{\partial \varphi^F}{\partial z} - i q \psi^F, \quad u^F = -i q \varphi^F - \frac{\partial \psi^F}{\partial z}, \quad (7)$$

где u и w – перемещения вдоль осей Ox и Oz соответственно; c_1 и c_2 – скорости распространения волн растяжения-сжатия и сдвига; σ_{ij} и ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций; θ – коэффициент объемного

расширения; ρ_{gr} и λ , μ – плотность и упругие постоянные Ламе грунта.

$$k_1 = \sqrt{\left| \frac{\omega^2}{c_1^2} - q^2 \right|}, \quad k_2 = \sqrt{\left| \frac{\omega^2}{c_2^2} - q^2 \right|}.$$

СВЯЗЬ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПРЕГРАДЫ И НАПРЯЖЕНИЙ В ГРУНТЕ

Для решения задачи в связанной постановке необходимо определить связь амплитуд давлений в полупространствах с кинематическими параметрами пластины. Рассматривается упругое полупространство, на границе которого возникает поле перемещений, меняющееся по гармоническому закону. В качестве граничного условия на бесконечности используется условие Зоммерфельда. Тогда решение уравнений (6) для сред «1» и «2» с учетом граничных условий и условия Зоммерфельда, обеспечивающих единственность решения, примут вид

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)F}(q, z, \omega) &= C_{11}(q, \omega) \left[e^{i\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(k_1 - |q|) + e^{\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_1) \right], \\ \psi^{(1)F}(q, z, \omega) &= C_{21}(q, \omega) \left[e^{i\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(k_2 - |q|) + e^{\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_2) \right], \\ \varphi^{(2)F}(q, z, \omega) &= C_{12}(q, \omega) \left[e^{-i\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(k_1 - |q|) + e^{-\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_1) \right], \\ \psi^{(2)F}(q, z, \omega) &= C_{22}(q, \omega) \left[e^{-i\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(k_2 - |q|) + e^{-\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_2) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где $H(x)$ – функция Хэвисайда; $C_{11}(q, \omega)$, $C_{21}(q, \omega)$, $C_{12}(q, \omega)$ и $C_{22}(q, \omega)$ – постоянные интегрирования.

Из (4)-(7) определяются выражения для изображений перемещений, деформаций и напряжений. Перемещение в среде «2» примет вид

$$\begin{aligned} w^{(2)F}(q, z, \omega) &= -C_1(q, \omega) \kappa_1(q^2, \omega^2) \left[i e^{-i\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(k_1 - |q|) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_1) \right] - iq C_{22}(q, \omega) \left[e^{-i\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(k_2 - |q|) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_2) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Константы интегрирования в выражениях (8) определяются из условий контакта преграды и упругой среды

$$\sigma_{13}^{(1)F} \Big|_{z=0} = \sigma_{13}^{(2)F} \Big|_{z=0} = 0, \quad w^{(2)F} \Big|_{z=0} - w^{(1)F} \Big|_{z=0} = w_*^F \Big|_{z=0}. \quad (10)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НАБЕГАЮЩЕЙ ВОЛНЫ, А ТАКЖЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

Для задания набегающей волны рассматривается плоская одномерная волна растяжения-сжатия ($\psi \equiv 0$) [6], распространяющуюся вдоль положительного

направления оси Oz , полагаем $\varphi(z, t) = \varphi_a(z) e^{i\omega t}$. Аналогично решаем уравнения (6), с учетом условия Зоммерфельда, откуда получаем значение скалярного потенциала и нормальных напряжений и перемещений в набегающей волне

$$w_*^F(q, \omega) \Big|_{z=0} = \frac{ip_*}{\rho c_1 \omega} \delta(q); \quad \sigma_{33}^F(q, \omega) \Big|_{z=0} = p_* \delta(q). \quad (11)$$

С учетом независимости параметров от переменной q в силу бесконечной постановки задачи, выражение (3) примет вид

$$w^\infty(0, z, \omega) = \frac{p_* \delta(q) e^{-i\kappa_1(q^2, \omega^2)z}}{\omega^2 \rho_{\Pi} h}. \quad (12)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ КИРХГОФА

Рассматривается пластина типа Кирхгофа, на которую воздействует дельта-функция Дирака. Движение пластины описывается выражением

$$\rho h \frac{\partial G_w(x, t)}{\partial t^2} = -D \Delta \Delta G_w(x, t) + \delta(x - \xi_i, t). \quad (13)$$

К данному выражению также применяется прямое преобразование Фурье и учитывается гармоничность всех функций. Далее находится его решение и к нему применяется обратное преобразование Фурье

$$G_{wi} = \frac{(x - \xi_i)^3}{4DR_1^3} \left[ie^{-iR_1(x - \xi_i)} (1 - 2H(x - \xi_i)) - ie^{iR_1(x - \xi_i)} (1 - 2H(x - \xi_i)) - 2 \left(e^{-R_1(x - \xi_i)} H(x - \xi_i) + e^{R_1(x - \xi_i)} H(-x + \xi_i) \right) \right]. \quad (14)$$

С учетом того, что для удовлетворения граничных условий (2) необходимо приложить четыре компенсирующие нагрузки, то для них функции влияния запишутся как

$$G_{wn} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - \xi_i) G_w d\xi, \quad n = 1..4. \quad (15)$$

РЕШЕНИЕ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГРУНТА С ПРЕГРАДОЙ И ВЕРИФИКАЦИЯ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Тогда на основании выражений (1), (14) и (12), а также граничных условий (2) становится возможным определить величины компенсирующих нагрузок для соответствующих условий закрепления. Подставляя полученные величины нагрузок в выражение (1), получаем значения нормальных перемещений для искомых граничных условий.

Для верификации предложенного метода ищется решение задачи для ограниченной по длине пластины, шарнирно закрепленной по краям. Такой вид закрепления соответствует граничным условиям (2). Ход решения аналогичен решению задачи в бесконечной постановке, однако вместо преобразования Фурье по пространственной координате, применяется разложение в тригонометрические ряды, обеспечивающие выполнение граничных условий.

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \left[w_n, w_n^{(1)}, w_n^{(2)}, p_n, p_{1n}, p_{2n}, w_{*n}, \sigma_{33*n}, \sigma_{33n}^{(1)}, \sigma_{33n}^{(2)}, \right. \\ \left. \varphi_n^{(l)}, \psi_{1n}^{(l)}, \varepsilon_{11n}^{(l)}, \varepsilon_{33n}^{(l)}, \sigma_{11n}^{(l)}, \sigma_{33n}^{(l)} \right] \sin(\lambda x), \quad (16)$$

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_{3nm}^{(l)}, \varepsilon_{13n}^{(l)}, \sigma_{13n}^{(l)}, u_{1n}^a, q_n^1 \right] \cos(\lambda x).$$

Получив решение для потенциалов в ряды, константы интегрирования определяются из условия контакта пластины с полупространствами «1» и «2» (10). После чего определяются коэффициенты рядов нормальных перемещений в полупространстве «2» и находится сумма ряда

$$w_n^{(2)}(z, \omega) = \frac{D_{2n}(\lambda_n, \omega)}{D_n(\lambda_n, \omega)} \kappa_{1n}(\omega^2) \times \\ \times \left[i e^{-i\kappa_{1n}(\omega^2)z} H(k_1 - \lambda_n) + e^{-\kappa_{1n}(\omega^2)z} H(\lambda_n - k_1) \right] + \\ + \lambda_n \frac{D_{2n}(\lambda_n, \omega)}{D_n(\lambda_n, \omega)} \frac{\varepsilon_1(k_j, \lambda_n) 4\mu\lambda_n \kappa_{1n}(\omega^2)}{(-2\mu\kappa_{2n}^2(\omega^2) + 2\mu\lambda_n^2)} \times \\ \times \left[e^{-i\kappa_{2n}(\omega^2)z} H(k_2 - \lambda_n) + e^{-\kappa_{2n}(\omega^2)z} H(\lambda_n - k_2) \right]. \quad (17)$$

В качестве примера была рассмотрена шарнирно опертая и жестко закрепленная преграды, имеющие длину $L = 15$ м, толщину $h = 7$ мм и помещенные в сыпучий грунт с соответствующими характеристиками [10] при частоте воздействия $\omega = 1$.

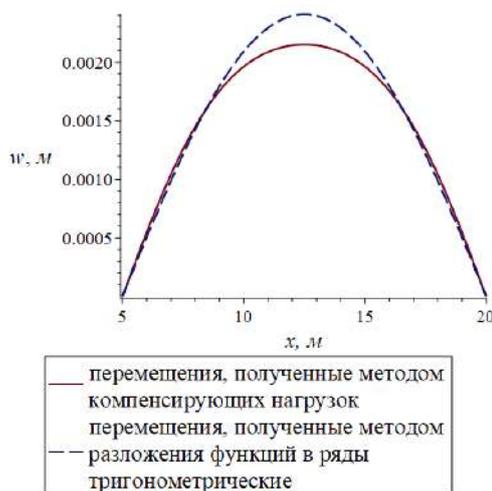


Рис.2. Нормальные перемещения на границе среды «2» и преграды, полученные различными методами.

Графики нормальных перемещений средней линии преграды для шарнирного закрепления, полученные разными методами, приведены на рис.2.

ВЫВОДЫ

В работе разработан подход к решению задач вибропоглощения

с граничными условиями, соответствующим закреплениям, отличным от шарнирных опор. Для чего были решены следующие задачи:

– решена задача об определении нормальных перемещений бесконечной пластины Кирхгофа в упругой среде под воздействием плоской стационарной волны;

– с помощью метода компенсирующих нагрузок было определено перемещение средней линии бесконечной пластины, совпадающее с перемещением среды «2», эквивалентной шарнирно опертой преграде;

– решена задача об определении нормальных перемещений в среде за вибропоглощающим экраном с граничными условиями, соответствующими шарнирному опиранию с помощью разложения в ряды Фурье.

Построены графики зависимости перемещения среды «2» на границе с преградой, полученные обоими методами решения, в зависимости от координаты x . Продемонстрировано выполнение граничных условий. Выполнено сравнение результатов, полученных различными методами, и продемонстрировано незначительное отличие полученных перемещений среды, что позволяет сделать вывод о корректности метода на основании компенсирующих нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.V. *A new principle for protection from seismic waves.*
2. Костров Б.В. *Движение жесткой массивной полосы, впаивной в упругую среду, под действием плоской волны // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т.28. – Вып.1. – С.99-110.*
3. Kuznetsov S.V., Nafasov A.E. *Horizontal acoustic barriers for protection from seismic waves // Advances in Acoustics ceand Vibration. – 2011. – Vol.2011. – 150310.*
4. Рылько М.Я. *О движении в упругой среде жесткого прямоугольного включения под действием плоской волны // Механика твердого тела. – 1977. – №1. – С.158-164.*
5. Венцель Э.С., Джан-Темиров К.Е., Трофимов А.М., Негольша Е.В. *Метод компенсирующих нагрузок в задачах теории тонких пластинок и оболочек. – Харьков: Б. и., 1992. – 92 с.*
6. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.*
7. Локтева Н.А., Иванов С.И. *Шумопоглощающие свойства однородной пластины с произвольными граничными условиями под воздействием плоской гармонической волны в акустической среде // Труды МАИ. – 2021. – №117.*
8. Rakhmatulin K.A. *Elastic and elastoplastic properties of the ground upon dynamic loads on the foundation // Dep in VINITI. – 1983. – No.4149-4183.*
9. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1974. – 832 с.*
10. СП 23-105-2004 *«Оценка вибрации при проектировании и строительстве и эксплуатации объектов метрополитена». – М.: ГОССТРОЙ РОССИИ, 2014.*



ОСОБЕННОСТИ СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЁТА ПОДКРАНОВО-ПОДСТРОПИЛЬНОЙ ФЕРМЫ

Маркина Ю.Д.

ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет», г. Нижний Новгород, Россия

Подкраново-подстропильные фермы (ППФ) используются в цехах черной металлургии, на заводах корабле- и судостроения и в других большепролетных зданиях с поперечным расположением кранов в уровне покрытия. Тяжелые условия работы предприятий и большая грузоподъемность кранов обуславливают значительные размеры ППФ, особенно их ездовых поясов прямоугольного замкнутого сечения, ширина которых составляет 2-3 м.

Стержневая модель ППФ представляет собой плоскую систему. При этом ППФ воспринимает большие нагрузки, действующие из плоскости, следовательно, все же является пространственной конструкцией. Узлы соединения решетки с нижним поясом обладают в плоскости системы большей изгибной жесткостью, чем сами элементы решетки [1]. Поэтому, в отличие от классической фермы, все стержни ППФ испытывают изгиб в ее плоскости. При максимальном нагружении пролета ППФ наблюдается образование пластических деформаций именно в присоединяемых элементах (в стойке и раскосах), а не в самом узле [2,3]. Таким образом, крепление системы решетки к ездовому поясу нельзя считать шарнирным. Элементы решетки вовлекаются и в пространственную работу ездового пояса, испытывая изгиб из плоскости и кручение, оказывая поддерживающее влияние для ездового пояса.

Предварительный расчет ППФ, имеющий цель назначить предварительные размеры сечений её основных элементов, проводится в два этапа [4].

На первом этапе подсчитываются вертикальные погонные нагрузки на ППФ: q_c – от веса вышележащих конструкций, q_k – от кровли, q_t – технологическая, S – снеговая, а также расчетное давление F катков мостового крана.

По этим нагрузкам определяется приближенное значение расчетного изгибающего момента при установке на ППФ катков по правилу Винклера

$$M_z = \alpha_1 \alpha_2 \left[0,125(q_c + q_k + q_t + S)L^2 + \frac{\psi_t}{L} \sum Fy_k(L - y_k) \right], \quad (1)$$

где

L – пролет ППФ;

y_k – расстояния колес кранов от левой опоры ППФ;

α_1 – коэффициент, учитывающий влияние собственного веса ППФ и равный 1,08-1,10;

α_2 – коэффициент, для разрезных ППФ $\alpha_2 = 1$, для ППФ в виде ригеля рамы

$\alpha_2 = 0,8-0,9$;

ψ_t – коэффициент сочетаний, принимаемый п.9.18 [5] в зависимости от числа учитываемых кранов.

Нормальные силы в нижнем N_H и верхнем N_B поясах подсчитываются по формуле

$$N_H = -N_B = 0,98 \frac{M_z}{h}, \quad (2)$$

где h – высота ППФ по осям поясов.

В ездовом поясе в соответствии с [6] подсчитываются изгибающие моменты:

– от изгиба пояса в составе ППФ

$$M'_{zn} = 0,02M_z; \quad (3)$$

– от местного изгиба, вызванного собственным весом пояса, технологической нагрузкой в нем и давлением колес кранов, поставленных также, как и при вычислении M_z по (1)

а) для пролетных сечений

$$M''_{zn} = \alpha_1 (0,042q_T l^2 + \psi_t \zeta \xi_1 l F), \quad (4)$$

б) для опорных сечений

$$M''_{zn} = -\alpha_1 (0,083q_T l^2 + \psi_t \zeta \xi_2 l F), \quad (5)$$

где l – длина панели, ξ_i – числовые коэффициенты, принимаемые по таблице 1, $\zeta = 1$ при кранах на одной стороне ППФ и $\zeta = 2$ при кранах на двух сторонах.

Таблица 1.

Значения коэффициентов ξ_i .

Количество колес кранов на одной стороне ППФ	1	2	3	4
ξ_1	0,17	0,20	0,30	0,38
ξ_2	0,08	0,14	0,20	0,22

Сечение ездового пояса A_H подбирается по нормальной силе N_H и изгибающему моменту M_{zn} , равному

$$M_{zn} = M'_{zn} + M''_{zn} \quad (6)$$

при расчетном сопротивлении материала, равном $0,8R$.

Сечение неездового пояса A_B – по нормальной силе N_B при расчетном сопротивлении $0,75R$.

Подсчитывается момент инерции I_n ездового пояса и момент инерции I_L ППФ, а также параметр β

$$I_L = I_n + 0,9 \frac{A_H A_B}{A_H + A_B} h^2, \quad (7)$$

$$\beta = \frac{I_n}{0,6I_L}.$$

Прикладывается собственный вес ППФ q_ϕ^H и вес ездового пояса q_n^H на один погонный метр

$$\begin{aligned}q_{\phi}^H &= \psi_{\phi} \gamma (A_n + A_b), \\q_n^H &= \psi_n \gamma A_n,\end{aligned}\tag{8}$$

где $\gamma = 78,5$ кН/м, $\psi_{\phi} = 2, 2-2,5$, $\psi_n = 1, 4-1,6$.

Для ППФ в виде ригеля рамы определяется параметр κ

$$\kappa = \frac{I_L H}{I_{\kappa} L},\tag{9}$$

где H – расчетная высота рамы, I_{κ} – момент инерции колонны в плоскости рамы.

Второй этап приближенного расчета проводится тем же путем, что и предварительный, со следующими изменениями:

а) для подсчета максимального изгибающего момента в ППФ используется формула

$$M_z = B \left[(q_{\phi} + q_{ш} + q_{\kappa} + q_t + S) \frac{L^2}{C} + \frac{\psi_t}{L} \sum F y_k (L - y_k) \right],\tag{10}$$

где для разрезной ППФ: $B = 1$, $C = 8$; для ППФ в виде ригеля рамы: $B = 1 - 1/(0,5\kappa - 1)$, $C = 24$;

б) коэффициент α_1 в (4) и (5) принимается равным единице, а вместо q_t в эти формулы вводится $q_t + q_n$;

в) в формулах (2) и (3) вместо 0,98 и 0,02 вводятся соответственно $(1 - \beta)$ и β .

Окончательный (проверочный) расчет на все виды воздействий, испытываемых ППФ, проводится после назначения размеров поперечных сечений основных элементов методом конечных элементов (МКЭ) с применением вычислительных комплексов SCAD, ЛИРА, МОНОМАХ, Stark-ES и т.п. При этом следует:

- 1) максимальные усилия в элементах ППФ от воздействия кранов определять по линиям влияния;
- 2) производить учет жесткости узлов системы;
- 3) производить учет эксцентриситеты крепления решетки к ездовому поясу;
- 4) производить учет влияния решетки при расчете ездового пояса на горизонтальный изгиб и кручение и учитывать дополнительные усилия, возникающие при этом в решетке;

- 5) расчет проводить с использованием конечных элементов оболочки. Использовать конечно-элементную сетку, содержащую не менее 15 элементов по высоте нижнего пояса фермы, изготовленной из тонкостенного закрытого коробчатого профиля, и не менее 4 элементов по высоте полки двутавровой балки. Использовать четырехугольные элементы с соотношением сторон, близким к единице. Применение треугольных конечных элементов не рекомендуется [7];

- б) выполнять расчёт ППФ в составе полного каркаса или части сооружения. Для уменьшения количества конечных элементов и времени решения при создании расчетной схемы можно выделить в продольном направлении рассматриваемого здания ППФ с опорными колоннами, а в поперечном направлении необходимо учитывать конструкции смежных пролетов [7,8].

Учет жесткости узлов допускается производить следующим путем:

1) определить нормальные силы N_i в стержнях фермы по шарнирной схеме (ездовой пояс при этом рассматривается как неразрезной с шарнирным примыканием решетки);

2) полагая нормальные силы неизменными использовать метод сил в форме

$$\mathcal{D}X + \mathcal{D}_p = 0, \quad (11)$$

где

$$\mathcal{D} = [\delta_{ij}], \quad \mathcal{D}_p = [\delta_{ip}], \quad X = [X_j]; \quad (12)$$

3) коэффициенты канонических уравнений вычислить по формулам

$$\delta_{ij} = \delta_{ij}(M) + \delta_{ij}(N) = \sum_{k=1}^m \int_0^{l_k} \frac{M_{ik} M_{jk}}{EI_k} dl + \sum_{k=1}^m \frac{N_{ik} N_{jk}}{EA_k} l_k, \quad (13)$$

$$\delta_{ip} = \delta_{ip}(N) = \sum_{k=1}^m \frac{N_{ik} N_{ip}}{EA_k} l_k,$$

где m – число стержней.

Интегралы Мора

$$\int_0^{l_k} \frac{M_{ik} M_{jk}}{EI_k} dl = \begin{cases} \frac{l_k t}{3EI_k}; & i = j \\ \frac{l_k s}{6EI_k}; & i \neq j \end{cases} \quad (14)$$

где t и s – функции Н.Е. Жуковского, имеющие вид, соответственно, для сжато-изогнутых и растянуто-изогнутых стержней

$$t_c = \frac{3(\tan \nu - \nu)}{\nu^2 \tan \nu}, \quad t_p = \frac{3(\tanh \mu - \mu)}{\mu^2 \tanh \mu}, \quad (15)$$

$$s_c = \frac{6(\nu - \sin \nu)}{\nu^2 \sin \nu}, \quad s_p = \frac{6(\mu - \sinh \mu)}{\mu^2 \sinh \mu},$$

где

$$\nu = \sqrt{\frac{|N|l_k^2}{EI_k}}, \quad \mu = \sqrt{\frac{Nl_k^2}{EI_k}}. \quad (16)$$

Учет эксцентриситета крепления решетки допустимо производить так: если D_i и D_{i+1} – усилия в раскосах, сходящиеся в узле ездового пояса, а α_i и α_{i+1} – углы наклона этих раскосов к оси пояса, то местный узловый момент M_i при эксцентриситете центровки раскосов относительно оси ездового пояса, равном e , будет

$$M_i = (D_{i+1} \cos \alpha_{i+1} - D_i \cos \alpha_i) e. \quad (17)$$

Эти моменты распределяются по элементам пояса в узле i пропорционально их погонным жесткостям и затем передаются на смежные узлы с помощью чисел влияния (величин обратных фокусным отношениям).

Учет влияния решетки при расчете ездового пояса на горизонтальный изгиб и кручение производится следующим образом:

а) при горизонтальном изгибе расчет пояса производится как неразрезной балки на упругих опорах, расположенных в узлах соединения пояса с решеткой. Необходимые для составления уравнений пяти моментов отпорности опор ($\chi_{\Delta i}$)

и относительные (по отношению к жесткости пояса) отпорности $\overline{\chi_{\Delta i}}$ для i -х опор определяются так

$$\begin{aligned}\chi_{\Delta i} &= 3EI_{\text{прив.}i}h^{-3}, \\ \overline{\chi_{\Delta i}} &= \chi_{\Delta i} (EI_{\text{уп}})^{-1},\end{aligned}\tag{18}$$

где h – высота ППФ по осям пояса, $I_{\text{уп}}$ – момент инерции ездового пояса относительно вертикальной оси, $I_{\text{прив.}i}$ – приведенный момент инерции k_i стержней решетки, сходящихся в узле i , равный

$$I_{\text{прив.}i} = \sum_{j=1}^{k_i} I_j \sin \alpha_j,\tag{19}$$

где α_j – угол наклона j -ого элемента решетки к оси ездового пояса.

б) при кручении расчет ездового пояса производится как неразрезной балки на упруго-поворачивающихся опорах по уравнениям пяти бимоментов. Соответствующие абсолютные и относительные отпорности

$$\begin{aligned}\chi_{\gamma i} &= 4EI_{\text{прив.}i}h^{-1}, \\ \overline{\chi_{\gamma i}} &= \chi_{\gamma i} (EI_{\omega})^{-1}.\end{aligned}\tag{20}$$

По полученным в результате расчетов значениям «опорных» (узловых) изгибающих моментов M_{yi} и бимоментов B_i строятся соответствующие эпюры в ездовом поясе, а также определяются дополнительные усилия в элементах решетки.

Для элемента решетки в виде стержня открытого профиля (элемент j) значения изгибающего момента M_j (максимальное), моментов чистого кручения $M_{\text{кр.}j}$, стесненного кручения $M_{\omega j}$ и бимоментов $B_{\omega j}$ подсчитываются соответственно по формулам

$$\begin{aligned}M_j &= (R_i h + K_i) \sin \alpha_j I_{yj} I_{\text{прив.}i}^{-1}, \\ M_{\text{кр.}j} &= GI_{\text{кр.}j} k_j \theta_i \sin \alpha_j \left[\cosh k_j l_j - \cosh k_j (l_j - s_j) \right] A_k^{-1}, \\ M_{\omega j} &= EI_{\omega j} k_j^3 \theta_i \sin \alpha_j \cdot \cosh k_j (l_j - s_j) \cdot A_k^{-1}, \\ B_{\omega j} &= -EI_{\omega j} k_j^2 \theta_i \sin \alpha_j \cdot \sinh k_j (l_j - s_j) \cdot A_k^{-1},\end{aligned}\tag{21}$$

где k_j – изгибно-крутильная характеристика стержня по [8], s_j – расстояние вдоль оси элемента от неездового пояса, l_j – длина элемента решетки.

$$\begin{aligned}R_i &= R_i^o + \frac{M_{i-1}}{d_i} - M_i \left(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_{i+1}} \right) + \frac{M_{i+1}}{d_{i+1}}, \\ K_i &= K_i^o + \frac{B_{i-1}}{d_i} - B_i \left(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_{i+1}} \right) + \frac{B_{i+1}}{d_{i+1}}\end{aligned}\tag{22}$$

есть реакция и реактивный крутящий момент в узле (с индексом «о» вверху – в основной системе). Здесь d_i – длина i -ой панели (рис.1).

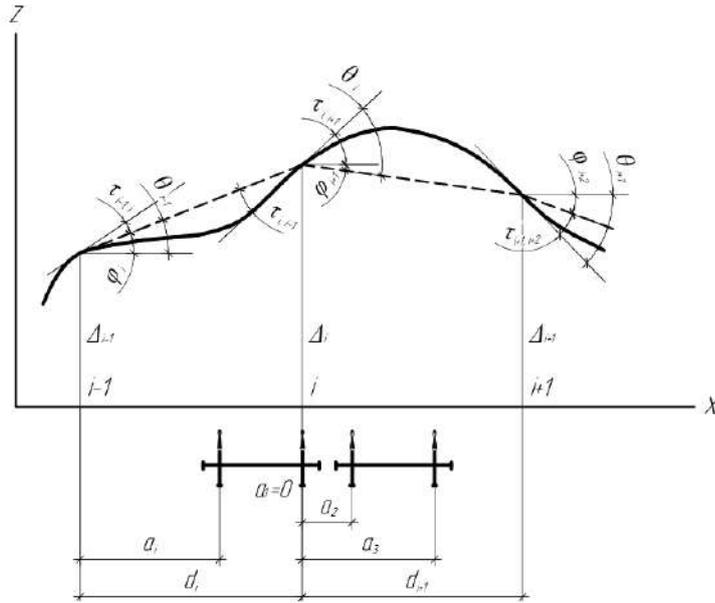


Рис.1. Общая схема деформаций ездового пояса вблизи узла i .

$$A_k = k_j l_j \cosh k_j l_j - \sinh k_j l_j, \quad (23)$$

θ_i – угол поворота узла i в горизонтальной плоскости (рис.1), равный сумме угла поворота узловой линии панели $i+1$ и девиации на опоре i со стороны панели $i+1$

$$\theta_i = \varphi_{i+1} + \tau_{i,i+1}, \quad (24)$$

причем

$$\varphi_{i+1} = (\Delta_{i+1} - \Delta_i) d_{i+1}, \quad (25)$$

где

$$\Delta_i = R_i \chi_{\Delta}^{-1} + K_i h (2EI_{\text{прив.}i})^{-1}, \quad (26)$$

$$\tau_{i,i+1} = (6EI_y d_{i+1})^{-1} \left[\sum_{k=1}^{n_{i+1}} a_k (d_{i+1}^2 - a_k^2) - 2d_{i+1}^2 (M_i + 0,5M_{i+1}) \right], \quad (27)$$

где n_{i+1} – количество грузов в панели $n+1$, a_k – их удаление от левого конца панели (рис.1).

Основные (элементарные) напряжения вычисляются в элементах ППФ в общем случае (произвольное поперечное сечение, не имеющее осей симметрии) по формулам [9]

– от растяжения-сжатия

$$\sigma_x = \frac{N}{A}, \quad (28)$$

– от изгиба в плоскости xOy

$$\sigma_x = \frac{M_z (I_{y_0} y_0 - I_{y_0 z_0} z_0)}{\Delta I}, \quad (29)$$

$$\tau_{xs} = \frac{-Q_y (I_{y_0} S_{z_0} - I_{y_0 z_0} S_{y_0})}{\delta_s \Delta I},$$

– от изгиба в плоскости xOz

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{M_y (I_{z_0} z_o - I_{y_0 z_0} y_o)}{\Delta I}, \\ \tau_{xs} &= \frac{-Q_z (I_{z_0} S_{y_0} - I_{y_0 z_0} S_{z_0})}{\delta_s \Delta I},\end{aligned}\quad (30)$$

где S_{y_0} и S_{z_0} определяются по [10]. Для сечений, обладающих соответствующими осями симметрии, формулы (29) и (30) переходят соответственно в формулы Л. Новье и Д.И. Журавского;

– от кручения в стержне замкнутого контура возникают:

- нормальные секториальные напряжения

$$\sigma_{x\omega} = \frac{B_\omega \omega}{I_\omega}, \quad (31)$$

- касательные напряжения чистого кручения (в замкнутой части контура)

$$\tau_{ks} = \frac{\mp M_x}{8bh\delta_s}, \quad (32)$$

где верхний знак относится к верхнему поясу и левой стенке, нижний – нижнему поясу и правой стенке;

- секториальные касательные напряжения (во всех точках контура)

$$\tau_{\omega s} = \frac{-M_\omega \bar{S}_\omega}{I_\omega \delta_s}, \quad (33)$$

где \bar{S}_ω определяется по [10].

Для стержней открытого профиля напряжения (32) исключаются, а формулы (31) и (33) сохраняют силу.

Местные напряжения могут возникать от трех факторов: локального воздействия крановых (или других подобных) нагрузок, эксцентриситеты в передаче кранового давления на стенку стержня, местных подкреплений типа диафрагм и ребер жесткости. Практически эти напряжения свойственны лишь ездовым поясам ППФ. Алгоритм расчёта местных напряжений приведен в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ельников Н.А., Кочетова Е.А. *Анализ применения систем типа «подкраново-подстропильные фермы» в большепролетных цехах одноэтажных промышленных зданий* / Труды научного конгресса 14-го российского архитектурно-строительного форума. – 2016. – С.143-146.
2. Ерёмин К.И., Шульга С.Н. *Напряженно-деформированное состояние узлов подкраново-подстропильных ферм* // Промышленное и гражданское строительство. – 2012. – №4. – С.52-54.
3. Ерёмин К.И. *Предотвращение разрушений строительных металлических конструкций*. – Магнитогорск: МГТУ им. Г.И. Носова, 2004. – 235 с.
4. Лампси Б.Б., Маркина Ю.Д. *Подкраново-подстропильные фермы. Особенности конструкции, работы и расчёта*. – Нижний Новгород: Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, 2023. – 169 с.
5. СП 20.13330.2016 *Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85**. – М.: Минстрой России, 2016. – 80 с.

6. *Руководство по проектированию стальных подкрановых конструкций.* – М.: ЦНИИПроектстальконструкция, 1976. – 112 с.
7. Tusnina O.A. *Finite element analysis of crane secondary truss* // Magazine of Civil Engineering. – 2018. – No.1(77). – Pp.68-89. DOI: 10.18720/MCE.77.7
8. Туснина О.А. *Расчетное сопровождение реконструкции каркасов действующих металлургических цехов* // Вестник МНСУ. – 2023. – №2. – С.241-253. DOI: 10.22227/1997-0935.2023.2.241-253
9. СП 16.13330.2017 *Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81**. – М.: Минстрой России, 2016. – 126 с.
10. Лампси Б.Б. *Металлические тонкостенные несущие конструкции при локальных нарузках.* – М.: Стройиздат, 1979. – 270 с.

УДК 532.546:539.32
EDN ZMXGJI (<https://elibrary.ru/zmxgji>)
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.16



МАССОПЕРЕНОС С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ И ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ В РАЗНОМОДУЛЬНОЙ СРЕДЕ (ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ)

Мошников М.С., Власов А.Н.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В представленной работе даётся формулировка связанной задачи массопереноса (фильтрации) с учётом геометрической и физической нелинейностей деформирования разномодульной среды. Ее особенность состоит в том, что она будет направлена на решение задачи компенсационного нагнетания, что может найти своё непосредственное применение, например, в строительстве для предотвращения аварийных ситуаций, связанных с недопустимыми осадками зданий и сооружений в районах вечной мерзлоты в условиях изменения климата, при реконструкции зданий и сооружений, а также при строительстве в условиях плотной городской застройки для защиты от негативного влияния от строящихся в непосредственной близости объектов.

ЗАКОН ФИЛЬТРАЦИИ ДАРСИ

Наиболее распространённой моделью фильтрации жидкости в пористой среде является закон фильтрации Дарси [1]

$$\varphi \vec{v} = -\frac{K}{\eta} (\nabla p - \rho g \vec{n}), \quad (1)$$

где v – скорость движения жидкости в порах; p – внешнее давление; φ – пористость среды; K – проницаемость среды; ρ – плотность жидкости; η – динамическая вязкость; $\vec{g} = -g\vec{n}$ – ускорение силы тяжести; \vec{n} – единичный вектор, направленный вертикально вверх.

Для медленных течений без учёта силы тяжести закон Дарси принимает следующий вид

$$\vec{w} = -\frac{k}{\eta} \cdot \vec{\nabla} p = -\frac{k_\phi}{\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p, \quad k_\phi = k \frac{\gamma_f}{\eta}, \quad (2)$$

где p – давление жидкости; k_ϕ – тензор фильтрации; k – тензор проницаемости пористой среды; γ_f – удельный вес жидкости; \vec{w} – вектор скорости фильтрации.

В (2) скорость фильтрации \vec{w} представляет собой фильтрационный поток, который выражается в виде непрерывного поля скоростей через среднюю скорость движения жидкости в поровом пространстве \vec{v}

$$\vec{w} = \varphi \vec{v}. \quad (3)$$

Используя выражения (1) и (3) с учётом движения твёрдой фазы грунта закон Дарси для относительной скорости движения принимает следующий вид

$$\varphi \left(\bar{v} - \frac{d\bar{u}}{dt} \right) = - \frac{k_{\phi}(\varphi)}{\gamma_f} \cdot \bar{\nabla} p \quad (4)$$

или

$$\bar{v} = - \frac{k_{\phi}(\varphi)}{\varphi \gamma_f} \cdot \bar{\nabla} p + \frac{d\bar{u}}{dt}. \quad (5)$$

Закон Дарси, записанный таким образом, представляет собой нелинейную его формулировку, т.к. в нем учитывается изменение коэффициента фильтрации. Это часто реализуется, например в водонасыщенных грунтах, на которые действует нагрузка. При этом в результате фильтрации жидкости изменяется пористость и, как следствие, коэффициент пористости (2).

Следует отметить, что закон фильтрации Дарси не всегда выполняется. Ограничение на его выполнение накладывается числом Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho w d}{\eta}, \quad (6)$$

где d – характерный размер пор (эффективный диаметр).

В соответствии с экспериментальными исследованиями [2] закон Дарси выполняется при значениях числа Рейнольдса Re , лежащего в пределах от 0.01 до 10.00.

МОДЕЛЬ МЯСНИКОВА

При описании процесса фильтрации жидкости в пористой среде с учётом её деформирования предлагается для повышения точности оценки напряженно-деформированного состояния использовать модель Мясникова В.П. разномодульной среды [3,4].

Модель Мясникова находит своё применение, например, в таких разномодульных средах, как горные породы. Эта модель описывает дилатансию (расширение за счёт увеличения пористости и разуплотнения) при сдвиге [5], а также, которая может проявиться при интенсивном насыщении флюидом (например, при компенсационном нагнетании).

Ниже приведём модель Мясникова изотропно-упругой разномодульной среды для геометрически линейного случая (малые деформации). В этой модели потенциал упругих сил, который является функцией трех главных инвариантов тензора деформаций, имеет вид

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{\lambda}{2} I_1^2 - \mu I_2 - \omega I_1 \sqrt{I_2} + \alpha \frac{I_1^3}{\sqrt{I_2}} + \beta \frac{I_3}{\sqrt{I_2}}, \quad (7)$$

где инварианты тензора деформаций определяются следующими равенствами: $I_1 = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$, $I_2 = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$, $I_3 = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki}$; ε_{ij} – компоненты тензора деформаций. Размерные коэффициенты λ , μ , ω , α , β характеризуют упругие свойства среды.

Заметим, что при $\omega = \alpha = \beta = 0$ в (7) среда подчиняется закону Гука. Также модель Мясникова В.П. также включает в себя как частный разномодульные модели Амбарцумяна [6] и Джонса [7].

УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ И ИЗМЕНЕНИЯ ПОРИСТОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ МОДЕЛИ БИО

Для описания фильтрации жидкости и изменения пористости в насыщенной деформируемой пористой среде далее будем пользоваться точкой зрения Эйлера.

При такой точки зрения неразрывность жидкой и твёрдой фаз при деформировании пористой среды в процессе фильтрации описывается системой дифференциальных уравнений баланса масс твёрдой и жидкой фаз [8]

$$\begin{cases} \frac{d(n\rho_f)}{dt} + n\rho_f \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \\ \frac{d((1-n)\rho_s)}{dt} + (1-n)\rho_s \vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

где ρ_s – плотность твёрдой фазы.

Из второго уравнения системы (8) получаем, что изменение пористости будет описываться уравнением

$$\frac{dn}{dt} = (1-n) \left(\frac{1}{\rho_s} \frac{d\rho_s}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \right). \quad (9)$$

Далее будем полагать, что жидкость баротропная (плотность жидкости есть функция давления в ней), а процесс её деформирования изотермический. В этом случае связь между плотностью жидкости и давлением в ней можно представить в виде

$$\frac{d\rho_f}{\rho_f} = \beta_f dp, \quad (10)$$

где β_f – коэффициент сжимаемости жидкости.

Подставляя уравнения (10), и (4) и (9) в первое уравнение системы (8) получим

$$n\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{k_\phi}{n\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p \right) = (1-n) \frac{1}{\rho_s} \frac{d\rho_s}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + n\beta_f \frac{dp}{dt}. \quad (11)$$

В модели Био материал твёрдой фазы (например, скелет грунта) предполагается линейно упругим, при этом далее будем считать (в соответствии с предположением Био), что плотность твёрдой фазы грунта линейно зависит от изменения давления жидкости, а именно [9]

$$\frac{d\rho_s}{\rho_s} = \chi_s dp, \quad (12)$$

где χ_s – коэффициент сжимаемости материала твёрдой фазы.

Подставим (12) в уравнения (9) и (11). В результате система уравнений (8) преобразуется к следующему виду

$$\begin{cases} n\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{k_\phi}{n\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p \right) = \vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + (n\beta_f + (1-n)\chi_s) \frac{dp}{dt} \\ \frac{dn}{dt} = (1-n) \left(\chi_s \frac{dp}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \end{cases} \quad (13)$$

При компенсационном нагнетании объёмной сжимаемостью твердых частиц грунта (скелета) мала и ею можно пренебречь при рабочих значениях давления. В результате получим, что

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{d\rho_s}{dt} = 0. \quad (14)$$

В результате система уравнений (13) упрощается и принимает вид

$$\begin{cases} n\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{k_\phi}{n\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p \right) = \vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + n\beta_f \frac{dp}{dt} \\ \frac{dn}{dt} = (1-n)\vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \end{cases} \quad (15)$$

Далее нам потребуется уравнение равновесия водонасыщенной пористой среды, которое имеет вид

$$\vec{\nabla} \cdot \langle \sigma_{total} \rangle + \rho \vec{f} = 0, \quad \vec{x} \in V, \quad (16)$$

где $\langle \sigma_{total} \rangle$ – среднее полное напряжение; $\rho = \langle \rho \rangle$ – средняя плотность грунта.

В текущей конфигурации среднее полное напряжение $\langle \sigma_{total} \rangle$ в водонасыщенной пористой среде (макро однородной и изотропной) выражается в виде разности эффективных напряжений σ_{eff} и порового давления p , умноженного на коэффициент передачи порового давления α на скелет породы

$$\langle \sigma_{total} \rangle = \sigma_{eff} - \alpha p I. \quad (17)$$

Эффективные напряжения σ_{eff} – это часть усреднённых напряжений в твёрдой фазе грунта, вызванных независимым от жидкости механизмом передачи внутренних сил (например, по контактам между зёрнами скелета грунта) [10].

Подставляя (17) в (16) уравнение равновесия примет следующий вид

$$\vec{\nabla} \cdot \sigma_{eff} - \alpha \vec{\nabla} p + \rho \vec{f} = 0, \quad \vec{x} \in V, \quad (18)$$

где \vec{f} – постоянная по времени удельная массовая нагрузка. Предполагается, что сила \vec{f} одинакова для каркаса и жидкости.

Далее, рассматривая совместно уравнение равновесия (18) и систему уравнений баланса масс твёрдой и жидкой фаз (15) приходим к связанной системе уравнений модели консолидации (связанной задачи массопереноса с учётом деформирования среды) в текущей конфигурации при допущении о не сжимаемости материала скелета грунта

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \sigma_{eff} - \alpha \vec{\nabla} p + \rho \vec{f} = 0 \\ n\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{k_\phi}{n\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p \right) = \vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + n\beta_f \frac{dp}{dt} \\ \frac{dn}{dt} = (1-n)\vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \end{cases} \quad (19)$$

$$k_\phi = k_\phi(n), \quad n = n(\vec{u}(\vec{x}, t)), \quad \gamma_f = const, \quad \beta_f = const.$$

Следует отметить, что в системе (19) уравнение равновесия удобнее решать, используя подход Лагранж, а уравнение фильтрации и уравнение изменения

пористости записаны в эйлеровом пространстве. Для этого переформулируем последние два уравнения системы (19) в движущейся системе координат, которая будет связана с лагранжевыми координатами твёрдого каркаса по методу ALE [11].

В лагранжевых координатах $\vec{\xi}$ система уравнений (19) в случае учёта геометрической и физической нелинейности среды (пористость зависит от времени и координат – $n = n(\vec{x}, t)$) может быть переписана в следующем виде

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \sigma_{eff}(\vec{u}) - \alpha \vec{\nabla} p + \rho \vec{f} = 0 \\ n \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{k_\phi}{n \gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p \right) = \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{u}} + n \beta_f \dot{p} - \beta_f \vec{\nabla} p \cdot \frac{k_\phi}{\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p \\ \dot{n} - \vec{\nabla} n \cdot \frac{k_\phi}{n \gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p = (1-n) (\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{u}}) \end{cases} \quad (20)$$

где $\dot{\vec{u}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{\xi}, t)$, $\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial t}(\vec{\xi}, t)$, $\dot{n} = \frac{\partial n}{\partial t}(\vec{\xi}, t)$, $k_\phi = k_\phi(n)$.

При решении системы уравнений (20) будем рассматривать следующие граничные условия

$$\begin{cases} \vec{u} = 0; \quad \vec{\xi} \in \Sigma_u = \Sigma_1 \\ \sigma_{eff} \cdot \vec{n} = \vec{S}; \quad \vec{\xi} \in \Sigma_\sigma = \Sigma_2 \\ \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0; \quad \vec{\xi} \in \Sigma_w = \Sigma_1 \\ p = 0; \quad \vec{\xi} \in \Sigma_p = \Sigma_2 \end{cases} \quad (21)$$

$\Sigma_u \cup \Sigma_\sigma = \Sigma; \quad \Sigma_w \cup \Sigma_p = \Sigma; \quad \Sigma_u \cup \Sigma_w = \Sigma_1; \quad \Sigma_\sigma \cup \Sigma_p = \Sigma_2.$

В дальнейшем решение краевой задачи (20), (21) предполагается с использованием метода конечных элементов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена формулировка связанной задачи массопереноса (фильтрации) с учётом геометрической и физической нелинейностей деформирования среды.

В дальнейшей в рамках этой темы будет разрабатываться модель фильтрации Био с учетом разномодульности среды и учетом физической и геометрической нелинейности. Для данной модели предполагается численная реализация методом конечных элементов с использованием объектно-ориентированного подхода в программировании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П.Я. *Теория движения грунтовых вод*. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
2. Bear J. *Dynamics of fluids in porous media*. – New York: Elsevier, 1972. – 764 p.

3. Ляховский В.А., Мясников В.П. *О поведении упругой среды с микронарушениями* // Изв. АН СССР. Физика земли. – 1984. – №10. – С.71-75.
4. Мясников В.П., Олейников А.И. *Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разнсопротивляющейся среды* // ДАН СССР. – 1992. – Т.322. – №1. – С.57-60.
5. Дыскин А.В., Салганик Р.Л. *Модель дилатансии хрупких материалов с трещинами при сжатии* // Изв. АН СССР. МТТ. – 1987. – №6. – С.169-178.
6. Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. *К разномодульной теории упругости* // Инженерный журнал. МТТ. – 1966. – №6. – С.64-67.
7. Jones R.M. *Stress-strain relations for materials with different moduli in tension and compression* // AIAA Journal. – 1977. – Vol.15. – No.1. – Pp.16-23.
8. Нигматулин Р.И. *Динамика многофазных сред. Ч. I.* – М.: Наука, 1987. – 464 с.
9. Biot M.A., Willis D.G. *The elastic coefficients of the theory of consolidation* // Journal of Applied Mechanics. – 1957. – Vol.24. – Pp.594-601.
10. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. *Механика насыщенных пористых сред.* – М.: Недра, 1970. – 339 с.
11. Donea J., Giuliani S., Halleux J.-P. *An Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions* // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1982. – Vol.33. – Pp.689-723.



РАСЧЁТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ УПРУГИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РЕЗИНЫ В СЛОЖНОМ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ

Потапова А.И.¹, Гамлицкий Ю.А.^{1,2}, Веселов И.В.²

¹РТУ МИРЭА, ИТХТ, г. Москва, Россия

²ООО НПКЦ ВЕСКОМ, г. Москва, Россия

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРОСТОГО И СЛОЖНОГО НДС

Простым напряжённо-деформированным состоянием (НДС) называют такое НДС, при котором в деформируемом теле задаётся одна главная деформация, а две другие определяются однозначно из условия несжимаемости резины. К простым НДС относят одноосное растяжение – сжатие, чистый (рис.1) и простой (рис.2) сдвиги.

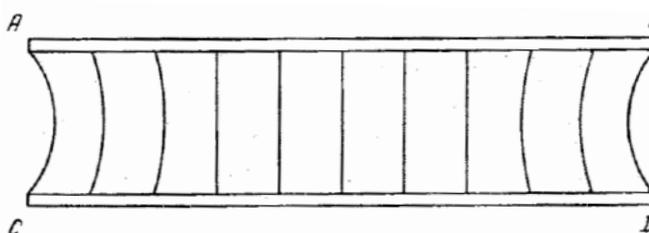


Рис.1. Деформация чистого сдвига.

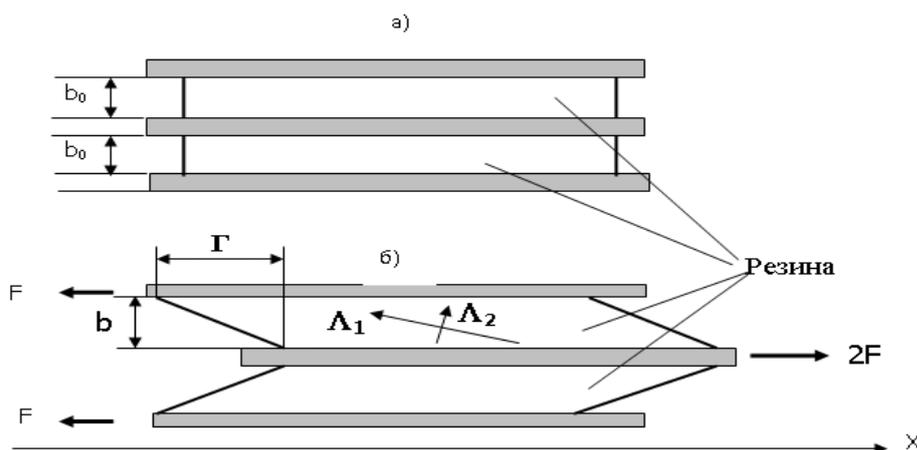


Рис.2. Деформация простого сдвига на образце типа «вилка».

Сложным НДС называют такое НДС, при котором в деформируемом теле задают деформации по двум главным осям. Деформация по третьей главной оси в этом случае также определяется из условия несжимаемости. Сложное НДС более полно отражает реальные условия нагружения в резинотехнических изделиях (РТИ), чем простое.

В литературе, помимо авторских работ, не встречаются методы реализации сложного НДС на стандартных разрывных машинах. Другие же известные методы [1] или не точны, или трудоёмки, или не позволяют задавать требуемую скорость деформирования.

СЛОЖНОЕ НДС КАК СУПЕРПОЗИЦИЯ ПРОСТОГО И ЧИСТОГО СДВИГА

Как известно, любое сложное НДС может быть получено суперпозицией двух простых видов деформирования, например, двух растяжений по главным осям. Рассмотрим сложное НДС как суперпозицию чистого и простого сдвигов. С одной стороны, такие условия деформирования характерны для резины между нитями корда, с другой – это удобно с точки зрения применения дополнительной оснастки к стандартной разрывной машине.

Простой сдвиг от чистого сдвига отличается способом реализации, а также тем, что при простом сдвиге, в отличие от чистого, происходит поворот главных осей относительно деформируемого тела.

Схема деформирования при суперпозиции чистого и простого сдвигов приведена на рис.3. Жирными линиями изображают исходное (кубик) и конечное (суперпозиция простого и чистого сдвига) состояние образца. Тонкими линиями изображена промежуточная деформация чистого сдвига.

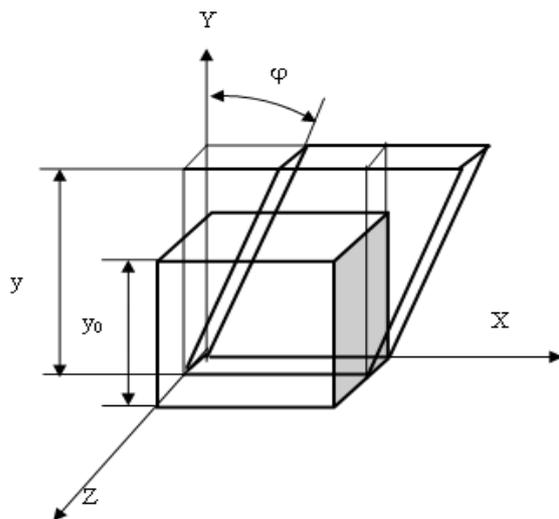


Рис.3. Деформирование резинового образца.

Величина деформации чистого сдвига по оси Y определяется по формуле

$$\lambda_y = \frac{y}{y_0}. \quad (1)$$

Величина простого сдвига вдоль оси X выражается через тангенс угла наклона образца при деформировании

$$\gamma = \operatorname{tg} \varphi. \quad (2)$$

При любом сдвиге [2] деформации по главным осям связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 &= 1, \\ \Lambda_3 &= 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Главные оси «1» и «2» лежат в плоскости рисунка. Здесь и далее использовано условие несжимаемости резины

$$\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 \cdot \Lambda_3 = 1. \quad (4)$$

Требуется определить направления главных осей деформации $\psi_{1,2}$ и степени удлинений по главным осям (главные удлинения) $\Lambda_{1,2}$ в зависимости от величины чистого λ_y и простого $\gamma = \operatorname{tg} \varphi$ сдвигов. Для этого вводится единичный вектор \mathbf{i} , расположенный под углом ψ к оси Y (рис.4).

В результате деформирования \mathbf{i} перейдет в \mathbf{i}' . Длина вектора \mathbf{i}' зависит от ψ , поэтому требуется найти значения ψ и ψ' , при которых длина \mathbf{i}' имеет максимальное и минимальное значения.

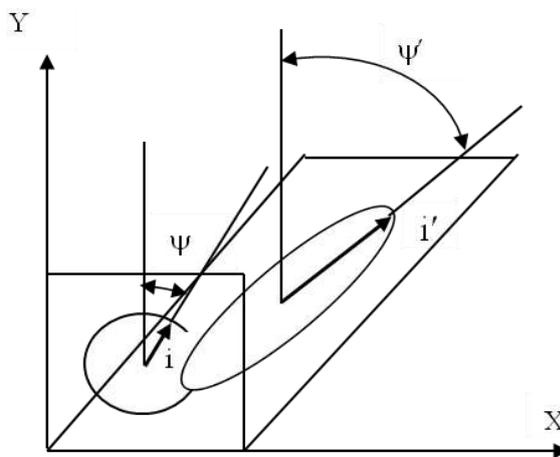


Рис.4. Положение единичного вектора до деформации (\mathbf{i}) и после (\mathbf{i}').

Исходные проекции вектора \mathbf{i} на оси координат математически записываются следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_x &= \sin \psi, \\ \mathbf{i}_y &= \cos \psi. \end{aligned} \quad (5)$$

В результате деформации чистого сдвига соотношения примут вид

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_x &= \sin \psi, \\ \mathbf{i}_y &= \lambda_y \cdot \cos \psi. \end{aligned} \quad (6)$$

Деформация простого сдвига γ по оси x , приложенная после чистого сдвига, приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{i}'_x &= \sin \psi + \lambda_y \cdot \cos \psi, \\ \mathbf{i}'_y &= \lambda_y \cdot \cos \psi. \end{aligned} \quad (7)$$

Квадрат длины вектора \mathbf{i}' определяется соотношением, следующим из (7)

$$\mathbf{i}'^2 = \mathbf{i}'_x{}^2 + \mathbf{i}'_y{}^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 \psi + 2 \cdot \lambda_y \cdot \gamma \cdot \operatorname{tg} \psi + \lambda_y^2 (\gamma^2 + 1)}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}. \quad (8)$$

Условие экстремума для длины вектора \mathbf{i}' записывается так

$$\frac{\partial (\mathbf{i}'^2)}{\partial \psi} = 0. \quad (9)$$

Продифференцировав выражение (9), получим

$$\sin 2\psi \cdot (1 - \lambda_y^2 \cdot \gamma^2 - \lambda_y^2) + 2 \cdot \lambda_y \cdot \gamma \cdot \cos 2\psi = 0. \quad (10)$$

Из (10) найдём значение угла ψ , при котором \mathbf{i}'^2 экстремален

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2 \cdot \lambda_y \cdot \gamma}{\lambda_y^2 (1 + \gamma^2) - 1}. \quad (11)$$

Направления главных осей определяются углом ψ' (рис.4), который связан с углом ψ соотношением

$$\operatorname{tg} \psi' = \frac{\mathbf{i}'_x}{\mathbf{i}'_y} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\lambda_y} + \gamma. \quad (12)$$

Из (11) можно получить значение для $\operatorname{tg} \psi$, соответствующее направлениям главных осей

$$\operatorname{tg} \psi_{1,2} = \frac{\frac{1}{\lambda_y^2} - 1 - \gamma^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_y^2} - 1 - \gamma^2\right)^2 + 4 \frac{\gamma^2}{\lambda_y^2}}}{\frac{2\gamma}{\lambda_y^2}}. \quad (13)$$

Подставив (13) в (12), получим

$$\operatorname{tg} \psi'_{1,2} = \gamma + \frac{\frac{1}{\lambda_y^2} - 1 - \gamma^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_y^2} - 1 - \gamma^2\right)^2 + 4 \frac{\gamma^2}{\lambda_y^2}}}{2\gamma}. \quad (14)$$

Перпендикулярность главных осей следует из следующих соотношений, справедливость которых легко проверяется прямой подстановкой

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi_1 \cdot \operatorname{tg} \psi_2 &= -1, \\ \operatorname{tg} \psi'_1 \cdot \operatorname{tg} \psi'_2 &= -1. \end{aligned} \quad (15)$$

Удлинения по главным осям Λ_1 и Λ_2 определяются по формуле (9) подстановкой значений $\operatorname{tg} \psi_1$ и $\operatorname{tg} \psi_2$ из (13)

$$\begin{aligned} \Lambda_1^2 &= \mathbf{i}'_x{}^2(\psi_1) + \mathbf{i}'_y{}^2(\psi_1), \\ \Lambda_2^2 &= \mathbf{i}'_x{}^2(\psi_2) + \mathbf{i}'_y{}^2(\psi_2). \end{aligned} \quad (16)$$

Для определения явного вида зависимости $\Lambda_{1,2}(\lambda_y, \gamma)$ рассмотрим эллипс, в который превращается единичная окружность после наложения деформаций чистого и простого сдвигов (рис.4). Его уравнение может быть получено из соотношений

$$\begin{aligned} X &= x + \lambda_y \cdot \gamma \cdot y, \\ Y &= \lambda_y \cdot y, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь x, y – координаты точек единичной окружности до деформирования; X, Y – координаты точек эллипса (центр окружности и центр эллипса находятся в начале координат).

Из (17) получим

$$X^2 - 2\gamma XY + Y^2 \left(\gamma^2 + \frac{1}{\lambda_y^2} \right) = 1. \quad (18)$$

Для нахождения главных осей построим характеристическое уравнение, в котором λ – корни

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\gamma \\ -\gamma & \gamma^2 + \frac{1}{\lambda_y^2} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Решение характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 + \gamma^2 + \frac{1}{\lambda_y^2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + \gamma^2 + \frac{1}{\lambda_y^2}}{4} - \frac{1}{\lambda_y^2} \right)}. \quad (20)$$

Запишем уравнение эллипса в каноническом виде

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1. \quad (21)$$

Главные удлинения, равные полуосям эллипса a и b , определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = a &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \\ \Lambda_2 = b &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\Lambda_{1,2}^2 = \lambda_y^2 \left[\frac{1 + \gamma^2 + \frac{1}{\lambda_y^2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + \gamma^2 + \frac{1}{\lambda_y^2}}{4} - \frac{1}{\lambda_y^2} \right)} \right].$$

Угол ψ' , определяющий направление главных осей, задаётся соотношением

$$\operatorname{tg} 2\psi' = \frac{2\gamma}{1 - \gamma^2 - \frac{1}{\lambda_y^2}}. \quad (23)$$

Легко показать, что направления главных осей из (23) совпадают с (14).

Таким образом, задача построения степеней удлинений по главным осям (и, следовательно, инвариантов тензора деформации), исходя из величин простого сдвига γ и чистого сдвига λ_y , решена.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-РАСЧЕТНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ УПРУГИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РЕЗИНЫ В СЛОЖНОМ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ

Далее изложим экспериментально-расчётный метод определения плотности энергии деформации в зависимости от инвариантов деформации.

На практике подобное сложное НДС можно воссоздать с помощью приспособления рамочного типа (рис.5).

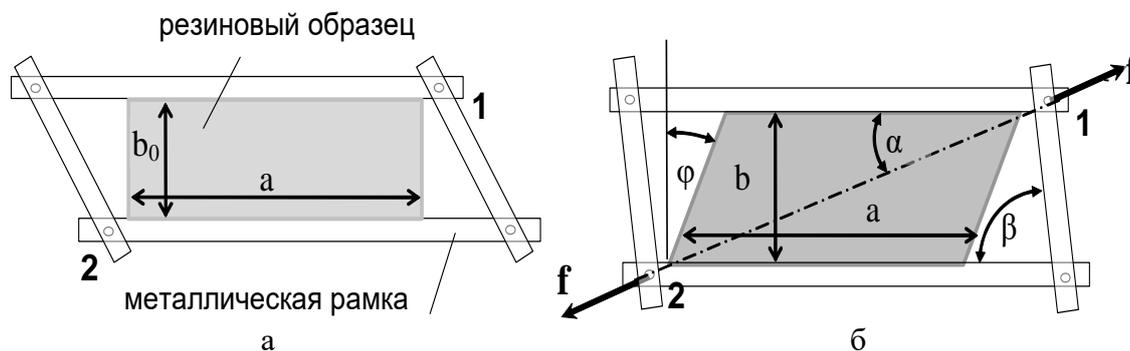


Рис.5. Схема приспособления «рамка» для реализации сложного НДС, представляющего собой суперпозицию чистого и простого сдвига. а) до деформирования; б) после деформирования.

Метод моделирования сложного НДС заключается в следующем. Образец в виде тонкой пластинки, в котором ширина a существенно больше высоты b , закрепляют в рамке с противоположных сторон, а затем прикладывают к точкам 1 и 2 растягивающее усилие. Для этих целей подходит любая современная разрывная машина. Испытываемый образец представляет собой резиновую пластину с размерами 30x165x2 (мм). Закрепляя образец в рамке так, как указано на рисунке, и прикладывая растягивающее усилие F к вершинам 1 и 2, получаем однородное деформирование резины, представляющее собой, как и прежде, суперпозицию чистого и простого сдвигов. Величина чистого сдвига определяется нормальной составляющей перемещения верхней стороны параллелограмма относительно нижней ($b - b_0$), величина простого сдвига γ – углом φ . Рамка устроена таким образом, что боковые стороны являются сменными и имеют разные длины. Эти длины подобраны так, чтобы при деформировании получались разные соотношения деформаций чистого и простого сдвигов. Испытания проводят для 9 разных наборов боковых планок, различающихся длиной.

Задача состоит в том, чтобы по перемещениям зажимов разрывной машины 1 и 2 рассчитать инварианты тензора деформации резинового образца. Она может быть решена только в случае высокой степени однородности создаваемого НДС.

Понятно, что проблема однородности, как и для случая чистого сдвига, связана с отношением b/a . Чем меньше это отношение, тем лучше. В нашем случае оно равно 0.18. Эта величина существенно меньше, чем аналогичные параметры в образцах типа «вилка» при испытаниях в условиях простого сдвига и образцах типа «пробка» при испытаниях на сжатие. Кроме того, в указанных образцах существует проблема обеспечения однородности НДС.

Приведём расчёт главных деформаций резинового образца. Запишем значения его параметров в исходном (недеформированном) состоянии (рис.5):

φ – угол, характеризующий величину простого сдвига,

$b = b_0$ – исходное расстояние между местами закрепления в рамку резинового образца (высота образца резины),

α – величина угла между направлением силы F и осью горизонтальной планки,

β – величина острого угла рамки-параллелограмма,
 B – константа, неизменный параметр конструкции рамки,
 L – длина сменной боковой планки.

При деформации, т.е. при увеличении расстояния между точками 1 и 2, угол β увеличивается под действием растягивающей нагрузки F . Величина b растёт от b_0 до $b_{\max} = L - B$, затем уменьшается (при $\varphi > 90$). Однако при $\varphi > 90$ процесс деформирования может оказаться неустойчивым в смысле появления смятия.

Выведем формулы для степени удлинения в нормальном направлении (величины чистого сдвига) $\lambda_n = b/b_0$ и для величины простого сдвига $\gamma = \operatorname{tg} \varphi$. Для этого запишем некоторые соотношения, следующие из геометрии рамки. Используем теорему косинусов

$$L^2 = q^2 + I_{12}^2 - 2 \cdot q \cdot I_{12} \cdot \cos \alpha. \quad (24)$$

Запишем два разных выражения для угла α (первое – из (24))

$$\cos \alpha = \frac{q^2 + I_{12}^2 - L^2}{2 \cdot q \cdot I_{12}}, \quad (25)$$

$$\sin \alpha = \frac{b + B}{I_{12}}.$$

Найдём из (25) значение b

$$b = \sqrt{I_{12}^2 - \left(\frac{q^2 + I_{12}^2 - L^2}{2q} \right)^2} - B. \quad (26)$$

Выразим теперь b через угол β

$$\begin{aligned} b &= L \sin \beta - B, \\ b_0 &= L \sin \beta_0 - B. \end{aligned} \quad (27)$$

Из (27) найдём $\sin \beta$ и $\sin \beta_0$, через которые выразим γ

$$\gamma = \frac{h}{b} = \frac{\cos \beta_0 - \cos \beta}{\sin \beta - \frac{B}{L}}. \quad (28)$$

Выражение для $\lambda_n = b/b_0$ сразу следует из (26).

После того, как найдены составляющие простого и чистого сдвигов γ и λ_n , соответствующие данному расстоянию между зажимами разрывной машины, инварианты тензора деформации резины записываются с учётом направлений главных осей и величин главных удлинений.

Следующая задача – из зависимости растягивающего усилия F от расстояния между зажимами определить константы упругого потенциала.

Рассмотрим исходное состояние, при котором под действием нагрузки F образец деформировался, и его главные деформации и главные условные напряжения стали равны $\lambda_1, \lambda_2, f_1, f_2$. Приложим к рамке дополнительную бесконечно малую нагрузку ΔF . Расстояние между точками 1 и 2 увеличится на бесконечно малую величину Δl , главные деформации изменятся на $\Delta \lambda_1$ и $\Delta \lambda_2$. Запишем уравнение баланса энергии

$$F \cdot \Delta l = [f_1(\lambda_1, \lambda_2) \cdot \Delta \lambda_1 + f_2(\lambda_1, \lambda_2) \cdot \Delta \lambda_2] \cdot V. \quad (29)$$

Здесь V – объём деформируемой части резинового образца.

Используем то обстоятельство, что зависимости λ_1 и λ_2 определяются однозначно и зависят только от размеров образца и параметров рамки. Эти функции гладкие и во всех точках имеют непрерывные производные λ_1' и λ_2' . Следовательно, можно записать

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_1 &= \lambda_1'(I_{12}) \cdot \Delta I, \\ \Delta\lambda_2 &= \lambda_2'(I_{12}) \cdot \Delta I.\end{aligned}\tag{30}$$

Подставив (30) в (29) и сократив на ΔI , получим

$$\frac{F(I_{12})}{V} = f_1(\lambda_1, \lambda_2) \cdot \lambda_1'(I_{12}) + f_2(\lambda_1, \lambda_2) \cdot \lambda_2'(I_{12}).\tag{31}$$

Завершающий шаг состоит в том, чтобы в выражении (31) выразить условные главные напряжения f_1 и f_2 через производные упругого потенциала.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ. УПРУГИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Приведём некоторые математические соотношения, позволяющие из упругого потенциала материала U рассчитывать величины напряжений по главным осям в случаях трех-, двух- и одноосного нагружения. Обычно такие соотношения записывают с учётом явного вида инвариантов I_1 и I_2 тензора больших деформаций. Такой способ не является достаточно общим при использовании других инвариантов. Поэтому будем исходить из такого вида упругого потенциала, когда энергия деформации зависит от любой симметричной комбинации степеней удлинений по главным осям.

Рассмотрим единичный кубик, который деформирован по главным осям силами f_1, f_2, f_3 до размеров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (т.к. кубик единичный, то силы f_i являются условными напряжениями, а величины λ_i – и размерами кубика по главным осям, и степенями удлинений одновременно).

$U(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – упругий потенциал материала. Его полный дифференциал

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial U}{\partial \lambda_2} d\lambda_2 + \frac{\partial U}{\partial \lambda_3} d\lambda_3.\tag{32}$$

Приращение энергии кубика при бесконечно малом увеличении величин f_i на df_i и величин λ_i на $d\lambda_i$ ($i=1,2,3$)

$$dU = f_1 d\lambda_1 + f_2 d\lambda_2 + f_3 d\lambda_3.\tag{33}$$

Из сравнения (32) и (33) следует

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_i} = f_i \quad (i=1, 2, 3).\tag{34}$$

Соотношения (32)-(34) получены в предположении независимости всех трех λ_i . Введём несжимаемость материала, из которой следует

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}, \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial \lambda_1} &= -\frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2},\end{aligned}\tag{35}$$

$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial \lambda_2} = -\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2^2},$$

$$d\lambda_3 = -\frac{d\lambda_1}{\lambda_1^2 \lambda_2} - \frac{d\lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2^2}.$$

Соотношение (32) с учётом (35) примет вид

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial U}{\partial \lambda_2} d\lambda_2 + \frac{\partial U}{\partial \lambda_3} \left[-\frac{d\lambda_1}{\lambda_1^2 \lambda_2} - \frac{d\lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2^2} \right]. \quad (36)$$

Перепишем (36)

$$dU = d\lambda_1 \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial U}{\partial \lambda_3} \cdot \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2} \right) + d\lambda_2 \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial U}{\partial \lambda_3} \cdot \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2^2} \right). \quad (37)$$

Соотношение (37) можно рассматривать в соответствии с (33) как результат воздействия на искомый образец в виде единичного кубика сил только по двум осям, X и Y , при этом новые условные напряжения f_1^* и f_2^* имеют вид

$$f_1^* = \frac{\partial U}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial U}{\partial \lambda_3} \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2} = \frac{\partial U^*}{\partial \lambda_1},$$

$$f_2^* = \frac{\partial U}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial U}{\partial \lambda_3} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2^2} = \frac{\partial U^*}{\partial \lambda_2}, \quad (38)$$

U^* – та же функция U , но зависящая от двух переменных λ_1 и λ_2 .

Истинные напряжения

$$\sigma_1^* = f_1^* \lambda_1,$$

$$\sigma_2^* = f_2^* \lambda_2,$$

$$\sigma_1^* = \lambda_1 \frac{\partial U}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial U}{\partial \lambda_3} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} = \lambda_1 \frac{\partial U}{\partial \lambda_1} - \lambda_3 \frac{\partial U}{\partial \lambda_3} = \sigma_1 - \sigma_3, \quad (39)$$

$$\sigma_2^* = \lambda_2 \frac{\partial U}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial U}{\partial \lambda_3} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} = \lambda_2 \frac{\partial U}{\partial \lambda_2} - \lambda_3 \frac{\partial U}{\partial \lambda_3} = \sigma_2 - \sigma_3.$$

Из соотношений (39) видно, что истинные напряжения в случае двухосного нагружения выражаются через разности истинных напряжений, действующих в случае эквивалентного трёхосного нагружения.

Рассмотрим случай одноосного нагружения. При этом степени удлинений по главным осям связаны соотношением

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}. \quad (40)$$

Подставив (40) в соотношения (38), получим выражения для условных напряжений f^{**} при одноосном нагружении

$$f_1^{**} = \frac{\partial U}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial U}{\partial \lambda_3} \lambda_1^{-\frac{3}{2}} = \frac{\partial U^{**}}{\partial \lambda_1},$$

$$f_2^{**} = \frac{\partial U}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial U}{\partial \lambda_3} = 0, \quad (41)$$

где U^{**} – та же функция, что и U , но с учётом (40).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье изложен расчётно-экспериментальный метод, позволяющий определять параметры определяющих уравнений упругого типа для резины на основе экспериментов в сложном НДС. Выведены соотношения, позволяющие из выражения для упругого потенциала любого вида получать главные напряжения. Следующая задача состоит в том, чтобы провести эксперименты на рамке для технических резин разного состава и назначения, и из них получить параметры упругих потенциалов. Последние требуются для конструирования РТИ с применением метода конечных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каблов В.Ф., Гамлицкий Ю.А., Тышкевич В.Н. *Механика армированных пластиков и резинокордных композитов: монография.* – Волгоград: ИУНЛ ВолгГТУ, 2014 – 348 с.
2. Трелоар Л. *Физика упругости каучука.* – М.: Иностранная литература, 1953. – 240 с.

УДК 539.32:517.9
EDN BVJDEA (<https://elibrary.ru/bvjdea>)
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.18



ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОГО ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ЦЕНТРОВ ВКЛЮЧЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМ РАДИУСОМ

Сорокин Г.С., Власов А.Н.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

Рассматриваются четыре варианта реализации решения задачи по оценке эффективного тензора жесткости композитного материала с периодическим расположением центров включений со случайным радиусом. Через средний радиус включения, с помощью применения методов теории вероятности и с использованием метода Монте-Карло.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в инженерной и научной деятельности проблема определения эффективных характеристик композитных материалов является актуальной. Массовое использование композитов в машиностроении, авиакосмической технике, строительстве, расчеты зданий и сооружений с учетом совместной их работы с грунтами оснований, а также расчеты подземных сооружений и горных выработок совместно с вмещающим их массивом горных пород (грунты и горные породы по существу являются композитами природного образования) ставит задачу надежного, быстрого и удобного способа определения механических характеристик таких композитных материалов. В противном случае мы будем вынуждены, раз за разом, проводить длительные по времени, затратные эксперименты, а иногда и вовсе мириться с невозможностью достоверного их определения (проблема определения характеристик скальных массивов). Таким образом, можно констатировать, что в настоящее время в инженерной и научной деятельности проблема определения эффективных характеристик композитных материалов является актуальной.

Работа, представленная в данной статье, является лишь первой в цепочке исследований нового подхода и ставящего перед собой задачу по разработке аналитико-численной методики определения эффективных характеристик композитов со случайным размером включений. Применяемый в ней подход к оценке свойств композитных материалов отличен от других известных авторам (см., например, [1-5]).

В рамках данной работы была поставлена цель выявить возможность определения тензора жесткости на ячейке периодичности, а не на представительном элементе объема, при условии соблюдения условия периодичность расположения центров включений, но варьирования величины радиусов включений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим композитные материалы со случайным размером включений, у которых центры образуют периодическую структуру. При этом будем считать, что все включения целиком расположены в ячейках (П), которые имеют один и тот же фиксированный размер и плотно прилегают друг к другу. Геометрия таких материалов определяется ячейкой периодичности с расположенным в ней включением случайного размера (рис.1).

Для простоты будем предполагать, что включения имеют форму шара, либо цилиндра, либо слоя (в случае слоистых сред с фиксированным размером пакета слоев, см. рис.2). Такое предположение не меняет сам подход к решению задачи усреднения уравнений теории упругости со случайными быстро осциллирующими коэффициентами [6-8] и оценки свойств композитных материалов со случайным размером рассматриваемых включений, а также принципиально не влияет на его общность.

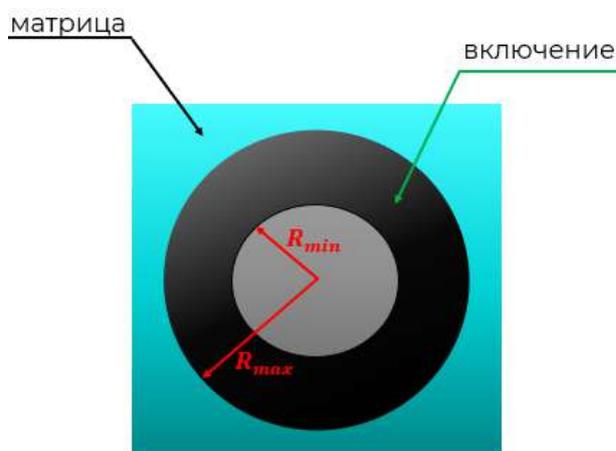


Рис.1. Ячейка П композитного материала с включением.

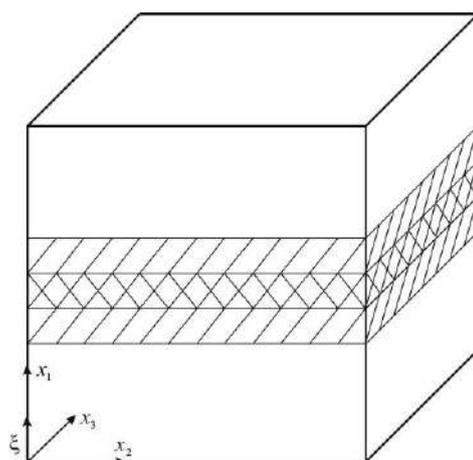


Рис.2. Модель слоистой среды.

В данной работе определение эффективных характеристик будет проводиться путем приведения (усреднения) композитных материалов к эквивалентным по деформируемости однородным материалам. Рассмотрим четыре варианта процедуры усреднения эффективных деформационных характеристик (компонентов тензора жёсткости) композитных материалов.

Задача 1. Простейший метод оценки механических свойств композитных материалов со случайным размером включений, у которых центры образуют периодическую структуру. Эффективный тензор жесткости определяется методом асимптотического усреднения по среднему значению радиуса.

Задача 2. Оценка эффективного тензора жесткости композитного материала со случайным размером включений, которая определяется с использованием зависимости эффективного тензора жесткости от радиуса включения для композитных материалов периодической структуры (радиус включения в каждой реализации композита фиксирован).

Задача 3. Оценка эффективного тензора жесткости композитного материала со случайным размером включений, которая строится на определении зависимости среднего значения тензора жесткости на ячейке по реализациям радиуса включения с последующим применением метода асимптотического усреднения.

Задача 4. Оценка эффективного тензора жесткости композитного материала со случайным размером включений, а также его дисперсии, асимметрии и эксцесса методом Монте-Карло.

ОЦЕНКА ДЕФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

1. Задача 1. Этот метод оценки эффективного тензора жесткости состоит в определении среднего радиуса включения по известному закону его распределения с последующим применением метода асимптотического усреднения.

Средний радиус включения (математическое ожидание) определяется по формуле

$$M[R] = \bar{R} = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} r \cdot f(r) dr. \quad (1)$$

Определяя средний радиус включения, мы сводим задачу по оценке эффективного тензора жесткости к задаче определения эффективного тензора жесткости композитного материала с периодической структурой и радиусом включений \bar{R} . Её решение находится из решения периодической задачи на ячейке Π по быстрой переменной ξ [8]

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(A_{ij}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} (N_i(\xi) + \xi_i E) \right) = 0, \quad (2)$$

$$\left[N_i \right]_{\xi \in \Sigma} = \left[n_i A_{ij}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} (N_i(\xi) + \xi_i E) \right]_{\xi \in \Sigma} = 0. \quad (3)$$

2. Для решения второй задачи вначале необходимо решить периодические задачи (2), (3), где $A_{ij}(r)$ есть матрицы-функции, составленные из компонент тензора жесткости и параметрически зависящие от радиуса, где радиус принимает значения на отрезке $R_{\min} \leq r \leq R_{\max}$. Как результат решения такой задачи получаем зависимость эффективного тензора жесткости от радиуса включения R

$$\bar{A}_{ij}(r) = \left\langle A_{ik}(r) \frac{\partial}{\partial \xi_k} (N_j(\xi) + \xi_j E) \right\rangle, \quad (4)$$

а также его минимальные и максимальные значения равные соответственно $\bar{A}_{ij}^{\min} = \min(\bar{A}_{ij}(R_{\min}), \bar{A}_{ij}(R_{\max}))$ и $\bar{A}_{ij}^{\max} = \max(\bar{A}_{ij}(R_{\min}), \bar{A}_{ij}(R_{\max}))$.

Далее считая, что радиус включения r является случайной величиной, распределенной по закону с плотностью вероятности $f(r)$, находим закон распределения компонентов тензора жесткости, который будет иметь следующий вид

$$F(\bar{c}_{ijkl}(r) \leq C_{ijkl}) = F(r \leq R) = \int_{R_{\min}}^R f(r) dr, \quad (5)$$

где $\bar{A}_{ik}(r) = \|\bar{c}_{ijkl}(r)\|$.

При этом плотность вероятности распределения компонентов тензора напряжений будет определяться как производная от функции закона распределения по соответствующим компонентам тензора жесткости C_{ijkl}

$$\text{т.е. } f(C_{ijkl}) = \frac{d}{dC_{ijkl}} F(C_{ijkl}).$$

С этой целью была написана расчетная программа на языке R в среде $Rstudio$, позволяющая нам пронаблюдать функцию плотности распределения и функцию вероятности для интересующих нас компонентов тензора жесткости для трех законов распределения: равномерно, нормального и Вейбулла (рис.3). Также программа вычислит эффективные компоненты тензора жесткости через моменты теории вероятности [9].

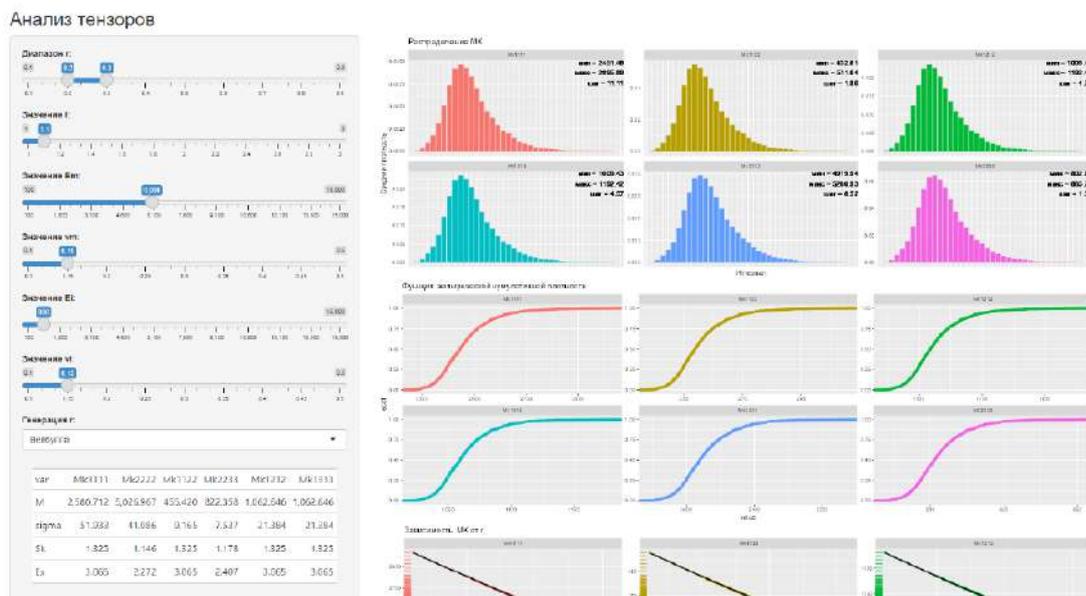


Рис.3. Рабочее поле расчетной программы на примере использования распределения Вейбулла.

3. При подходе, сформулированном в постановке задачи 3, вначале определяется среднее значения тензора жесткости материала на ячейке как функции быстрой переменной в композитном материале периодической структуры, а затем вычисляется эффективный тензор жесткости композитного материала с использованием метода асимптотического усреднения [6].

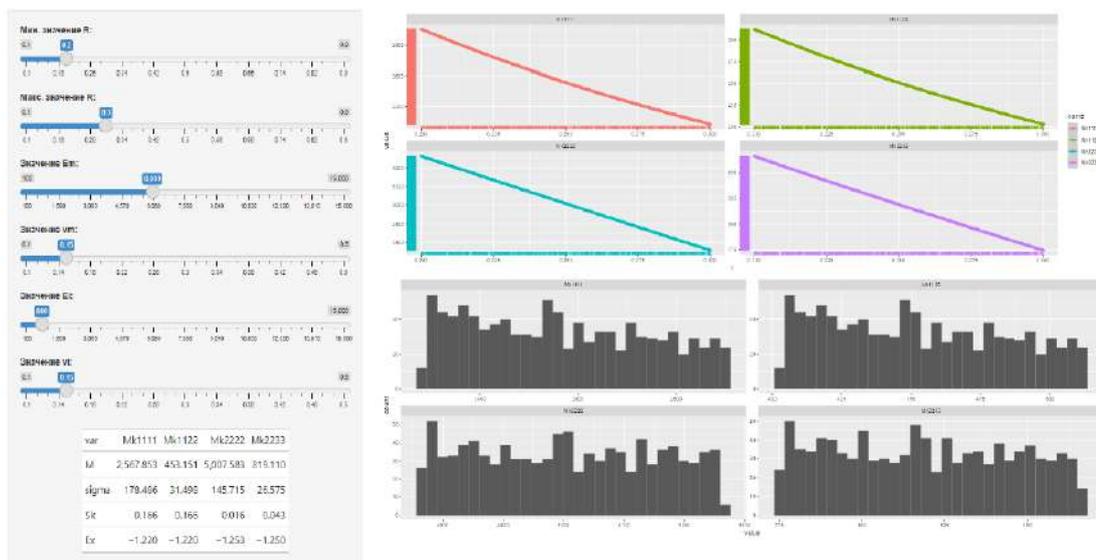


Рис.4. Рабочее поле расчетной программы по моделированию эксперимента методом Монте-Карло.

4. Определение эффективного тензора жёсткости композитного материала со случайным размером включений, а также его дисперсии, асимметрии и эксцесса методом Монте-Карло [10] заключается в следующем:

- с помощью датчика случайных чисел генерируются псевдослучайные значения радиуса включения;
- для каждого значения радиуса включения из решения задачи на ячейке вычисляются компоненты эффективного тензора жёсткости;
- затем проводится статистическая обработка полученных результатов имитационного моделирования значений компонентов эффективного тензора жёсткости.

Для реализации данного метода также был написан расчетный блок на языке *R* в среде *Rstudio* (рис.4). Данная программа (расчетный блок) имитирует эксперимент, работая с набором точных решений беря на себя вычислительную часть работы, а также в итоге выдающая значения компонентов эффективного тензора жесткости рассматриваемого композита.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате реализации всех четырех задач была сформирована сводная таблица, из которой видно, что все четыре подхода дают сопоставимые (близкие) значения для первого вероятностного момента (математическое ожидание).

Таблица.

Значения компонентов эффективного тензора жесткости и их среднее квадратическое отклонение, асимметрия и эксцесс.

№ задачи	Вероятностные параметры	\hat{c}_{1111} , МПа	\hat{c}_{2222} , МПа	\hat{c}_{1122} , МПа	\hat{c}_{2233} , МПа	$\hat{c}_{1212} = G_{\perp}$, МПа
1	<i>M</i>	2557	5009	451.3	819.0	1053
2.1	<i>M</i>	2572	5011	453.98	819.82	1059
	σ	178.33	145.37	31.47	26.520	73.43

	<i>Sk</i>	0.138	-0.018	0.138	0.010	0.138
	<i>Ex</i>	-1.197	-1.220	-1.197	-1.219	-1.197
2.2	<i>M</i>	2561	5004	452.07	818.55	1054
	σ	155.57	126.91	27.45	23.14	64.06
	<i>Sk</i>	0.360	0.005	0.360	0.067	0.360
	<i>Ex</i>	0.248	-0.017	0.248	0.009	0.248
	<i>M</i>	2579	5026	455.25	822.23	1062
2.3	σ	50.36	39.79	8.89	7.30	20.74
	<i>Sk</i>	1.513	1.255	1.513	1.300	1.513
	<i>Ex</i>	5.435	3.783	5.435	4.054	5.435
3	<i>M</i>	2814	5017	496.6	827.0	1159
4	<i>M</i>	2558	5007	451.2	819,2	963.2
	σ	279.8	162.8	16.63	48,82	114.5
	<i>Sk</i>	1.483	1,484	1,475	1,491	1.489
	<i>Ex</i>	-0.623	-0.619	-0.625	-0.617	-0.612

ЛИТЕРАТУРА

1. Беран М.Дж. *Применение статистических теорий для определения тепловых, электрических и магнитных свойств неоднородных материалов* / В книге «Композиционные материалы. Т.2. Механика композиционных материалов». – М.: Мир, 1978. – 568 с.
2. Кристенсен Р. *Введение в механику композитов*. – М.: Мир, 1982. – 335 с.
3. Привалко В.П., Новиков В.В., Яновский Ю.Г. *Основы теплофизики и геофизики полимерных материалов*. – Киев: Наук. думка, 1991. – 231 с.
4. Беляев А.Ю. *Усреднение в задачах теории фильтрации*. – М.: Наука, 2004. – 200 с.
5. Паньков А.А. *Статистическая механика пьезокомпозитов*. – Пермь: Издательство Пермского государственного технического университета, 2009. – 480 с.
6. Власов А.Н. *Сведение уравнения теории упругости со случайными коэффициентами на области с периодической структурой к усредненному уравнению теории упругости с постоянными коэффициентами. Эффективный тензор жесткости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №3. – С.309-322.
7. Бахвалов Н.С. *Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами* // Доклады АН СССР. – 1975. – Т.221. – №3. – С.516-519.
8. Бахвалов Н.С., Панасенко. Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
9. Вентцель Е.С. *Теория вероятностей*. – М.: Высшая школа, 2006. – 575 с.
10. Соболев И.М. *Метод Монте-Карло*. – М.: Наука, 1968. – 64 с.

УДК 531.3
EDN EZUIWS (<https://elibrary.ru/ezuiws>)
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.19



КАЛИБРОВКА НЕЛОКАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ИЗГИБАЕМОЙ БАЛКИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Царев Р.О.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Активное применение композитных материалов для решения различных производственных задач требует новых подходов к описанию их работы под нагрузкой. Часто, чтобы учесть особенности поведения материалов со сложной внутренней структурой используют подробные трехмерные конечно-элементные модели. Применение одномерных моделей позволило бы значительно ускорить процесс расчетов и проектирования. Для создания таких моделей требуются специальные гипотезы, позволяющие с достаточной точностью моделировать поведение композитных материалов. В настоящей работе для этой цели используются основные положения нелокальной механики.

К моделям, построенным на положениях нелокальной механики, можно отнести модель нелокальной упругости, предложенную в статье [1], модель демпфирования нелокального в пространстве [2], модель [3], сочетающую в себе нелокальность упругих и демпфирующих свойств. Модель нелокального в пространстве затухания описана в статье [4], а нелокальная во времени модель внутреннего трения, построенная на основе метода конечных элементов, в статье [5]. В статье [6], рассматривались различные механизмы демпфирования для квазиизотропной пултрузионной композитной балки, к ним относятся: вязкое демпфирование; внутреннее демпфирование, зависящее от скорости деформации; пространственный гистерезис; и временной гистерезис. Кроме того, в статье рассматриваются различные комбинации этих механизмов.

Предлагаемая в настоящей статье модель построена на предположении, что упругие свойства материала нелокальны во времени. Память в материалах – это одно из наиболее фундаментальных их свойств, под которым понимается зависимость реакции материала не только от текущих параметров кинематического и термодинамического типов, но и от всей истории их изменения.

ПОСТРОЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ ВО ВРЕМЕНИ МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ БАЛОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Нелокальная модель динамического деформирования была встроена в алгоритм метода конечных элементов. Такой подход позволит после отладки и калибровки модели применять её в прикладных расчётах конструкций, обладающих сравнительно сложной геометрией.

В алгоритме метода конечных элементов уравнение движения представляется в матричном виде и записывается в перемещениях [7]

$$M \cdot \ddot{\bar{V}}(t) + D \cdot \dot{\bar{V}}(t) + K \cdot \bar{V}(t) = \bar{F}(t). \quad (1)$$

Здесь

K – матрица жёсткости конечно-элементной расчётной модели,

M – матрица масс,

D – матрица демпфирования,

$\bar{F}(t)$ – вектор внешних силовых воздействий,

$\bar{V}(t)$ – искомый вектор перемещений.

При учёте нелокальных свойств материала предполагается, что упругие силы в системе в рассматриваемый момент времени t зависят не только от мгновенного значения перемещений в этот момент времени $v(t)$, но и от значений перемещений в предыдущие моменты времени τ . Причем влияние временных точек друг на друга тем меньше, чем больше расстояние между ними [8]. Чтобы построить модель деформирования балочного элемента с памятью, представим уравнение (1) в виде

$$M \cdot \ddot{\bar{V}}(t) + D \cdot \dot{\bar{V}}(\tau) + K \cdot \int_0^t R(t-\tau) \cdot \bar{V}(\tau) d\tau = \bar{F}(t). \quad (2)$$

Здесь на матрицу жесткости K наложено ядро нелокального оператора упругости $R(t-\tau)$ или функция влияния. Эта функция описывает убывание влияния перемещений в предшествующие моменты времени τ на упругие силы в текущий момент t , при этом должно соблюдаться условие нормирования

$$\int_0^t R(t-\tau) d\tau = 1. \quad (3)$$

Для моделирования функции памяти могут быть использованы ядра различного типа [2]. В настоящей работе в ядра нелокального оператора используется функция ошибок, которая при выполнении условия (3) принимает вид

$$R(t-\tau) = \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\eta^2(t-\tau)^2}, \quad (4)$$

Как и для всех нелокальных моделей, в данном случае, определяющей характеристикой является масштабный параметр η , который определяет степень нелокальности упругих свойств материала во времени. На рис.1 показано как этот параметр влияет на внешний вид ядра.

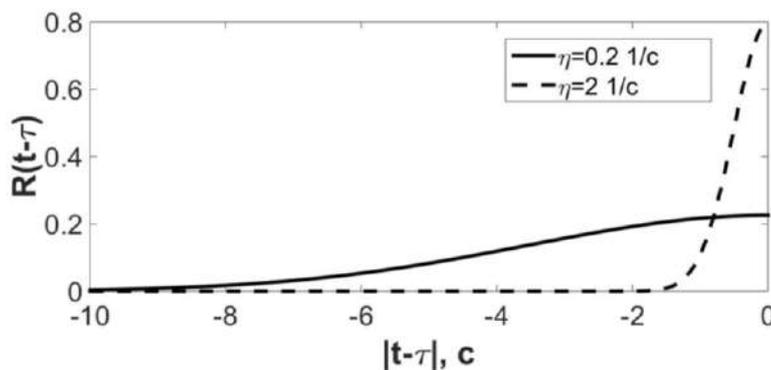


Рис.1. Графики, показывающие влияние параметра η на нелокальность модели.

Для решения уравнения движения была использована неявная схема (метод Ньюмарка) [9]. В этом случае скорости и ускорения узлов конечно-элементной модели представляются в виде

$$\dot{\bar{V}}_{i+1} = \frac{\bar{V}_{i+1} - \bar{V}_i}{\Delta t}, \quad \ddot{\bar{V}}_{i+1} = \frac{2}{\Delta t^2} (\bar{V}_{i+1} - \bar{V}_i - \dot{\bar{V}}_i \cdot \Delta t) - \ddot{\bar{V}}_i. \quad (5)$$

Здесь

\bar{V}_i – вертикальное перемещение узла в момент времени t_i ,

$\dot{\bar{V}}_i$ – скорость узла в момент времени t_i ,

$\ddot{\bar{V}}_i$ – ускорение узла в момент времени t_i ,

Δt – шаг по времени.

Так как в случае использования неявной схемы функция памяти наложена на весь процесс деформирования, начиная от момента t_{i+1} , то дискретный аналог интегрального ядра был разделен на две части: α – весовой коэффициент при V_{i+1} и β – сумму всех остальных весов

$$\beta = \Delta t \sum_{j=1}^i \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\eta^2(t_i-t_{j-1})^2}, \quad \alpha = \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\eta^2(t_{i+1}-t_i)^2} \cdot \Delta t. \quad (6)$$

Тогда выражение (1) можно представить в виде

$$M \cdot \left[\frac{2}{\Delta t^2} \cdot (\bar{V}_{i+1} - \bar{V}_i - \dot{\bar{V}}_i \cdot \Delta t) - \ddot{\bar{V}}_i \right] + D \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot (\bar{V}_{i+1} - \bar{V}_i) + K \cdot \beta + K \cdot \alpha = \bar{F}_{i+1}. \quad (7)$$

После всех преобразований вычислительная схема имеет вид

$$Q \cdot \bar{V}_{i+1} = \bar{F}_{i+1} + M \cdot \ddot{\bar{V}}_i + Q_1 \cdot \dot{\bar{V}}_i + Q_2 \cdot \bar{V}_i - K \cdot \beta, \quad (8)$$

где

$$Q = \frac{2}{\Delta t^2} M + \frac{1}{\Delta t} D + K \cdot \alpha, \quad Q_1 = \frac{2}{\Delta t} M, \quad Q_2 = \frac{2}{\Delta t^2} M + \frac{1}{\Delta t} D. \quad (9)$$

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ МАСШТАБНОГО ПАРАМЕТРА НА ХАРАКТЕР КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Для дальнейшей проработки модели необходимо определить как изменение масштабного параметра влияет на характер колебаний. При реализации данной модели в программном комплексе MATLAB рассматривалась 12-ти метровая балка, защемленная по концам. В качестве материала балки был принят термоактивный винилэфировый стеклопластик I класса, модуль Юнга в продольном материале которого равен 17,2 ГПа. Балка в поперечном сечении представляет собой прямоугольник высотой 0,3 м и шириной 0,2 м. Коэффициент относительного демпфирования материала принят 0,042. Балка загружена мгновенно приложенной и равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью – 10 кН/м. На первом шаге при $i=1$ в качестве начальных условий принято $\bar{V}_0 = 0$.

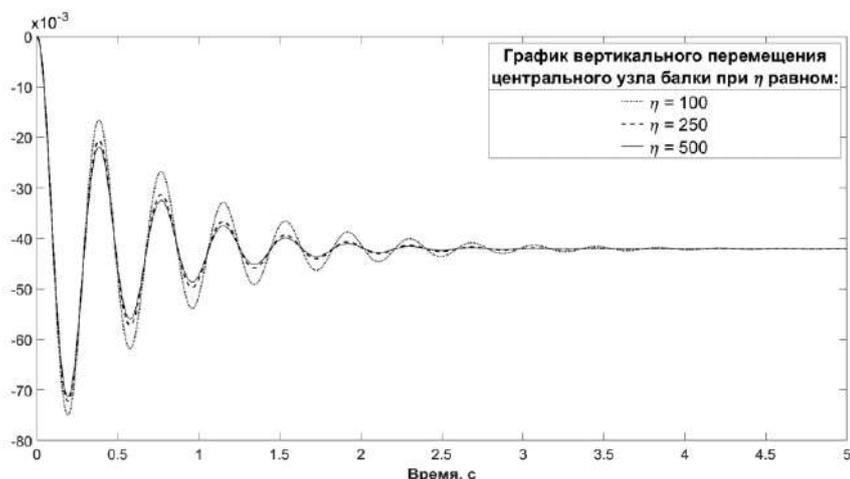


Рис.2. Графики вертикального перемещения центрального узла балки, полученные для трех реализаций расчета с различными масштабными параметрами.

Анализируя приведенные графики, можно сказать, что уменьшение параметра η (увеличение степени нелокальности) приводит к увеличению амплитуды колебаний.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Для того чтобы нелокальную модель материала можно было применять в практических расчётах, необходимо определить значение нелокального параметра. Для достижения этой цели в настоящем исследовании использовалась методика калибровки нелокальной модели методом наименьших квадратов по результатам численного эксперимента. В качестве данных численного эксперимента использовались результаты трёхмерного конечно-элементного моделирования балки, рассмотренной в предыдущем разделе. Модель была построена в расчетном комплексе MIDAS-Civil с учетом ортотропных свойств материала. Используемые при моделировании характеристики материала приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Характеристики термореактивного винилэфирного стеклопластика I класса.

Модуль Юнга в продольном направлении, E_{lw}	17,2 ГПа
Модуль Юнга в поперечном направлении, E_{cw}	12,2 ГПа
Коэффициент Пуассона в продольном направлении, μ_{lw}	0,32
Коэффициент Пуассона в поперечном направлении, μ_{cw}	0,15
Плотность материала, ρ	1,9 кН/м ³
Коэффициент демпфирования, γ	0,042
Прочность на разрыв, $\sigma_{разр}$	241 МПа

В результате расчета был получен график перемещений среднего сечения рассматриваемой балки. Далее ординаты полученного в MIDAS-Civil графика

колебаний были экспортированы в MATLAB, где был реализован алгоритм для определения масштабного параметра нелокальной модели.

В качестве численного метода поиска минимального значения суммы квадратов расхождений между экспериментальными данными и численными результатами использовался метод дихотомии [10].

В качестве результата работы были получены следующие графики, приведенные на рис.4,5. В сравнении с классической локальной моделью откалиброванная нелокальная модель деформирования изгибаемой балки позволяет добиться лучшего совпадения с результатами численного эксперимента.

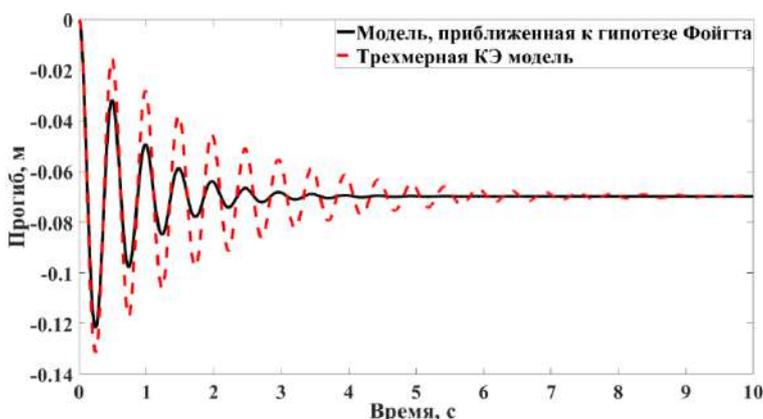


Рис.4. Сравнение результатов численного эксперимента, с результатами одномерного моделирования по модели, приближенной к классической локальной модели Фойгта.

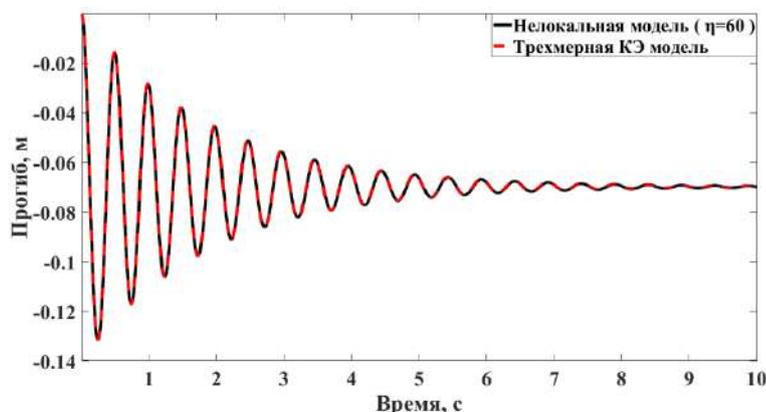


Рис.5. Сравнение результатов численного эксперимента, с результатами одномерного моделирования с использованием откалиброванной модели нелокального во времени деформирования с использованием ядра функции ошибок.

Полученный в результате калибровки масштабный параметр равен $\eta = 60$ 1/с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе настоящего исследования построена нелокальная модель деформирования изгибаемой балки с использованием метода конечных элементов. Для численного решения уравнения движения применялся метод

Ньюмарка. Показана зависимость между масштабным параметром η и амплитудой колебаний изгибаемой балки. Показано, что увеличение степени нелокальности материала приводит к увеличению амплитуды колебаний. Модель дополнена алгоритмом калибровки масштабного параметра по результатам эксперимента. Разработанный алгоритм калибровки отработан с использованием данных численного эксперимента, полученных с учетом ортотропных свойств материала. В сравнении с классической локальной моделью откалиброванная нелокальная модель деформирования изгибаемой балки позволяет добиться лучшей сходимости с результатами численного эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eringen A.C., Edelen D.G.B. *Nonlocal elasticity* // International Journal of Engineering Science. – 1972. – Vol.10(3). – Pp.233-248.
2. Lei Y., Friswell M.I., Adhikari S.A. *Galerkin method for distributed systems with non-local damping* // Int. J. Solids Struct. – 2006. – Vol.43. – Pp.3381-3400.
DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.06.058
3. Potapov V.D. *On the stability of a rod under deterministic and stochastic loading with allowance for nonlocal elasticity and nonlocal material damping* // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2015. – Vol.44. – No.1. – Pp.6-13.
4. Shepitko E.S., Sidorov V.N. *Defining of nonlocal damping model parameters based on composite beam dynamic behaviour numerical simulation results* // IOP Conf. Series: Materials. – 2019.
5. Sidorov V.N., Badina E.S., Detina E.P. *Nonlocal in time model of material damping in composite structural elements dynamic analysis* // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2021. – Vol.17(4). – Pp.14-21.
6. Banks H.T., Inman D.J. *On damping Mechanisms in Beams* // Journal of Applied Mechanics. – 1991. – Vol.58(3). – Pp.716-723.
7. Бате К.Ю., Вилсон Э.Л. *Численные методы анализа и метод конечных элементов*. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
8. Flugge W. *Viscoelasticity. Second Revised Edition*. – Berlin, New York: Springer-Verlag, 1975.
9. Сидоров В.Н., Бадина Е.С. *Метод конечных элементов в задачах устойчивости и колебаний стержневых конструкций*. – М.: Издательство АСВ, 2021. – 172 с.
10. Лукьяненко Д.В. *Численные методы. Конспект*. – Физфак МГУ, 2019. – 100 с.

УДК 666.3

EDN ВСУКХQ (<https://elibrary.ru/bcykxq>)

DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.20



ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПИРОМЕТРИИ ПРИ ПЛАЗМЕННОМ НАГРЕВЕ ТУГОПЛАВКИХ СИЛИКАТНЫХ МАТЕРИАЛОВ*

Шеховцов В.В., Улмасов А.Б., Бакшанский Р.Ю.

*Томский государственный архитектурно-строительный университет,
г. Томск, Россия*

Измерение температуры по спектру теплового излучения объектов является важной задачей во многих областях науки и промышленности, особенно при работе с материалами в условиях высоких температур. Например, в термической плазме, которая используется для нагрева или плавления материалов, где точное измерение температуры может быть критически важным для контроля процесса. Одним из методов измерения температуры объектов по спектру теплового излучения является спектроскопия. Этот метод основан на анализе электромагнитного излучения, испускаемого объектом, и нахождении зависимости его спектрального состава от температуры. Используя законы излучательности Планка, Вина и Стефана-Больцмана, можно определить температуру объекта по его спектральной плотности излучения [1-4].

Методы измерения температуры по спектру теплового излучения требуют точной калибровки и корректировки. Это связано с тем, что спектральный состав излучения может зависеть не только от температуры, но и от других параметров объекта, таких как его химический состав, физическая структура и поверхностные свойства. Поэтому необходимо иметь калибровочные образцы и проводить их сравнение и анализ для точного определения температуры. Кроме того, при измерении температуры по спектру теплового излучения необходимо учитывать влияние факторов, таких как погрешности измерительных приборов и помехи в спектрах излучения. Методы спектроскопии могут быть чувствительными к шумам и искажениям, поэтому для получения точных результатов необходимо использовать высокоточные приборы и методы обработки сигналов. В целом, измерение температуры по спектру теплового излучения объектов является сложной и актуальной задачей, которая требует учета множества факторов и нюансов. Однако при правильной калибровке и корректировке методы спектроскопии позволяют получить достоверные данные о температуре объектов и применяются широко в научных и промышленных исследованиях [5-7].

В настоящее время плазменная плавка компонентных шихт в системе $MgO-Al_2O_3-SiO_2$ активно развивается для синтеза широкого спектра керамических материалов [8,9]. Таким образом, для контролирования процесса плавления разработан диагностический комплекс, для измерения цветовой и спектральной температуры на основе малогабаритных спектрометров. Комплекс включает в себя:

– микроспектрометр НРС 300 со спектральным диапазоном 380-780 нм, оптическое разрешение 0.5 нм, диапазон измерения цветовой температуры

* Работа выполнена при поддержке государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ FEMN-2022-0001 и гранта Президента РФ МК-66.2022.4.

1000-100000 К, время накопления сигнала 50-20000 мс. Производитель Hangzhou Horo Light and Color Technology, Китай;

– микроспектрометр STS-VIS в основе которого лежит ПЗС-детектор с 1024 элементами со спектральным диапазоном 350-800 нм, оптическое разрешение 1.0 нм FWHM (щель 10 мкм). Производитель Ocean Optics, США);

– монохромная цифровая камера HT-SUA130GM-T.

Принцип действия комплекса основан, на предварительной калибровке спектральной чувствительности системы, с использованием всех оптических элементов. На первом этапе с использованием лазерного источника FVFL-204 (длина волны 650 нм, полуширина ± 20 нм), генерируется сигнал по оптоволоконному тракту (оптическое волокно с отверстием 200 мкм) с проекцией через объектив HELIOS-44-2 на уровень эталонной области вольфрамовой ленты. Диаметр визируемой области контролируется монохромной цифровой камерой HT-SUA130GM-T. Питание ламп осуществляется регулируемым источником питания NICE-POWER (30 А, 15 В). Для обеспечения достоверных световых параметров, при определенной электрической нагрузке крайне важно сохранять лампу в данном режиме не меньше, чем 15 минут, поскольку именно за это время происходит достаточный прогрев всех металлических элементов лампы. В рамках первого этапа с использованием микроспектрометра HPCS 300 устанавливается зависимость цветовой температуры от силы тока, протекающей по вольфрамовой ленте. На основе полученной зависимости определяет термодинамическая температура объекта с учетом излучательной способности вольфрама $\varepsilon(\lambda, T)$ [10]

$$T = \left[\frac{1}{T_c} + \frac{1}{C_2} \ln \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \right]^{-1},$$

где T – действительная температура объекта, К; T_c – цветовая температура, К; $\varepsilon_{1,2}$, $\lambda_{1,2}$ – излучательная способность вольфрама на длине волны 530 нм и 650 нм, при условии $C_2/\lambda T \gg 1$.

Для проведения экспериментальных исследований была изготовлена мишень диаметром 25 мм и высотой 30 мм, состоящая из кварцита Чупинского месторождения (содержание диоксида кремния SiO_2 до 99 масс.%). В качестве связующего использовался водный раствор силикат натрия Na_2SiO_3 . На рис.1 представлены фотографии: *a* – регистрация спектров истекающей плазменной струи из сопла плазматрона; *б* – наводка, определение пятна контроля; *в* – процесс нагрева мишени.

Нагрев кварцевой мишени осуществлялся электродуговым плазматроном мощностью 4 кВт (сила тока 40 А, напряжение 100 В). В качестве плазмообразующего газа использовался азот (расход 1 г/с). На рис.2а представлены спектры излучения, вдоль оси плазменной струи, при различном расстоянии от сопла плазматрона. Измерения проводились на расстоянии 10, 20 и 30 мм. Полученные данные свидетельствуют о наличии интенсивных полос излучения в диапазоне 375-400, 500-525, 560-580 нм. Таким образом, для измерений температуры выбран спектральный диапазон 600-650 нм свободный от собственного излучения плазмы (рис.2б). На рис.2в,г представлены типичные спектры излучения в исходном виде и после корректировки при нагреве и остывании образца. Время накопления сигнала $5 \cdot 10^{-3}$ с.

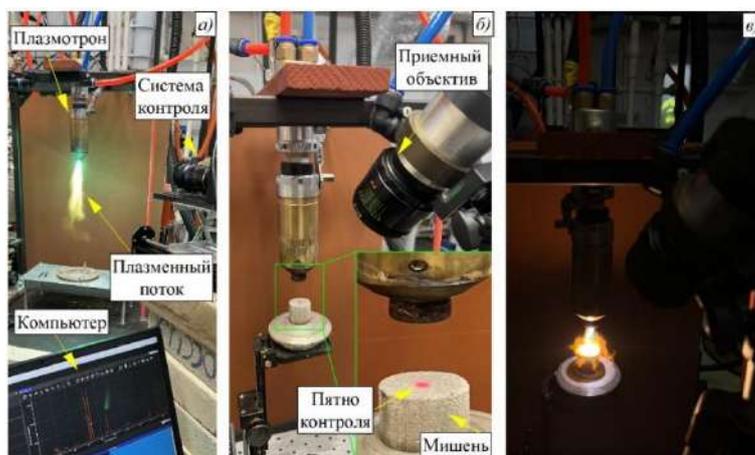


Рис.1. Модельный эксперимент: а) регистрация истекающей плазменной струи из сопла плазмотрона; б) наводка, определение пятна контроля; в) процесс нагрева.

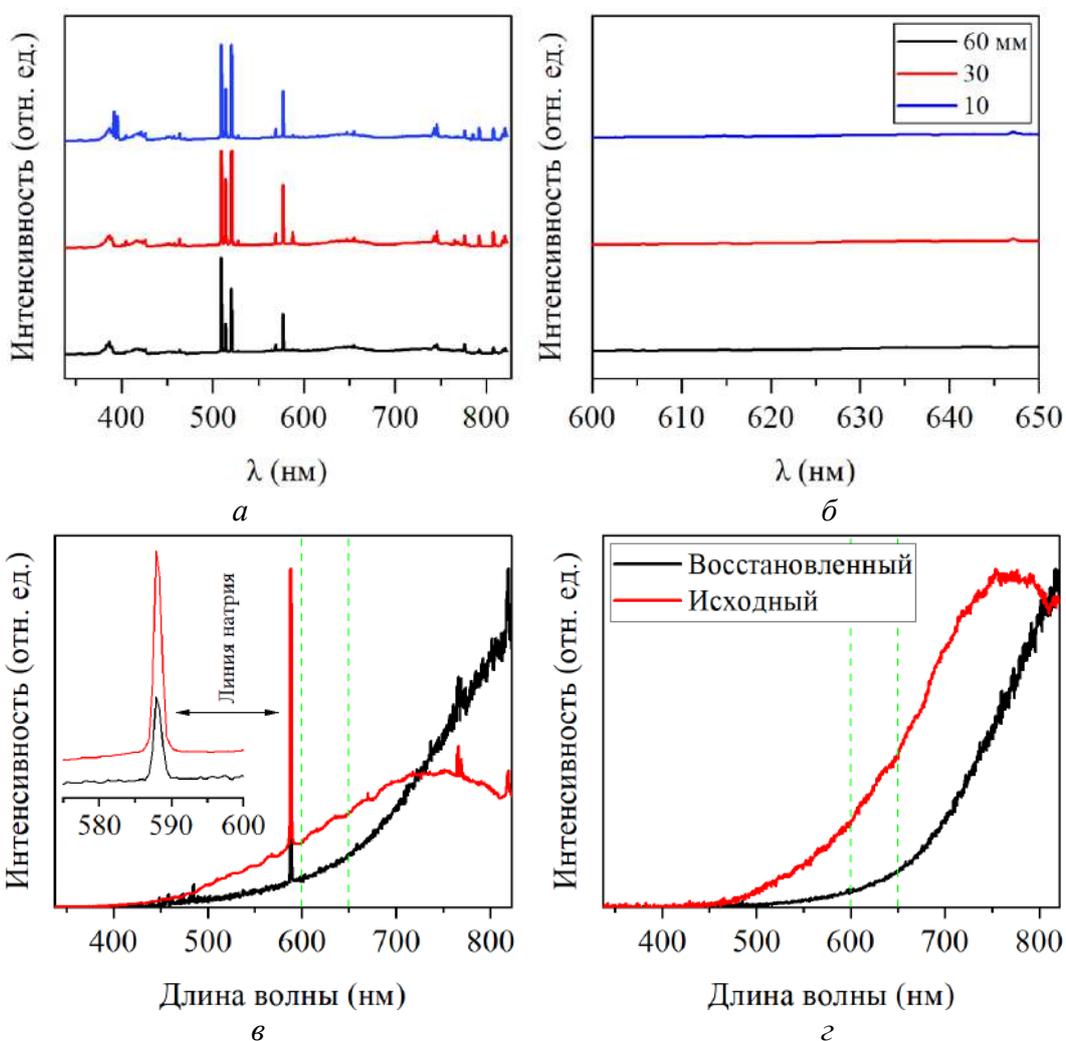


Рис.2. Спектры излучения вдоль оси плазменной струи, при различном расстоянии от сопла плазмотрона: а) общий вид; б) спектральный диапазон 600-650 нм свободный от собственного излучения плазмы, в, з) типичные спектры излучения в исходном виде и после корректировки при нагреве и остывании образца.

В зарегистрированном спектре излучения, при нагреве (воздействие плазменного потока) мишени наблюдается ярко выраженная фраунгоферонная линия натрия, длиной волны в интервале 589,592 и 588,995 нм. Это обусловлено испарением связующего Na_2SiO_3 используемого, при изготовлении мишени. На рис.3 представлена динамика нагрева и охлаждения изготовленной мишени в течение 3 мин.

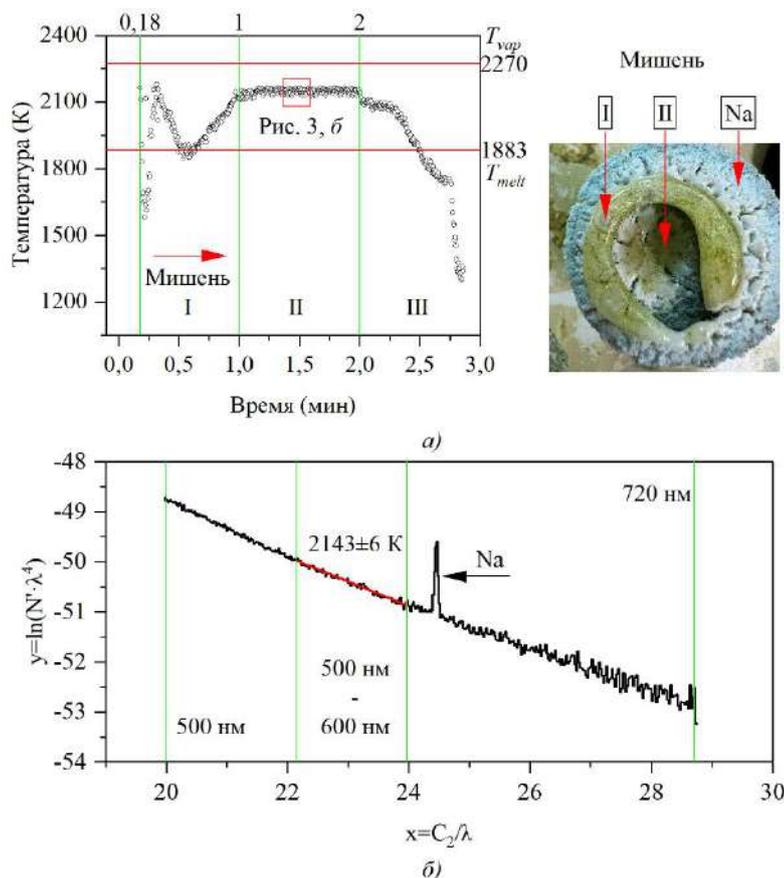


Рис.3. Динамика нагрева и охлаждения кварцевой мишени (а) и участок 500-720 нм типичного спектра излучения в области II (б). Температура 2143 ± 6 К.

Плазменный нагрев кварцевой мишени, можно разделить на три этапа:

I этап – при взаимодействии плазменного потока с кварцевой мишенью происходит деформация поверхности, за счёт фрагментации мелкодисперсных частиц от газодинамического напора плазменной струи, что отображается двумя локальными экстремумами на рис.3а. Стоит отметить, что во временном диапазоне от 10 до 20 с, разброс температур составляет 1580-2179 К, $\Delta T \sim 600$ К. В интервале от 20 до 60 с наблюдается 1848-2179 К, $\Delta T \sim 330$ К. Уменьшение разность ΔT обосновано продвижением теплового потока вглубь мишени.

II этап – формирование стабильной области плавления за счет образования контура из расплавленных частиц, который выступает в качестве сдерживающего барьера, от разлета мелкодисперсных частиц. На рис.3б представлен участок 500-720 нм типичного спектра излучения в области II из которого следует, что температура пятна контроля составляет 2143 ± 6 К. Формирование контура определяет еще тот факт, что расплав на основе SiO_2 обладает высокой вязкостью: при температурах 1800-2000 К, вязкость варьируется от 10^8 до 10^6 Па соответственно.

III этап – при рассмотрении охлаждения (кристаллизация) конденсированного материала наблюдается два плато в районе 120-140 с ($T = 2081 \pm 20$ К) и 155-165 с ($T = 1732 \pm 6$ К), связанные с фазовыми переходами при кристаллизации конденсированной фазы. Скорость охлаждения в рамках температурного диапазона 2179 и 1300 К составляет 17 ± 3 К/с.

Таким образом, в работе показана возможность применения малогабаритных спектрометров в рамках диагностики нагрева, плавления и охлаждения кварцевой мишени, посредством плазменной струи атмосферного давления. Установлено, что при взаимодействии плазменной струи с кварцевой мишенью наблюдаются три этапа, включающих: деформацию поверхности, выход на стабильную температуру нагрева и охлаждение конденсированного материала, с точками фазовых переходов «жидкое-пиропластичное-твердое». Благодаря использованию СП возможно контролировать процесс нагрева и охлаждения, а также определить поведение материала при интенсивном взаимодействии с плазменной струей. В целом, СП является важным инструментом в области пирометрии и позволяет более глубоко изучать термические процессы при обработке и синтезе новых материалов на основе неметаллических тугоплавких соединений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gulyaev I.P., Dolmatov A.V. *Spectral-brightness pyrometry: Radiometric measurements of non-uniform temperature distributions* // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2018. – Vol.116. – Pp.1016-1025.
2. Bertrand Ph., Ignatiev M., Flamant G., Smurov I. *Pyrometry applications in thermal plasma processing* // Vacuum. – 2000. – Vol.56. – Iss.1. – Pp.71-76.
3. Магунов А.Н. *Спектральная пирометрия*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 248 с.
4. Магунов А.Н., Захаров А.О., Лапшинов Б.А. *Измерение нестационарной температуры методом спектральной пирометрии* // Приборы и техника эксперимента. – 2012. – №1. – С.143.
5. Araújo A. *Multi-spectral pyrometry – a review* // Meas. Sci. Technol. – 2017. – No.28. – 082002.
6. Dolmatov A.V., Milyukova I.V., Gulyaev P.Y. *Investigation of structure formation in thin films by means of optical pyrometry* // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – No.1281(1). – 012010.
7. Fu T., Liu J., Duan M., Li S. *Subpixel temperature measurements in plasma jet environments using high-speed multispectral pyrometry* // Journal of Heat Transfer. – 2018. – No.140(7). – 071601.
8. Шеховцов В.В., Скрипникова Н.К., Кунц О.А. *Плазменная технология синтеза форстеритового материала* // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2023. – Т.25. – №1. – С.166-175.
9. Шеховцов В.В., Скрипникова Н.К., Улмасов А.Б. *Синтез алюмомagneзиальной керамики $MgAl_2O_3$ в среде термической плазмы* // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2022. – Т.24. – №3. – С.138-146.
10. Магунов А.Н. *Спектральная пирометрия объектов с неоднородной температурой* // Журнал технической физики. – 2010. – Т.80. – №7. – С.78-82.



АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ*

Шешенин С.В., Артамонова Н.Б., Кузьмин М.А.

*ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»,
г. Москва, Россия*

В статье проводится асимптотическое осреднение упругих однородных, слоистых и функционально-градиентных пластин вплоть до четвертого приближения. Асимптотическое разложение применяется к трехмерным уравнениям теории упругости и сводит их к серии двумерных задач в плоскости пластины и одномерных задач в поперечном направлении. Краевой эффект при этом не рассматривается. Особенностью работы является рассмотрение четвертого и пятого приближений. Показано, что для четвертого приближения состояние изгиба и деформирования в срединной плоскости не разделяются даже для однородной пластины и малых прогибов. Проведенное асимптотическое исследование справедливо и для сильно-ортотропных пластин.

1. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Теория пластин для однородных материалов, а также для ламинатов и функционально-градиентных материалов (ФГМ) развивается уже давно. Многие специалисты в области механики, техники и прикладной математики внесли известный вклад.

Действительно, существуют различные методы, позволяющие свести трехмерные уравнения упругости к двумерным уравнениям теории пластин. Одним из методов редукции является асимптотический метод, который используется в нашем исследовании. Кажется, асимптотическая редукция была предложена в [1].

Применение асимптотического осреднения типа многомасштабного метода к тонким пластинам началось достаточно давно с работы [2]. Асимптотика строится относительно малого параметра, равного отношению толщины к характерному размеру в плане пластины. Среди работ в этом направлении (см., например, [3-9]) отметим нашу недавнюю работу [6], в которой метод применен для сильно ортотропных пластин. В последнем случае имеется уже два малых параметра. Вторым малым параметром является отношение поперечных модулей упругости к модулям в плане пластины.

Эта работа продолжает исследование, начатое в [7], где теория была развита для периодических в плане неоднородных гофрированных пластин в трех приближениях, а также в работах [8,9], в которых рассматривалось осреднение слоистой пластины.

Развитая ниже теория применима к однородным пластинам, слоистым пластинам и пластинам из функционально-градиентного материала (ФГМ).

*Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2022-284.

Рассмотрим процедуру осреднения для совместного плоско-изгибного состояния, т.е. состояния изгиба/кручения совместно с растяжением/сдвигом в отсчетной плоскости. Для удобства читателя напомним основные сведения, связанные с процедурой осреднения пластин [3,6-9].

Будем рассматривать поперечный изгиб под действием поперечной нагрузки $\varepsilon^3 p(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} = (x_1, x_2)$), приложенной к верхней поверхности. Нижняя поверхность свободна. В силу линейности задачи в этом предположении нет ограничения общности. Как обычно, вводим «быструю» координату $\xi_3 = x_3/\varepsilon$, ε – малый параметр, являющийся отношением толщины пластины к размеру в плане. Далее будем писать просто ξ . Предполагаем, что перемещения имеют вид $u_i = u_i(x_1, x_2, \xi)$. Это значит, что они меняются в поперечном направлении быстрее, чем в плоскости x_1, x_2 . Плоскость $x_3 = 0$ является отсчетной. Она может быть выбрана произвольно, но для симметричных пластин удобно ее выбрать совпадающей со срединной плоскостью. Индексы, обозначенные малыми латинскими буквами, пробегают значения 1,2; большими – 1,2,3. Запятой обозначаем производную по соответствующей координате: $f(x_1, x_2)_{,i} = \partial f / \partial x_i$ или $f(\xi_3)_{,3} = \partial f / \partial \xi = f'$. Нагрузка p зависит только от медленных координат x_1, x_2 . Это означает, что она слабо меняется на расстоянии порядка толщины пластины.

Уравнения равновесия в области пластины V и граничные условия на верхней Σ_{top} и нижней Σ_{bot} ($\xi = -1/2$) поверхностях записываются согласно 3D теории упругости

$$\begin{aligned} (C_{ijkl} u_{k,l})_{,j} &= 0, \quad \mathbf{x} \in V, \quad C_{ijkl} u_{k,l} n_j = \varepsilon^3 p(\mathbf{x}) \delta_{3i}, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{top}, \\ C_{ijkl} u_{k,l} n_j &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{bot}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $C_{ijkl}(\xi)$ – упругие константы материала, предполагаемого ортотропным, \mathbf{n} – единичный вектор нормали к границе. Задача состоит в том, чтобы асимптотически удовлетворить условиям (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Перемещения рассматриваем в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(e)} + \mathbf{u}^{(b)}$, где

$$u_i^{(e)} = v_i(x_1, x_2) + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m N_i^{(e)PQ_0 \dots Q_{m-1}}(\xi) v_{P,Q_0 \dots Q_{m-1}}(x_1, x_2), \quad (2)$$

$$u_l^{(b)} = -\varepsilon \xi_3 w_{,l}(x_1, x_2) + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+1} N_l^{(b)PQ_0 \dots Q_{m-1}}(\xi) w_{P,Q_0 \dots Q_{m-1}}(x_1, x_2), \quad (3)$$

$$u_3^{(b)} = w(x_1, x_2) + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+1} N_3^{(b)PQ_0 \dots Q_{m-1}}(\xi) w_{P,Q_0 \dots Q_{m-2}}(x_1, x_2).$$

где $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, 0\}$ – гладкая составляющая перемещения в отсчетной плоскости, w – гладкая составляющая прогиба. Индексом «e» означает extension, «b» – bending. Асимптотические представления (2), (3) приближают решение задачи (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Нижние индексы дают номер компоненты вдоль соответствующей оси. Верхние индексы – номер функции. В работах [6-9] M равнялось трем. В данной работе M равно пяти. Заметим, что наличие большого числа индексов не должно пугать читателя. Далее будет показано, что дифференциальные уравнения относительно «медленных» функций v и w имеют «стандартный» для теорий пластин вид, а уравнения относительно функций $N_i^{(e)PQ_0 \dots Q_m}$ или $N_i^{(b)PQ_0 \dots Q_m}$

получаются линейными ОДУ. Конечно, неудобство состоит в том, что число этих функций увеличивается с ростом M . Зато получаемые асимптотические уравнения теории пластин математически строго обоснованы. Как уже отмечалось, сравнение асимптотических уравнений первых трех приближений с классическими теориями описано в [6]. Отличие от отмеченных работ состоит в объединении перемещений $\mathbf{u}^{(e)} + \mathbf{u}^{(b)}$, тогда как в тех работах рассматривалась только составляющая $\mathbf{u}^{(b)}$. Ниже показано, что решение в виде только «изгибной» составляющей $\mathbf{u}^{(b)}$ действительно существует для первых трех приближений, но уже не существует для четвертого.

По перемещениям вычислим напряжения $\sigma = \sigma^{(e)} + \sigma^{(b)}$, где

$$\sigma_{ij}^{(e)} = P_{ij}^{PQ} v_{P,Q} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m P_{ij}^{PQ_0 \dots Q_m} w_{P, Q_0 \dots Q_m}, \quad (4)$$

$$P_{ij}^{PQ_0 \dots Q_m} = C_{ijkQ_m} N_k^{(e)PQ_0 \dots Q_{m-1}} + C_{ijk3} \left(N_k^{(e)PQ_0 \dots Q_m} \right)',$$

$$\sigma_{ij}^{(b)} = \varepsilon Q_{ij}^{PQ} w_{P,Q} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+1} Q_{ij}^{PQ_0 \dots Q_m} w_{P, Q_0 \dots Q_m}, \quad (5)$$

$$Q_{ij}^{PQ_0 \dots Q_m} = C_{ijkQ_m} N_k^{(b)PQ_0 \dots Q_{m-1}} + C_{ijk3} \left(N_k^{(b)PQ_0 \dots Q_m} \right)',$$

причем $P_{ij}^{PQ} = C_{ijPQ} + C_{ijk3} N_k^{(e)PQ}$, и $Q_{ij}^{PQ} = -\xi C_{ijPQ} + C_{ijk3} \left(N_k^{(b)PQ} \right)'$, ($Q = Q_0$). Далее получаем, учитывая связь x_3 и ξ

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} = & \frac{1}{\varepsilon} \left(P_{i3}^{PQ} \right)' v_{P,Q} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m-1} \left(\left(P_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m} \right)' + P_{iQ_m}^{Q_1 P Q_0 \dots Q_{m-1}} \right) v_{P, Q_0 \dots Q_m} + \\ & + \left(Q_{i3}^{PQ} \right)' w_{P,Q} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m \left(\left(Q_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m} \right)' + Q_{iQ_m}^{P Q_0 \dots Q_{m-1}} \right) w_{P, Q_0 \dots Q_m}. \end{aligned}$$

Требуется удовлетворить 3D уравнениям равновесия $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \left(P_{i3}^{PQ} \right)' v_{P, Q_0} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m-1} \left(\left(P_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m} \right)' + P_{iQ_m}^{Q_1 P Q_0 \dots Q_{m-1}} \right) v_{P, Q_0 \dots Q_m} + \\ + \left(Q_{i3}^{PQ} \right)' w_{P, Q_0} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m \left(\left(Q_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m} \right)' + Q_{iQ_m}^{P Q_0 \dots Q_{m-1}} \right) w_{P, Q_0 \dots Q_m} + f_i = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $f_i = f_i(x_1, x_2, \xi)$, $f_3 = 0$, а также граничным условиям

$$\begin{aligned} P_{i3}^{PQ} v_{P,Q} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m P_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m} v_{P, Q_0 \dots Q_m} + \varepsilon Q_{i3}^{PQ} w_{P,Q} + \\ + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+1} Q_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m} w_{P, Q_0 \dots Q_m} = \begin{cases} \varepsilon^3 p, & \xi = 1/2 \\ 0, & \xi = -1/2 \end{cases}. \end{aligned} \quad (7)$$

Наличие граничных условий (7) на нижней и верхней поверхностях существенно отличает применение методики осреднения к пластинам по сравнению с осреднением трехмерной среды с периодической или непериодической структурой. В последнем случае обычно граничные условия не рассматриваются. Причина состоит в том, что вблизи границы возникает пограничный слой, где асимптотическое решение имеет меньшую точность. В нашем случае аналогичная картина возникает вблизи боковой границы.

Поэтому в данной работе осреднение вблизи боковой границы мы также не рассматриваем.

Поперечная нагрузка в (7) пропорциональна ε^3 , чтобы перемещения в плоскости v и прогиб w были конечны. Также требуется положить в (6)

$$\left(P_{i3}^{PQ}\right)' = 0, \quad \left(Q_{i3}^{PQ}\right)' = 0. \quad (8)$$

Граничные условия для (8) следуют из (7)

$$P_{i3}^{PQ} = 0, \quad Q_{i3}^{PQ} = 0, \quad \xi = \pm 1/2. \quad (9)$$

В методе осреднения для определения функций v и w используется осреднение уравнений равновесия. В нашем случае осреднение уравнений (6) дает

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m-1} \left\langle \left(P_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m}\right)' + P_{iQ_m}^{Q_1 P Q_0 \dots Q_{m-1}} \right\rangle v_{P, Q_0 \dots Q_m} + \\ + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m \left\langle \left(Q_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m}\right)' + Q_{iQ_m}^{PQ_0 \dots Q_{m-1}} \right\rangle w_{P, Q_0 \dots Q_m} + \langle f_I \rangle = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Имеется в виду осреднение в поперечном направлении по формуле $\langle g \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} g(x_1, x_2, \xi_3) d\xi_3$. Обозначим константы

$$\begin{aligned} a_{iQ_m P Q_0 \dots Q_{m-1}} &= \left\langle \left(P_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m}\right)' + P_{iQ_m}^{PQ_0 \dots Q_{m-1}} \right\rangle, \\ b_{iQ_m P Q_0 \dots Q_{m-1}} &= -\left\langle \left(Q_{i3}^{PQ_0 \dots Q_m}\right)' + Q_{iQ_m}^{PQ_0 \dots Q_{m-1}} \right\rangle. \end{aligned}$$

Тогда два 2D уравнения равновесия сил в плоскости x_1, x_2 получим из (10) умножением на ε

$$\sum_{m=1}^M \varepsilon^m a_{iQ_m P Q_0 \dots Q_{m-1}} v_{P, Q_0 \dots Q_m} - \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+1} b_{iQ_m P Q_0 \dots Q_{m-1}} w_{P, Q_0 \dots Q_m} + \varepsilon \langle f_I \rangle = 0. \quad (11)$$

Усилия, перерезывающие силы и моменты вводятся стандартно

$$T_{II} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{II}(x_3) dx_3 = \varepsilon \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_{II}(\xi) d\xi, \quad Q_I = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{I3}(x_3) dx_3 = \varepsilon \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_{I3}(\xi) d\xi.$$

Относительно этих величин имеют место уравнения

$$\begin{aligned} T_{II,J} + \varepsilon \langle f_I \rangle = 0, \quad M_{II,J} = Q_I, \quad Q_{I,1} + \varepsilon^3 p(x) = 0, \quad M_{II,II} = \varepsilon^3 p(x), \\ M_{II} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{II} x_3 dx_3 = \varepsilon^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_{II}(\xi) \xi d\xi. \end{aligned}$$

Они выводятся интегрированием в поперечном направлении 3D уравнений теории упругости. Уравнение (11) представляет собой первое из написанных выше уравнений (уравнение равновесие сил). Четвертое из написанных выше уравнений уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \langle P_{IJ}^{PQ} \xi \rangle v_{P,QIJ} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+2} \langle P_{IJ}^{PQ_0 \dots Q_m} \xi \rangle v_{P,Q_0 \dots Q_m IJ} + \varepsilon^3 \langle Q_{IJ}^{PQ} \xi \rangle w_{P,QIJ} + \\ + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+3} \langle Q_{IJ}^{PQ_0 \dots Q_m} \xi \rangle w_{P,Q_0 \dots Q_m IJ} = \varepsilon^3 p. \end{aligned}$$

Если ввести константы $c_{IJPQ_0 \dots Q_m} = -\langle P_{IJ}^{PQ_0 \dots Q_m} \xi \rangle$ и $d_{IJPQ_0 \dots Q_m} = \langle Q_{IJ}^{PQ_0 \dots Q_m} \xi \rangle$, то это уравнение принимает вид

$$-\sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+1} c_{IJPQ_0 \dots Q_{m-1}} v_{P,Q_0 \dots Q_{m-1} IJ} + \sum_{m=1}^M \varepsilon^{m+2} d_{IJPQ_0 \dots Q_{m-1}} w_{P,Q_0 \dots Q_{m-1} IJ} = \varepsilon^3 p. \quad (12)$$

Константы d_{IJPQ} имеют смысл эффективных изгибных модулей упругости. Константы c_{IJPQ} есть модули взаимного влияния растяжения/сдвига и изгиба/кручения. При этом $b_{IJPQ} = c_{PQIJ}$.

Для решения системы (11), (12) применяем стандартный прием асимптотического анализа, представляя перемещения и прогиб в виде разложения по малому параметру ε

$$v = v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \dots, \quad w = w^{(0)} + \varepsilon w^{(1)} + \varepsilon^2 w^{(2)} + \dots$$

Полезно отметить, что в первом приближении получается в точности классическая ламинатная теория (CLT) [10]. В терминах жесткостей уравнения имеют вид

$$A_{IJPQ} v_{P,QIJ} - B_{IJPQ} w_{P,QIJ} = 0, \quad -B_{IJPQ}^T v_{P,QIJ} + D_{IJPQ} w_{P,QIJ} = \varepsilon^3 p,$$

где жесткости равны соответственно

$$A_{IJPQ} = \varepsilon a_{IJPQ} = \int_{-h/2}^{h/2} P_{IJPQ}(x_3/h) dx_3,$$

$$D_{IJPQ} = \varepsilon^3 d_{IJPQ} = \int_{-1/2}^{h/2} -(x_3)^2 Q_{IJPQ}(x_3/h) dx_3,$$

$$B_{IJPQ} = C_{PQIJ} = \varepsilon^2 b_{IJPQ} = \int_{-h/2}^{h/2} -Q_{IJPQ}(x_3/h) dx_3 = \int_{-1/2}^{1/2} x_3 P_{IJPQ}(x_3/h) dx_3.$$

В данной работе далее будем рассматривать случай симметричной относительно отсчетной плоскости пластины. В этом случае $B_{IJPQ} = C_{IJPQ} = 0$.

Локальные задачи второго приближения приводят только к ненулевым локальным функциям

$$Q_{\alpha 3}^{P\alpha Q_1} = C_{\alpha 33\alpha} N_3^{(b)P\alpha} + C_{\alpha 3\alpha 3} \left(N_{\alpha}^{(b)P\alpha Q_1} \right)', \quad P_{\alpha 3}^{P\alpha Q_1} = C_{\alpha 33\alpha} N_3^{(e)P\alpha} + C_{\alpha 3\alpha 3} \left(N_{\alpha}^{(e)P\alpha Q_1} \right)'$$

для $\alpha = 1, 2$. Это позволяет находить поперечные касательные напряжения.

Задача третьего приближения для функций $N_i^{(e)PQ_0 Q_1 Q_2}$ формально не отличается от задачи второго приближения. Увеличивается только число индексов. Однако, получаемые формулы легко программируются, и вычисление требуемых функций не вызывает трудностей. Для однородной пластины можно получить явные формулы.

Итак, в третьем приближении имеем отличные от нуля функции $P_{IJ}^{PQ_0 Q_1 Q_2}$, $Q_{IJ}^{PQ_0 Q_1 Q_2}$ и $P_{33}^{PQ_0 Q_1 Q_2}$, $Q_{33}^{PQ_0 Q_1 Q_2}$. Эти функции позволяют получить нормальное

поперечное напряжение, а также уточнение основных напряжений в плоскости пластины. При этом удовлетворяется граничное условие на верхней поверхности пластины.

Можно увеличить точность асимптотического решения, если рассмотреть уравнения (11), (12), удерживая члены вплоть до $O(\varepsilon^5)$. Это приводит к рекуррентным уравнениям при $\langle f_I \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 : \varepsilon^4 a_{I Q_1 P Q_0} v_P^{(3)},_{Q_0 Q_1} - \varepsilon^4 b_{I Q_3 P Q_0 Q_1 Q_2} w_{, P Q_0 Q_1 Q_2 Q_3}^{(0)} &= 0, \\ \varepsilon^5 : \varepsilon^5 a_{I Q_1 P Q_0} v_P^{(4)},_{Q_0 Q_1} + \varepsilon^5 a_{I Q_2 P Q_0 Q_1} v_P^{(3)},_{Q_0 Q_1 Q_2} - \varepsilon^5 b_{I Q_3 P Q_0 Q_1 Q_2} w_{, P Q_0 Q_1 Q_2 Q_3}^{(1)} - \\ &- \varepsilon^5 b_{I Q_4 P Q_0 Q_1 Q_2 Q_3} w_{, P Q_0 Q_1 Q_2 Q_3 Q_4}^{(0)} = 0, \\ \varepsilon^3 : d_{I P P Q_0} w_{, P Q_0 I} &= p, \\ \varepsilon^4 : d_{I P P Q_0} w_{, P Q_0 I}^{(1)} + d_{I P P Q_0 Q_1} w_{, P Q_0 Q_1 I}^{(0)} &= 0, \\ \varepsilon^5 : -c_{I P P Q_0} v_P^{(3)},_{Q_0 I} + d_{I P P Q_0} w_{, P Q_0 I}^{(2)} + d_{I P P Q_0 Q_1} w_{, P Q_0 Q_1 I}^{(1)} + d_{I P P Q_0 Q_1 Q_2} w_{, P Q_0 Q_1 Q_2 I}^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Для симметричной пластины $d_{I P P Q_0} = 0$, $c_{I P P Q_0} = 0$. Поэтому получаем, что $w^{(1)} = 0$. Далее получаем, что прогиб $w^{(2)}$ находится из такого же уравнения, что было получено в [6], в которых уравнение для прогиба не рассматривалось совместно с уравнениями равновесия в продольном направлении. Это уравнение имеет вид

$$d_{I P P Q_0} w_{, P Q_0 I}^{(2)} + d_{I P P Q_0 Q_1 Q_2} w_{, P Q_0 Q_1 Q_2 I}^{(0)} = 0. \quad (14)$$

Система (13), (14) позволяет определять функции $w^{(2)}$ и $v^{(3)}, v^{(4)}$. Важно заметить, что $v^{(3)}$ и $v^{(4)}$ позволяет определять независимо от $w^{(2)}$.

Теперь осталось определить граничные условия для локальных функций **P** и **Q**. Это можно сделать, потребовав, чтобы граничное условие на верхней поверхности пластины давало бы уравнения на w , совпадающие с (13), (14). Похожую идею впервые высказал К. Скопцов. Выпишем граничные условия с точностью до $O(\varepsilon^5)$

$$\begin{aligned} P_{i3}^{PQ} \left(\varepsilon^3 v_P^{(3)},_Q + \varepsilon^4 v_P^{(4)},_Q + \varepsilon^5 v_P^{(5)},_Q \right) + \varepsilon^1 P_{i3}^{PQ_0 Q_1} \left(\varepsilon^3 v_P^{(3)},_{Q_0 Q_1} + \varepsilon^4 v_P^{(4)},_{Q_0 Q_1} \right) + \\ + \varepsilon^2 P_{i3}^{PQ_0 Q_1 Q_2} \varepsilon^3 v_P^{(3)},_{Q_0 Q_1 Q_2} + \\ + \varepsilon Q_{i3}^{PQ} \left(w_{, PQ}^{(0)} + \varepsilon w_{, PQ}^{(1)} + \varepsilon^2 w_{, PQ}^{(2)} + \varepsilon^3 w_{, PQ}^{(3)} + \varepsilon^4 w_{, PQ}^{(4)} \right) + \\ + \varepsilon^2 Q_{i3}^{PQ_0 Q_1} \left(w_{, P Q_0 Q_1}^{(0)} + \varepsilon w_{, P Q_0 Q_1}^{(1)} + \varepsilon^2 w_{, P Q_0 Q_1}^{(2)} + \varepsilon^3 w_{, P Q_0 Q_1}^{(3)} \right) + \\ + \varepsilon^3 Q_{i3}^{PQ_0 Q_1 Q_2} \left(w_{, P Q_0 Q_1 Q_2}^{(0)} + \varepsilon w_{, P Q_0 Q_1 Q_2}^{(1)} + \varepsilon^2 w_{, P Q_0 Q_1 Q_2}^{(2)} \right) + \\ + \varepsilon^4 Q_{i3}^{PQ_0 Q_1 Q_2 Q_3} \left(w_{, P Q_0 Q_1 Q_2 Q_3}^{(0)} + \varepsilon w_{, P Q_0 Q_1 Q_2 Q_3}^{(1)} \right) + \\ + \varepsilon^5 Q_{i3}^{PQ_0 Q_1 Q_2 Q_3 Q_4} w_{, P Q_0 Q_1 Q_2 Q_3 Q_4}^{(0)} = \varepsilon^3 p \delta_{i3}. \end{aligned} \quad (15)$$

Можно заметить, что для достижения отмеченного совпадения, достаточно поставить граничные условия на локальные функции в следующем виде

$$\begin{aligned}
P_{i3}^{PQ} &= 0, & P_{i3}^{PQ_0Q_1} &= 0, & P_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2} &= 0, \\
Q_{i3}^{PQ} &= 0, & Q_{i3}^{PQ_0Q_1} &= 0, & Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2} &= d_{PQ_0Q_1Q_2}, & Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2Q_3} &= 0, \\
Q_{i3}^{PQ_0Q_1Q_2Q_3Q_4} &= d_{PQ_0Q_1Q_2Q_3Q_4}.
\end{aligned}$$

Тогда уравнение (14) и граничные условия (15) приводят к одинаковым уравнениям для $w^{(0)}$, $w^{(2)}$

$$\varepsilon^5 d_{IIPQ_0} w_{,PQ_0IJ}^{(2)} + \varepsilon^5 d_{IIPQ_0Q_1Q_2} w_{,PQ_0Q_1Q_2IJ}^{(0)} = 0, \quad \varepsilon^3 d_{IIPQ_0} w_{,PQ_0IJ}^{(0)} = \varepsilon^3 p.$$

Таким образом, теоретически показано, что поперечный изгиб симметричной или даже однородной, но достаточно толстой или сильно ортотропной пластины приводит, вообще говоря, к малым продольным перемещениям. При этом прогиб находится независимо от продольного перемещения. В конце заметим, что интерес к высшим приближениям теории пластин отмечается в литературе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлено асимптотическое получение уравнений равновесия пластин вплоть до пятого приближения для сильно ортотропного материала, исходя из трехмерных уравнений теории упругости. Представление ограничено случаем симметричной в поперечном направлении пластины.

Следует отметить, что для однородной пластины используемая асимптотическая теория в первом приближении приводит к дифференциальным уравнениям, аналогичным теории Кирхгофа, а в третьем – теории третьего порядка. Теория Рейсснера находится между ними. Распределения компонент по толщине пластины для теории Рейсснера являются линейными, а для асимптотической теории и теории пластин третьего порядка изменяются по кубическому закону.

В четвертом приближении возникают перемещения в срединной плоскости, зависящие от прогиба. Задача определения продольных перемещений решается независимо от задачи для определения прогиба. Важно отметить, что проведенные вычисления показали, что величина продольных перемещений весьма мала и может не учитываться.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gol'denveizer A.L. *Methods for justifying and refining the theory of shells: A survey of recent results* // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1968. – Vol.32. – No.4. – Pp.704-718.
2. Kohn R.V., Vogelius M. *A new model of thin plates with rapidly varying thickness* // Int. J. Solids Struct. – 1984. – Vol.20. – No.4. – Pp.333-350.
3. Levinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells*. – New York: World Scientific, 2000. – 768 p.
4. Панасенко Г.П., Резцов М.В. *Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине* // Доклады АН СССР. – 1987. – Т.294. – №5. – С.1061-1065.
5. Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. *Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной*

- теории упругости // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – Т.7. – №19.*
6. Шешенин С.В., Мурадханов Р.Р. *Асимптотическое исследование изгиба пластины для сильно ортотропного материала // Известия РАН. МТТ. – 2023. – №3. – С.36-57.*
 7. Шешенин С.В. *Асимптотический анализ периодических в плане пластин // Известия РАН. МТТ. – 2006. – №6. – С.71-79.*
 8. Шешенин С.В. *Применение метода осреднения к пластинам, периодическим в плане // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2006. – №1. – С.47-51.*
 9. Шешенин С.В., Скопцов К.А. *Теория пластин, основанная на методе асимптотических разложений // Математическое моделирование и численные методы. – 2014. – №2. – С.49-61.*
 10. Jones R.M. *Mechanics of Composite Materials.* – Washington: Scripta Book Co., 1975. – 355 p.



ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ПЛЁНКИ НА ТРЕНИЕ И ИЗНАШИВАНИЕ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА*

Шпенев А.Г., Буковский П.О.

Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Композитные материалы на основе углеродного волокна и углеродной матрицы (УУКМ) находят широкое применение во фрикционных узлах, характеризующих высокими нагрузками и температурами. Высокая прочность в сочетании с возможностью работать при температуре поверхности более 1500°C без потери фрикционных свойств делает УУКМ идеальным материалом для авиационных и высокоскоростных ж/д тормозных систем, сцеплений спецтехники и т.д. При трении на поверхности УУКМ образуется заметная плёнка из продуктов износа (третье тело), которая может оказывать важное влияние на трение и износ материала. Подходы к описанию влияния третьего тела на трение можно условно разделить на два типа: моделирующие движение частиц износа в контакте на микроуровне (в основном численными методами) [1,2] и на подходы, опирающиеся на экспериментальные исследования [3].

В данной работе процесс трения с образованием значительной плёнки третьего тела будет представлен как два разных процесса. Первый – это процесс эволюции плёнки на макроуровне, определяющийся балансом между притоком вещества в плёнку за счёт износа поверхностей и уносом вещества из зазора контакта. В результате устанавливается некоторое равновесие, определяемое как параметрами контакта (контактными давлениями, скоростью скольжения, температурой), так и конфигурацией взаимодействующих образцов. Второй процесс описывает эволюцию плёнки на уровне отдельных волокон композита (локальный микроуровень). Он определяется вязкоупругими свойствами плёнки и неоднородностью трибологических свойств поверхности композита. Для оценки влияния этих процессов на износ УУКМ в работе используется линейное приближение следующих величин:

- влияния толщины плёнки третьего тела на интенсивность изнашивания композита [4];
- влияния толщины плёнки третьего тела на расход вещества плёнки третьего тела через границу области контакта;
- влияния контактного давления на интенсивность изнашивания поверхности композита;
- влияния контактного давления на скорость вязкоупругой деформации плёнки.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №21-58-52006 МНТ_а.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В соответствии с работами [4,6] баланс вещества в поверхностной плёнке (рис.1) может быть представлен в следующем виде

$$\begin{cases} Q_s = C_s V S (H_{\max} - H) \\ Q_w = C_w V L H \end{cases} \quad (1)$$

где Q_s – интенсивность притока вещества в плёнку за счёт износа, а Q_w – интенсивность оттока вещества из плёнки за счёт его выноса по периметру области контакта, S и L – площадь и периметр области контакта соответственно, C_s и C_w – коэффициенты пропорциональности, H_{\max} – максимально возможная толщина плёнки, при достижении которой поверхности полностью разделяются и интенсивность изнашивания падает до нуля. Приравняв Q_s и Q_w друг к другу, получим выражения для толщины плёнки H и средней интенсивности линейного износа \bar{u}

$$\begin{cases} H = \frac{H_{\max}}{\frac{C_w L}{C_s S} + 1} \\ \bar{u} = \frac{H_{\max}}{\frac{1}{C_s} + \frac{1S}{C_w L}} \end{cases} \quad (2)$$

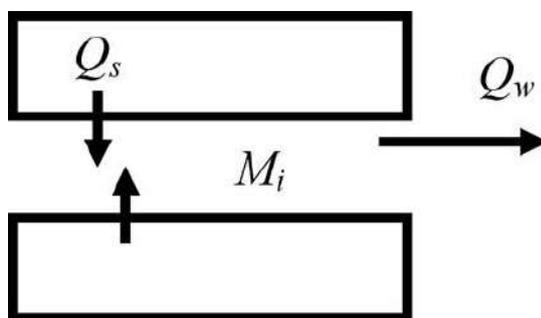


Рис.1. Схема баланса вещества в поверхностной плёнке при трении.

На рис.2 показана зависимость толщины плёнки и средней интенсивности линейного изнашивания от геометрического фактора (L/S). При уменьшении геометрического фактора (что соответствует в общем случае увеличению линейных размеров области контакта) происходит рост толщины плёнки до величины H_{\max} . Соответственно интенсивность изнашивания падает до нуля. С увеличением геометрического фактора (уменьшение пятна контакта) толщина плёнки стремится к нулю, а интенсивность износа растёт, выходя на асимптоту $\bar{u} = C_s H_{\max}$. Важным следствием данной модели является то, что толщина плёнки не определяется локальными свойствами материала и локальными контактными параметрами (они определяют только параметры C_s и C_w). В первую очередь толщина плёнки определяется геометрическим параметром контакта L/S и может считаться заданной в каждой локальной области контакта.

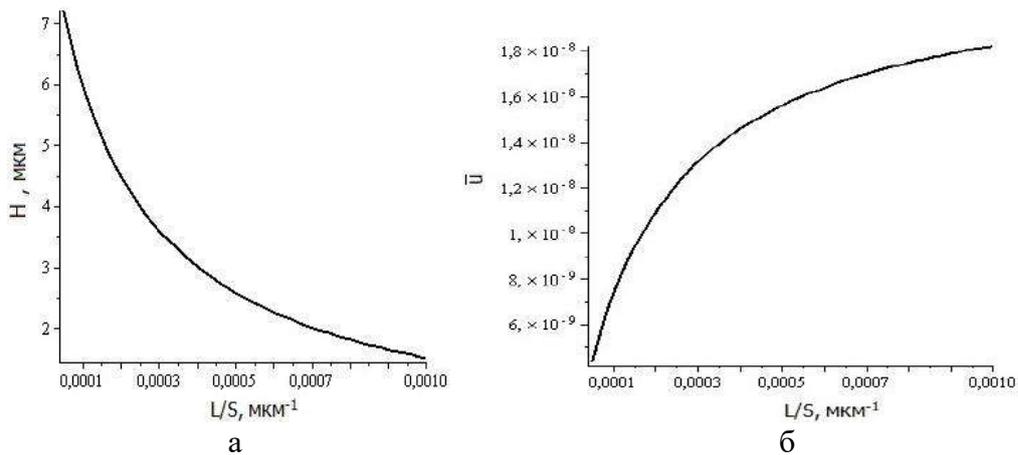


Рис.2. Зависимость толщины плёнки H (а) и средней интенсивности линейного изнашивания \bar{u} (б) от геометрического фактора L/S .

Рассмотрим контакт между композитом и жёстким гладким контртелом на локальном масштабном уровне (уровне отдельных включений, рис.3). Пусть P – среднее контактное давление, H – средняя толщина плёнки, ν – доля площади включений в площади поверхности композита (равная объёмной доле включений).

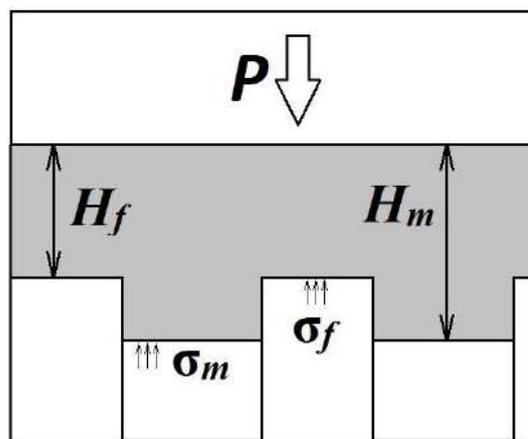


Рис.3. Схема контакта на масштабном уровне отдельных армирующих включений.

Тогда из соображений равновесия получаем

$$\nu\sigma_f + (1-\nu)\sigma_m = P, \quad (3)$$

где σ_f и σ_m – локальные контактные давления в области армирующих включений и матрицы соответственно.

Из соображений сохранения объёма вещества плёнки получаем

$$\nu H_f + (1-\nu)H_m = H, \quad (4)$$

где H_f и H_m – локальная толщина плёнки в области армирующих включений и матрицы соответственно. Локальная интенсивность изнашивания в области включений \bar{u}_f и матрицы \bar{u}_m считаем пропорциональной локальному контактному давлению и одновременно локальной толщине плёнки. Тогда локальная интенсивность изнашивания будет определяться формулой

$$\bar{u}_{f,m} = K_{f,m} \sigma_{f,m} \frac{H_{\max} - H_{f,m}}{H_{\max}}, \quad (5)$$

где K_f и K_m – локальные коэффициенты изнашивания включения и матрицы соответственно. В установившемся режиме трения линейная скорость изнашивания матрицы и включений будет равна, таким образом можно получить уравнение

$$K_f \sigma_f \frac{H_{\max} - H_f}{H_{\max}} = K_m \sigma_m \frac{H_{\max} - H_m}{H_{\max}}. \quad (6)$$

Локальная динамика толщины поверхностной плёнки определяется сложным процессом вязкопластического течения вещества при росте плёнки за счёт износа и выдавливания вещества плёнки по периметру контакта. В первом приближении будем считать плёнку одномерным вязкоупругим телом Максвелла, тогда её толщина определяется формулой

$$\dot{H}_{f,m} = H_{f,m} \left(\frac{\sigma_{f,m}}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}_{f,m}}{E_{f,m}} \right). \quad (7)$$

В случае установившегося трения локальные контактные давления постоянны, а значит $\dot{\sigma}_{f,m} = 0$. Также в установившемся режиме скорости изменения толщины плёнки в области включений и матрицы также будут равны, откуда получаем

$$H_f \sigma_f = H_m \sigma_m. \quad (8)$$

Из уравнений (3), (4), (6), (8) получаем систему (9), состоящую из четырёх уравнений относительно четырёх неизвестных σ_f , σ_m , H_f и H_m

$$\begin{cases} \nu H_f + (1-\nu) H_m = H \\ \nu \sigma_f + (1-\nu) \sigma_m = P \\ H_f \sigma_f = H_m \sigma_m \\ K_f \sigma_f \frac{H_{\max} - H_f}{H_{\max}} = K_m \sigma_m \frac{H_{\max} - H_m}{H_{\max}} \end{cases} \quad (9)$$

Для упрощения решения перейдём к безразмерным переменным

$$s_{f,m} = \frac{\sigma_{f,m}}{P}, \quad h = \frac{H}{H_{\max}}, \quad h_{f,m} = \frac{H_{f,m}}{H_{\max}}, \quad K = \frac{K_f}{K_m}. \quad (10)$$

Тогда система (9) примет вид

$$\begin{cases} \nu h_f + (1-\nu) h_m = h \\ \nu s_f + (1-\nu) s_m = 1 \\ h_f s_f = h_m s_m \\ K s_f (1-h_f) = s_m (1-h_m) \end{cases} \quad (11)$$

Система (11) не является линейной, но может быть сведена к квадратичной форме

$$\left(\left(K + \frac{\nu}{1-\nu} \right) (1-2\nu) - H\nu(1-K) \right) s_f^2 + \left((H-\nu)(1-K) - 1 + \frac{2\nu}{1-\nu} \right) s_f - \frac{\nu}{1-\nu} = 0. \quad (12)$$

Определив s_f , можно отыскивать остальные величины по формулам

$$s_m = \frac{1-\nu s_f}{1-\nu}, \quad h_f = \frac{1-\nu s_f}{(1-2\nu)s_f + \nu}, \quad h_m = \frac{1-\nu h_f}{1-\nu}. \quad (13)$$

На рис.4 представлен график зависимости разности толщины плёнки в области матрицы и включений $H_f - H_m$ от толщины плёнки H . Также на этом графике представлена средняя интенсивность изнашивания материала в соответствии с формулой (2).

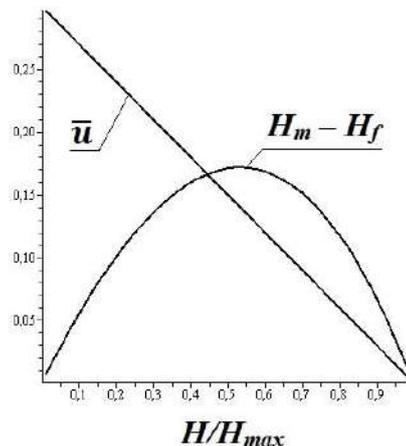


Рис.4. Зависимость шероховатости поверхности $H_f - H_m$ и средней интенсивности изнашивания \bar{u} от средней толщины поверхностной плёнки H .

Разность $H_f - H_m$ представляет собой шероховатость поверхности композита в результате неоднородности его структуры. Шероховатость имеет максимум при $H \approx H_{\max}/2$ и практически равна нулю при $H = 0$ и $H = H_{\max}$.

ЭКСПЕРИМЕНТ

Экспериментальные исследования в области $H > 3H_{\max}/4$ затруднены, так как такая толщина поверхностной плёнки соответствует очень малому геометрическому фактору L/S , который в свою очередь соответствует области контакта более 30 см в диаметре. Также при таком геометрическом факторе интенсивность изнашивания становится очень низкой и выход на установившийся режим трения в свою очередь происходит слишком долго. Однако геометрический фактор, соответствующий $H \approx H_{\max}/2$, встречается, например, в углеродных композитных авиационных тормозных дисках (УУКМ), а высокий геометрический фактор соответствует малым образцам для трибологических испытаний на лабораторных трибометрах. На рис.5 представлены фотографии соответственно многодискового авиационного тормоза с композитными тормозными дисками и лабораторного трибометра, на котором авторы производили испытания малых образцов в условиях, имитирующих работу полноразмерного тормоза (высокие контактные давления и температуры, отсутствие кислородного окисления).

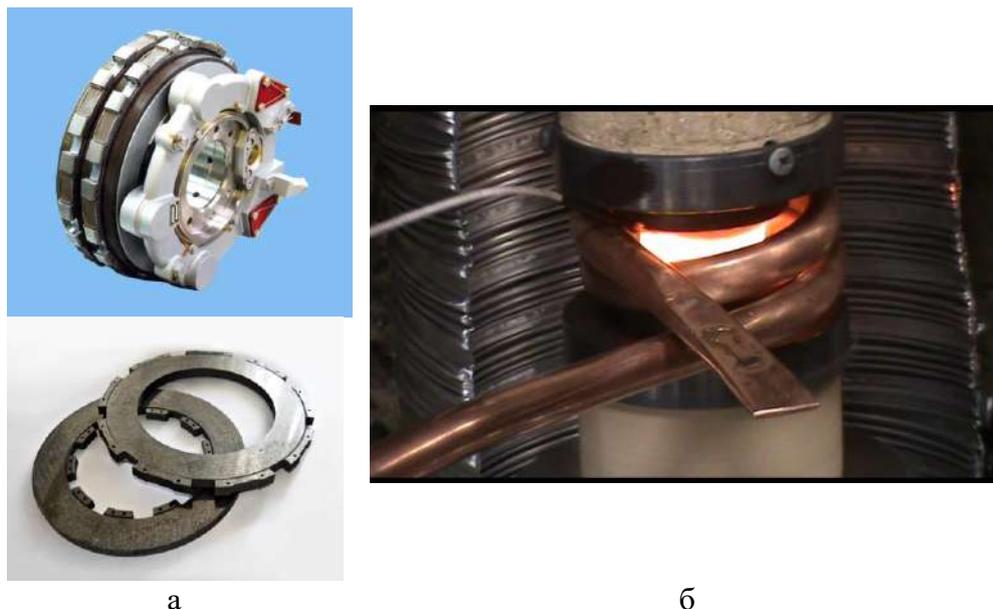


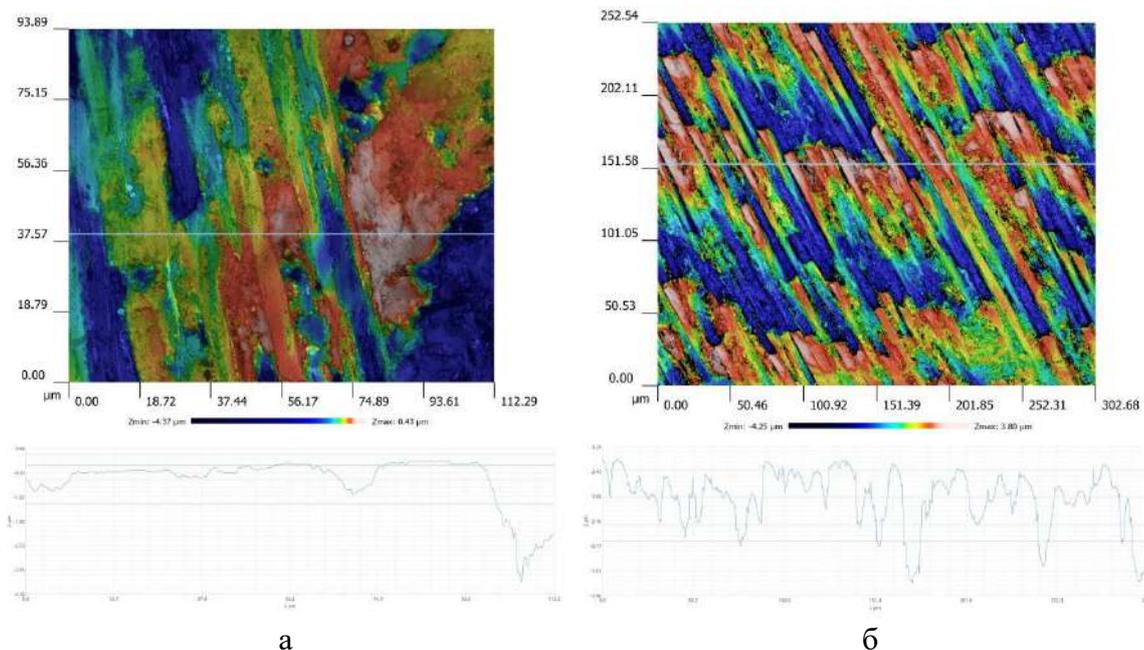
Рис.5. Авиационный тормоз и тормозные диски (а), лабораторный трибометр для испытаний малых образцов при высоких температурах (б).

В таблице 1 представлены значения геометрического фактора L/S , соответствующей ему средней толщины поверхностной плёнки H и измеренной средней безразмерной интенсивности изнашивания образцов \bar{u}/V для обоих видов трибосопряжений.

Таблица 1.
Геометрический фактор L/S , средняя толщина поверхностной плёнки H и средняя безразмерная интенсивности изнашивания \bar{u}/V для испытаний на трибометре и при работе авиационного тормоза.

Величина	Обозначение	Значение		Ед. изм.
		Для тормоза	Для трибометра	
Геометрический фактор	L/S	10^{-4}	10^{-3}	мкм ⁻¹
Толщина плёнки	H	8	1.5	мкм
Интенсивность изнашивания	\bar{u}/V	$0.6 \cdot 10^{-8}$	$1.8 \cdot 10^{-8}$	-

Исходя из данных таблицы 1 и графика на рис.4, шероховатость, вызванная перепадом высот между матрицей и волокнами на поверхности трения, будет значительно выше для полноразмерного диска, чем для малого образца. На рис.6 представлены профилограммы поверхности трения малого углеродного композитного образца (рис.6а) и углеродного композитного диска (рис.6б). Как и предсказывает модель, малый образец (рис.6а) имеет меньший перепад высот между волокном и матрицей в сочетании с большим износом, чем полноразмерный диск (рис.6б).



а

б

Рис.6. Профилограммы поверхности трения малого углеродного композитного образца (а) и углеродного композитного диска (б).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поверхностная плёнка (третье тело) оказывает значительное влияние на трение и изнашивание углеродных материалов (в том числе УУКМ) в трибосопряжениях с большим коэффициентом перекрытия рабочих поверхностей (в тормозных дисках и сцеплениях). Моделирование этого процесса сопряжено с большими математическими трудностями и обычно возможно только с помощью численных методов. Однако применение многомасштабного подхода в сочетании с феноменологическим принципом моделирования течения материала третьего тела позволяет получить аналитические зависимости для интенсивности изнашивания, толщины плёнки и возникающего на поверхности композита рельефа, качественно и количественно совпадающие с экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zhang Y., Mollon G., Descartes S. *Significance of third body rheology in friction at a dry sliding interface observed by a multibody meshfree model: Influence of cohesion between particles* // Tribology International. – 2020. – Vol.145. – 106188.
2. Renouf M., Cao H.-P., Nhu V.-H. *Multiphysical modeling of third-body rheology* // Tribology International. – 2011. – Vol.44. – Pp.417-425.
3. Österlea W., Dörfel I., Prietzel C., Roocha H., Cristol-Bulthé A.-L., Degallaix G., Desplanques Y. *A comprehensive microscopic study of third body formation at the interface between a brake pad and brake disc during the final stage of a pin-on-disc test* // Wear. – 2009. – Vol.267. – Pp.781-788.
4. Fillot N., Iordanoff I., Berthier Y. *Wear modeling and the third body concept* // Wear. – 2007. – Vol.262. – Pp.949-957.

5. Shpenev A.G. *The Influence of the Thermoelastic Instability on the Wear of Composite Brake Discs* // Journal of Friction and Wear. – 2021. – Vol.42(1). – Pp.30-37.
6. Shpenev A.G., Muravyeva T.I., Shkalei I.V. et al. *Influence of the Surface Film (Third Body) on the Friction and Wear Process of Carbon-Fiber Composites* // J. Surf. Investig. – 2022. – Vol.16. – Pp.397-401.

Аэро-, гидромеханика, реология структурно-сложных сред



СРАВНЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ И НЕОПТИМАЛЬНЫХ ПРОФИЛЕЙ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НОСОВЫХ ЧАСТЕЙ ПРИ ОДИНАКОВЫХ ГАБАРИТНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ И ОБЪЁМЕ ПРИ РАЗНЫХ ЧИСЛАХ МАХА

Большаянов И.П., Захаров Н.Н.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

Проведено экспериментальное и численное исследование обтекания сверхзвуковым потоком четырёх моделей: двух плоских профилей и двух осесимметричных головных частей оптимальной и неоптимальной формы в каждой номинации. Работа проведена по предложению А.Н. Крайко. Целью работы было экспериментально подтвердить выводы теории, полученные в работе [1].

Эксперименты проводились в импульсной гиперзвуковой аэродинамической трубе ИПРИМ РАН [2] при геометрическом числе Маха $M=4$, начальном давлении воздуха в форкамере $P^*=60$ атм. и температуре торможения $T^*=300$ К. Отработка методики весовых измерений в импульсной трубе проводилась на осесимметричной модели «конус + цилиндр» с углом полураствора конуса 15° и диаметром мидаля 40 мм. Эскиз этой модели и её компоновка в рабочей части трубы в сборе с весовым устройством на пилоне приведены на рис.1.

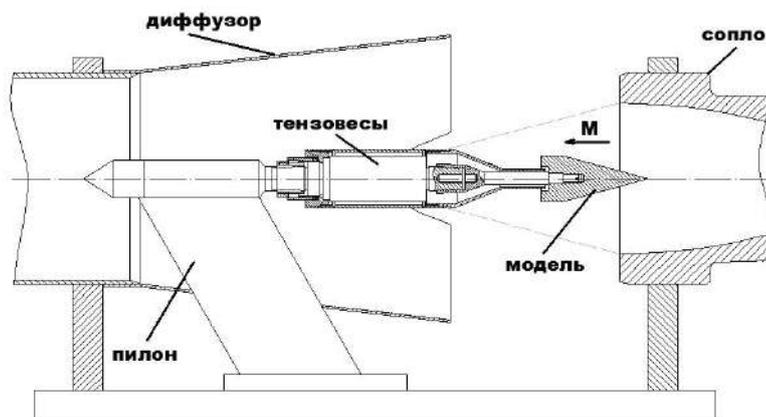


Рис.1. Компоновка модели «конус + цилиндр» в рабочей части трубы в сборе с весовым устройством на пилоне.

Давление в форкамере на рабочем режиме изменялось от начального значения до значения, соответствующего режиму срыва сверхзвукового течения. При этом длительность рабочего режима составляла ~ 50 мсек, поэтому для измерения давления в процессе экспериментальных исследований использовались малоинерционные датчики Endevco. Для измерения аэродинамических сил применялись малоинерционные трехкомпонентные тензометрические весы. Для записи экспериментальных данных было задействовано высокоскоростное АЦП фирмы National Instruments USB-6363

с частотой оцифровки 1 МГц на все каналы. Для визуализации процесса обтекания моделей применялись прибор Теплера и высокоскоростная видеокамера FASTCAM (10000 к/с). Полученные удовлетворительные результаты методических весовых измерений C_x [3] позволили приступить к экспериментальному сравнению исследуемых моделей.

На рис.2 и 3 приведены эскизы изготовленных моделей. Для сохранения двухмерности течения при обтекании плоских профилей (рис.2) использовались боковые пластины, препятствующие растеканию сверхзвукового потока.

Модели в компоновке с тензовесами устанавливались в рабочую часть аэродинамической трубы (рис.4). Диаметр мидела моделей выбран из условия недопущения предельных осевых нагрузок на тензовесы и составляет 30 мм для осесимметричных моделей. А размер мидела плоских – 20×40 мм.

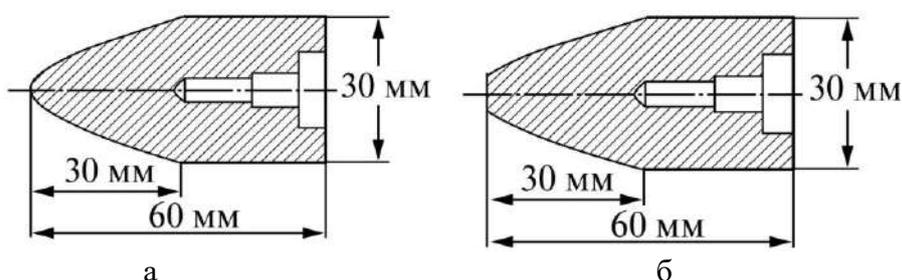


Рис.2. Чертежи осесимметричных моделей НЧ: а) степенной формы, б) оптимальной формы с передним торцем.

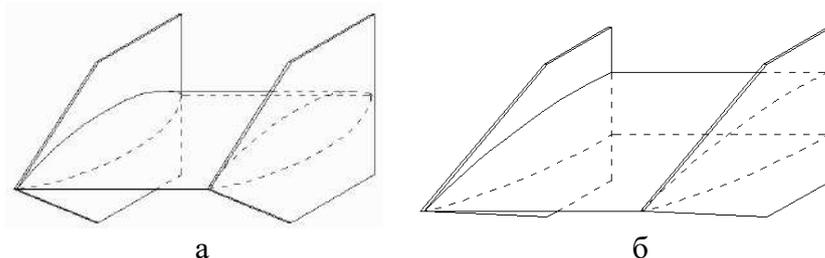


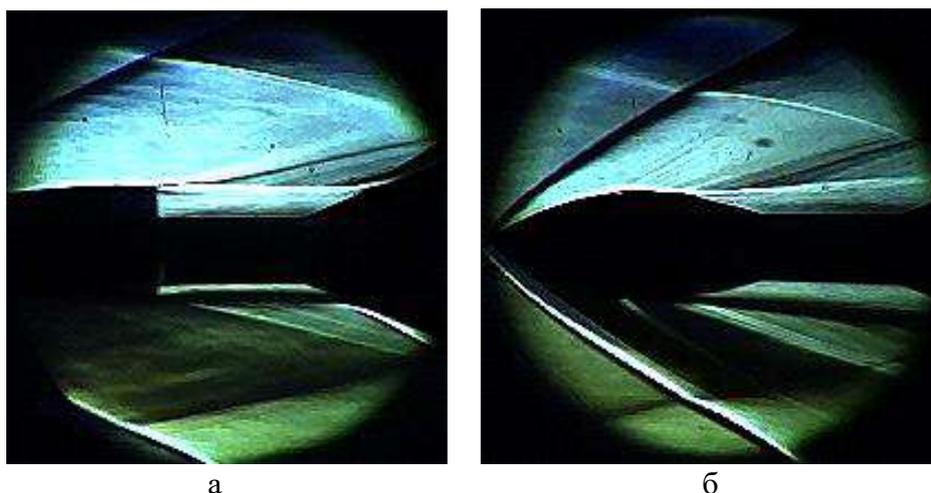
Рис.3. Эскизы моделей: а) с неоптимальным профилем; б) с оптимальным профилем.

На рис.4. показаны фотографии плоских моделей: оптимального тела (а) и псевдооптимального тела (б) в рабочей части импульсной трубы.



Рис.4. Фотографии размещения моделей в рабочей части трубы: а) оптимальное тело; б) псевдооптимальное тело.

Теневые картины обтекания плоских моделей сверхзвуковым потоком воздуха в импульсной трубе показаны на рис.5. На приведённых кадрах боковые стенки сняты, чтобы видеть характер обтекания модели.



а

б

Рис.5. Теневая картина обтекания моделей без боковых щёк сверхзвуковым потоком воздуха: а) оптимальное тело; б) псевдооптимальное тело.

Полученные в результате измерений экспериментальные значения коэффициентов сопротивления испытанных моделей показаны на рис.6. Там же для сравнения приведены расчётные значения коэффициентов сопротивления, полученные численно с помощью пакета ANSYS Fluent.

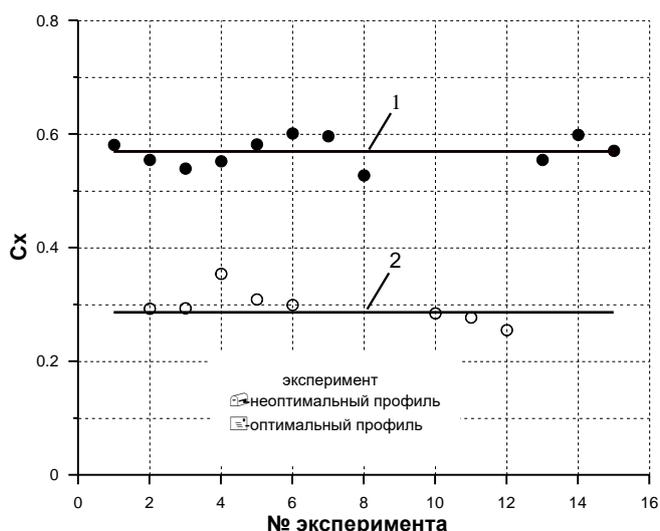


Рис.6. Значения C_x для исследованных профилей: 1) неоптимальная форма – расчёт, 2) оптимальная форма – расчёт.

Осредненное значение коэффициента полного аэродинамического сопротивления плоской модели с неоптимальной формой профиля составляет $C_x = 0.581$ (1 на рис.6). Для модели с оптимальной формой профиля $C_x = 0.286$ (2 на рис.6).

Влияние числа Маха на сопротивление плоских тел с оптимальной и неоптимальной формой профиля получено в результате численных расчетов моделей в диапазоне чисел $M = 4-7$. Для расчёта использовалась система уравнений осреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса с применением двухпараметрической модели турбулентности $k-\varepsilon$. Данные этих расчетов приведены на рис.7.

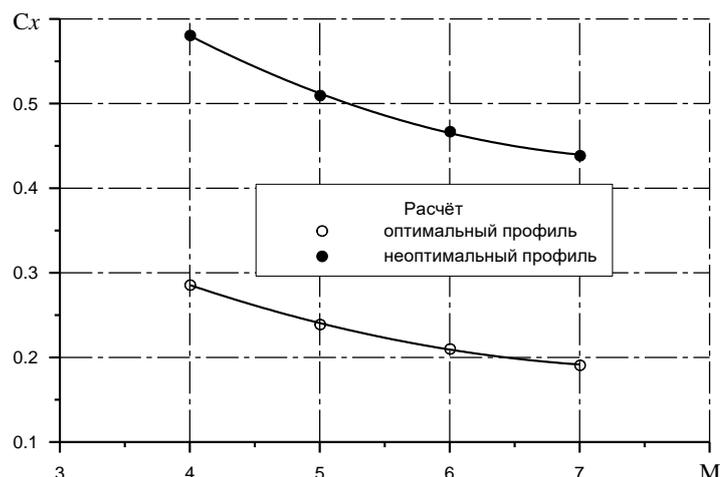


Рис.7. Влияние числа Маха на коэффициент сопротивления плоских профилей оптимальной и неоптимальной формы.

Из анализа расчётов следует, что с увеличением числа Маха коэффициент сопротивления C_x исследуемых плоских профилей падает, а сравнение их сопротивления, показывает, что коэффициент сопротивление тела с оптимальным профилем более, чем в 2 раза ниже неоптимального профиля. С ростом числа Маха от 4 до 7 выигрыш в сопротивлении плоских тел оптимальной формы по сравнению с неоптимальной возрастает с 203% до 229% соответственно.

Теневые картины обтекания осесимметричных моделей головных частей сверхзвуковым потоком воздуха в импульсной трубе показаны на рис.8.

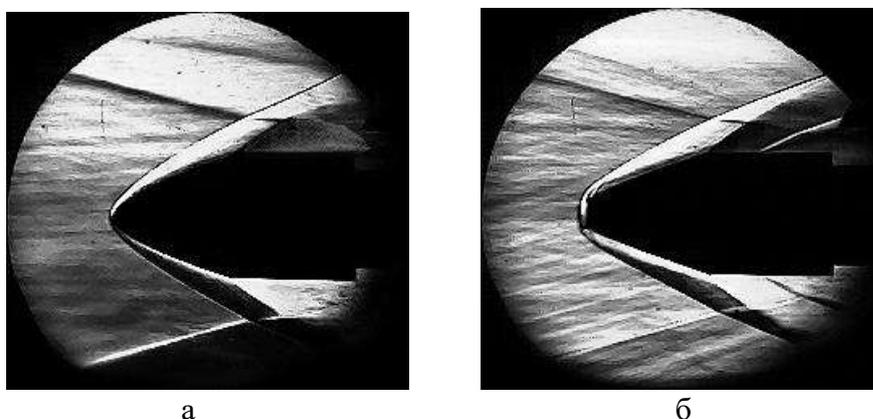


Рис.8. Теневая картина обтекания моделей сверхзвуковым потоком воздуха: а) степенная форма ГЧ; б) оптимальная форма ГЧ с передним торцом.

Полученные в результате измерений экспериментальные значения коэффициентов сопротивления испытанных моделей представлены на рис.9.

Осредненное значение коэффициента полного аэродинамического сопротивления модели степенной формы (при среднеквадратичном отклонении $\pm 5\%$) составляет $C_x = 0.35$ (рис.9а). Для оптимальной модели с передним торцом $C_x = 0.31$ (рис.9б), что, соответственно, на 3.8% и 1.4% процента отличается от аналогичных расчетных значений [4], выполненных для значения числа $Re = 7.7 \cdot 10^6$, которое соответствовало условиям эксперимента.

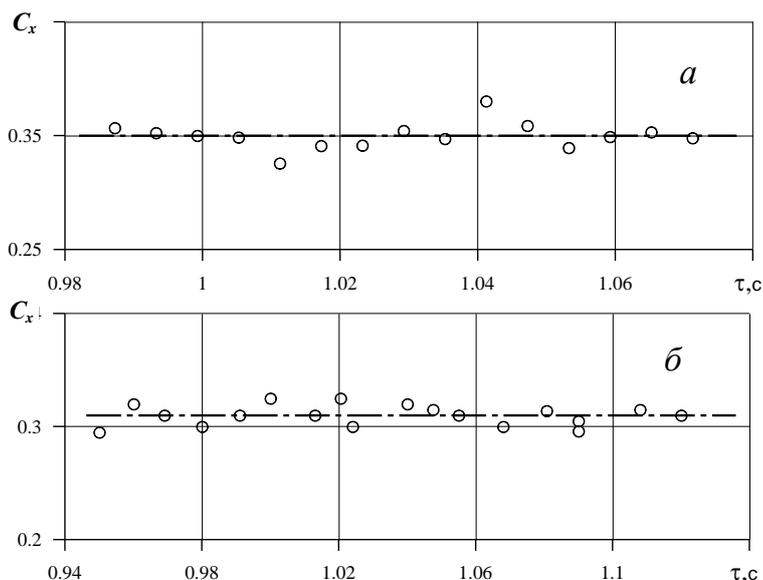


Рис.9. Зависимость C_x от времени для исследуемых моделей, штрихпунктирные линии – расчёт, круглые значки – эксперимент: а) степенная форма ГЧ, б) оптимальная форма ГЧ с передним торцом.

Таким образом, результаты проведенного экспериментального исследования подтвердили расчетные данные по определению сопротивления тел (не только качественно, но и количественно).

Продемонстрировано значительное преимущество (10.3% – в расчетах и 12.9% – в эксперименте) оптимальной НЧ с передним торцом и изломом контура в точке сопряжения его с пологим участком по сравнению с наилучшим гладким контуром степенной формы. Более существенное преимущество показал плоский оптимальный профиль, преимущество которого по сравнению с неоптимальным профилем в зависимости от числа Маха составляет 203-229%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Якунина Г.Е. *Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным*. – М.: Янус-К, 2001. – 129 с.
2. Васильев И.Ю., Захаров Н.Н., Левин В.А. и др. *Численное моделирование течений в импульсной гиперзвуковой аэродинамической трубе* / 4-й Всероссийский симпозиум «Механика композиционных материалов и конструкций». Сборник трудов. Т.2. – М.: ИПРИМ РАН, 2012. – С.88-103.
3. Bolshiyakov I.P., Zakharov N.N., Levin V.A. *An Integrated Study of Flows in the Aerodynamic Tunnel of IAM RAS by Virtual Experiment Technology* // American Journal of Science. – 2016. – No.6. – Pp.15-27.
4. Большианов И.П., Захаров Н.Н., Пьянков К.С., Тилляева Т.И. *Оптимальные осесимметричные головные части обтекаемых тел. Расчёты и эксперимент* // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2018. – №2. – С.120-127.

УДК 532.656.56
EDN VAJKYM (<https://elibrary.ru/vajkym>)
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.24



**ИССЛЕДОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ПОТОКОМ ВОЗДУХА
ПЕРФОРИРОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ (СЕТОК),
УСТАНОВЛЕННЫХ В ДВУМЕРНОМ КАНАЛЕ ПОД УГЛОМ
АТАКИ, И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ
ХАРАКТЕРИСТИК В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СТЕПЕНИ
ПРОНИЦАЕМОСТИ СЕТКИ f_c , УГЛОВ АТАКИ α
И КОЭФФИЦИЕНТА СКОРОСТИ λ**

Большаинов И.П.¹, Захаров Н.Н.^{1,2}, Уваров Т.Е.²

¹ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

²ФАУ «ЦИАМ им. П.И. Баранова», г. Москва, Россия

Проведено численное исследование обтекания решеток со степенью проницаемости $f_c = 0.7$, с углами их установки в прямоугольном канале 90 и 40 градусов при значении коэффициента скорости $\lambda_0 = 0.4$. Показана возможность уменьшать потери полного давления путём изменения углов установки решетки.

Для моделирования характеристик потока на входе в двигатель могут быть предложены несколько способов, отличающихся степенью приближения создаваемой структуры потока к реальным условиям и сложностью конструкции. Наиболее простым методом создания стационарного неравномерного поля полных давлений на входе в двигатель является постановка композиции сеток с различной плотностью в стендовом воздухозаборнике.

Конструктивно такая композиция выполняется путем наложения участков сеток с различной плотностью с помощью точечной сварки или мягкой проволоки на силовую решетку, изготовленную из стальных прутьев.

Для расчета потребной плотности сетки, обеспечивающей получение заданной неравномерности, необходимо знать зависимость коэффициента полного давления σ_c для различных сеток от числа λ_0 далеко перед сеткой либо от числа λ_2 перед входом в двигатель. В литературе известны зависимости $\sigma_c = f(\lambda, f_c)$ [1,2], где $f_c = 1 - S_c/S_\Sigma$ – относительная площадь живого сечения или проницаемость сетки, S_c – площадь затенения сетки, а S_Σ – полная площадь сетки, однако они даны в графическом виде и неудобны для использования их в расчете плотности или проницаемости сетки. Поэтому в работе [2] была рассмотрена задача о влиянии определяющих параметров на потери полного давления при обтекании сетки и получена аналитическую зависимость $\sigma_c = f(\lambda, f_c)$.

На рис.1 приведены графические зависимости коэффициента полного давления σ_c от числа λ_2 для сеток с различной степенью проницаемости f_c , полученные в работе [1]. На этом рисунке штриховыми линиями обозначена граница запыления сетки, а штрихпунктирными линиями – граница, ниже которой

коэффициент гидравлического сопротивления $\zeta > 2$. Указанные линии ограничивают область геометрических и газодинамических параметров сеток, из которой можно выбирать сетки. Зависимость σ_c от λ_o можно получить, используя $\sigma_c = f(\lambda_2, f_c)$ и очевидное соотношение $q(\lambda_2) = q(\lambda_o)/\sigma_c$, из которого вытекает связь λ_2 с λ_o . Здесь индекс «о» относится к параметрам на входе в канал, а «2» – к параметрам за сеткой (решеткой).

Найденная зависимость σ_c от λ_2 получена для сетки, установленной в потоке воздуха нормально к вектору скорости. Для углов обтекания сетки, отличных от 90 градусов, таких данных в настоящее время нет. В то же время для решения ряда технических задач в авиационном двигателестроении они необходимы.

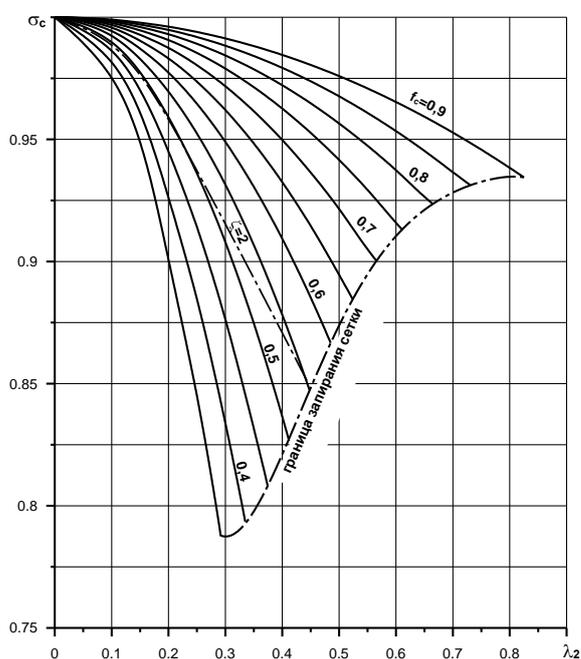


Рис.1. Зависимость коэффициента полного давления потока воздуха за решеткой от коэффициента скорости λ_2 и степени проницаемости f_c при $\alpha = 90^\circ$.

Цель предлагаемой работы состоит в определении влияния угла обтекания перфорированной поверхности (решетки) на потери полного давления. Задача решается численно с использованием уравнений RANS.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе проводились расчеты течения идеального газа в канале квадратного сечения конечной длины с решётками, установленными под разными углами атаки и определялись коэффициенты восстановления полного давления в зависимости от определяющих параметров (коэффициента скорости λ , степени проницаемости f_c , угла обтекания решетки α).

Для расчета турбулентного течения идеального газа в канале используется полная система осреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса с привлечением двухпараметрической модели турбулентности $k - \varepsilon$ [3].

В качестве расчетной модели используется канал с квадратным сечением 100x100 мм, длиной $L = 1400$ мм с решёткой, установленной внутри на расстоянии $l = 500$ мм от входного сечения. Диаметры прутьев решетки 0.9 мм, размер ячеек 4,4x4,5 мм, проницаемость 0.7. На рис.2 представлены схемы расчетных моделей для канала с решетками, установленными под углами 90° и 40° , соответственно. На этом рисунке и далее по тексту приняты такие обозначения: сечение 0-0 – вход в канал, сечение 1-1 – в непосредственной близости (10 мм) перед решеткой, сечение 2-2 – в непосредственной близости (10 мм) за решеткой, сечение 3-3 – сечение гребенки (100 мм за решёткой), **B-B** выходное сечение.

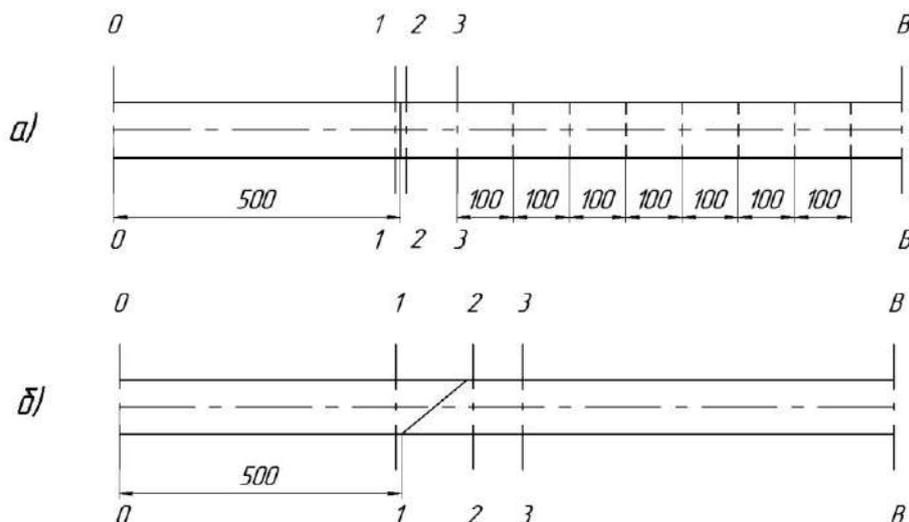


Рис.2. Схема расчетной модели с решеткой: а) решетка под углом 90° , б) решетка под углом 40° . Начальные и граничные условия.

Параметры однородного набегающего потока (полное давление, температура) во входном сечении 0-0 задавались согласно типу «pressure-inlet» численного пакета ANSYS Fluent. Граничные условия в выходном сечении соответствуют типу «pressure-outlet» (статическое давление, температура).

Граничные условия для решеток проницаемостью $f_c = 0.7$ с коэффициентом скорости на входе $\lambda_0 = 0.4$ приведены в таблице 1.

Таблица 1.

α	P_0^* [Па]	T_0^* [K]	P_3 [Па]	T_3 [K]
90°	101325	288	80408.6951	278.07
40°	101325	288	83129.6835	278.72

РАСЧЕТНАЯ СЕТКА

Сетка расчетной области состоит из тетраэдрических ячеек. Суммарное количество элементов составило $\sim 7 \times 10^6$ при расчете канала сечением 100×100 с решеткой, установленной под 90° и 11×10^6 для решетки, установленной под 40° . При расчёте четверти сечения количество элементов в пересчёте на всё сечение условно составляло $1,2 \cdot 10^7$

Вблизи поверхности решётки и стенок канала сетка сильно сгущается (рис.3,4), что обеспечивает лучшую разрешаемость уравнений с учетом наличия

пограничного слоя. Фрагмент решетки с сеткой для варианта расчёта четверти сечения показан на рис.5.

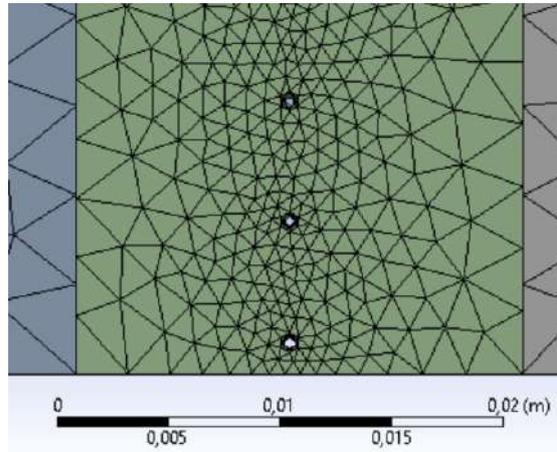


Рис.3. Расчетная сетка вблизи решетки.

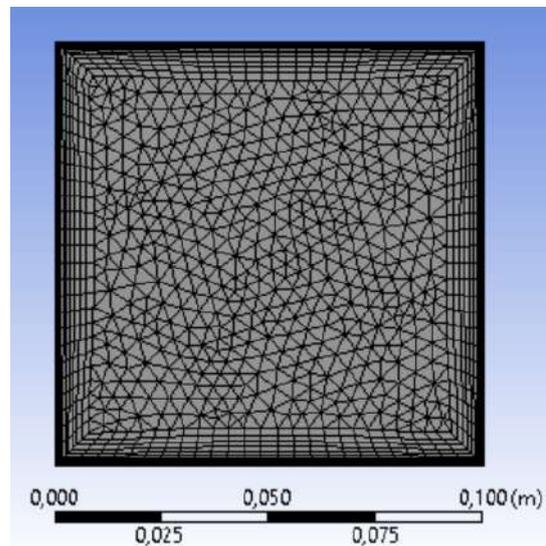


Рис.4. Расчетная сетка, включая пограничный слой.

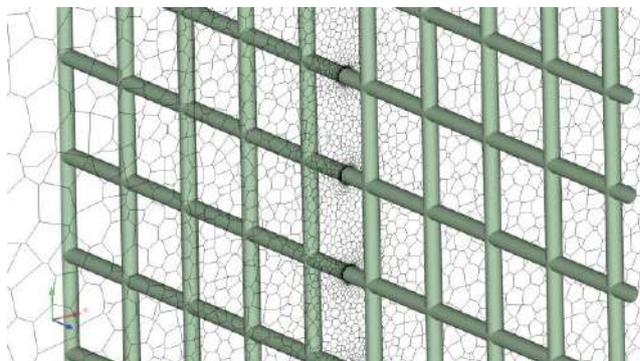


Рис.5. Фрагмент решетки с сеткой в четверти сечения канала.

В качестве начального этапа численного исследования обтекания решеток было принято решение о проведение расчёта и анализа газодинамических характеристик обтекания решеток, установленных под углом 90° , так как для этих условий есть экспериментальные и теоретические данные [1,2], которые можно использовать для валидации метода расчёта.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Предварительные расчеты проведены для сетки, установленной в прямоугольном канале под 90 градусов, при коэффициенте $\lambda_0 \approx 0,3$ с целью отработки вычислительного метода. Для определения сходимости решения использовался монитор скорости в плоскости входного сечения. Решение получено в результате 126 итераций (рис.6).

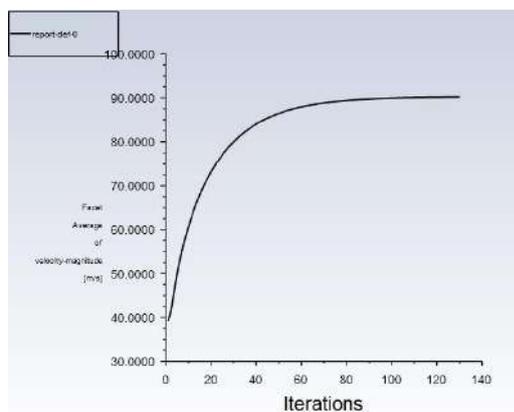


Рис.6. Монитор скорости во входном сечении.

Картины обтекания решетки с проницаемостью $f_c = 0,7$, установленной в канале под углом 90°, при значении коэффициента скорости в начальном сечении $\lambda_0 = 0.309$ приведены на рис.7-9, где на рис.7 показано поле скорости, на рис.8 – поле статического давления и на рис.9 – поле полного давления.

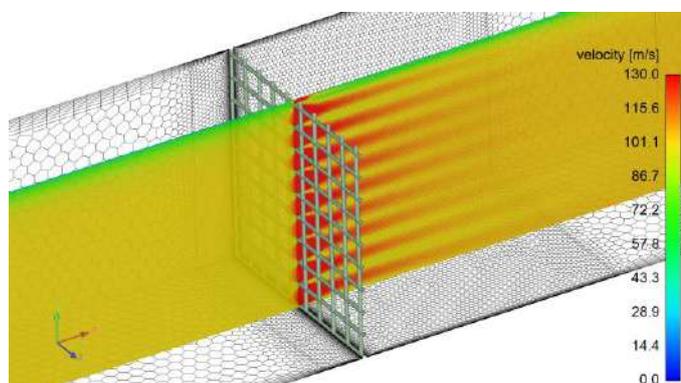


Рис.7. Поле скорости м/с.

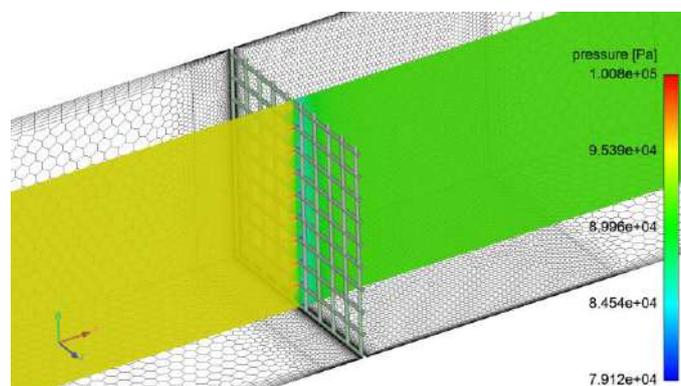


Рис.8. Поле статического давления.

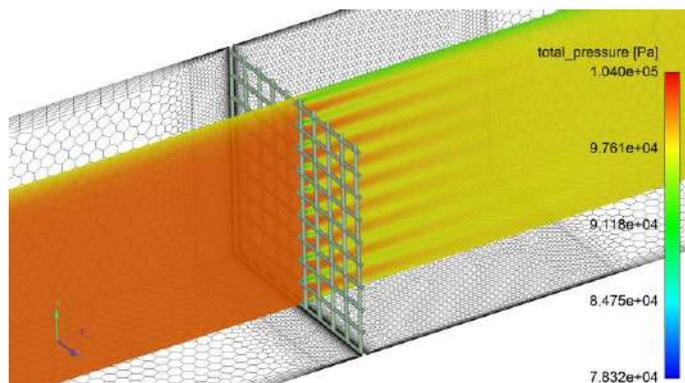


Рис.9. Поле полного давления.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЁТА

Сравнение профиля коэффициента полного давления перед решеткой и за решеткой на расстоянии 100 мм (рис.10) показывает, что перед решеткой коэффициент σ_1 в ядре потока строго равен 1. Это означает, что на участке от 0-0 до 1-1 потерь в ядре нет. За решеткой профиль полного давления в ядре неоднороден и не симметричен по высоте канала. Потери полного давления за решеткой внизу канала вне пограничного слоя выше, чем наверху.

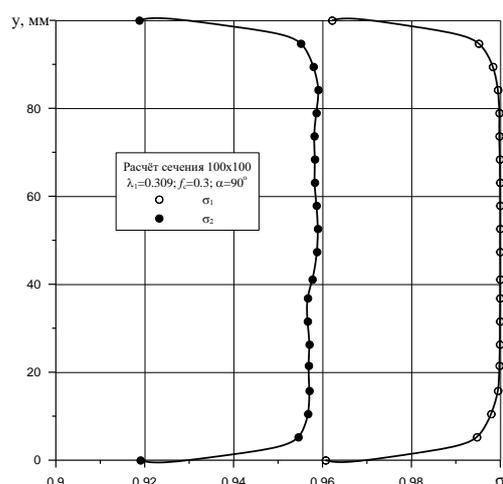


Рис.10. Распределение коэффициента полного давления по высоте канала перед решеткой σ_1 и за решеткой σ_2 на расстоянии 100 мм.

В отличие от профиля полного давления перед решеткой профиль коэффициента скорости λ_1 изначально в ядре не постоянен и имеет перекося с незначительным увеличением λ_1 наверху канала вне пограничного слоя по сравнению с низом (рис.11). За решеткой на расстоянии 100 мм скорость в среднем увеличивается, а профиль λ_2 и отражает тенденцию изменения скорости перед решеткой, так что наверху канала скорость вне пограничного слоя за решеткой чуть выше, чем внизу (рис.11).

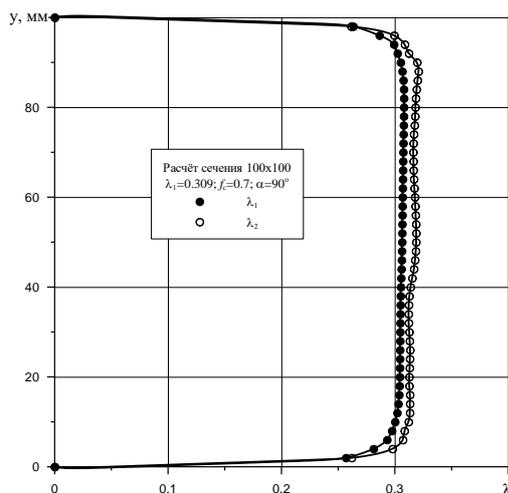


Рис.11. Распределение коэффициента скорости λ по высоте канала перед решеткой λ_1 и за решеткой λ_2 на расстоянии 100 мм.

На рис.12 приведено сравнение профилей коэффициента полного давления σ_2 за решеткой, полученных при расчете сечения 100×100 с суммарным количеством элементов $\sim 3 \times 10^6$ и сечения 50×50 с тем же количеством элементов (в пересчёте на сечение 100×100 количество элементов расчётной сетки составляет $\sim 1,2 \cdot 10^7$). Из сравнения полученных данных можно сделать вывод, что принятое количество элементов при расчёте сечения 100×100 недостаточно для получения точного значения коэффициента σ_2 . При расчёте сечения 100×100 с суммарным количеством элементов сетки $\sim 3 \times 10^6$ среднее значение коэффициента σ_2 в ядре потока составляет 0,954, а при расчёте сечения 50×50 с тем же количеством элементов сетки $\sigma_2 = 0,964$. Теоретическое значение коэффициента σ_2 , подтверждённое экспериментально составляет 0,969 [1].

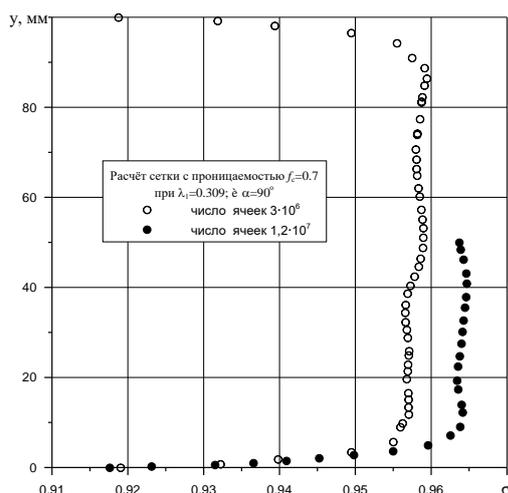


Рис.12. Влияние количества расчётных ячеек на результаты расчета коэффициента полного давления за решеткой с проницаемостью $f_c = 0.7$ при коэффициенте $\lambda_1 = 0.309$ и угле установки решетки в канале $\alpha = 90^\circ$.

Расчеты течения в канале с решеткой показали, что величина коэффициента полного давления σ_2 средняя по ядру потока сохраняет постоянное значение на расстоянии 800 мм от сетки, а среднее по площади значение коэффициента σ_2 уменьшается с увеличением расстояния от решетки, что связано с нарастанием пограничного слоя по длине (рис.13).

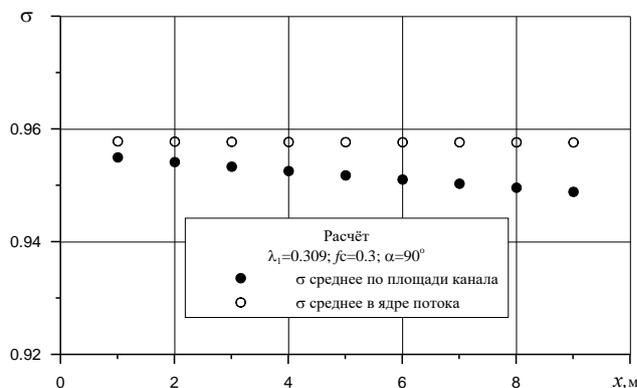


Рис.13. Распределение коэффициента полного давления σ по длине канала за решеткой с проницаемостью $f_c = 0.7$, установленной под углом $\alpha = 90^\circ$ в прямоугольном канале, в ядре потока и среднего по сечению канала при $\lambda_1 = 0.309$.

Профиль полного давления в ядре потока сохраняет свою форму на большом расстоянии по длине от решетки. Для рассмотренных условий обтекания решетки профиль полного давления сохраняется на длине 800 мм (рис.14).

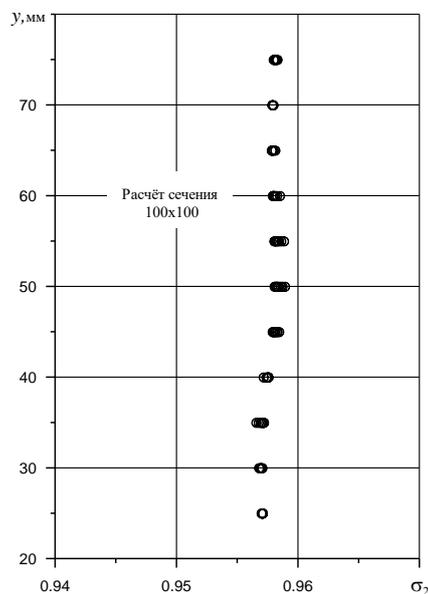


Рис.14. Распределение коэффициента σ по высоте канала в ядре потока за решеткой с проницаемостью $f_c = 0.7$, установленной под углом $\alpha = 90^\circ$ в прямоугольном канале для 9-ти сечений по длине при $\lambda_1 = 0.309$.

Подводя итог предварительному исследованию обтекания сеток численным методом, можно утверждать, что полученные результаты расчета удовлетворительно согласуются с известными экспериментами, как качественно, так и количественно [1,2].

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ РЕШЕТКИ С ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ $f_c = 0.7$, УСТАНОВЛЕННОЙ В КАНАЛ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ ПОД УГЛАМИ $\alpha = 90$ И 40 ГРАДУСОВ ПРИ ЗНАЧЕНИИ $\lambda_0 = 0,4$

Отработанная процедура численного расчёта обтекания решетки, расположенной в плоском канале нормально к вектору скорости при $\lambda_0 = 0,3$, была использована для исследования характеристик сеток при их обтекании потоком воздуха со скоростью $\lambda_0 = 0,4$ под углами атаки $\alpha = 40$ и 90 градусов.

Результаты исследования обтекания решетки в канале, установленной под углами $\alpha = 90^\circ$ и 40° при скорости потока воздуха в начальном сечении 0-0, соответствующей коэффициенту $\lambda_0 = 0,4$ в виде интегральных характеристик представлены в таблицах 2 и 3. В них приведены средние значения коэффициента скорости λ и коэффициента полного давления σ в сечениях 0-0; 1-1; 2-2; и 3-3.

Таблица 2.

Средние значения λ и σ для решётки с проницаемостью 0.7, $\alpha = 90^\circ$.

Сеч.	λ сред. по S	λ сред. по ядру	σ сред. по S	σ сред. по ядру
0-0	0,4	0,401	1	1
1-1	0,403	0,416	0,9927	0,9998
2-2	0,448	0,4597	0,9086	0,9122
3-3	0,4476	0,4592	0,9092	0,9141

Таблица 3.

Средние значения λ и σ для решётки с проницаемостью 0.7, $\alpha = 40^\circ$.

Сеч.	λ сред. по S	λ сред. по ядру	σ сред. по S	σ сред. по ядру
0-0	0,399	0,4	0,9999	1
1-1	0,405	0,422	0,9899	0,9971
2-2	0,433	0,446	0,9359	0,9424
3-3	0,434	0,453	0,9339	0,9417

Анализ интегральных характеристик потока в исследуемом канале, полученных в результате расчета обтекания решеток под углом атаки $\alpha = 90^\circ$ и 40° (таблицы 2 и 3) показывает, что среднее значение по ядру потока коэффициента скорости λ_3 в сечении 3-3 за гребёнкой для углов сетки 90° и 40° практически совпадают. Среднее значение λ_3 по площади в канале за сеткой под углом 90° выше, чем за сеткой, расположенной под углом 40° .

Это объясняется тем, что сетка под углом 40° суммарно обтекается более толстым пограничным слоем, чем сетка под углом 90° (сечение 3-3 для решетки 40° располагается дальше от сечения 0-0, чем для решетки 90°).

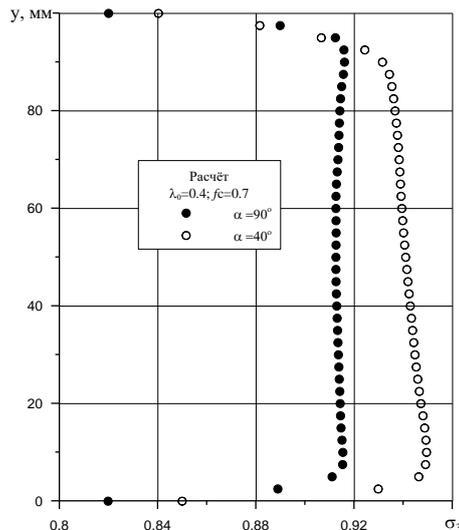


Рис.15. Сравнение распределения коэффициента полного давления σ в сечении 100 мм за решеткой, установленной под углом 40° и решеткой под 90° .

Коэффициент полного давления средний и по ядру, и по площади во всех сечениях за решеткой, установленной под углом атаки $\alpha = 40^\circ$, выше, чем за решеткой 90° (таблицы 2 и 3). Это хорошо видно при сравнении профилей коэффициента полного давления в сечении 3-3 за решеткой, установленной под углами 90 и 40 градусов (рис.15). Этот факт уменьшения потерь полного давления за решеткой с постоянным значением f_c , установленной под углом $\alpha < 90^\circ$, отмечается впервые. Таким образом, изменяя угол атаки решетки можно управлять потерями полного давления в потоке за решеткой уменьшая их при уменьшении угла атаки.

Локальные характеристики потока за исследованными решетками показаны на рис.16,17.

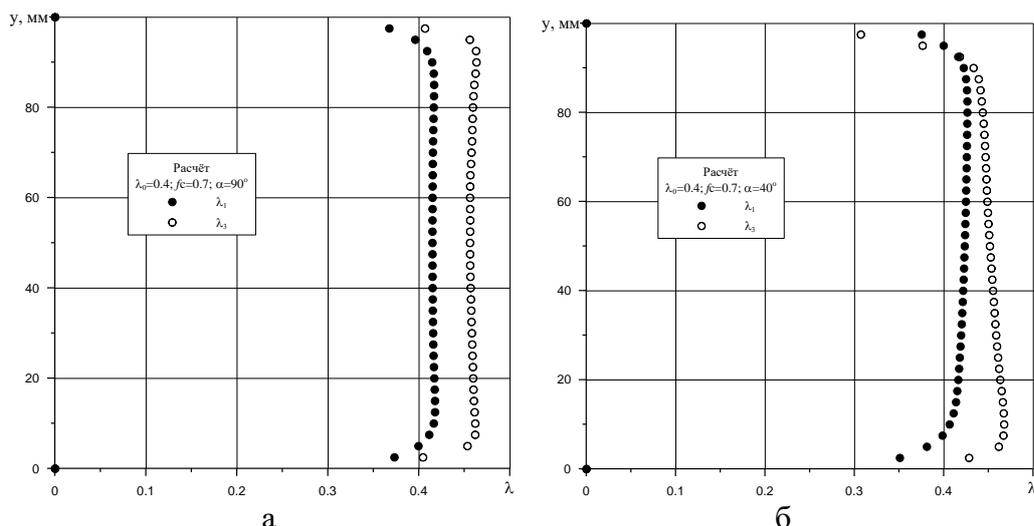


Рис.16. Распределение коэффициента скорости λ перед решеткой и на расстоянии 100 мм за решеткой: а) решетка под углом 90° , б) решетка под углом 40° .

На рис.16 показаны поля скоростей перед решеткой и за решеткой на расстоянии 100 мм при углах решетки 90° (а) и 40° (б). Для решетки 90° поле скоростей перед сеткой и за ней однородно за исключением областей, примыкающих к стенке.

Для решетки 40° поле скоростей неоднородно и перед решеткой, и за решеткой, но за решеткой деформация профиля скоростей наибольшая. Вблизи нижней стенки скорость за решеткой выше, чем вблизи верхней стенки и это объясняется разными условиями обтекания решетки. На нижней стенке толщина пограничного слоя, набегающая на решетку меньше, чем на верхней стенке и угол между решеткой и стенкой внизу составляет 140° , а наверху 40° . Эти обстоятельства сказываются на потерях полного давления. Профиль полного давления за решеткой 90° однороден и потери полного давления по высоте канала приблизительно постоянны за исключением пограничного слоя (рис.17а). Профиль полного давления за решеткой 40° неоднороден. Внизу потери меньше и коэффициент полного давления внизу больше, чем в верхней части канала за решеткой (рис.17б). И это как уже было отмечено, связано с разными условиями обтекания решетки.

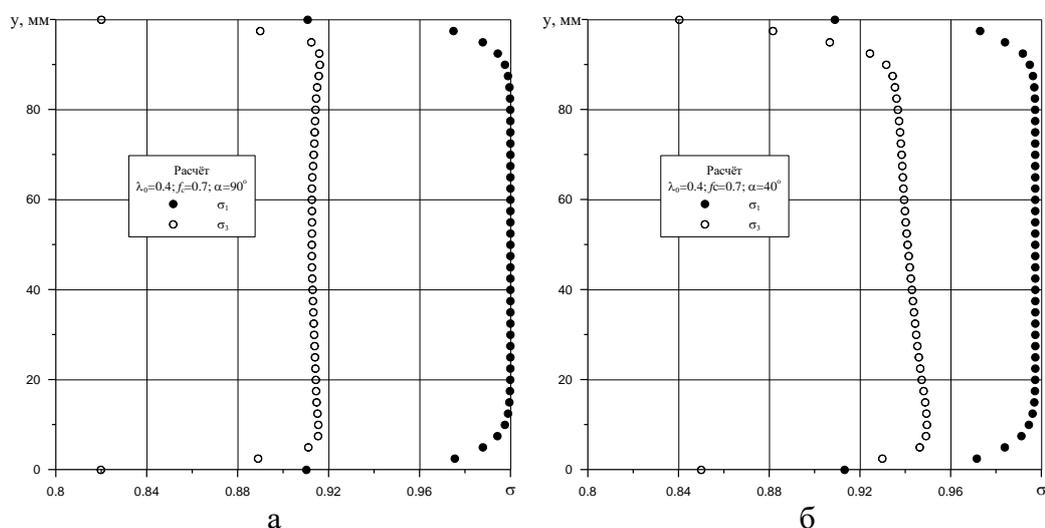


Рис.17. Распределение коэффициента полного давления σ перед решеткой и на расстоянии 100 мм за решеткой: а) решетка под углом 90° , б) решетка под углом 40° .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено численное исследование обтекания решеток со степенью пористости $f_c = 0.7$, с углами их установки в прямоугольном канале 90 и 40 градусов при значении коэффициента скорости $\lambda_o = 0.4$. Получены поля коэффициентов скорости и полного давления потока перед решетками и ними на всех исследованных режимах. Впервые показано, что уменьшение угла установки решетки в канале приводит к уменьшению потерь полного давления в потоке. Работа не завершена полностью и будет продолжена в направлении исследования влияния степени пористости, углов атаки и скорости набегающего потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Идельчик И.Е. *Справочник по гидравлическим сопротивлениям*. – М.: Госэнергоиздат, 1960.

2. Захаров Н.Н., Кутузова А.Н. *Методика расчета сеточных композиций для моделирования радиальной неравномерности перед двигателем* // Сборник Трудов ЦИАМ им П.И. Баранова. – 2014. – С.34-38.
3. Габдрахманова Н.С., Захаров Н.Н. *Исследование развития пространственной неоднородности потока в осесимметричном канале за плохообтекаемым телом* / 10-я Всероссийская конференция с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных гетерогенных сред». Сборник трудов. – М.: «Сам Полиграфист», 2020. – С.235-240.

УДК 536.2; 544.012
EDN NFLJET (<https://elibrary.ru/nfljet>)
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.25



ОЦЕНКА ВОЗМОЖНЫХ ГРАНИЦ ИЗМЕНЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ДИСПЕРСНЫХ СРЕДАХ

Бошенятов Б.В.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

1. Использование новых материалов и технологий на основе применения микро- и нано-дисперсных сред в последнее время находит все более широкое распространение [1]. Проблемы, связанные с математическим описанием динамики и свойств таких сред привлекают непрерывное внимание исследователей [2-4].

Одной из наиболее актуальных проблем остается проблема надежного предсказания физических характеристик таких сред при повышенной концентрации дисперсной фазы, когда возникают эффекты взаимодействия дисперсных частиц друг с другом, через посредство соответствующих физических полей взаимных возмущений [5]. При наличии градиентов температуры и процессов теплопередачи через дисперсную среду – мы имеем дело с взаимодействием температурных полей взаимных возмущений от каждой частицы.

Известно, что дисперсную среду можно рассматривать как гомогенную, характеризуя её свойства, так называемыми эффективными параметрами, усредненными по некоторому представительному объему Ω размер которого удовлетворяет условию: $l \ll \Omega^{1/3} \ll L$, где l – микро масштаб структурных неоднородностей, L – масштаб макроскопических неоднородностей в среде после усреднения. Впервые формулу для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности λ^* для двухфазной суспензии сферических частиц, в предположении отсутствия взаимодействия частиц [6], получил Максвелл, которую он опубликовал в 1873 г. в виде

$$\alpha^* = \frac{\lambda^*}{\lambda_1} = \frac{1 + 2\beta f_2}{1 - \beta f_2}, \quad (1)$$

где λ_1 – коэффициент теплопроводности в дисперсионной среде; $\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2}$,

$\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, λ_2 – коэффициент теплопроводности дисперсных частиц; $f_i = \frac{\Omega_i}{\Omega}$ –

объемная концентрация i -той фазы ($f_1 + f_2 = 1$). Здесь и далее нижний индекс 2 относит любой параметр к дисперсной фазе.

2. До недавнего времени [7] считалось, что в силу предположения об отсутствии взаимодействия частиц, формула (1) справедлива только при концентрациях $f_2 < 0.1$, т.е. в приближении: $\alpha^* = 1 + 3\beta f_2 + O(f_2^2)$. Однако, область применимости формулы (1) может быть установлена лишь после

количественной оценки степени влияния взаимодействия на α^* во всем диапазоне концентраций $0 < f_2 < 1$. В 2014 году автором впервые была получена аналитическая зависимость $\alpha^* = f(\beta, f_2)$ с учетом парных взаимодействий идентичных сферических частиц и всех мультиполей до $\delta = (a/l)^{14}$ включительно [8], где a – радиус дисперсной частицы, l – усредненное расстояние между центрами соседних частиц. Учет мультиполей существенно повышает точность описания сред с хаотичным пространственным распределением частиц, когда даже при малой концентрации частицы могут оказаться вблизи друг от друга. Приближение $O(\delta^{15})$ соответствует точности вычисления α^* не менее 0.1%.

В обобщенных координатах $(\beta^* - \beta)$ эта аналитическая зависимость имеет вид

$$\beta^* = \frac{\alpha^* - 1}{\alpha^* + 2} = f_2 \beta \frac{1 + k(\beta) f_2}{1 + k(\beta) f_2^2}; \quad k(\beta) = 0.0486\beta + 0.0628\beta^2 + 0.0003\beta^3. \quad (2)$$

Видно, что при слабом взаимодействии частиц, $k(\beta) \ll 1$, формула (2) переходит в так называемую формулу Клаузиуса–Моссоги $\beta_M^* = \beta f_2$, которая идентична формуле (1). Сравнивая формулы (2) и (1) нетрудно установить, что максимальная погрешность формулы (1) из-за пренебрежения взаимодействием частиц во всем диапазоне изменения параметров: $-0.5 < \beta < 1$

и $0 < f_2 < 1$ составляет $\frac{\beta^* - \beta_M^*}{\beta_M^*} 100\% \leq 2.7\%$. Отметим, что в предположении отсутствия взаимодействия частиц формула (1) является точным решением и для полидисперсных сферических частиц [6].

3. Таким образом, учет взаимодействия частиц приводит лишь к незначительным поправкам точного решения (1) во всем диапазоне изменения параметров β и f_2 . Используя это замечательное свойство формулы (1) и свойства симметрии дисперсной среды, нетрудно получить еще два точных решения и по-новому взглянуть на проблему оценки возможных границ изменения коэффициентов теплопроводности в дисперсных средах.

Действительно, мы можем увеличивать объемную концентрацию дисперсной фазы ($i = 2$) до такой степени, что она образует сплошной континуум ($i = 2 \rightarrow 1$). В этом случае, поменяв местами в формуле (1) нижние индексы ($1 \leftrightarrow 2$), т.е. применив преобразование инверсии фаз $(\lambda_1, f_1) \leftrightarrow (\lambda_2, f_2) - \alpha \rightarrow \frac{1}{\alpha}$,

$\alpha^* \rightarrow \frac{\alpha^*}{\alpha}$ и $f_2 \rightarrow f_1 = 1 - f_2$, мы получим второе точное решение, которое описывает симметричную дисперсную среду с другой (предельной) геометрией матрицы и дисперсной фазы

$$\frac{\alpha^* - \alpha}{\alpha^* + 2\alpha} = \frac{1 - \alpha}{1 + 2\alpha} f_1. \quad (3)$$

Ясно, что при малых концентрациях физически невозможно обеспечить, чтобы сферические частицы образовали континуум, не нарушая исходного условия об однородности и изотропности дисперсной среды. Таким образом,

по крайней мере, при концентрациях сферических частиц $f_2 < f_2^{crit}$ решение (3) не имеет физического смысла. Оценить величину f_2^{crit} можно сравнивая решение (3) с соответствующими экспериментами.

Однако из линейной комбинации решений (1) и (3) можно построить третье точное решение инвариантное относительно преобразования инверсии фаз $(\lambda_1, f_1) \leftrightarrow (\lambda_2, f_2)$, которое имеет физический смысл при любых концентрациях сферических частиц

$$\frac{\alpha^* - 1}{\alpha^* + 2}(\alpha + 2)f_1 + \frac{\alpha^* - \alpha}{\alpha^* + 2\alpha}(2\alpha + 1)f_2 = 0. \quad (4)$$

Нетрудно убедиться, что решение (4) не изменяется относительно замены нижних индексов $1 \leftrightarrow 2$, т.е. оно инвариантно относительно преобразования инверсии фаз. Это решение наилучшим образом соответствует экспериментам при исследовании неоднородных сред, когда трудно выделить непрерывную фазу, например, при описании свойств биметаллических смесей. На рис.1 дано сравнение точного решения (4) с экспериментами [9].

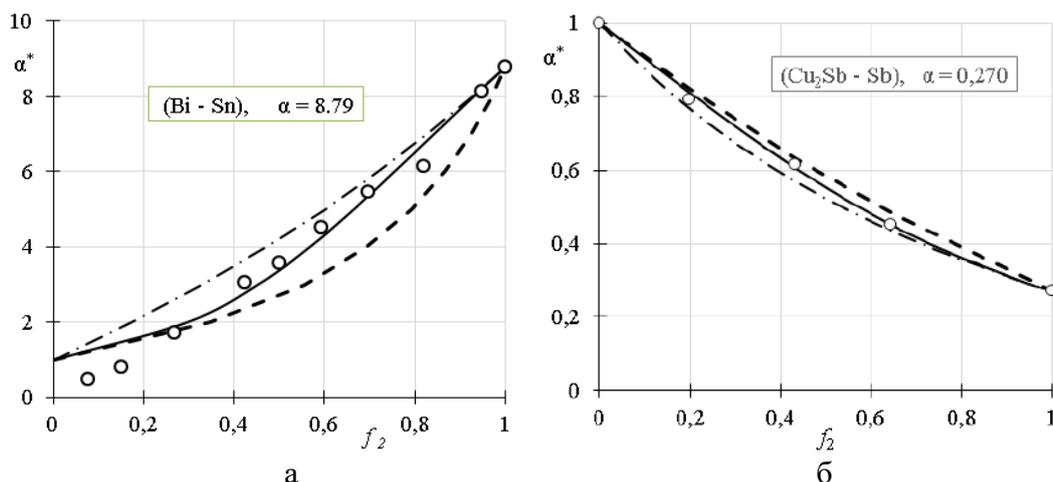


Рис.1. Сравнение точного решения (4) с экспериментами: а) смесь висмута с оловом, б) смесь сурьмянистой меди с сурьмой.

Сплошная линия – точное решение (4); штриховая линия – точное решение (1); штрихпунктирная линия – точное решение (3); точки – эксперименты [9].

4. Известно, что традиционно границы изменения для α^* устанавливаются путем решения экстремальной задачи, используя классические энергетические неравенства и вариационные принципы [10]. В первом приближении по параметру $(\alpha - 1)$ получаются, так называемые, границы Винера для анизотропных сред; во втором приближении – границы Хашина–Штрикмана (Х-Ш) для однородных и изотропных дисперсных сред, которые при $\alpha > 1$ имеют вид

$$1 + \frac{f_2}{\frac{1}{\alpha - 1} + \frac{f_1}{3}} \leq \alpha^* \leq \alpha \left(1 + \frac{f_1}{\frac{\alpha}{1 - \alpha} + \frac{f_2}{3}} \right). \quad (5)$$

Важно отметить, что границы Винера совпадают с точными решениями для слоистых сред, которые справедливы во всем диапазоне изменения параметров β и f_2 . И это совпадение не является случайным, поскольку,

как правило, точные решения удается найти лишь в средах, которые обладают определенной степенью симметрии и соответствуют некоторым предельным микроструктурам.

Что касается границ X-III, то решение вариационной задачи во втором приближении, ничего не говорит о возможности их применимости при концентрациях $0.1 < f_2 < 0.9$ [7], если неизвестна степень влияния взаимодействия частиц на конечный результат. Однако нетрудно убедиться, что границы X-III (5), полученные вариационным методом, совпадают с точными решениями (1) и (3): которые математически с достаточной точностью определены во всем диапазоне концентраций. Физическая реализуемость решения (1) доказана сравнением с экспериментами в работах [6,8]. Область физической реализуемости решения (3) неизвестна и подлежит экспериментальному уточнению.

Поэтому, в качестве верхней границы возможных изменений α^* в однородных и изотропных средах целесообразно выбрать, полученное нами точное решение (4) инвариантное относительно преобразования инверсии фаз. На рис.2 построены при $\alpha = 50$ границы X-III, определяемые точными решениями (1)-(3), и границы изменения α^* , предлагаемые автором, которые определяются точными решениями (1)-(4). Там же приведены многочисленные экспериментальные данные [7] различных авторов, полученные при измерениях α^* в самых разнообразных дисперсных средах при близких к 50 значениях параметра α : $37.08 < \alpha < 66.7$.

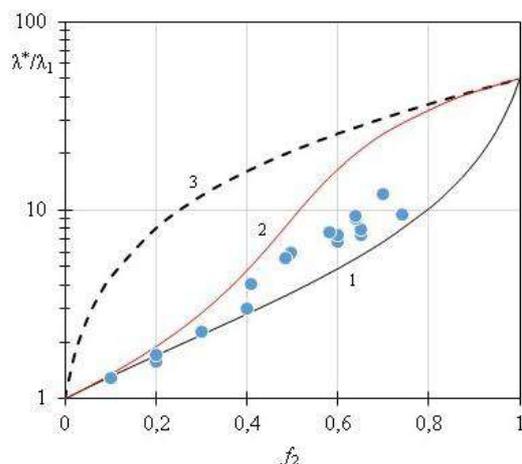


Рис.2. Границы возможных изменений (1-2) эффективного коэффициента теплопроводности однородных и изотропных дисперсных сред: 1 – точное решение (1), которое совпадает с, так называемой, эвристической формулой Максвелла и нижней границей X-III; 2 – точное решение (4) инвариантное относительно преобразования инверсии фаз; 3 – точное решение (3), которое физически не реализуется и совпадает с верхней границей X-III; точки – эксперименты [7].

Видно, что в диапазоне объемных концентраций дисперсной фазы $0.1 < f_2 < 0.74$ экспериментальные данные ограничиваются снизу аналитической формулой Максвелла (точное решение -1), а сверху – точным решением (4). Верхняя граница X-III, которая совпадает с точным решением (3), может реализоваться на практике лишь при $f_2 > 0.8$, где она приближается к решению

(4). В работе [7] имеется лишь два экспериментальных подтверждения такой ситуации: $f_2 = 0.9$, $\alpha = 1167.3$, $\alpha^* = 992$ и $f_2 = 0.925$, $\alpha = 1879.4$, $\alpha^* = 1606$.

Таким образом, статистически однородные и изотропные среды, как и анизотропные среды, среди множества возможных вариантов имеют некоторые предельные микроструктуры с высокой симметрией и точные решения, которые их описывают. Это двухфазные среды, в которых одна из фаз представлена шаровыми элементами. Действительно, шар имеет бесконечное множество плоскостей симметрии, обладает предельными геометрическими и физическими свойствами: для любого выпуклого тела заданного объема шар имеет минимальную площадь поверхности, наименьшую электростатическую емкость и минимальную среднюю виртуальную массу.

В заключение отметим, что в силу математической эквивалентности задач в безразмерном виде формулы (1), (2) и (4) пригодны для вычисления эффективных коэффициентов теплопроводности, электропроводности, электростатических диэлектрической и магнитной проницаемости и других подобных физических величин [8]. Кроме того, это обстоятельство позволяет нам использовать для сравнения теоретический и экспериментальный материал, накопленный при исследовании любых из перечисленных выше аналогичных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бошнятов Б.В. *Микропузырьковые газожидкостные среды и перспективы их использования*. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 170 с.
2. Бошнятов Б.В., Кошоридзе С.И., Левин Ю.К. *Об устойчивости нанопузырей в воде* // Известия вузов. Физика. – 2018. – Т.61. – №10(730). – С.149-155.
3. Boshenyatov B.V., Popov V.V. *Acoustic measurement of the gas content (void fraction) of dispersions of very small bubbles in liquids* // Fluid Mechanics, Soviet Research. – 1990. – Vol.19. – No.2. – Pp.112-117.
4. Бошнятов Б.В. *Роль взаимодействия частиц в кластерной модели теплопроводности наножидкостей* // Письма в ЖТФ. – 2018. – Т.44. – Вып.3. – С.17-24.
5. Бошнятов Б.В. *Гидродинамическое взаимодействие и присоединенная масса дисперсных частиц* // Известия вузов. Физика. – 2014. – Т.57. – №8-2. – С.50-60.
6. Бошнятов Б.В. *Теплопроводность пузырьковых газожидкостных сред повышенной концентрации* // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2017. – №45. – С.69-79.
7. Samantray P.K., Karthikeyan P., Reddy K.S. *Estimating effective thermal conductivity of two-phase materials* // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2006. – Vol.49(21-22). – Pp.4209-4219.
8. Boshenyatov B.V. *The contribution of interactions of spherical inclusions into electrical and thermal conductivity of composite materials* // Composites: Mechanics, Computations, Applications. – 2016. – Vol.7. – No.2. – Pp.95-104.
9. Landauer R. *The electrical resistance of binary metallic mixtures* // Journal of Applied Physics. – 1952. – Vol.23. – No.7. – Pp.779-784.
10. Hashin Z., Shtrikman S. *A variational approach to theory of effective magnetic permeability of multiphase materials* // J. Appl. Phys. – 1962. – Vol.33(10). – Pp.3125-3131.



О МЕХАНИЗМЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ СО СДВИГОМ

Воротилин В.П.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

С единой точки зрения дано описание всех практически важных типов турбулентных течений, в основе которого, исходя из факта формирования отрывных вихрей на границах потока, лежит идея переноса сдвига (т.е. трения между слоями турбулентного потока) из объема потока к его границам. Эта особенность турбулентности для течений в каналах позволила описать эффективную шероховатость в законе сопротивления как средний объем отрывных застойных зон на единице поверхности стенки, а для течений со свободной границей вывести выражение для скорости захвата внешней среды и написать замыкающее уравнение баланса массы турбулентной жидкости.

ВВЕДЕНИЕ

Расчет поля скоростей турбулентных течений всегда оставался основной целью теоретических моделей исследования турбулентности, поскольку как искомая переменная скорость входит в уравнения Рейнольдса (усредненные уравнения Навье-Стокса), являющиеся базовыми уравнениями для последующих разработок модельных методов описания турбулентности [1]. В основе конкретных расчетов, исходя из факта хаотических пульсаций потока, использовалось понятие турбулентной вязкости. Отметим, что при таком понимании механизма турбулентности вне рамок теории оставалась и представлялась как несущественной такая физически важная особенность турбулентных течений, как процесс возникновения и поддержания турбулентных пульсаций потока. И многие представляющие практический интерес вопросы турбулентных течений такие как, например, расчет трения в каналах с распределенной шероховатостью, условия течения на свободных границах также оставались за пределами возможностей полуэмпирических методов описания турбулентности.

В противоположность существующим представлениям и методам описания турбулентности во всех практически важных ее проявлениях в [2-5] разработан и описан механизм турбулентных течений со сдвигом (в каналах, струях, турбулентном пограничном слое и турбулентном слое смешения), основанный на фактах формирования отрывных вихрей на границах турбулентной области, играющих роль возбудителя турбулентных пульсаций потока. Суть предлагаемого в них подхода к описанию турбулентности заключается в том, что действие физических механизмов турбулентности в своем главном качестве, т.е. переносе кинетической энергии потока к энергии турбулентных пульсаций переходит из объема потока к его границам, и связано с образованием отрывных вихрей на границах потока. Для течений в каналах факт их существования позволил описать эффективную шероховатость в законе сопротивления как средний объем отрывных застойных зон на единице поверхности стенки, а для турбулентных струй вывести выражение для скорости захвата внешней среды и написать

замыкающее уравнение баланса массы турбулентной жидкости. Таким образом, решение самих уравнений для выяснения важнейших характеристик турбулентных течений теряет свою актуальность, и для распределения скоростей по сечению потока становится возможным использовать упрощенное условие однородности профиля скорости, не умаляя при этом сути физических механизмов турбулентных движений. В данном сообщении для подтверждения сделанных утверждений в краткой форме приводятся некоторые из результатов уже упомянутых работ, но еще представляющих интерес ввиду их фундаментального отличия от существующих представлений и методов расчета турбулентных течений.

1. ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛАХ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ШЕРОХОВАТОСТЬЮ

Одной из практически важных задач турбулентных течений является расчет коэффициента трения в каналах с распределенной шероховатостью, характеризуемой двумя и более параметрами размерности длины – высотой выступа шероховатости h , расстоянием p между соседними выступами и т.д. В качестве величины эффективной шероховатости K_s в законе трения

$$\bar{u}/v_* = (1/\kappa) \ln(R/K_s) + B,$$

где \bar{u} – средняя скорость потока, $v_* = (\tau/\rho)^{1/2}$ – динамическая скорость, τ – касательное напряжение на стенке, $\kappa = 0.4$ и $B = 8.5$ – универсальные константы, R – радиус трубы, задавался усредненный по длине потока объем отрывных застойных зон за выступами шероховатых элементов на единице площади поверхности стенки. Схема учета объема отрывных зон в каналах с шероховатостью в виде прямоугольных элементов высотой h , шириной b и расстоянием p между ними различается для близких и далеко стоящих выступов, и показана на рис.1.

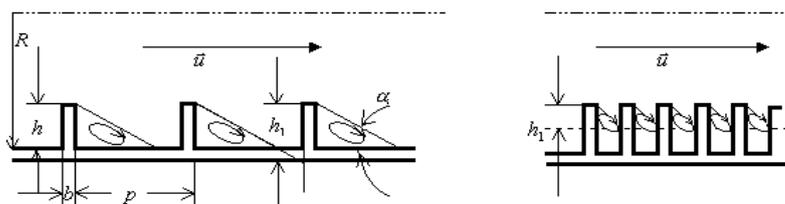


Рис.1.

Соответственно представленной схеме выражение для K_s в обоих вариантах размещения выступов примет вид

$$K_s = \begin{cases} Ah^2/(2p) & h_1 \geq h \\ (p-b)^2/(2Ap) & h_1 < h \end{cases}$$

где $h_1 = (p-b)/A$, α – угол отрыва потока ($\text{tg}(\alpha) \approx 1/8$). Как подтверждение данного выбора оценки K_s , среднее отклонение коэффициента трения $c_f = \tau/\bar{u}^2$ при сравнении с экспериментальными данными из [6] для широко диапазона изменения параметров шероховатости p , h и b составило $\sim 6\%$. Обтекание шероховатых выступов происходит с образованием отрывных вихрей, к которым

переходит кинетическая энергия среднего течения. Но и для турбулентных течений в гладких каналах процесс переноса энергии к турбулентным пульсациям также можно связать с образованием отрывных вихрей у стенок канала на границе вязкого подслоя, что подтверждается результатами эксперимента [7]. Единственная комбинация размерности длины для K_s в гладком канале по той причине, что на стенку импульс передается под действием сил вязкого трения, может быть записана в виде $K_v = \gamma_v \nu / v_*$, где для γ_v с учетом экспериментальных данных для трения в гладких каналах получена оценка $\gamma_v = 1.1$.

Из представленной схемы взаимодействия потока с выступами шероховатой поверхности и экспериментально подтвержденного факта зависимости c_f от объема отрывных застойных зон следует вывод о том, что в объеме потока других механизмов трения и передачи кинетической энергии потока к турбулентным пульсациям, кроме как через отрывные вихри, образующиеся у поверхности стенки, не существует. Вывод о том, что турбулентный поток получает энергию от внешних источников только через посредство образующихся у стенок отрывных вихрей, расходится с традиционно физическим пониманием механизма этого процесса, основанном на законах движения вязкой жидкости, но по аналогии применяемых к режиму турбулентного движения с использованием понятия турбулентной вязкости. Формально выводимый закон логарифмического распределения скоростей для простейшего варианта турбулентного течения в каналах на основе турбулентной вязкости фактически эквивалентен записи из соображений размерности выражения для производной скорости в виде $du/dy = \alpha v_*/y$, где α – некоторая константа. Но из результатов предлагаемой теории, как одного из альтернативных вариантов механизма турбулентности, следует, что работа внешнего источника силы первоначально затрачивается на энергию отрывных вихрей, а все последующие развивающиеся во времени процессы, связанные с формированием усредненного профиля скорости, происходят без дополнительных затрат энергии и, следовательно, без участия механизма турбулентной вязкости.

2. О МЕХАНИЗМЕ ЗАХВАТА И ТУРБУЛИЗАЦИИ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ

Важность понимания и формулировки условий на границе турбулентного потока (ТП) с внешним ламинарным течением в монографии [8] подчеркнута фразой: «Точный вид условий на границе с внутренней областью турбулентного течения, которым должно удовлетворять решение, до сих пор неизвестен». В литературе, как общепринятый метод расчета, формально граница, разделяющая область внешнего ламинарного течения со скоростью u_∞ и плотностью ρ_∞ и области ТП задается условием, где скорость течения в ТП отличается от скорости внешнего течения на некоторую малую величину (чаще всего на один процент). И таким образом, в разработке теории исчезает факт реально существующей границы, разделяющей области ламинарного (внешнего) и турбулентного течения, и конечно различие, действующих в них физических механизмов. В работах [2,4,5] из того факта, что внешняя среда и ТП это две четко различимые жидкости, их динамическое взаимодействие задается как сила трения, действующая на разделяющей их границе. Из соображений размерности

следует, что эта сила может быть пропорциональна только квадрату некоторой комбинации скоростей движения внешней среды и ТП

$$F_{fr} = \gamma \rho_{\infty} (u_{\infty} - u_s)^2,$$

где γ – константа (для турбулентных струй ее значение на основе опытных данных, было принято равным 0.1); u_s – промежуточная скорость между u_{∞} и средней скорости ТП \bar{u} . Из условия непрерывности потока импульса, перетекающего от внешней границы во внутреннюю область ТСС, эту же силу можно записать как

$$F_{fr} = \gamma \rho (u_s - \bar{u})^2,$$

где ρ плотность ТП. Отсюда для F_{fr} следует выражение

$$F_{fr} = \gamma_s \rho_{\infty} (u_{\infty} - \bar{u})^2,$$

где введено сокращение $\gamma_s = \gamma / \left(1 + (\rho_{\infty} / \rho)^{1/2}\right)^2$.

Вывод о том, что закон трения квадратичен по скорости, означает, что обтекание возмущенной границы ТП внешним потоком должно происходить с образованием отрывных вихрей. По смыслу деления всей области течения на внешнюю безвихревую среду и собственно ТП указанные отрывные вихри должны остаться в составе ТП, играя для него роль источника турбулентности. Поэтому и импульс, при трении отдаваемый им ТП, также должен возвратиться в ТП вместе с захваченными вихрями. От ТП вихри получают импульс пропорциональный разности скоростей $\bar{u} - u_{\infty}$. Поток возвращаемого импульса (на единицу поверхности ТП) запишем в виде $j = \rho_{\infty} \mathbf{v}_c |\bar{u} - u_{\infty}|$, где \mathbf{v}_c – скорость захвата вихрей внешней среды. Из условия равенства потоков j и F_{fr} находим $\mathbf{v}_c = \gamma_s |\bar{u} - u_{\infty}|$.

Отсюда наряду с традиционными интегральными уравнениями баланса масс можно написать уравнение баланса массы «турбулентной» жидкости, учитывая \mathbf{v}_c как ее источник, и таким образом получить уравнение для границ ТП. Отметим, что в литературе экспериментальные и теоретические исследования гидродинамики на границе ламинарной и турбулентной области течения в струях и ТПС и различные варианты объяснения механизма захвата и турбулизации внешней среды не прекращались, начиная с работы Corrsin S. and Kistler A.L. [9]. Обширный обзор этих работ вместе с результатами новых данных эксперимента и на их основе попытки обоснования гипотезы вязкого надслоя представлены в недавно вышедшей статье [10]. Не вдаваясь в детали рассуждения этой и множества упомянутых в ней других исследований, отметим их главное смысловое отличие от понимания механизма турбулентности данной работы. Суть его в том, что в этой и всех других работах процесс захвата и турбулизации внешней среды рассматриваются как следствие хаотических движений турбулентных структур в окрестности границы ТПС с внешним течением, результатом которых при их усреднении во времени получают экспериментально измеряемые данные. Иначе говоря, процесс захвата и турбулизации внешней среды вторичен по отношению к наблюдаемому хаосу турбулентных пульсаций, в то время, как в предлагаемой теории механизм и скорость захвата рассматриваются как первичный источник этих пульсаций.

Таким образом, как результат анализа некоторых фактов турбулентных течений, объяснение которых выходит за рамки существующих полуэмпирических теорий, в частности, оценки высоты эффективной шероховатости в трубах с распределенной шероховатостью, характеризуемой двумя и более параметрами размерности длины, представлен вариант теории турбулентных течений в каналах с гладкими и шероховатыми стенками, а также для турбулентных струй, с единым механизмом динамического взаимодействия (механизмом трения) турбулентного потока с его границами – стенками канала или внешним ламинарным потоком. Получено выражение для обобщенного закона трения, описывающее турбулентное течение при всех допустимых значениях чисел Рейнольдса от режима течения с гладкими стенками до режима с полным проявлением шероховатых элементов. Одним из выводов теории стало утверждение, что единственным источником турбулентности для турбулентных течений в каналах и струях являются вихри, образующиеся у стенок каналов и на свободных границах турбулентных струй, и только через эти вихри происходит перенос кинетической энергии от среднего течения к энергии турбулентных пульсаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А.С., Яглом А.М. *Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч.1.* – М.: Наука, 1965. – 639 с.
2. Воротилин В.П. *О механизме движения и диффузионного горения турбулентных струй // ЖЭТФ.* – 2018. – Т.153. – Вып.2. – С.313-328.
3. Воротилин В.П. *О механизме турбулентных течений со сдвигом // ЖЭТФ.* 2019. – Т.156. – Вып.1. – С.176-188.
4. Воротилин В.П. *О механизме турбулентных течений. Часть 2. Турбулентный пограничный слой // ЖЭТФ.* – 2021. – Т.160. – Вып.4(10). – С.587-594.
5. Воротилин В.П. *Гидродинамика турбулентного слоя смешения // ЖЭТФ.* – 2022. – Т.162. – Вып.6(12). – С.985-990.
6. Dalle Donne M., Meyer L. *Turbulent convective heat transfer from rough surfaces with two-dimensional rectangular ribs // Int. J. Heat Mass Transfer.* – 1977. – Vol.20. – Pp.583-620.
7. Kline S.J., Reynolds W.C., Schraub F.A., Runstadler P.W. *The structure of turbulent boundary layers // J. Fluid Mech.* – 1967. – Vol.30. – Iss.4. – Pp.741-773.
8. Фрост У., Моулден Т. *Турбулентность: принципы и применение.* – М.: Издательство Мир, 1980.
9. Corrsin S., Kistler A.L. *Tech. Rep. TN-1244.NACA.* – 1955.
10. Chauhan K., Philip J., de Silva C.M., Hutchins N., Marusic I. *The turbulent/non-turbulent interface and entrainment in a boundary layer // J. Fluid Mech.* – 2014. – Vol.742. – Pp.119-151.

УДК 532.529.5
EDN STJWAM (<https://elibrary.ru/stjwam>)
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.27



МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ЖЕСТКИХ КЛАСТЕРНЫХ СТРУКТУР В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Гуськов О.Б.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Одним из актуальных направлений исследований в области гидромеханики является изучение законов динамики дисперсных сред. Законы динамики такого рода сред лежат в основе, как многих природных явлений, так и множества технологических процессов современной промышленности. Между тем законы поведения таких сред до сих пор мало исследованы, что объясняется чрезвычайной сложностью возникающих при этом научных проблем фундаментального характера. Теоретическое исследование законов динамики дисперсных сред приводит к необходимости решения проблемы коллективного гидродинамического взаимодействия огромного количества дисперсных частиц в потоке несущей сплошной среды. Эта проблема, по сути, является разновидностью одной из фундаментальных научных проблем, известной под названием «проблемы многих тел», которая до сих пор точно не решена ни в одной из областей науки.

Исключительная сложность проблемы приводит к необходимости построения разного рода упрощенных теоретических моделей. Одной из первых была так называемая ячеечная модель [1], разработанная применительно к вязкой жидкости, а впоследствии была использована [2] для определения присоединенной массы газовых пузырьков, образующих в идеальной жидкости безграничную невязкую пузырьковую эмульсию. Этот результат впоследствии был уточнен [3] на основе физически более строгой модели, приближенно учитывающей гидродинамическое взаимодействие пузырьков в эмульсии. Затем было получено обобщение [4] результата [3] на случай твердых частиц произвольной массы. Однако, решение [4] имеет неявный вид и требует численных расчетов для каждого конкретного значения параметра, характеризующего соотношение плотностей частиц и несущей жидкости.

Один из методов, позволяющих учесть коллективное гидродинамическое взаимодействие частиц в потоках идеальной (невязкой) несущей сплошной среды был разработан у нас в стране [5] на основе использования известной в науке концепции самосогласованного поля. Построенный метод позволяет учитывать гидродинамическое взаимодействие дисперсных частиц и при этом свободен от целого ряда упрощающих ограничений, присущих другим методам. Как было показано в работах [6,7] и других, метод самосогласованного поля (МСП) является эффективным инструментом для решения разных классов задач динамики невязких дисперсных сред, позволяющим получать принципиально новые результаты, которые не удавалось получить на основе других ранее известных подходов.

1. ОСНОВЫ МЕТОДА

Большинство работ по динамике невязких дисперсных сред посвящены исследованию задач о совместном движении «свободных» частиц во внешнем потоке сплошной среды. Ниже на основе метода самосогласованного поля [5] рассмотрена качественно другая задача – исследуется динамика кластера, состоящего из большого количества сферических частиц, жестко скрепленных между собой таким образом, что в процессе движения их взаимное расположение в пространстве не меняется.

Рассмотрим систему из N жестко скрепленных друг с другом сферических частиц радиуса a , погруженных в идеальную несжимаемую жидкость. Будем считать, что частицы скреплены между собой посредством связей, которые не оказывают непосредственного влияния на гидродинамику. Пронумеруем все частицы от 1 до N . Для удобства, но без ограничения общности, при решении дальнейшей задачи, можно представить себе модель кластера как систему из N частиц, каждая из которых жестко связана хотя бы с одной из соседних сфер, образуя таким образом жесткую пространственную структуру. Рассмотрим задачу, когда такой кластер в некоторый момент времени начинает движение с заданным ускорением $\dot{U}_\gamma^{(0)}$ под действием внешней силы $F_\gamma^{(0)}$. Если обозначить координаты центров всех частиц как $x_\gamma^{(i)}$, а их ускорения – как $\dot{U}_\gamma^{(i)}$, то потенциал скоростей жидкости φ будет иметь вид [5,6]

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha^{2n+1}}{n+1} C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)} \frac{X_{\gamma_1}^{(i)} \dots X_{\gamma_n}^{(i)}}{R_i^{2n+1}}, \quad (1.1)$$

$$X_\gamma^{(i)} = x_\gamma - x_\gamma^{(i)}, \quad R_i = \sqrt{X_\gamma^{(i)} X_\gamma^{(i)}},$$

а производные по времени от тензорных коэффициентов $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$ удовлетворяют бесконечной алгебраической системе уравнений

$$\dot{C}_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)} = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x_{\gamma_1} \dots \partial x_{\gamma_n}} \left\{ -\dot{U}_\beta^{(i)} X_\beta^{(i)} \right\} \Big|_{R_i=0} + \sum_{j \neq i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ka^{2k+1}}{k+1} \dot{C}_{\beta_1 \dots \beta_k}^{(j)} Q_{\beta_1 \dots \beta_k \gamma_1 \dots \gamma_n}^{(j,i)}, \quad (1.2)$$

$$Q_{\beta_1 \dots \beta_k \gamma_1 \dots \gamma_n}^{(j,i)} = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x_{\gamma_1} \dots \partial x_{\gamma_n}} \left\{ \frac{X_{\beta_1}^{(j)} \dots X_{\beta_k}^{(j)}}{R_j^{2k+1}} \right\} \Big|_{R_j=0}.$$

Здесь и далее приняты тензорные обозначения переменных с условием о суммировании по повторяющимся нижним координатным индексам. Это условие не распространяется только на переменную R_i . Верхние индексы относятся к частицам, и чтобы отличать их от показателя степени, они заключены в круглые скобки. Производная по времени обозначена точкой над обозначением переменной.

В общем случае, когда скорости частиц не заданы, система (1.2) незамкнута, и ее необходимо дополнить уравнениями движения частиц и условиями связи между ними. Однако если ограничиться рассмотрением кластеров, обладающих симметричной структурой относительно оси, вдоль которой действует внешняя сила, то уравнения движения частиц с условиями связи между ними, очевидно, приводят к простому кинематическому соотношению

$$\dot{U}_\gamma^{(i)} = \dot{U}_\gamma^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.3)$$

Следует отметить, что условие осевой симметрии структуры кластера не накладывает принципиального ограничения на применение развиваемого метода решения подобных задач. В данном случае оно принято для упрощения изложения, так как при этом нет необходимости рассматривать эффекты, связанные с вращением кластера, что не является предметом исследования данной работы.

Таким образом, задача определения потенциала скорости (1.1) сводится к нахождению коэффициентов $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$ на основании системы уравнений (1.2) совместно с условиями (1.3).

Если переобозначить теперь все переменные как безразмерные, принимая в качестве масштабов величин ускорение кластера $\dot{U}_\gamma^{(0)}$, а также характерное расстояние между центрами соседних сфер L , то в предположении малости параметра $\alpha = a/L$ все неизвестные функции можно искать в виде рядов по степеням этого параметра

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m \varphi^{(m)}, \quad \dot{C}_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m \dot{C}_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)(m)}. \quad (1.4)$$

Подставляя разложения (1.4) в систему (1.2) и приравнявая члены при одинаковых степенях малого параметра, получим систему рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} \dot{C}_{\gamma_1}^{(i)(0)} = -e_{\gamma_1}, \quad \dot{C}_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)(0)} = 0 \quad \text{при } n > 1, \quad e_{\gamma_1} = \frac{\dot{U}_{\gamma_1}^{(0)}}{\dot{U}^{(0)}}, \\ \dot{C}_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)(m)} = \sum_{j \neq i} \sum_{k=1}^{[(m-1)/2]} \frac{k}{k+1} \dot{C}_{\beta_1 \dots \beta_k}^{(i)(m-2k-1)} Q_{\beta_1 \dots \beta_k, \gamma_1 \dots \gamma_n}^{(j,i)}, \quad m > 1. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Квадратные скобки над знаком суммы означает целую часть числа, а тензор $Q_{\beta_1 \dots \beta_k, \gamma_1 \dots \gamma_n}^{(j,i)}$ определен последним равенством (1.2).

Полученные рекуррентные соотношения позволяют определить все тензорные коэффициенты в любом приближении по малому параметру α . В настоящей работе они определены с точностью до $O(\alpha^{15})$. В дальнейшем для определения присоединенной массы кластера понадобится только тензор $C_{\gamma_1}^{(i)}$. Вычисления по формулам (1.5) с указанной выше точностью приводят к следующему результату

$$\begin{aligned} \dot{C}_\gamma^{(i)} = -e_\gamma - e_\beta \sum_{j \neq i} B_{\beta\gamma}^{(i,j)}, \\ B_{\beta\gamma}^{(i,j)} = \frac{1}{2} \alpha_{ij}^3 A_{\beta\gamma}^{(i,j)(-3)} + \frac{1}{4} \alpha_{ij}^6 A_{\beta\gamma}^{(i,j)(3)} + \alpha_{ij}^8 A_{\beta\gamma}^{(i,j)(2)} + \frac{1}{8} \alpha_{ij}^9 A_{\beta\gamma}^{(i,j)(-9)} + \\ + \frac{9}{4} \alpha_{ij}^{10} A_{\beta\gamma}^{(i,j)(\frac{5}{3})} + \alpha_{ij}^{11} A_{\beta\gamma}^{(i,j)(-7)} + \frac{65}{16} \alpha_{ij}^{12} A_{\beta\gamma}^{(i,j)(\frac{111}{65})} - \frac{5}{12} \alpha_{ij}^{13} A_{\beta\gamma}^{(i,j)(-1)} + \\ + 7 \alpha_{ij}^{14} A_{\beta\gamma}^{(i,j)(\frac{17}{7})} - \frac{129}{32} \alpha_{ij}^{15} A_{\beta\gamma}^{(i,j)(-\frac{267}{43})}, \\ A_{\beta\gamma}^{(i,j)(p)} = \delta_{\beta\gamma} + p \frac{(x_\beta^{(i)} - x_\beta^{(j)})(x_\gamma^{(i)} - x_\gamma^{(j)})}{R_{ij}^2}, \\ \alpha_{ij} = \frac{\alpha}{R_{ij}}, \quad R_{ij} = \sqrt{(x_\eta^{(i)} - x_\eta^{(j)})(x_\eta^{(i)} - x_\eta^{(j)})}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\delta_{\beta\gamma}$ – символ Кронекера.

Необходимо отметить, что в выражении (1.6) для $\dot{C}_\gamma^{(i)}$ и далее учтены члены, описывающие только парные взаимодействия частиц. Отличительным формальным признаком этого является присутствие в правой части первого равенства (1.6) только одинарной суммы по частицам. Члены, описывающие взаимодействие более высокого порядка, вносят несущественный вклад при вычислении характеристик кластерных структур, рассмотренных в рамках настоящей работы. При необходимости получить более точные выражения для $\dot{C}_\gamma^{(i)}$ с учетом тройных, четверных и т.д. взаимодействий частиц достаточно просто учесть все соответствующие члены (двойные, тройные и т.д. суммы) при вычислениях по формулам (1.5).

Для определения присоединенной массы кластера необходимо записать уравнения движения для каждой i -й частицы с учетом внутренних сил, действующих на нее со стороны остальных частиц. Если затем сложить все N уравнений, учитывая, что сумма всех внутренних сил по третьему закону Ньютона равна нулю, то в результате получим уравнение

$$F_\gamma^{(0)} + \sum_{i=1}^N f_\gamma^{(i)} = \lambda e_\gamma, \quad \lambda = \frac{\rho_p}{\rho}, \quad (1.7)$$

где ρ_p и ρ – плотности частиц и жидкости соответственно, $F_\gamma^{(0)}$ – вектор внешней силы, приложенной к кластеру, $f_\gamma^{(i)}$ – вектор гидродинамической силы, действующей на i -ю частицу. Уравнение (1.7) записано в безразмерном виде. В качестве масштаба силы выбрана величина $\rho\tau N\dot{U}^{(0)}$, где τ – объем сферической частицы.

Для записи гидродинамической силы $f_\gamma^{(i)}$ в уравнении (1.7) удобно воспользоваться теоремой Бика [8], выражающей эту силу через характеристики внешнего по отношению к i -й частице потока. В результате в принятых обозначениях в безразмерном виде будем иметь

$$f_\gamma^{(i)} = -\frac{1}{2N} \left(e_\gamma + 3 \sum_{j \neq i} e_\beta B_{\beta\gamma}^{(i,j)} \right), \quad (1.8)$$

$$F_\gamma^{(0)} = \lambda e_\gamma + \frac{1}{2} \left(e_\gamma + \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} e_\beta B_{\beta\gamma}^{(i,j)} \right).$$

Если ось Ox_3 системы координат совпадает с осью симметрии, вдоль которой направлен вектор внешней силы, то отсюда получим следующее выражение для присоединенной массы M^* осесимметричного кластера из идентичных частиц

$$\frac{M^*}{\rho\tau N} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} B_{33}^{(i,j)} \right). \quad (1.9)$$

Этот результат после подстановки в него конкретных выражений (1.6) для компонент тензора $B_{33}^{(i,j)}$ совпадает в частных случаях с известными классическими решениями [9,10] задач о движении двух идентичных сфер с одинаковыми скоростями вдоль и перпендикулярно линии их центров при соответствующей степени точности по параметру α . Данное сравнение корректно несмотря на то, что в классических задачах [9,10] рассмотрено

движение свободных, не связанных друг с другом сфер, так как при одинаковых скоростях частиц условие связи между ними выполняется автоматически. В этом плане данные задачи хороши для сравнения, но не показательны с точки зрения влияния связей между частицами на динамику кластера.

2. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДА

Чтобы оценить влияние связей, рассмотрим в качестве примера задачу о движении кластера, состоящего из трех одинаковых сфер радиуса a (рис.1). Сферы 2 и 3 расположены симметрично относительно оси Ox_3 на одинаковом расстоянии d от первой сферы. Внешняя сила $F_\gamma^{(0)}$ приложена к сфере 1 в направлении оси Ox_3 . В принятых на рисунке обозначениях вычисления по формуле (1.8) с точностью до $O(\alpha^3)$ приводят к следующему выражению для гидродинамических сил, действующих на вторую и третью сферы

$$f_3^{(2)} = f_3^{(3)} = -\frac{1}{6} \left(1 + \frac{3}{2} \alpha^3 \left(1 - 3 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{8} \operatorname{cosec}^3 \frac{\theta}{2} \right) \right), \quad (2.1)$$

$$f_1^{(3)} = -f_1^{(2)} = \frac{3}{8} \alpha^3 \sin \theta; \quad \alpha = \frac{a}{d}.$$

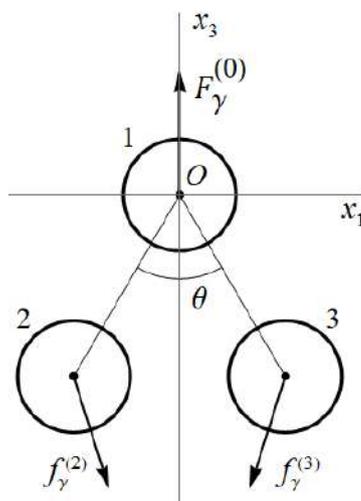


Рис.1.

Видно, что при $\theta \neq \pi$ составляющие гидродинамических сил $f_1^{(3)}$ и $f_1^{(2)}$, действующих на вторую и третью сферы, отличны от нуля. Очевидно, что в этом случае отсутствие ускорений сфер вдоль оси Ox_1 может быть обусловлено только действием соответствующих реакций связей между частицами, которые компенсируют соответствующие составляющие гидродинамических сил. Отсюда также следует, что направления действия внутренних сил, обусловленных жесткими связями между частицами в кластере, в общем случае не совпадают с направлением приложенной внешней силы $F_\gamma^{(0)}$.

Формулы (1.6), (1.8) и (1.9) позволяют определять динамические характеристики жестких кластеров, состоящих из конечного числа сферических частиц при любых заданных конфигурациях их взаимного расположения

в пространстве. В случае, если кластер состоит из большого количества частиц, для расчетов можно использовать простейшие методы численного суммирования по формулам (1.6), (1.8) и (1.9). Ниже приведены некоторые примеры таких расчетов.

Для фуллерен подобной кластерной структуры, симметричной относительно вертикальной оси Ox_3 (см. рис.2) расчеты по формулам (1.9) с учетом соотношений (1.6) дают следующий результат для безразмерной величины присоединенной массы такого кластера

$$\frac{M^*}{\rho\tau N} = \frac{1}{2}(1 + Df), \quad Df = 0.0048, \quad \frac{a}{L} = 0.3, \quad \frac{a}{R} \approx 0.121, \quad (2.2)$$

где a – радиус частиц, L – расстояние между центрами соседних частиц, R – расстояние от центра кластера до центров частиц.

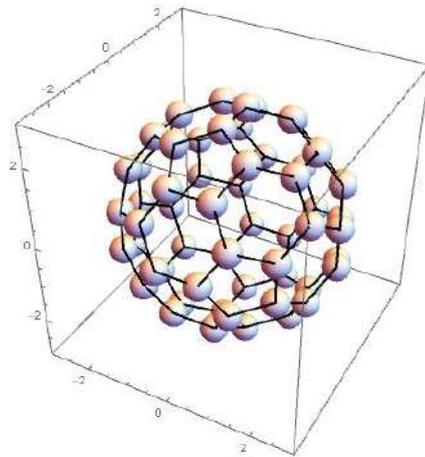


Рис.2.

Для кластерной структуры в виде куба, в которой центры $N = 125$ частиц расположены в узлах кубической решетки (см. рис.3) расчеты по формулам (1.9) с учетом соотношений (1.6) дают следующий результат для безразмерной величины присоединенной массы такого кластера

$$\frac{M^*}{\rho\tau N} = \frac{1}{2}(1 + Df), \quad Df = 0.00875, \quad \frac{a}{L} = 0.3, \quad \frac{a}{R} = 0.15, \quad (2.3)$$

где обозначения величин в (2.3) приведены в описании к формулам (2.2).

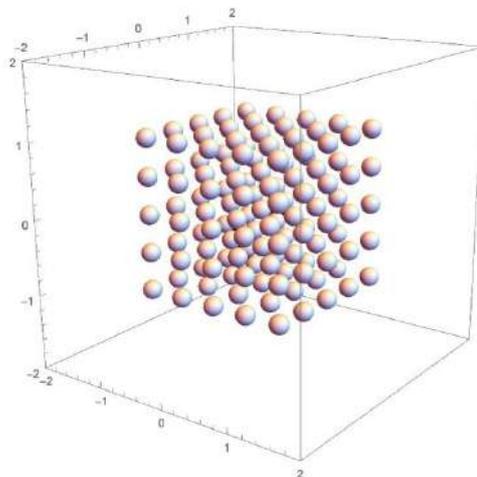


Рис.3.

Представляет также интерес кластерная структура в виде сферического облака, содержащего большое количество частиц, статистически равномерно распределенных внутри такого облака (см. рис.4). Для формирования такой структуры был использован численный метод, в рамках которого координаты центров частиц задавались с помощью счетчика случайных чисел с учетом условия, что при заданном значении радиуса частиц они не пересекаются друг с другом, а их центры не выходят за пределы сферы единичного радиуса. Соответствующие расчеты по формулам (1.9) с учетом соотношений (1.6) для кластера в форме сферического облака радиуса $R=1$, содержащего $N=837$ частиц, дают следующий результат для безразмерной величины присоединенной массы такого кластера

$$\frac{M^*}{\rho\tau N} = \frac{1}{2}(1 + Df), \quad Df = 0.0296, \quad \frac{a}{L} = 0.3, \quad \frac{a}{R} = 0.048, \quad (2.4)$$

где обозначения величин в (2.4) приведены в описании к формулам (2.2).

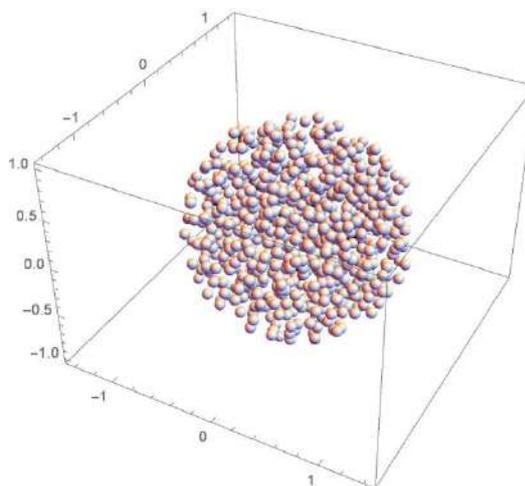


Рис.4.

В некоторых случаях, когда кластер заданной формы содержит очень большое количество частиц с заданной функцией их распределения внутри кластера, целесообразен переход от дискретного к осредненному описанию динамики таких структур подобно тому, как это было сделано в работах [6,7] для частного случая статистически равномерного распределения частиц в пространстве. Такой подход обладает тем преимуществом, что позволяет в ряде случаев получать конечные результаты в виде аналитических зависимостей от заданных параметров кластерных структур. Развитие такого подхода применительно к задачам динамики жестких кластерных структур может служить предметом дальнейших теоретических исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cunningham E. *On the velocity of steady fall of spherical particles through fluid medium* // Proc. Roy. Soc. (London). – 1910. – Vol.A83. – Pp.357-365.
2. Zuber N. *On the dispersed two-phase flow in the laminar flow regime* // Chem. Eng. Sci. – 1964. – Vol.19. – Pp.897-917.
3. Van Wijngaarden I., Jeffrey D.J. *Hydrodynamic interaction between gas bubbles in liquid* // J. Fluid Mech. – 1976. – Vol.77. – Pp.27-44.

4. Felderhof B.U. *Virtual mass and drag in two-phase flow* // J. Fluid Mech. 1991. – Vol.225. – Pp.177-196.
5. Струминский В.В., Гуськов О.Б., Корольков Г.А. *Гидродинамическое взаимодействие частиц в потенциальных потоках идеальной жидкости* // Доклады АН СССР. – 1986. – Т.290. – №4. – С.820-824.
6. Гуськов О.Б., Бошнятов Б.В. *Гидродинамическое взаимодействие сферических частиц в потоке невязкой жидкости* // Доклады РАН. – 2011. – Т.438. – №5. – С.626-628.
7. Гуськов О.Б. *О присоединенной массе тела, движущегося в суспензии сферических частиц* // Доклады РАН. – 2012. – Т.442. – №1. – С.50-53.
8. Beek P. van. *A counterpart of Faxen's formula in potential flow* // Int. J. Multiphase Flow. – 1985. – Vol.11. – No.6. – Pp.873-879.
9. Hicks W.M. *On the motion of two spheres in a fluid* // Phil. Trans. – 1880. – Vol.171. – Pp.455-492.
10. Basset A.B. *On the motion of two spheres in a liquid, and allied problems* // Proc. London Math. Soc. – 1886. – Vol.18. – Pp.369-377.



НОВАЯ КОНЦЕПЦИЯ СТАБИЛЬНОСТИ НАНОПУЗЫРЕЙ В ВОДЕ

Левин Ю.К.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

Интерес к объемным нанопузырям (ОНП) в воде связан с перспективами их применения в различных областях [1-3]. Вопрос о свойствах таких пузырей, в частности, объяснение их стабильности, активно обсуждался в литературе. Стабильность ОНП – явление многогранное. Например, законами гидродинамики можно объяснять коалесценцию пузырей с последующим их всплыванием и удалением из водной среды. Законы термодинамики обеспечивают жизнеспособность отдельного пузыря. Наиболее физически наглядным представляется электростатический подход, который рассматривает диспесную газо-жидкостную среду как коллоидный раствор, а заряженные нанопузыри как коллоидные частицы, которые имеют двойной электрический слой (ДЭС), состоящий из противоионов – одни закреплены на оболочке ОНП, а другие совершают броуновское движение в диффузном слое.

1. ИЗВЕСТНАЯ КОНЦЕПЦИЯ СТАБИЛЬНОСТИ НАНОПУЗЫРЕЙ В ВОДЕ

При анализе стабильности пузырей объясняли равновесием внутреннего и внешнего давлений, действующих на ОНП. Внутреннее давление – результат кулоновского расталкивания зарядов на поверхности ОНП [4]

$$P_c(R_b) = \frac{Q_b^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon R_b^4}, \quad (1)$$

где $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$ – диэлектрическая проницаемость вакуума, $\varepsilon = 81$ – относительная диэлектрическая проницаемость воды (ОДП), R_b и Q_b – радиус и заряд ОНП.

Внешнее давление обеспечивает поверхностное натяжение (давление Лапласа) [5]

$$P_\alpha(R_b) = 2\alpha/R_b, \quad (2)$$

где $\alpha = 0.072$ Н/м – коэффициент поверхностного натяжения воды.

До сих пор при электростатическом подходе к выяснению механизма стабильности ОНП традиционно верной считалась гипотеза, согласно которой внутреннее давление Кулона $P_c(R_b)$ уравнивается внешним давлением поверхностного натяжения $P_\alpha(R_b)$. Однако при этом не были учтены существенные свойства воды как полярного диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 81$. Вода двойного электрического слоя ОНП в электрическом поле заряда Q_b поляризуется и у поверхности ОНП формируется связанный поляризационный поверхностный заряд, который в поле

заряда Q_b создает внешнее, также кулоновское давление $P_D(R_b)$, сжимающее ОНП вместе с $P_\alpha(R_b)$. На границе ОНП в электрическом поле $E_0(R_b) = \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 R_b^2}$ заряда Q_b возникает связанный поляризационный заряд. Наложение поля этого заряда на поле $E_0(R_b)$ создает результирующее поле

$$E_\Sigma(R_b) = \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_b^2}. \quad (3)$$

Решение задачи о давлении жидкого диэлектрика на заряженный шар [6] применимо к определению давления $P_D(R_b)$ связанного поляризационного поверхностного заряда

$$P_D(R_b) = \frac{-(\epsilon-1)Q_b^2}{16\pi^2\epsilon_0\epsilon R_b^4}. \quad (4)$$

Таким образом, при анализе равновесия ОНП необходимо учитывать не только противодействие давлений $P_C(R_b)$ и $P_\alpha(R_b)$, как в известной концепции стабильности, но и дополнительное его сжатие давлением $P_D(R_b)$ поляризационного связанного заряда. Из формул (1), (4) видно: $\frac{P_D(R_b)}{P_C(R_b)} = 2(\epsilon-1) \gg 1$. Отсюда следует вывод, что стабилизация ОНП за счет баланса давлений P_0 и P_L невозможна и принятая ныне концепция неверна.

2. НОВАЯ КОНЦЕПЦИЯ СТАБИЛЬНОСТИ НАНОПУЗЫРЕЙ В ВОДЕ

В новой концепции стабильности учтено, что вода, согласно формуле (4), в приграничной области подвержена высокому давлению и воздействию большой напряженности электрического поля. Известно, что при давлении $P > 10^9$ Па при $T \geq 298$ К и выше вода переходит в лед (эффект прессозамораживания) [7].

В электрическом поле $E_\Sigma(R_b) > 10^9$ В/А вода также переходит в лед при $T \geq 298$ К (эффект электрозамораживания) [8]. При этом, очевидно, нанопузырь стабилизируют механические силы, противодействующие сжимающему давлению $P_D(R_b) + P_\alpha(R_b)$. Оценка влияния эффекта «прессозамораживания» показала, что при увеличении радиуса ОНП от 5 нм до 100 нм минимальный заряд, необходимый для формирования его ледяной оболочки и, соответственно, стабилизации увеличивается от $3,1 \cdot 10^{-17}$ Кл до $1,2 \cdot 10^{-14}$ Кл. Эффект «электрозамораживания» требует ~ 8.3 раз большего заряда ОНП, чем за счет «прессозамораживания».

Общий вывод проведенного анализа: стабильность нанопузыря реализуется, когда сумма давлений кулоновского и лапласовского сжатия уравнивается механическим напряжением его ледяной «скорлупы».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Объемные нанопузыри в воде сжимаются электростатическим давлением поляризационных зарядов и поверхностного натяжения, которые

уравновешиваются сильным механическим напряжением ледяной оболочки и сравнительно слабым расширяющим кулоновским давлением заряда самого пузыря.

2. Расширяющее давление заряда ОНП мало по сравнению со сжимающим поверхностным натяжением и давлением заряда, наведенного в полярном диэлектрике – воде. Поэтому баланс сил Кулона и Лапласа не может, как полагали ранее, являться причиной стабилизации нанопузырей.

3. Объемные нанопузыри существуют за счет сочетания физических эффектов:

- поляризации воды электрическим полем на границе газ/вода;
- «замораживания» воды электростатическим давлением наведенного заряда в полярном диэлектрике (воде) на границе пузыря;
- электрозамораживания воды в электрическом поле заряда ОНП.

ЛИТЕРАТУРА

1. Meegoda J.N., Hewage S.A., Batagoda J.H. *Stability of nanobubbles* // Environmental Engineering Science. – 2018. – Vol.35. – No.11. – Pp.1216-1227. DOI: 10.1089/ees.2018.0203
2. Wang S., Zhou L., Gao Y. *Can bulk nanobubbles be stabilized by electrostatic interaction?* // Phys. Chem. Chem. Phys. – 2021. – Vol.23. – Pp.16501-16505.
3. Левин Ю.К. *Характеристики двойного электрического слоя объемных нанопузырей в воде* // Коллоидный журнал. – 2023. – Т.85. – №3. – С.350-354. DOI: 10.31857/S0023291223600220
4. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. *Фейнмановские лекции по физике. Выпуск 5.* – М.: Мир, 1966.
5. Тамм И.Е. *Основы теории электричества: Учебное пособие для вузов.* – М.: Физматлит, 2003. – 616 с. (С.101-102).
6. Воробьев И.И., Зубков П.И., Кутузов Г.А. и др. *Задачи по физике: Учебное пособие. 3-е изд., испр. и доп.* – Новосибирск: НГУ, 1999. – 370 с. (с.327, ответ к задаче №6.6.19).
7. Белов С.И., Борисков Г.В., Быков А.И. и др. *Электрофизические свойства воды и льда при изоэнтропическом сжатии до мегабарных давлений* // Письма в ЖЭТФ. – 2017. – Т.105. – Вып.3. – С.182-186. DOI: 10.7868/S0370274X17030109.
8. Cassone G., Martelli F. *Electrofreezing of Liquid Water at Ambient Conditions.* arXiv:2308.04893v1 [physics.chem-ph] 9 Aug 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2308.04893



ОБРАЗОВАНИЕ ВЯЗКИХ ПАЛЬЦЕВ ПРИ ВЫТЕСНЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В РАДИАЛЬНОЙ ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ-ШОУ*

Марфин Е.А., Галимзянова А.Р.

*Институт энергетики и перспективных технологий ФИЦ КазНЦ РАН,
г. Казань, Россия*

Добыча нефти в России недостаточно эффективна – коэффициент извлечения нефти составляет около 35%. Причем на большинстве месторождений нефть сильно обводнена. Это происходит потому, что нефть извлекается из пористого пласта с использованием воды, вязкость которой меньше, чем у нефти. Физически, этот процесс можно объяснить неустойчивостью Саффмана-Тейлора [1], согласно которой при вытеснении нефти водой граница раздела между ними деформируется, образуя складки. Эти складки неравномерно развиваясь, формируют вязкие «пальцы» воды в пласте. Когда эти «пальцы» достигают добывающих скважин, происходит прорыв, что приводит к увеличению обводненности добываемой нефти. При этом в пласте образуются области неподвижной нефти, окруженной водой, которые не участвуют в фильтрации. Нефтяники решают эту проблему, закачивая в пласт вместо воды различные гели и другие более вязкие жидкости. Однако, такой подход имеет экологические риски, связанные с возможным загрязнением подземных вод и окружающих территорий.

Среди других применяемых методов увеличения нефтеотдачи можно выделить воздействие на пласт упругими колебаниями [2,3]. Такое экологически безопасное акустическое воздействие на пласт не только интенсифицирует добычу нефти, но и снижает ее обводненность [4]. В качестве основных механизмов воздействия рассматриваются изменение под действием упругих колебаний реологических свойств пластовых флюидов и увеличение проницаемости пористой среды [5,6]. Положительные результаты такого воздействия, достигнутые в лабораторных условиях и на промысле, ставят вопрос о влиянии наложенных колебаний на процесс вытеснения вязкой жидкости и как колебания влияют на неустойчивость Саффмана-Тейлора. Для решения задачи в настоящей работе разработан экспериментальный стенд, позволяющий исследовать процесса вытеснения жидкости в радиальной ячейке Хеле-Шоу.

Ячейка Хеле-Шоу представляют собой две параллельные пластины с узким промежутком между ними, толщиной значительно меньшим, чем размер пластин. Такие ячейки используются при моделировании фильтрационных потоков в пористых средах. Процесс вытеснения вязкой жидкости менее вязкой из прямоугольной классической ячейки Хеле-Шоу был тщательно изучен численно и в лабораторных условиях [7]. В случае несмешивающихся жидкостей размер «пальцев» определяется силами поверхностного натяжения [8]. Капиллярное число $Ca = \mu U / \sigma$, где μ – коэффициент динамической вязкости,

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22-29-01174, <https://rscf.ru/project/22-29-01174/>.

U – средняя скорость, σ – коэффициент поверхностного натяжения, является критерием подобия при моделировании этого явления.

В настоящей работе круглая форма ячейки Хеле-Шоу с источником в центре была выбрана потому, что радиальная геометрия представляет большой интерес для приложений таких как течению нефти вблизи нагнетательных скважин [9,10]. При этом сравнение экспериментальных данных, полученных на разработанной установке при различных условиях, позволит судить о влиянии наложенных колебаний на явление неустойчивости Саффмана-Тейлора.

МЕТОДЫ И ОБЪЕКТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Радиальная ячейка Хеле-Шоу, использованная в экспериментах, состояла из двух стеклянных дисков толщиной 8 мм и диаметром 150 мм, расположенных на расстоянии $h=0,8$ мм друг от друга. В центре одного из дисков было просверлено отверстие, в которое вклеен штуцер внутренним диаметром $d=3$ мм, для впрыскивания жидкости. Схема экспериментальной установки представлена на рис.1. Панель подсветки 2 обеспечивала контрастность изображения ячейки. Видеозапись процесса вытеснения осуществлялась на смартфон с разрешением 1920×1080 точек и частотой 60 кадров в секунду. Заполнение ячейки маслом осуществлялось вручную шприцом 5, а вытеснение масла водой с помощью шприцевого насоса 3, управляемого контроллером 4. Объемный расход воды G варьировался в широком диапазоне и поддерживался с точностью 0,2%. Для осуществления акустического воздействия в будущих исследованиях предусмотрен электродинамический излучатель 8, который работает при подаче на него электрического сигнала с генератора 10 через усилитель 9.

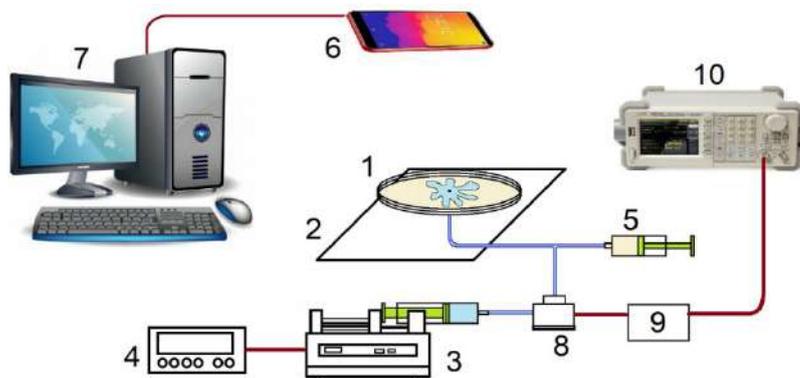


Рис.1. Схема экспериментальной установки. 1 – радиальная ячейка Хеле-Шоу, 2 – LED подсветка, 3 – шприцевой насос подачи воды, 4 – контроллер управления шприцевым насосом, 5 – шприц подачи масла, 6 – смартфон, 7 – компьютер, 8 – излучатель колебаний, 9 – звуковой усилитель мощности, 10 – генератор электрических колебаний.

В процессе вытеснения масла водой визуализируется граница раздела жидкостей, которая в зависимости от условий может быть в виде окружности, или в форме лепестков цветка. Записанный видеофайл просматривается на компьютере, а отдельные кадры извлекаются для анализа. Для систематизации данных для фиксированного времени t с начала вытеснения принята следующая

система обозначений (рис.2). Расстояние от центра ячейки до ее границы – R . Расстояние от центра ячейки до вершины максимального «пальца» – r_{max} . Минимальное расстояние от центра ячейки до границы раздела – r_{min} . Длина границы раздела жидкостей – L . Время достижения максимального «пальца» границы ячейки – T_k . Средний радиус границы раздела r_{mid} определяется через расход G по формуле

$$r_{mid} = \sqrt{\frac{Gt}{\pi h}}. \quad (1)$$

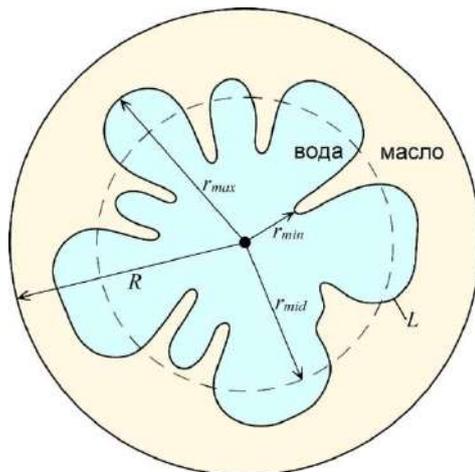


Рис.2. Обозначения границы раздела жидкостей.

В качестве коэффициента вытеснения может выступать параметр

$$K = \frac{GT_k}{\pi R^2 h}, \quad (2)$$

поскольку после того, как максимальный «палец» доходит до границы ячейки рост остальных практически останавливается.

Эксперименты проводились при комнатной температуре 24,5°C. В качестве исследуемых жидкостей были использованы дистиллированная вода и два вида моторного масла. Вязкость, по результатам измерения на вибрационном вискозиметре SV-10 при комнатной температуре, одного из них составляла 146,2 мПа·с, другого – 132,8 мПа·с. Коэффициент поверхностного натяжения, измеренные методом падающих капель, масел составил $33,42 \cdot 10^{-3}$ и $33,42 \cdot 10^{-3}$ Н/м соответственно. В качестве скорости, используемой при расчете капиллярного числа, принималась $U = 4G/(\pi d^2)$ – скорость подачи воды на входе в ячейку Хеле-Шоу.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

При заполнении ячейки маслом – вытеснении воздуха, граница раздела всегда была окружностью, что говорит о постоянстве толщины ячейки Хеле-Шоу. При последующем вытеснении масла водой граница раздела изменяется с образованием вязких «пальцев». На рис.3 представлены стоп-кадры процесса вытеснения с шагом $0,2T_k$, причем для каждого эксперимента T_k свой, зависящий от скорости вытеснения. Процесс образования вязких пальцев также сильно

зависит от скорости вытеснения. Если скорость вытеснения мала, то граница раздела жидкостей испытывает небольшие возмущения, которые в процессе вытеснения не вырождаются в вязкие «пальцы». При больших скоростях образуются выраженные «пальцы». Процесс их роста иногда сопровождается также явлением раздвоения кончика «пальца», если его ширина превышает некоторое критическое значение. Это явление также было описано в работе [9].

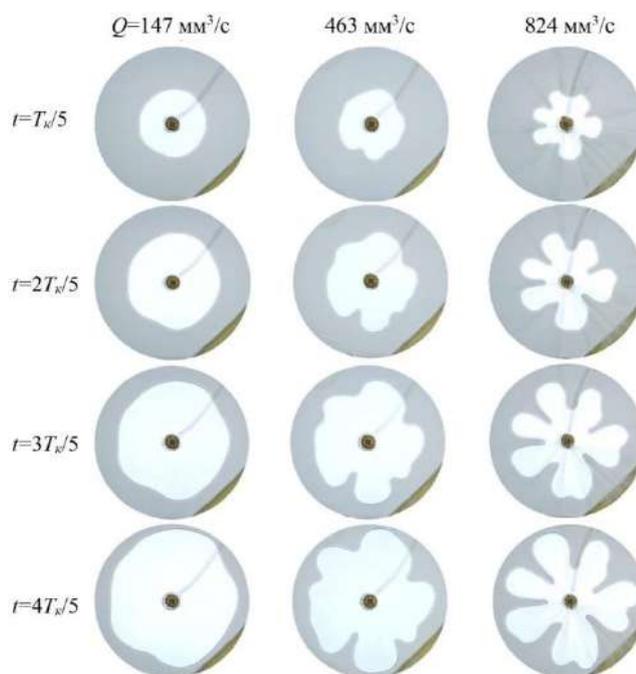


Рис.3. Сравнение границ раздела жидкостей в радиальной ячейке Хеле-Шоу для различных скоростей вытеснения и моментов времени.

Увеличение скорости подачи жидкости приводит к тому, что коэффициент вытеснения уменьшается (рис.4). Это обусловлено тем, что, когда длинные вязкие «пальцы» достигают границы ячейки, рост других останавливается и вытеснение прекращается – вода течет по образовавшемуся каналу. В будущих экспериментах с акустическим воздействием мы ожидаем снижение скорости роста вязких «пальцев» и увеличение коэффициент вытеснения.

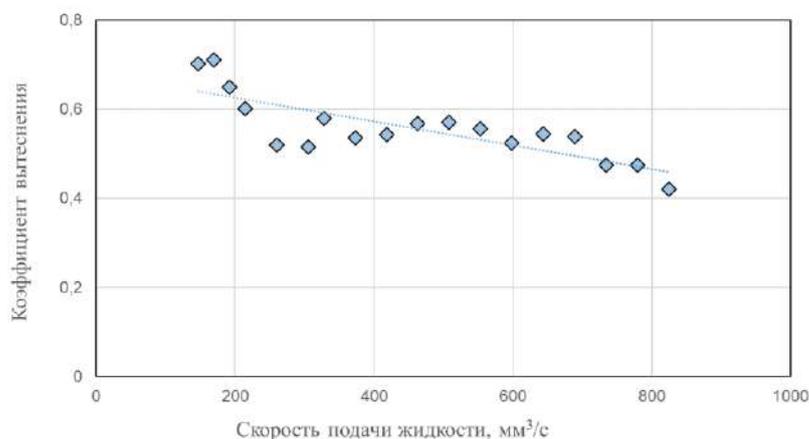


Рис.4. Зависимость коэффициента вытеснения масла из ячейки Хеле-Шоу от скорости подачи воды.

Анализ изменения во времени длины максимального вязкого «пальца» показал, что такая зависимость хорошо описывается полиномом третьей степени, коэффициенты которой определяются вязкостью жидкостями (рис.5). Большой рост «пальца» в середине ячейки наблюдается при вытеснении масла меньшей вязкостью.

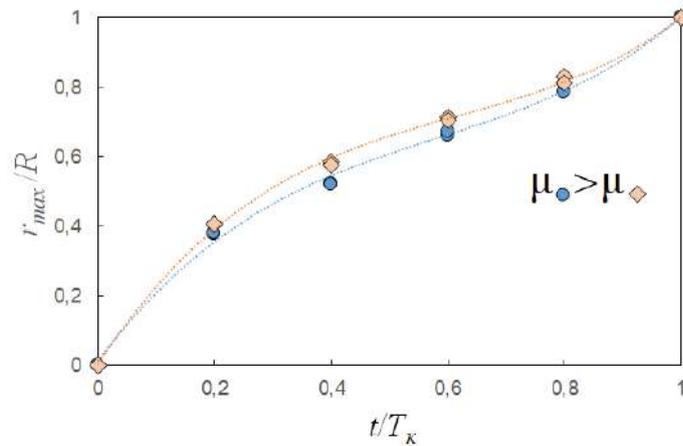


Рис.5. Зависимость длины максимального вязкого «пальца» от времени.

На рис.6 представлена зависимость относительной длины границы раздела жидкостей от капиллярного числа в момент времени $t = T_k$. Увеличение скорости вытеснения и соответственно капиллярного числа приводит к увеличению длины границы раздела жидкостей. Полученная зависимость имеет практическое значение для описания процессов на границе жидкостей, например, при использовании поверхностно активных веществ.

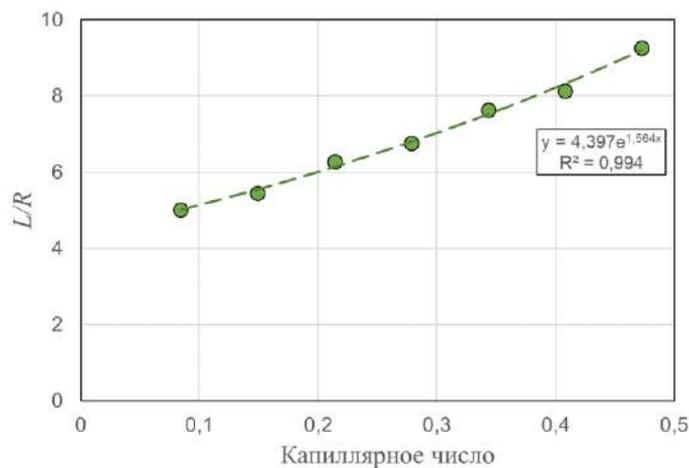


Рис.6. Зависимость относительной длины границы раздела жидкостей в ячейке Хеле-Шоу от капиллярного числа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана экспериментальная установка, позволяющая исследовать процесс вытеснения вязкой жидкости в радиальной ячейке Хеле-Шоу. Исследовано явление неустойчивости Саффмана-Тейлора при различных скоростях вытеснения. Обнаруженные особенности формирования вязких

«пальцев», подтверждаются результатами исследований другими авторами. Установлено, что с увеличением скорости подачи жидкости коэффициент вытеснения снижается. Выявлены зависимости изменения от времени длины вязкого «пальца». Установлено, что длина границы раздела жидкостей является степенной функцией капиллярного числа. Будущие эксперименты на разработанной установке позволят оценить эффективность акустического воздействия на процесс вытеснения. Полученные результаты позволяют совершенствовать режим работы скважин при разработке нефтяных месторождений с целью увеличения нефтеотдачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Saffman P.G., Taylor G.I. *The penetration of a fluid into a porous medium or Hele Shaw cell containing a more viscous liquid* // Proc. R. Soc. Lond. – 1958. – A 245. – Pp.312-329. DOI 10.1098/rspa.1958.0085.
2. Кузнецов О.Л., Дыбленко В.П., Чилингар Д.В. и др. *Колебания и волны во флюидонасыщенных геологических средах. Явления, процессы, закономерности. Волновая парадигма.* – Ижевск: Ижевский, 2021. – 420 с. ISBN 978-5-4344-0932-2. EDN NYBBZY.
3. Marfin E.A., Gataullin R.N., Abdrashitov A.A. *Acoustic stimulation of oil production by a downhole emitter based on a jet-driven Helmholtz oscillator* // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2022. – Vol.215. – 110705. DOI 10.1016/j.petrol.2022.110705. EDN DNSLEV.
4. Марфин Е.А., Кравцов Я.И., Абдрашитов А.А., Гатауллин Р.Н. *Промысловые испытания волнового воздействия на процесс добычи нефти на Первомайском месторождении* // Георесурсы. – 2014. – №2(57). – С.14-16. EDN SNHZEN.
5. Shiyi Lv et al. *Viscosity Reduction of Heavy Oil by Ultrasonic* // Petroleum Chemistry. – 2020. – Vol.60. – No.9. – Pp.998-1002.
6. Гатауллин Р.Н., Галимзянова А.Р., Марфин Е.А. *Влияние акустического воздействия на проницаемость пористых сред (обзор)* // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2022. – Т.333. – №10. – С.186-202. DOI 10.18799/24131830/2022/10/3750. EDN AFYWMX.
7. Marfin E.A., Garaeva S.V., Ermolaev D.V. *Numerical simulation of the Saffman-Taylor instability in the Hele-Shaw cell* // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – 032028. DOI 10.1088/1742-6596/1158/3/032028. EDN ZINWUX.
8. Hill S. *Channeling in packed columns* // Chem Eng Sci. – 1952. – Vol.1. – Pp.247-253.
9. Paterson L. *Radial fingering in a Hele-Shaw cell* // J Fluid Mech. – 1981. – Vol.113. – Pp.513-529.
10. Логвинов О.А. *Механизмы стабилизации вытеснения вязкой жидкости из кольцеобразной ячейки Хеле-Шоу с источником* // Вестник кибернетики. – 2016. – №2(22). – С.147-153. EDN YHEINX.



ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА-ПУАЗЕЙЛЯ В СЖИМАЕМОМ ГАЗЕ

Шалаев В.И., Калугин С.Т., Толоко Г.В., Токарев В.А.

Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Россия

Получены новые аналитические решения уравнений переноса импульса и тепла в плоскопараллельных течениях сжимаемого газа типа течения Куэтта-Пуазейля в канале с поперечным постоянным массопереносом. Представлены исследования зависимости профилей скорости и температуры от параметров.

Ключевые слова: плоскопараллельные течения сжимаемого газа; массо- и теплообмен; аналитические решения

ВВЕДЕНИЕ

Скользящие течения сжимаемого газа в плоских или цилиндрических каналах представляют значительный интерес в аэромеханике как тестовые задачи, например, для анализа развития возмущений и ламинарно-турбулентного перехода, так и в практических приложениях. Известно несколько работ, посвященное этой тематике, но все они касались только отдельных задач, типа течения Куэтта, на основе использования преобразования типа А.А. Дородницына [1-3]. В настоящей работе показано, что условием аналитического решения таких задач является наличие интеграла уравнения энергии, подобного интегралу Крокко для пограничного слоя, но для произвольного числа Прандтля. На этой основе получены аналитические решения для течений сжимаемого газа в плоском канале типа течения Куэтта-Пуазейля с поперечным постоянным массопереносом.

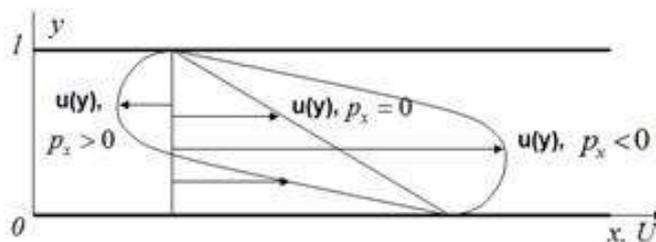


Рис.1. Схема плоскопараллельного течения газа в канале.

Рассматривается плоско-параллельное течение вязкого газа в канале шириной l под действием продольного движения нижней границы со скоростью U при наличии постоянного поперечного массопереноса через проницаемые стенки $\rho v = v_0 = const$ и продольного постоянного градиента давления $p_x = const$; скорость продольного движения газа $u(y)$ и энтальпия $h(y)$ зависят только от поперечной координаты y . Схема течения представлена на рис.1.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнения энергии и импульса для плоского течения представляются в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{d}{dy} \mu \frac{dh}{dy} + u p_x + \mu u_y^2 = v_0 \frac{dh}{dy}; \quad h(0) = h_0, \quad h(l) = h_1, \\ \frac{d}{dy} \mu \frac{du}{dy} = p_x + v_0 \frac{du}{dy}; \quad u(0) = U, \quad u(l) = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь Pr – число Прандтля, вязкость $\mu(h)$ определена для воздуха формулой Саттерленда [4]

$$\bar{\mu} = \frac{\mu(h)}{\mu_0} = \bar{h}^{\frac{3}{2}} \frac{1+h_s}{\bar{h}+h_s}, \quad h_s = \frac{110.4^\circ K}{T_0}, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_0}, \quad (1.2)$$

T_0 – температура нижней стенки, \bar{h} – безразмерная энтальпия (температура), отнесенная к своему значению на этой стенке.

Умножая уравнение импульса (1.1) на скорость и складывая результат с уравнением энергии, получим уравнение для аналога полной энтальпии H_0

$$\frac{d}{dy} \mu \frac{dH_0}{dy} = Pr v_0 \frac{dH_0}{dy} + (1-Pr) v_0 \frac{d}{dy} \left(\frac{u^2}{2} \right), \quad H_0 = \frac{h}{Pr} + \frac{u^2}{2}.$$

Уравнение импульса и преобразованное уравнение энергии интегрируются один раз и приобретают форму

$$\begin{aligned} \mu \frac{dH_0}{dy} = Pr v_0 H_0 + (1-Pr) v_0 \frac{u^2}{2} + C_1, \quad H_0(0) = \frac{h_0}{Pr} + \frac{U^2}{2}, \quad H_0(l) = \frac{h_1}{Pr}, \\ \mu \frac{du}{dy} = v_0 u + p_x y + A_1, \quad u(0) = U, \quad u(l) = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь A_1 и C_1 – постоянные интегрирования. Для нахождения полного решения уравнений (1.3) предположим, что H_0 есть функция скорости, $H_0 = H_0(u)$. В этом случае уравнение энергии (1.3) преобразуется так

$$(v_0 u + p_x y + A_1) \frac{dH_0}{du} = Pr v_0 H_0 + (1-Pr) v_0 \frac{u^2}{2} + C_1. \quad (1.4)$$

Рассмотрим возможные случаи существования интеграла этого уравнения.

2. ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА В ГАЗЕ

Эта задача соответствует условию $p_x = v_0 = 0$. Уравнение (1.4) имеет интеграл типа интеграла Крокко в пограничном слое, который представляется в виде

$$H_0(u) = \frac{h}{Pr} + \frac{u^2}{2} = C_1 u + D_1, \quad D_1 = \frac{h_1}{Pr}, \quad C_1 = \frac{h_0 - h_1}{Pr U} + \frac{U}{2}. \quad (2.1)$$

Преобразуем задачу к безразмерной форме в соответствии с соотношениями (1.2) и (2.1)

$$\begin{aligned} V = \frac{u}{U}, \quad Y = \frac{y}{l}, \quad \bar{h} = \beta(a + bV - V^2) = \beta R(V), \\ \beta = \frac{Pr U^2}{2h_0}, \quad a = \frac{2D_1}{U^2}, \quad b = \frac{2C_1}{U}, \quad H_s = \frac{h_s}{\beta}, \\ A = \frac{A_1 l}{\mu_0(1+h_s)U\sqrt{\beta}}, \quad m(V) = \frac{\bar{\mu}}{(1+h_s)\sqrt{\beta}} = \frac{R^{\frac{3}{2}}(V)}{R(V) + H_s}. \end{aligned}$$

В результате уравнение импульса (1.3) приводится к виду

$$m(V) \frac{dV}{dY} = A.$$

Оно интегрируется в следующей форме

$$f(V) = \int \frac{R^{3/2}(V) dV}{R(V) + H_s} = AY + B, \quad f(1) = B, \quad A = f(0) - f(1). \quad (2.2)$$

Для вычисления интеграла (2.2) используется представление

$$f(V) = \int \sqrt{R(V)} dV + H_s \int \frac{\sqrt{R(V)} dV}{-R(V) - H_s} = I_1(V) + H_s I_2(V).$$

Интеграл I_1 определяется функцией [5]

$$I_1(V) = \frac{(2V - b)\sqrt{R(V)}}{4} + \frac{\Delta}{8} \arcsin \frac{2V - b}{\sqrt{\Delta}}. \quad (2.3)$$

Второй интеграл преобразуется так

$$\begin{aligned} I_2(V) &= \int \frac{\sqrt{R(V)} dV}{V^2 - bV - a_1} = \int \frac{\sqrt{R(V)} dV}{(V - v_1)(V - v_2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_1}} \left[\int \frac{\sqrt{R(V)} dV}{V - v_1} - \int \frac{\sqrt{R(V)} dV}{V - v_2} \right] = \frac{I_{21} - I_{22}}{\sqrt{\Delta_1}}. \end{aligned}$$

Здесь v_1 и v_2 – корни уравнения

$$-R_1(v) - H_s = v^2 - bv - a_1 = 0, \quad a_1 = a + H_s; \quad v_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta_1}}{2}, \quad \Delta_1 = b^2 + 4a_1.$$

Интегралы I_{21} и I_{22} определяются соотношениями [5]

$$\begin{aligned} I_{21}(V) &= \sqrt{R(V)} + \sqrt{H_s} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_1} \left(V - \frac{b}{2} \right) - \frac{\Delta}{2}}{2\sqrt{H_s R(V)}} - \frac{\sqrt{\Delta_1}}{2} \arcsin \frac{2V - b}{\sqrt{\Delta}}, \\ \Delta &= b^2 + 4a, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$I_{22} = \sqrt{R(v)} - \sqrt{H_s} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_1} \left(V - \frac{b}{2} \right) + \frac{\Delta}{2}}{2\sqrt{H_s R(V)}} + \frac{\sqrt{\Delta_1}}{2} \arcsin \frac{2V - b}{\sqrt{\Delta}}.$$

В соответствии с этими выражениями решение уравнения импульса представляется так

$$\begin{aligned} &\frac{(2V - b)\sqrt{R(V)}}{4} + \left(\frac{\Delta}{8} - H_s \right) \arcsin \frac{2V - b}{\sqrt{\Delta}} + \\ &+ H_s \frac{\sqrt{H_s}}{\sqrt{\Delta_1}} \left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_1} \left(V - \frac{b}{2} \right) - \frac{\Delta}{2}}{2\sqrt{H_s R(V)}} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_1} \left(V - \frac{b}{2} \right) + \frac{\Delta}{2}}{2\sqrt{H_s R(V)}} \right] = AY + B. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Это решение совпадает с полученным ранее другим методом [1-3]. На рис.2а,б приведены распределения безразмерных скорости и температуры в канале при изменении параметра $p_0 = 1/(2\beta)$ при $Pr = 0,72$.

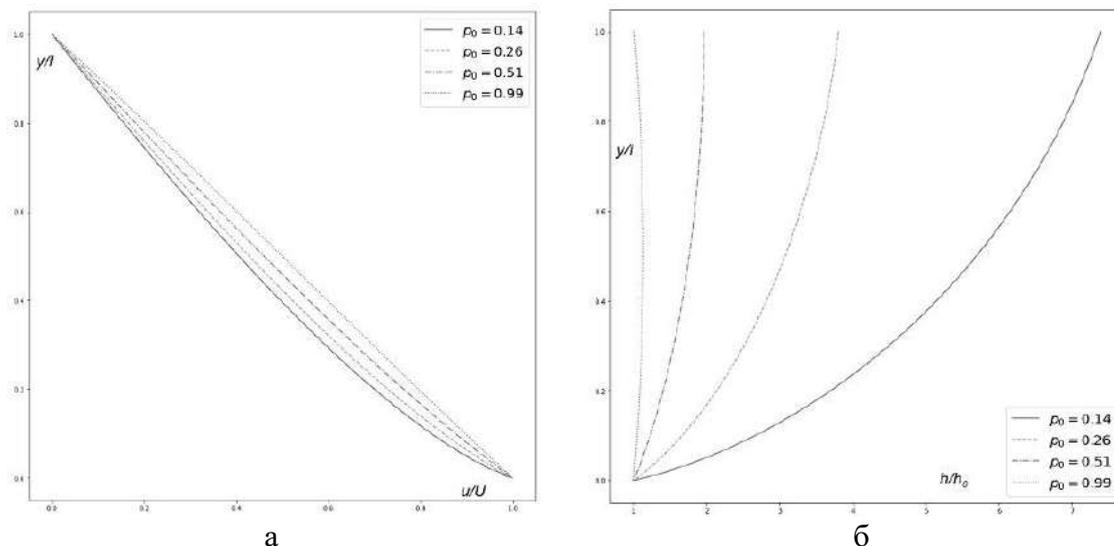


Рис.2. Распределения безразмерных скорости и температуры в течении Куэтта: а) распределения скорости; б) распределения температуры.

3. ПЛОСКОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА-ПУАЗЕЙЛЯ В ГАЗЕ С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОЙ НЕПОДВИЖНОЙ СТЕНКОЙ

Эта задача соответствует наличию постоянного градиента давления. Ранее в литературе она не рассматривалась. В этом случае уравнение (1.4) для полной энтальпии приводится к виду

$$(p_x y + A_1) \frac{dH_0}{du} = C_1. \quad (3.1)$$

Уравнение интегрируется только в случае, если $C_1 = 0$, что соответствует, согласно соотношению (4.1), обращению в ноль на неподвижной границе $y = l$ производной от энтальпии, т.е. ее теплоизолированности

$$\mu \left. \frac{dH}{dy} \right|_{y=l} = \mu \left(\frac{dh}{dy} + u \frac{du}{dy} \right)_{y=l} = \mu_1 \left. \frac{dh}{dy} \right|_{y=l} = C = 0.$$

Следовательно, $b = 0$, а энтальпия, ее значение на неподвижной стенке и функция $R(V)$ выражаются формулами

$$\begin{aligned} h(u) &= Pr \left(D_1 - \frac{u^2}{2} \right) = h_0 + \frac{Pr(U^2 - u^2)}{2}, \\ h(u) &= Pr \left(D_1 - \frac{u^2}{2} \right) = h_0 + \frac{Pr(U^2 - u^2)}{2}, \\ h_1 &= h_0 + \frac{PrU^2}{2}, \quad R(V) = a - V^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Уравнение импульса (1.3) для этой задачи в безразмерных переменных имеет вид

$$m(V) \frac{dV}{dY} = PY + A, \quad V(0) = U, \quad V(1) = 0, \quad P = \frac{p_x l^2}{\mu_0 U (1 + h_s) \sqrt{\beta}}.$$

Интеграл

$$f(V) = I_1(V) + H_s I_2(V) = \frac{1}{2} P Y^2 + A Y + B.$$

В этом случае

$$I_1(V) = \frac{V\sqrt{a-V^2}}{2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{V}{\sqrt{a}},$$

$$I_2(V) = \frac{I_{21} - I_{22}}{\sqrt{\Delta_1}} = \frac{\sqrt{H_s}}{2\sqrt{a_1}} \left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a_1}V - a}{\sqrt{H_s(a-V^2)}} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a_1}V + a}{\sqrt{H_s(a-V^2)}} + \right. \\ \left. - \arcsin \frac{V}{\sqrt{a}}, \right.$$

$$f(V) = \frac{V\sqrt{a-V^2}}{2} + \left(\frac{a}{2} - H_s \right) \arcsin \frac{V}{\sqrt{a}} + \\ + \frac{H_s^{3/2}}{2\sqrt{a_1}} \left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a_1}V - a}{\sqrt{H_s(a-V^2)}} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a_1}V + a}{\sqrt{H_s(a-V^2)}} \right].$$

Постоянные A и B определяются формулами

$$A = f(0) - f(1) - \frac{1}{2} P, \quad B = f(1).$$

Распределения скорости и температуры в течении Куэтта-Пуазейля при различных значениях параметра P приведены на рис.3а,б.

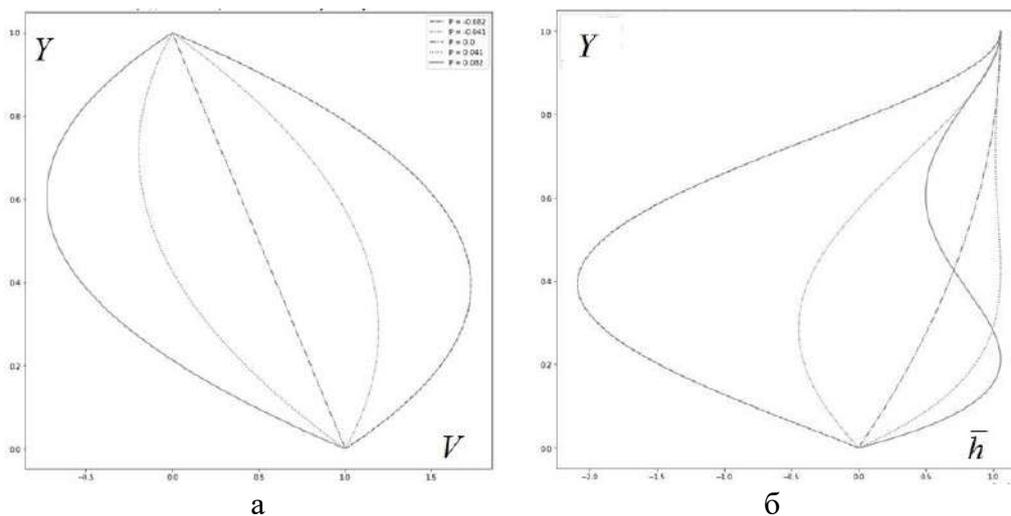


Рис.3. Распределения безразмерных скорости и температуры в течении Куэтта-Пуазейля с теплоизолированной неподвижной стенкой: а) распределения скорости; б) распределения температуры.

4. ПЛОСКОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА В ГАЗЕ С ПОПЕРЕЧНЫМ ПОСТОЯННЫМ МАССОПЕРЕНОСОМ

Для течения Куэтта в газе актуальной также является задача с поперечным постоянным массопереносом через проницаемые стенки. Для нее аналитического решения ранее получено не было. В этом случае $v_0 = const$, $p_x = 0$, и уравнение (1.4) для полной энтальпии приобретает форму

$$(v_0 u + A_1) \frac{dH_0}{du} = Pr v_0 H_0 + (1 - Pr) v_0 \frac{u^2}{2} + C_1. \quad (4.1)$$

Его интеграл

$$\frac{h}{Pr} = -\frac{1}{2} \left[\frac{(u + A_2)^2}{2 - Pr} + \frac{A_2^2 + 2C_2}{Pr} \right] + D(u + A_2)^{Pr}, \quad A_2 = \frac{A_1}{v_0}, \quad C_2 = \frac{C_1}{v_0} \quad ? A_1 = \frac{A_1}{v_0}$$

$$\frac{C_2}{Pr} = -\frac{A_2^2}{Pr(2 - Pr)} - \frac{h_1}{Pr} + \frac{A_2^{Pr}}{(U + A_2)^{Pr} - A_2^{Pr}} \left[\frac{h_0 - h_1}{Pr} + \frac{(U + A_2)^2 - A_2^2}{2(2 - Pr)} \right],$$

$$D = \left[\frac{h_0 - h_1}{Pr} + \frac{(U + A_2)^2 - A_2^2}{2(2 - Pr)} \right] \left[(U + A_2)^{Pr} - A_2^{Pr} \right]^{-1}.$$

Как видно, в этом случае решение уравнения энергии в явном виде зависит от постоянной интегрирования уравнения импульса, которая может быть определена только в процессе решения последнего.

В безразмерных переменных интегралы уравнений энергии и импульса имеют вид

$$\bar{h} = \beta \left[a + bs^{Pr} + cs^2 \right] = \beta R(s), \quad s = V + A, \quad A = \frac{A_1}{v_0 U}, \quad \bar{C} = \frac{2C_1}{U^2},$$

$$a = -\frac{A^2}{2 - Pr} - \frac{2\bar{h}_1}{\beta} + \frac{2A^{Pr}}{(1 + A)^{Pr} - A^{Pr}} \left[\frac{2(1 - \bar{h}_1)}{\beta} + \frac{1 + 2A}{2(2 - Pr)} \right],$$

$$c = -\frac{1}{2 - Pr}, \quad b = \left(\frac{1 - \bar{h}_1}{\beta} + \frac{1 + 2A}{2 - Pr} \right) \left[(1 + A)^{Pr} - A^{Pr} \right]^{-1}$$

При $Pr = 2$, $\beta = U^2/h_0$ решение является сингулярным и имеет следующий вид

$$R(s) = \beta \left(a + bs^2 - s^2 \ln s \right),$$

$$a = \frac{2\bar{h}_1(1 + A) - 1}{\beta(1 + 2A)}, \quad b = \frac{1 - \bar{h}_1}{\beta(1 + 2A)} + \frac{(1 + A)^2 \ln(1 + A) - A^2 \ln A}{(1 + 2A)}.$$

Для течения с поперечным массопереносом уравнение импульса (1.3) сводится к следующему

$$\frac{R^{3/2}(s)}{R(s) + H_s} \frac{ds}{dY} = \alpha s, \quad s(0) = 1 + A, \quad s(1) = A, \quad \alpha = \frac{v_0 l}{\mu_0 (1 + \bar{h}_s) \sqrt{\beta}}.$$

Здесь параметр α есть аналог числа Рейнольдса для поперечного течения. Решение уравнения импульса имеет интегральное представление

$$f(s) = \int \frac{R^{3/2}(s) ds}{(R(s) + H_s)s} = \alpha Y + B. \quad (4.2)$$

При произвольном числе Прандтля этот интеграл не имеет явной аналитической формы и должен вычисляться численно. Постоянные A и B находятся в процессе численного решения на основе краевых условий

$$f(1+A) = B, \quad f(A) - f(1+A) = \alpha.$$

Исключение составляет случай $\text{Pr} = 1$, когда подынтегральная функция принимает вид, подобный случаю обычного течения Куэтта

$$R(s) = a + bs + cs^2, \quad a = \frac{(\bar{h}_1 - \beta A)(1+A) - A}{\beta},$$

$$b = \frac{1 - \bar{h}_1}{\beta} + 1 + 2A, \quad c = -1, \quad \beta = \frac{U^2}{2h_0}$$

Решение уравнения импульса в этом случае имеет следующий вид

$$f(s) = \sqrt{R(s)} + \frac{b}{2} \arcsin \frac{2s-b}{2\sqrt{-\Delta}} - \sqrt{-a} \left(1 + \frac{H_s}{a_1}\right) \operatorname{arctg} \frac{2a+bs}{2\sqrt{-aR(s)}} +$$

$$+ \frac{bH_s\sqrt{H_s}}{a_1\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_1} \left(s - \frac{b}{2}\right) - \Delta}{\sqrt{H_s R(s)}}, \quad a < 0. \quad (4.3)$$

Краевые условия определяют следующие нелинейные уравнения для постоянных A и B

$$B = \sqrt{R(1+A)} + \frac{b}{2} \arcsin \frac{2(1+A)-b}{2\sqrt{-\Delta}} - \sqrt{-a} \left(1 + \frac{H_s}{a_1}\right) \operatorname{arctg} \frac{2a+b(1+A)}{2\sqrt{-aR(1+A)}} +$$

$$+ \frac{bH_s\sqrt{H_s}}{a_1\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_1} \left(1+A - \frac{b}{2}\right) - \Delta}{\sqrt{H_s R(1+A)}},$$

$$\alpha + B = \sqrt{R(A)} + \frac{b}{2} \arcsin \frac{2A-b}{2\sqrt{-\Delta}} - \sqrt{-a} \left(1 + \frac{H_s}{a_1}\right) \operatorname{arctg} \frac{2a+bA}{2\sqrt{-aR(A)}} +$$

$$+ \frac{bH_s\sqrt{H_s}}{a_1\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_1} \left(A - \frac{b}{2}\right) - \Delta}{\sqrt{H_s R(A)}}.$$

На основе решения этих уравнений на рис.4 получены распределения скорости (рис.4а) и температуры (рис.4б) при $\text{Pr} = 0,72 - \beta = 2,95 \cdot 10^{-4}$ и разных значениях параметра α .

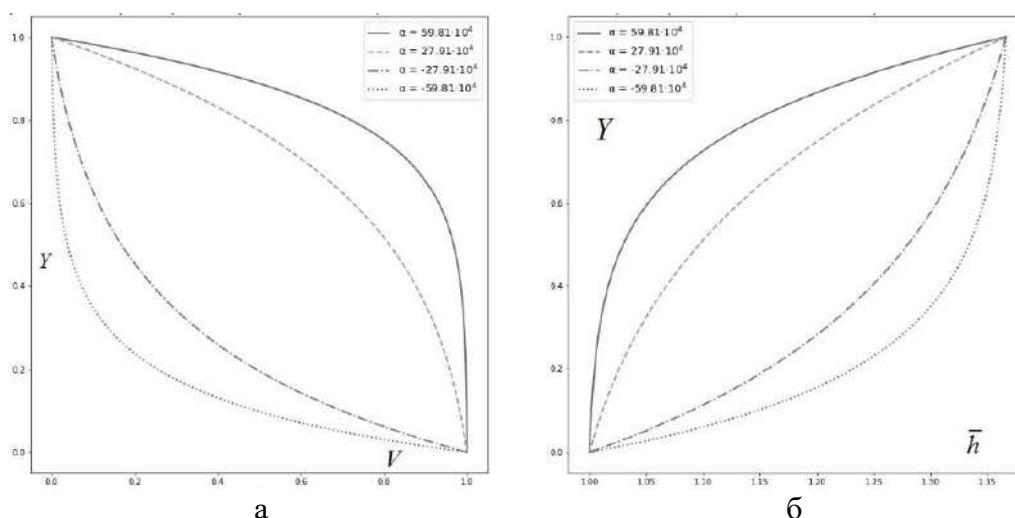


Рис.4. Распределения безразмерных скорости и температуры в течении Куэтта с поперечным массопереносом: а) распределения скорости; б) распределения температуры.

ВЫВОДЫ

В настоящей работе представлены исследования массо- и теплопереноса для плоскопараллельных (скользящих) течений вязкого газа в канале.

Задача сведена к решению уравнения для энтальпии, как функции продольной скорости, и нелинейного уравнения импульса, в котором вязкость также зависит от скорости. Получены аналитические решения уравнений энергии и импульса для аналогов течений Куэтта и Куэтта-Пуазейля с теплоизолированной неподвижной стенкой и Куэтта с поперечным массопереносом при $Pr = 1$. При произвольном числе Прандтля последняя задача энтальпия имеет аналитическое решение от скорости, уравнение импульса допускает только численное интегрирование уравнения импульса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гродзовский Г.Л. *Течение вязкого газа между двумя движущимися параллельными стенками и между двумя вращающимися цилиндрами* // ПММ. – 1955. – Т.19. – С.99-102.
2. Жмулин Е.М. *Течение вязкого газа между двумя движущимися параллельными пластинами* // Ученые записки ЦАГИ. – 1971. – Т.П. – №4. – С.31-37.
3. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. *О сжимаемом течении Куэтта* // Ученые записки ЦАГИ. – 2018. – Т.49. – №1. – С.27-38.
4. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. – М.: Дрофа, 2003. – 846 с.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. – М.: Физматгиз, 1963. – 1108 с.

Вычислительные методы механики гетерогенных сред



НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К РАЗРАБОТКЕ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ВЫСОКОДЕТАЛИЗИРОВАННОГО КИНЕТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССОВ В ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМАХ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ИМИ В ТЕХНОЛОГИЯХ С ЦЕЛЬЮ СОЗДАНИЯ МАТЕРИАЛОВ НОВОГО ПОКОЛЕНИЯ ПРИ МИНИМАЛЬНЫХ ЭНЕРГОЗАТРАТАХ

Аджиев С.З.¹, Мелихов И.В.¹, Веденяпин В.В.², Гопин А.В.¹, Батищева Я.Г.²

¹МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

²Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются законы сохранения, дискретизации и Н-теорема для уравнений физико-химической кинетики и их обобщений, описывающих гетерогенные среды. Актуальным является построение физически обоснованных математических моделей различных процессов. Модель должна наследовать свойства исходного описания. Для уравнений типа физико-химической кинетики необходимым условием этого является и требование свойства точной консервативности, т.е. чтобы в модели присутствовали те и только те законы сохранения, которые есть в исходном описании, и выполнение Н-теоремы, которую впервые рассмотрел Больцман в 1872 году.

В настоящее время многопараметрическое описание частиц стало доступным для экспериментального наблюдения. С другой стороны, актуальной является проблема, сформулированная в названии настоящей работы, причём минимальные энергозатраты, подразумевают, в частности, и оптимальные вычислительные затраты. Когда рассматривается детализированное описание дисперсного вещества, первые (или основные) параметры, которые надо учитывать, это состав частицы и её масса или число молекул её составляющих. Следующий параметр, который надо рассматривать, это форма частицы.

Рассмотрим уравнения физико-химической кинетики, их обобщения и дискретизации, законы сохранения и Н-теорему для них. Обсудим выполнение Н-теоремы не только для неявной дискретизации по времени этих уравнений, но и для явной. Исследуем кинетические уравнения эволюции частиц, распределённых по массе и форме, как этого требует высокодетализированное описание. Такие уравнения описывают дисперсные гетерогенные среды.

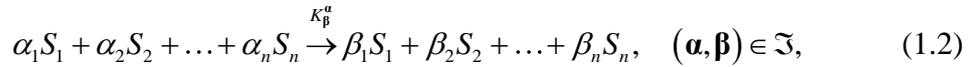
Кроме того, для полноты картины рассмотрим новую форму Н-теоремы, которая возникает в работах А. Пуанкаре, В.В. Козлова и Д.В. Трещёва, для уравнения Лиувилля, для которого, как известно, энтропия сохраняется, но энтропия временного среднего или среднего по Чезаро, т.е. предела среднего по времени при времени, стремящемся к бесконечности, может возрастать. Продолжая линию работ Марка Каца и В.В. Козлова, мы исследуем Н-теорему для уравнения Лиувилля для круговой модели М. Каца. Мы изучили пространство линейных по функции распределения инвариантов для уравнения Лиувилля

для модели М. Каца. Как мы неоднократно увидим далее, именно линейные законы сохранения играют ключевую роль при рассмотрении H -теоремы.

В общей форме уравнения для физико-химических кинетических процессов записываются в виде (например, см. [1])

$$\frac{df_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathfrak{Z}} (\beta_i - \alpha_i) (K_{\beta}^{\alpha} \mathbf{f}^{\alpha} - K_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f}^{\beta}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1)$$

Здесь $f_i(t)$ – концентрация i -го вещества в момент времени t , $\mathbf{f}^{\alpha} = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_n^{\alpha_n}$. Суммирование ведётся по некоторому множеству \mathfrak{Z} пар мультииндексов (α, β) , где α и β – векторы с целочисленными неотрицательными компонентами. Пара (α, β) соответствует реакции



где S_i – символы реагирующих веществ, K_{β}^{α} – константы реакций. Коэффициенты α_i , β_i называются стехиометрическими коэффициентами.

H -теорема – это просто: это доказательство невозрастания некоторого функционала H на решениях системы уравнений. Для уравнений физико-химической кинетики при определённых условиях в качестве H -функции

выступает H -функция: $H(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^n f_i \left(\ln \frac{f_i}{\xi_i} - 1 \right)$. Здесь ξ_i определяют некоторое

стационарное решение с положительными компонентами системы уравнений физико-химической кинетики. Если H -функцию (1.3) взять со знаком минус, то она называется информационной энтропией Кульбака–Лейблера или относительной энтропией.

Пусть множество \mathfrak{Z} состоит только из векторов, у которых одна из компонент равна единице, а остальные – нули. Тогда система (1.1) является линейной. Линейная система уравнений физико-химической кинетики – это уравнение марковского процесса

$$\frac{df_i}{dt} = \sum_{j=1}^n (K_{e_i}^{e_j} f_j - K_{e_j}^{e_i} f_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.3)$$

где при $j \neq i$ константы реакций неотрицательны, более того, в первой части настоящей статьи они положительны, и, без ограничения общности, при $j = i$ они

равны нулю. Запишем эту систему в виде: $\frac{df_i}{dt} = \sum_{j=1}^n A_i^j f_j$, $i = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрим

дискретизацию по времени для этой системы с шагом по времени τ , заменив производные $\frac{df_i}{dt}$ их разностными аналогами $\frac{f_i(t+\tau) - f_i(t)}{\tau}$. Если в правой части взять момент времени t , т.е. рассмотреть явную дискретизацию по времени, то сразу получим марковскую цепь

$$f_i(t+\tau) = \sum_{j=1}^n B_i^j f_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.4)$$

Матрица называется стохастической, если её элементы положительны, а сумма элементов каждого столбца равна единице. В этом случае система (1.4)

сохраняет положительность, т.е. переводит положительный конус в \mathbb{R}^n в себя, и выполняется закон сохранения числа всех частиц.

Перейдём к результатам.

2. ОБ H -ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЙ ПО ВРЕМЕНИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

В [2] мы доказываем, что H -теорема для уравнений физико-химической кинетики в случае явной дискретизации по времени неверна даже для единственной реакции. Рассмотрим реакцию $2S_1 \rightarrow S_2$, которая описывает образование димера из двух мономеров, и обратную к ней. Система уравнений физико-химической кинетики для этой реакции в случае симметричных констант реакций: $K_{(0,1)}^{(2,0)} = K_{(2,0)}^{(0,1)} = \sigma$, и явной дискретизацией по времени, имеет вид

$$\begin{cases} f_1(t+\tau) = f_1(t) + 2\tau\sigma(f_2(t) - f_1^2(t)), \\ f_2(t+\tau) = f_2(t) + \tau\sigma(f_1^2(t) - f_2(t)). \end{cases} \quad (2.1)$$

Мы доказываем, что «минус» энтропия Кульбака–Лейблера может возрастать на решениях этой системы.

Рассмотрим случаи, когда доказательство H -теоремы для явной дискретизации по времени уравнений физико-химической кинетики аналогично её доказательству для марковских цепей.

Пусть мы записали систему уравнений физико-химической кинетики в виде нелинейного аналога марковского процесса

$$\frac{df_i}{dt} = \sum_{j=1}^n A_i^j(\mathbf{f}(t)) f_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

где матрица A теперь зависит от $\mathbf{f}(t)$ (на неё здесь пока не накладываются какие-либо ограничения). Тогда при явной дискретизации по времени системы уравнений (2.2) мы получаем нелинейный аналог марковской цепи (1.4)

$$f_i(t+\tau) = \sum_{j=1}^n B_i^j(\mathbf{f}(t)) f_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.3)$$

$$\text{где } B(\mathbf{f}(t)) = E + \tau A(\mathbf{f}(t)),$$

где E – единичная матрица размера $n \times n$.

Рассмотрим H -функции такие же, как и для марковских процессов и цепей

$$H = \sum_{i=1}^n \xi_i \psi(f_i/\xi_i), \quad (2.4)$$

где $\psi(x)$ – произвольная строго выпуклая функция. H -функции (2.4) называются функциями Моримото. Справедлива следующая

Теорема 2.1. Пусть в (2.3) матрица $B(\mathbf{f}(t))$ стохастическая: $B_i^j(\mathbf{f}(t)) > 0$,

$\sum_{i=1}^n B_i^j(\mathbf{f}(t)) = 1$, и существует вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ с положительными

компонентами такой, что $\sum_{j=1}^n B_i^j(\mathbf{f}(t)) \xi_j = \xi_i$. Это довольно сильные

ограничения, поскольку матрица B теперь зависит от f . Тогда справедливы следующие утверждения.

а) Функции Моримото не возрастают на решениях системы уравнений (2.3): $\Delta H \leq 0$, причём равенство сохраняется только в стационарных точках (как и для марковских цепей). Все стационарные решения пропорциональны вектору ξ : $\mathbf{f}_0 = \lambda \xi$.

б) Система (2.3) имеет единственный (с точностью до постоянного множителя) закон сохранения вида $\sum_{i=1}^n \mu_i f_i$, т.е. единственный линейный по f_i инвариант, который является законом сохранения числа всех частиц: $\sum_{i=1}^n f_i(t) = A = \text{const}$. Стационарное решение системы (2.3) существует, единственно, имеет положительные компоненты, если постоянная линейного закона сохранения: A , определяется по начальному условию $\mathbf{f}(0)$

с положительными компонентами: $A = \sum_{i=1}^n f_i(0)$, и находится как экстремаль

Больцмана [1], которая определяется как аргумент условного минимума H -функции при условии, что постоянная линейного закона сохранения фиксирована, в данном случае, по начальным данным, и стационарное решение даётся выписанной формулой

$$\mathbf{f}_0 = \left(A / \sum_{i=1}^n \xi_i \right) \xi; \quad (2.5)$$

в) Решение $f(t)$ с этим начальным условием существует при всех $t = 0, \tau, 2\tau, \dots$ единственно и стремится к стационарному решению (2.5).

Доказательство см. в [2].

Теперь рассмотрим обобщения уравнений физико-химической кинетики и докажем H -теорему для неявной дискретизации этих уравнений.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{df_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathfrak{Z}} (\beta_i - \alpha_i) \sigma_{\beta}^{\alpha}(\mathbf{f}) \left(K_{\beta}^{\alpha} e^{(\alpha, \nabla G(\mathbf{f}))} - K_{\alpha}^{\beta} e^{(\beta, \nabla G(\mathbf{f}))} \right), \quad (2.6)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

где $\sigma_{\beta}^{\alpha}(\mathbf{f}), G(\mathbf{f})$ – заданные функции от $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. Пусть $\sigma_{\beta}^{\alpha}(\mathbf{f}) = \sigma_{\alpha}^{\beta}(\mathbf{f}) > 0$; $K_{\beta}^{\alpha} \geq 0$, причём $K_{\beta}^{\alpha} \neq 0$ или $K_{\alpha}^{\beta} \neq 0$ для $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{Z}$. H -теорема для (2.6) рассматривалась С.А. Пироговым, Я.Г. Батищевой, Ю.Н. Орловым и в [1]. Если в (2.6) $\sigma_{\beta}^{\alpha}(\mathbf{f}) = 1$, $\frac{\partial G(\mathbf{f})}{\partial f_i} = \ln f_i$, то мы получаем систему уравнений физико-химической кинетики (1.1).

Рассмотрим дискретизацию по времени: $t = 0, \tau, 2\tau, 3\tau, \dots$, где $\tau > 0$, для системы (2.6), в правых частях этих систем беря момент времени $t + \tau$. Т.е. рассмотрев неявную разностную схему для (2.6), получим

$$f_i(t+\tau) = f_i(t) + \tau \frac{1}{2} \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathfrak{Z}} (\beta_i - \alpha_i) \sigma_{\beta}^{\alpha}(\mathbf{f}(t+\tau)) \left(K_{\beta}^{\alpha} e^{(\alpha, \nabla G(\mathbf{f}(t+\tau)))} - K_{\alpha}^{\beta} e^{(\beta, \nabla G(\mathbf{f}(t+\tau)))} \right) \quad (2.7)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Именно для неявных разностных схем для обобщений уравнений физико-химической кинетики (2.6) удаётся доказать H -теорему при тех же условиях, что и в случае непрерывного времени.

Пусть система (2.7) решается с начальными данными $\mathbf{f}(0) \in M \subseteq \mathbb{R}^n$, где M – выпуклая область. Ограничения на множества M см. в [3]. В случае системы уравнений физико-химической кинетики M есть положительный конус в \mathbb{R}^n .

Обобщенное условие детального равновесия (баланса) [1,3] для случая систем (2.6) и (2.7). Пусть существует вектор $\xi \in M$ такой, что и для всех реакций $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{Z}$ выполняется условие $K_{\beta}^{\alpha} e^{(\alpha, \nabla G(\xi))} = K_{\alpha}^{\beta} e^{(\beta, \nabla G(\xi))}$, т.е. скорость прямого процесса равна скорости обратного для каждого из процессов $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{Z}$.

Пусть $G(\mathbf{f})$ является дифференцируемой строго выпуклой функцией. Тогда мы доказываем [6], что $\Delta H \leq 0$, если она определяется соотношением: $\nabla H(\mathbf{f}) = \nabla G(\mathbf{f}) - \nabla G(\xi)$. Пусть если M неограниченно, то $\lim_{\substack{|\mathbf{f}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{f} \in M}} H(\mathbf{f}) = +\infty$.

Тогда при выполнении обобщенного детального баланса справедлива H -теорема с формулировкой аналогичной предыдущей теореме, которая детально рассмотрена в [3].

Отметим только, что система (2.7) имеет $n-r$ линейно независимых линейных законов сохранения, т.е. вида $\sum_{i=1}^n \mu_i^k f_i$, $k = 1, \dots, n-r$ (вектора

$\boldsymbol{\mu}^k \equiv (\mu_1^k, \mu_2^k, \dots, \mu_n^k)$ линейно независимы): $\sum_{i=1}^n \mu_i^k f_i(t) = A^k = const$ на решениях

системы (2.7), где r – размерность линейной оболочки векторов $\alpha - \beta$ (вектора Больцмана–Орлова–Мозера–Брюно). Именно линейными инвариантами определяется являющаяся стационарным решением экстремаль Больцмана, т.е. аргумент условного минимума H -функции при условии, что постоянные линейных инвариантов фиксированы. А размерность пространства стационарных решений совпадает с размерностью пространства линейных законов сохранения.

Если $\sigma_{\beta}^{\alpha}(\mathbf{f}) = 1$, то можно рассмотреть H -теорему с обобщённым условием динамического равновесия или обобщённым условием Штюкельберга–Батищевой–Пирогова [1,3].

3. H-ТЕОРЕМА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ БЕККЕРА–ДЁРИНГА И С ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ ПО ВРЕМЕНИ, И ДЛЯ ЕЁ КОНТИНУАЛЬНОГО АНАЛОГА – УРАВНЕНИЯ ТИПА ФОККЕРА–ПЛАНКА ИЛИ ТИПА ЭЙНШТЕЙНА–КОЛМОГОРОВА (ИЛИ ДИФFUЗНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ)

Рассматривается пар или раствор, в котором зарождаются и растут частицы (кластеры) вещества A . Случай Беккера–Дёринга означает, что присоединяться и отпадать от частицы фазообразующего вещества может только отдельная молекула, т.е. пренебрегается агрегированием частиц. Причём масштаб исходных частиц может быть любым: требуется только, чтобы они были одинаковыми. Пусть $N_n(t) \geq 0$, $n=1, 2, \dots$, обозначают число (или концентрацию) частиц, состоящих из n молекул вещества A , в момент времени t . Беккер и Дёринг выписали бесконечную систему, но в реальной физической задаче числа n всегда ограничены сверху

$$\frac{dN_1}{dt} = -2(\alpha_1 N_1^2 - \beta_2 N_2) - \sum_{i=2}^{n_M} (\alpha_i N_1 N_i - \beta_{i+1} N_{i+1}), \quad (3.1)$$

$$\frac{dN_n}{dt} = (\alpha_{n-1} N_1 N_{n-1} - \beta_n N_n) - (\alpha_n N_1 N_n - \beta_{n+1} N_{n+1}), \quad 2 \leq n \leq n_M - 1, \quad (3.2)$$

$$\frac{dN_{n_M}}{dt} = (\alpha_{n_M-1} N_1 N_{n_M-1} - \beta_{n_M} N_{n_M}).$$

где $\alpha_n > 0$ – частотная функция (или сечение) объединения отдельной молекулы с кластером, состоящим из n молекул, а $\beta_n > 0$ – частота распада такого кластера на отдельную молекулу и кластер, состоящий из $(n-1)$ -й молекулы.

Вместо уравнения (3.1) часто пишут закон сохранения числа всех молекул вещества A в системе, которое обозначено через N_A : $\sum_{n=1}^{n_M} n N_n(t) = N_A = const$,

и из него находят N_1 – число отдельных молекул фазообразующего вещества.

Система (3.1)-(3.2) рассматривается в пространственно-однородном случае, который является ключевым (особенно при рассмотрении вопроса об H -теореме) как очень важный частный случай неоднородного.

Пусть частотные функции α_n и β_n не обращаются в ноль и не зависят от времени. В этом случае для системы уравнений Беккера–Дёринга всегда выполняется условие детального баланса, а значит, справедлива H -теорема.

Континуальный аналог (3.2) имеет вид

$$\frac{\partial f(n,t)}{\partial t} = \alpha(n-1) N_1(t) f(n-1,t) - (\alpha(n) N_1(t) + \beta(n)) f(n,t) + \beta(n+1) f(n+1,t).$$

Разложив приращения функций в правой части в ряды Тейлора, и ограничиваясь двумя членами разложения, получаем уравнение типа Фоккера–Планка

$$\frac{\partial f}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial n} [(\beta - \alpha N_1) f] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial n^2} [(\beta + \alpha N_1) f], \quad (3.3)$$

где $f = f(n,t)$, $N_1 = N_1(t)$.

Уравнение (3.3) решается на некотором отрезке $n \in [n_0, n_L]$, где $n_L \leq n_M - 1$. Для малых и больших значений n используется дискретное описание: для n меньших, чем $n_0 \geq 2$, а также для n больших, чем n_L («Large»), и меньших, чем n_M («Maximum»), мы используем дискретные уравнения.

Закон сохранения числа всех молекул переписывается в виде

$$N_1(t) = N_A - \sum_{n=2}^{n_0-1} nN_n(t) - \int_{n_0}^{n_L} nfdn - \sum_{n=n_L+1}^{n_M} nN_n(t). \quad (3.4)$$

Мы рассмотрели два важных частных случая [4]:

- 1) линейный, когда $N_1(t) = const$ (в этом случае N_A зависит от времени: есть источник отдельных молекул, который поддерживает постоянство их числа);
- 2) нелинейный случай, когда число молекул фазообразующего вещества в системе постоянно: $N_A(t) = const$.

Здесь обсудим только второй случай.

Выясним, как изменяется на решениях функционал, являющийся континуальным аналогом функции Моримото

$$H = \sum_{n=1}^{n_0-1} \xi_n \psi \left(\frac{N_n(t)}{\xi_n} \right) + \int_{n_0}^{n_L} \xi(n) \psi \left(\frac{f(n,t)}{\xi(n)} \right) dn + \sum_{n=n_L+1}^{n_M} \xi_n \psi \left(\frac{N_n(t)}{\xi_n} \right), \quad (3.5)$$

где ψ – произвольная дважды дифференцируемая строго выпуклая функция, $\xi(n)$ – стационарное решение уравнения типа Фоккера–Планка (3.5).

Согласно дискретной части системы уравнений в рассматриваемом случае в выражении для H -функции мы должны взять $\psi(x) = x(\ln x - 1)$, т.е. рассмотреть «минус»-относительную энтропию.

Мы доказываем, что «минус»-относительная энтропия может возрастать на решениях нелинейного уравнения типа Фоккера–Планка [4]. Таким образом, H -теорема для уравнения типа Фоккера–Планка, вообще говоря, не верна.

Перейдём к рассмотрению дискретизаций по времени системы уравнений Беккера–Деринга. Для функционала «минус»-относительной энтропии:

$$H = \sum_{n=1}^{n_M} \xi_n \psi \left(\frac{N_n(t)}{\xi_n} \right) \text{ с } \psi(x) = x(\ln x - 1), \text{ где } \xi_n \text{ } (n=1, 2, \dots, n_M) \text{ – некоторое}$$

положительное стационарное решение, в случае явной дискретизации по времени H -теорема не верна, что нами было доказано на примере процесса образования димера из двух мономеров и обратного к нему процесса, но она оказывается верна для следующей частично неявной дискретизации по времени [4]

$$N_1(t+\tau) = N_1(t) - \tau \left(2\alpha_1 N_1(t+\tau) + \sum_{i=2}^{n_M} \alpha_i N_i(t) \right) N_1(t+\tau) + \tau \left(2\beta_2 N_2(t) + \sum_{i=2}^{n_M} \beta_{i+1} N_{i+1}(t) \right), \quad (3.6)$$

$$N_2(t+\tau) = \tau \alpha_1 N_1^2(t+\tau) + (1 - \tau(\beta_2 + \alpha_2 N_1(t+\tau))) N_2(t) + \tau \beta_3 N_3(t),$$

$$N_n(t+\tau) = \tau \alpha_{n-1} N_1(t+\tau) N_{n-1}(t) + (1 - \tau(\beta_n + \alpha_n N_1(t+\tau))) N_n(t) + \tau \beta_{n+1} N_{n+1}(t), \quad 3 \leq n \leq n_M - 1, \quad (3.7)$$

$$N_{n_M}(t + \tau) = \tau \alpha_{n_M-1} N_1(t + \tau) N_{n_M-1}(t) + (1 - \tau \beta_{n_M}) N_{n_M}(t).$$

Для осуществления одного шага по времени требуется решить всего лишь одно квадратное уравнение на $N_1(t + \tau)$.

4. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ЧАСТИЦ, РАСПРЕДЕЛЁННЫХ ПО ФОРМЕ И МАССЕ, И H -ТЕОРЕМА

Рассмотрим H -теорему для кинетических уравнений эволюции частиц, распределённых по массе и форме, как этого требует высоко детализированное описание. Мы представляли исходные частицы (размер которых может быть любого масштаба: молекулы, наночастицы и т.д.) в виде кубиков [5], которые могут объединяться своими гранями (см. рис.1). Моделирование исходных частиц в виде кубиков означает, что для простоты мы ограничиваемся простой кубической кристаллической решеткой Браве. Можно рассматривать и другие формы. Следующий основной результат не зависит от формы исходных частиц, но требуется, чтобы исходные частицы были одинаковыми.

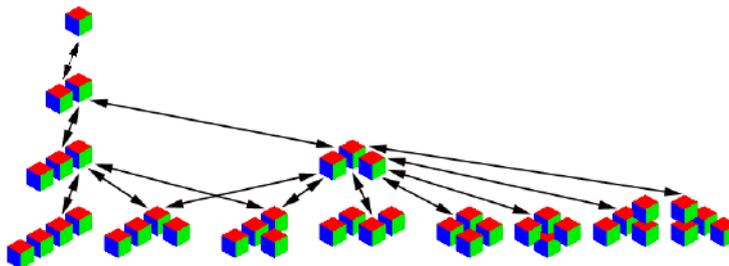


Рис.1. Агрегаты, состоящие из не более четырёх исходных частиц.

Пусть форма Y получается из формы X присоединением одной исходной частицы. Обозначим число способов получить таким образом из X форму Y через $C_Y^{(1)X}$, где (1) обозначает исходную частицу (молекулу или атом). А число способов получения X из Y в результате распада будем обозначать через $C_{(1)X}^Y$. Эти числа, вообще говоря, не совпадают.

Пусть энергия активации отрыва исходной частицы от формы Y , в результате которого получается форма X , определяется соотношением

$$E_{XY} = E_X - E_Y,$$

где через E_X и E_Y обозначены потенциальные энергии частиц вида X и Y , которые, вообще говоря, зависят от формы кластеров.

Пусть энергия активации E_1 присоединения молекулы к частице X может зависеть от её массы: $E_1 = E_1(n)$, но считаем, что E_1 не зависит от формы.

Теорема 4.1. Пусть рассматривается случай Беккера–Дёринга, и частотные функции определяются так, как это принято для газов (т.е. константа объединения рассчитана согласно теории активных соударений, константа распада – согласно теории активированного комплекса)

$$\begin{aligned} K_Y^{(1)X} &= C_Y^{(1)X} A(n) \exp(-E_1(n)/(k_B T)), \\ K_{(1)X}^Y &= C_{(1)X}^Y B(n) \exp\left[-\frac{E_X - E_Y}{k_B T}\right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

И пусть справедливо предположение о независимости величины сечений столкновения от того, куда присоединяется исходная частица (при столкновении происходит объединение, если энергия налетающей молекулы больше энергии активации E_1 .) Тогда выполняется условие детального баланса, и имеет место H -теорема.

Здесь $A(n)$ и $B(n) \equiv \chi(n) \frac{k_B T}{h}$ – коэффициенты при экспоненциальных зависимостях констант реакций от энергий активаций, которые называются законом Аррениуса. Теореме удастся доказать в силу комбинаторных связей между $C_Y^{(1)X}$ и $C_{(1)X}^Y$ и согласно экспоненциальным зависимостям констант реакций от энергий активаций, которые в случае распада зависят от формы. Доказательство теоремы 4.1 см. в [5].

5. H -ТЕОРЕМА ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ КРУГОВОЙ МОДЕЛИ МАРКА КАЦА

Не иссякает интерес к пониманию энтропии и ее связям с парадоксами Лошмидта и Цермело–Пуанкаре. Вопрос Лошмидта – как из обратимых уравнений механики получается необратимость и рост энтропии? Вопрос Цермело – не противоречит ли рост энтропии теореме о возврате Пуанкаре? Вопросы были обращены к Больцману, давшему в 1872 году доказательство H -теоремы. Ответом на эти возражения может служить сравнение разных моделей.

Мы рассмотрим уравнения Лиувилля для круговой модели Марка Каца, которая представляет собой некоторую простейшую модель переноса частиц или излучения.

Пусть есть правильный многоугольник с n вершинами. Отметим некоторое произвольное фиксированное их множество, множество вершин-рассеивателей, которое обозначим через S . Пусть количество рассеивателей равно m . В дальнейшем нам понадобятся эти два числа n и m . На рис.2 $n = 6$, $m = 2$.

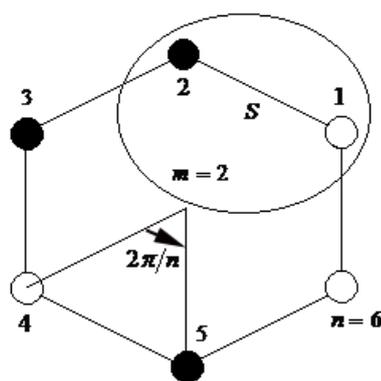


Рис.2.

В каждую из n вершин помещается шарик: черный или белый. Перейдем теперь к динамике этой модели. В течение каждой единицы времени система шаров поворачивается на угол $2\pi/n$ против часовой стрелки вокруг центра многоугольника со следующим условием: если шарик принадлежал множеству S , то он изменяет свой цвет: черный становится белым, а белый – черным. Если же шарик не принадлежал S , то он сохраняет свой цвет. Получается некоторая

модель переноса, где S – это множество-рассеиватель. Модель М. Каца всегда возвращается в исходное состояние за два полных оборота, т.к. каждый шар меняет цвет чётное число раз: $2m$ раз. Кроме того, эту модель можно обратить.

Для уравнения Лиувилля с дискретным временем (другими словами: для марковской цепи), описывающей эволюцию всех состояний круговой модели Марка Каца (их количество равно 2^n) сходимости к стационарному решению нет и функции Моримото сохраняются на решениях этого уравнения. Но «минус» функции Моримото временного среднего могут возрастать на решениях системы уравнений, что изучалось в работах А. Пуанкаре, В.В. Козлова и Д.В. Трещёва, а согласно теореме В.В. Веденяпина 2008 года временное среднее совпадает с экстремалью Больцмана. А значит, размерность пространства стационарных решений или пространства временных средних совпадает с размерностью пространства линейных законов сохранения. Мы исследовали пространства линейных инвариантов для уравнения Лиувилля для круговой модели Марка Каца [6]. В частности, справедлива следующая простейшая

Теорема 5.1. Для марковской цепи для модели М. Каца в случае простого n число линейно независимых линейных законов сохранения для чётного m равно $2 + 2 \frac{2^{n-1} - 1}{n}$, а для нечётного m : $1 + \frac{2^{n-1} - 1}{n}$ при $n \neq 2$ и единице при $n = 2$.

Рассмотрим уравнение Лиувилля с дискретным временем (или марковскую цепь) для круговой модели М. Каца в простейшем случае, взяв $n = m = 1$

$$\begin{cases} f_1(t+\tau) = f_2(t), \\ f_2(t+\tau) = f_1(t). \end{cases} \quad (5.1)$$

Здесь f_1 – число состояний круговой модели Марка Каца с белым шаром, а f_2 – с чёрным. Рассмотрим энтропию $S(t) = -f_1(t) \ln f_1(t) - f_2(t) \ln f_2(t)$. В силу (5.1) получаем, что $\Delta S \equiv S(t+\tau) - S(t) = 0$. Система (5.1) не даёт сходимости к стационарному решению: система поочередно принимает состояния 1 и 2 (рис.3), но среднее Чезаро $f_i^C, i=1,2$, совпадает с экстремалью по Больцману f_i^B и равно $f_i^C = f_i^B = (f_1(0) + f_2(0))/2$ (точка 3 на рис.3). На рис.3: кривые – это линии уровня энтропии: $S(f_1, f_2) = const$, а прямая вида $f_1 + f_2 = const$ – это линия уровня линейного инварианта для (5.1).

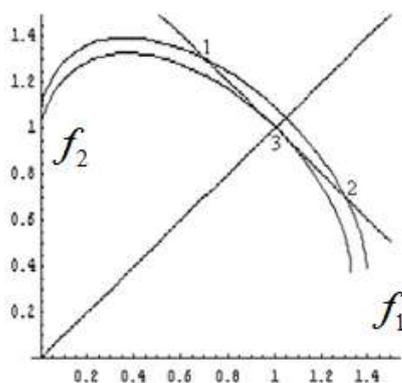


Рис.3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведём итоги.

H -теорема для явной дискретизации по времени систем уравнений физико-химической кинетики верна лишь в редких случаях. Но для неявной дискретизации по времени H -теорема верна при тех же условиях, что и в случае непрерывного времени. А теперь ключевой момент статьи – задача для исследователей. Для неявных многошаговых методов (в частности, для методов Гира) пока не удалось исследовать H -теорему, но эта задача является весьма актуальной в связи с необходимостью их использования для жёстких систем. Для системы уравнений Беккера–Дёринга с дискретным временем H -теорема для явной схемы не справедлива, но верна для некоторой частично неявной схемы. При её использовании на каждом шаге по времени понадобится всего лишь решить одно квадратное уравнение. Для диффузного приближения H -теорема оказывается не справедлива (в нелинейном случае). Это ставит под сомнение использование уравнения типа Фоккера–Планка. Однако его используют, поскольку оно описывает такие характерные решения системы уравнений Беккера–Дёринга (и её определённых обобщений), как сдвиг функции распределения в пространстве свойств и её расплывание. Анонсируем, что для дискретизации даже только правой части уравнения типа Фоккера–Планка для достаточно малого шага H -теорема неверна, поэтому при решении задачи на компьютере вместо разностных схем диффузного приближения требуется использовать уравнения типа Беккера–Дёринга. Итак, мы увидели, что выполнение H -теоремы зависит не только от уравнения, но и от способа его решения: от дискретизации или от перехода к континуальному описанию.

Доказана теорема о том, что для уравнений физико-химической кинетики, описывающих эволюцию функции, распределение частиц по массе и форме для частотных функций, принятых для газов в случае Беккера–Дёринга выполняется условие детального баланса, а значит, выполняется H -теорема. Следовательно, при построении кинетических моделей, описывающих эволюцию функции распределение частиц по массе и форме, необходимо следить за выполнением условия детального баланса.

Были получены формулы для числа линейных инвариантов для уравнения Лиувилля с дискретным временем для круговой модели Марка Каца. Поскольку ответ должен быть натуральным числом, то он оказался связан с малой теоремой Ферма и теоремой Эйлера из теории чисел (для основания степени, равного двум).

Поведение всех рассмотренных объектов сходно: временные средние совпадают с экстремалью Больцмана. При наличии предела даже в слабой форме при времени, стремящемся к бесконечности, он совпадает с временным средним.

ЛИТЕРАТУРА

1. Веденяпин В.В., Аджиев С.З. *Энтропия по Больцману и Пуанкаре* // Успехи математических наук. – 2014. – Т.69. – №6. – С.45-80.
2. Adzhiev S.Z., Melikhov I.V., Vedenyapin V.V. *The H-theorem for the physico-chemical kinetic equations with explicit time discretization* // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2017. – Vol.481. – Pp.60-69.
3. Adzhiev S.Z., Melikhov I.V., Vedenyapin V.V. *The H-theorem for the physico-chemical kinetic equations with discrete time and for their generalizations* // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2017. – Vol.480. – Pp.39-50.

4. Adzhiev S.Z., Melikhov I.V., Vedenyapin V.V. *On the H-theorem for the Becker–Döring system of equations for the cases of continuum approximation and discrete time* // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2020. – Vol.553. – No.124608. – Pp.1-13.
5. Adzhiev S., Batishcheva J., Melikhov I., Vedenyapin V. *Kinetic Equations for Particle Clusters Differing in Shape and the H-theorem* // Physics. – 2019. – Vol.1. – No.2. – Pp.229-252.
6. Аджиев С.З., Веденяпин В.В. *Временные средние и экстремали Больцмана для марковских цепей, дискретного уравнения Лиувилля и круговой модели Марка Каца* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т.51. – №11. – С.2063-2074.



СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА РЕШЕНИЯ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ*

Артамонова Н.Б., Шешенин С.В.

*ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»,
г. Москва, Россия*

В работе сформулирована, математически исследована и численно реализована достаточно общая формулировка задачи совместного деформирования пористой твердой среды с протекающей через поры жидкостью в рамках физической и геометрической нелинейности. Постановка задачи выведена в скоростях перемещений твердой фазы и изменения давления воды в дифференциальном и вариационном виде. Показана применимость метода Удзавы в качестве основной части метода решения нелинейных задач консолидации. Постановка численно реализована методом конечных элементов в виде собственной компьютерной программы на языке Фортран. Сходимость итерационного процесса изучена теоретически. Были проведены вычислительные эксперименты решения линейной задачи для подтверждения теоретической скорости сходимости итерационного процесса. Вычислительные эксперименты не только подтвердили теорию, но и добавили различные аспекты относительно характера сходимости, не улавливаемые теоретическим рассмотрением.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи совместного деформирования грунта и движения жидкости (задачи консолидации) обычно решаются в связанной постановке. Численное решение связанных уравнений трехмерной консолидации по-прежнему является сложной задачей. В итерационном процессе типа метода Удзавы [1] уравнение равновесия и уравнение фильтрации связываются последовательно. При использовании итерационно связанной схемы может быть медленной сходимость итерационного процесса, зависящая от механических свойств жидкости и грунта.

В работе представлено теоретическое исследование устойчивости решения седловой задачи консолидации в линеаризованном случае, подтвержденное вычислительными экспериментами.

Решение нелинейной связанной задачи консолидации актуально и имеет практическое применение, например, при моделировании деформирования дорожного полотна, при расчете неравномерной осадки инженерных сооружений или при моделировании гиперупругого деформирования биологического материала, насыщенного кровью или плазмой. Представляется актуальным исследование устойчивости решения седловой задачи консолидации теоретически в линейном и нелинейном вариантах.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2022-284.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ

Линеаризованная постановка задачи консолидации включает три уравнения – равновесия, фильтрации и изменения пористости [2,3]

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(\mathbf{C}^d(\mathbf{u}) : \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}^{eff}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) - \alpha(n) \nabla \frac{\partial p}{\partial t} + \rho(p) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = 0 \\ n(\mathbf{u}) \nabla \cdot \left(\frac{k(n)}{n(\mathbf{u}) \mu_f} \nabla p \right) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + n(\mathbf{u}) \beta_f \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial n}{\partial t} = (1-n) \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \end{cases} \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}^{eff}$ – эффективные напряжения, \mathbf{u} – вектор средних перемещений в твердой фазе материала, $\alpha = \alpha(n)$ – коэффициент Био, p – среднее давление в жидкости, ρ – средняя плотность водонасыщенной среды, \mathbf{f} – вектор массовой силы, $n = n(\mathbf{u})$ – пористость, $k = k(n)$ – коэффициент проницаемости, $\mu_f = \text{const}$ – динамическая вязкость жидкости, $\beta_f = \text{const}$ – сжимаемость жидкости, \mathbf{C}^d – тензор касательных модулей, t – время.

Согласно идее метода Удзавы [1], $\partial \mathbf{u} / \partial t$ можно выразить как решение первого уравнения в (1) с соответствующими граничными условиями

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{A}^{-1} \left(\mathbf{F} - \alpha \nabla \frac{\partial p}{\partial t} \right), \quad \mathbf{F} = \rho \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}, \quad (2)$$

где \mathbf{A} означает оператор этой краевой задачи в соответствующем функциональном пространстве. В результате подстановки (2) в два последних уравнения (1) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = (1-n) \nabla \cdot \mathbf{A}^{-1} \left(\mathbf{F} - \alpha \nabla \frac{\partial p}{\partial t} \right) \\ n(\mathbf{u}) \nabla \cdot \left(\frac{k(n)}{n(\mathbf{u}) \mu_f} \nabla p \right) = \nabla \cdot \mathbf{A}^{-1} \left(\mathbf{F} - \alpha \nabla \frac{\partial p}{\partial t} \right) + n(\mathbf{u}) \beta_f \frac{\partial p}{\partial t} \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) включает два связанных квазилинейных нестационарных уравнения. Существование решения системы (3) основано на том, что $\nabla \cdot \mathbf{A}^{-1} \nabla$ – положительно определенный симметричный оператор, спектрально эквивалентный тождественному оператору.

Предлагаемый алгоритм решения системы (1) заключается в решении на каждом временном шаге внутренней седловой системы, состоящей из первых двух уравнений (1) с использованием алгоритма типа Удзавы и последующем уточнении последнего уравнения с использованием неявной схемы Эйлера.

Для решения задачи методом конечных элементов была получена вариационная постановка системы (1) и выполнена дискретизация по времени и по пространственным координатам. Дискретизация линеаризованного вариационного уравнения равновесия и уравнения фильтрации из (1) по пространственным координатам осуществлялась с помощью метода конечных элементов (МКЭ), что означает $H_u \rightarrow H_u^N$ и $H_p \rightarrow H_p^N$, где H_u^N и H_p^N – N-мерные

подпространства, т.е. $H_u^N \in H_u$ и $H_p^N \in H_p$. Дискретизация по времени выполнялась с помощью разностных производных назад. В результате мы приходим к полностью дискретизированным вариационным уравнениям, которые должны выполняться для любых пробных функций $\mathbf{w}^N(\xi, t) \in H_u^N$ и $q^N(\xi, t) \in H_p^N$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_V (\nabla \mathbf{w}^N : \mathbf{C}^d(\mathbf{u}^N) : \nabla \Delta \mathbf{u}^N) dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}^{eff}(\mathbf{u}^N) : [(\nabla \mathbf{w}^N)^T \cdot \nabla \Delta \mathbf{u}^N] dV - \\ - \int_V \alpha \Delta p^N \nabla \cdot \mathbf{w}^N dV - \int_V \rho \Delta \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}^N dV - \int_{\Sigma_2} \Delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{w}^N d\Sigma = 0 \\ \int_V \nabla q^N \cdot \frac{k}{\mu_f} \nabla p^N dV + \int_V q^N \nabla n \cdot \frac{k}{n\mu_f} \nabla p^N dV + \int_V q^N \nabla \cdot \frac{\Delta \mathbf{u}^N}{\Delta t} dV + \\ + \int_V q^N n \beta_f \frac{\Delta p^N}{\Delta t} dV = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

Здесь Δt означает шаг по времени. Запишем систему (4) в блочной форме на каждом временном шаге, используя глобальный вектор неизвестных U и P

$$\begin{bmatrix} A & D \\ B & -\tau C \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ G \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

В терминах блочной матрицы (5) идея метода Удзавы для седловой задачи состоит в том, чтобы выразить $U = A^{-1}(F - B^T P)$ из первого уравнения (5) и подставить во второе уравнение (5). Тогда мы получаем

$$\left(\frac{1}{\tau} B A^{-1} B^T + C \right) P = \frac{1}{\tau} B A^{-1} F - \frac{1}{\tau} G = F^*. \quad (6)$$

Уравнение (6) может быть решено различными итерационными методами. Обозначим оператор Шура

$$\mathbb{S} = \frac{1}{\tau} B A^{-1} B^T + C. \quad (7)$$

Общий двухслойный итерационный метод имеет вид

$$\mathbb{B} \frac{P^{s+1} - P^s}{\tau^{s+1}} + \mathbb{S} P^s = F^*. \quad (8)$$

Скорость сходимости процесса (8) зависит от выбора предобуславливателя \mathbb{B} . Для того чтобы скорость итерационного процесса была высокой, предобуславливатель \mathbb{B} следует выбрать в таком виде, чтобы он был спектрально эквивалентен оператору \mathbb{S} (7). Спектральная эквивалентность означает выполнение следующих неравенств

$$0 < \gamma_1 \mathbb{B} \leq \mathbb{S} \leq \gamma_2 \mathbb{B} \quad (9)$$

с независимыми от сетки границами γ_1, γ_2 . Оказалось, что спектральную эквивалентность (9) обеспечивает выбор предобуславливателя \mathbb{B} в виде

$$\mathbb{B} = \frac{\kappa}{\tau} \mathbf{E} + C, \quad (10)$$

где κ – итерационный параметр. В таком случае γ_1 и γ_2 имеют вид

$$\gamma_1 = \min \{ m / (\kappa c_2), 1 \}, \quad \gamma_2 = \max \{ 1 / (\kappa c_1), 1 \}. \quad (11)$$

Важно подчеркнуть, что скорость сходимости любого итерационного процесса определяется соотношением γ_1/γ_2 . Тогда из (11) следует, что скорость не зависит от шага τ по времени и коэффициента проницаемости k

Предложенная модель была реализована в собственном программном коде.

2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Проанализируем результаты вычислительных экспериментов решения линейной задачи, выполненных для подтверждения приведенной выше теоретической зависимости скорости сходимости и для оценки предложенного

предобуславливателя \mathbb{B} (10). Проводилось сравнение $\mathbb{B} = \frac{\kappa}{\tau} \mathbb{E} + \mathbb{C}$ с $\mathbb{B} = \mathbb{C}$.

Последний случай соответствует $\kappa = 0$. В соответствии с развитой в предыдущем разделе теории скорость сходимости определяется отношением γ_1/γ_2 . Согласно (11), скорость сходимости не зависит от коэффициента проницаемости k и шага дискретизации τ .

Решалась задача о вдавливании штампа. Были выбраны параметры сетки: A1 – 11×11×11, A2 – 21×21×21, A3 – 31×31×31, A4 – 41×41×41. Самая мелкая конечно-элементная (КЭ) сетка (41×41×41) изображена на рис.1 (слева – недеформированная, справа – деформированная). Точность, определяющая сходимость итераций, равна $\varepsilon = 0.00001$.

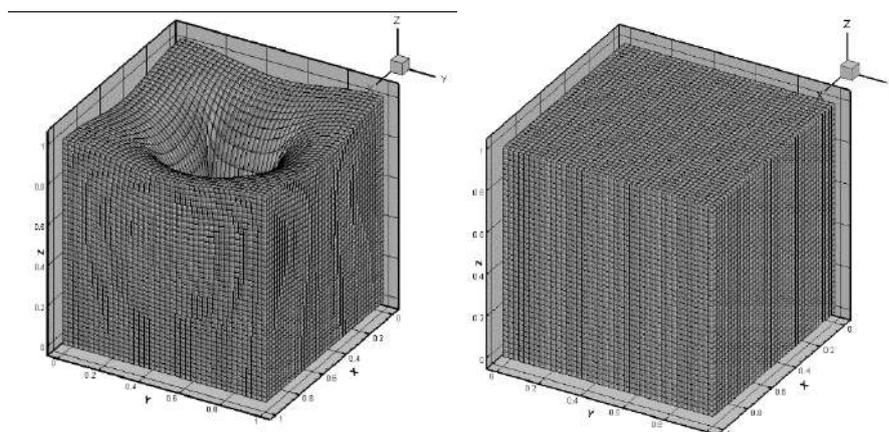


Рис.1. Конечно-элементная сетка 41×41×41.

В таблице 1 приведено число итераций, достаточное для достижения точности ε при итерационном параметре $\kappa = 0$ для разных значений коэффициента проницаемости k . Расчеты проводились на конечно-элементной сетке A1 (11×11×11) для шага дискретизации по времени $\tau = 0.5$, коэффициента Пуассона $\nu = 0.4$, объемного модуля $K = 1$ (все используемые параметры задачи – безразмерные величины). Видно, что при уменьшении коэффициента проницаемости k сходимость нарушается.

Таблица 1.

КЭ сетка A1, $\kappa = 0$, $\tau = 0.5$, $\nu = 0.4$, $K = 1$					
k	100	10	1	0.1	0.01
Число итераций	9	9	33	нет сходимости	нет сходимости

В таблице 2 аналогично приведено достаточное для достижения точности ε число итераций при итерационном параметре $\kappa=0.5$ для разных значений коэффициента проницаемости k и разных КЭ сеток. Можно заметить (табл. 2), что при уменьшении коэффициента проницаемости k сходимость также нарушается, но для значительно меньшего значения k . Для $k > 0.1$ сходимость итераций имеет место и скорость сходимости почти не зависит от коэффициента проницаемости k . Нарушение сходимости при малых $k < 0.1$ может быть вызвано влиянием ошибок округления при решении линейных систем прямым методом. Таким образом, в целом подтверждается теоретический вывод, что сходимость не зависит от коэффициента проницаемости k .

В таблице 2 также видно, что сходимость слабо зависит от шагов сетки по координатам.

Таблица 2.

$\kappa=0.5, \tau=0.5, \nu=0.4, K=1$					
k	100	10	1	0.1	0.01
КЭ сетки					
A1	9	9	9	11	нет сходимости
A2			9	10	
A3			13	14	
A4		9	16	16	

Таблица 3 демонстрирует, что скорость сходимости не зависит от шага по времени τ : число итераций, достаточное для достижения точности ε , почти одинаковое для различных значений τ .

Таблица 3.

КЭ сетка A1, $\kappa=0.5, k=0.1, \nu=0.4, K=1$			
τ	0.5	5	50
Число итераций	9	9	8

Таким образом, сходимость слабо зависит от шагов сетки по координатам и по времени. Правда, последнее верно, если шаг по времени τ больше некоторого предельного значения. Таблица 4 дополнительно подтверждает, что сходимость зависит от произведения $k\tau$: если оно слишком мало ($\tau=5, k=0.01$), то сходимость отсутствует.

Таблица 4.

КЭ сетка A1, $\kappa=0.5, \nu=0.3, K=1$		
k	τ	
		0.1
		0.01
50		6
5		16
		>100

В таблице 5 показана зависимость скорости сходимости от объемного модуля K . Ясно видно, что с ростом объемного модуля K сходимость ухудшается.

Таблица 5.

КЭ сетка A1, $\kappa = 0.5$, $\tau = 0.5$, $k = 0.1$, $\nu = 0.4$			
K	1	10	100
Число итераций	11	45	>100

Таблица 6 показывает сильную зависимость скорости сходимости от коэффициента Пуассона ν . Для седловой задачи получилась нестандартная закономерность: чем меньше коэффициент Пуассона, тем сходимость хуже. При значении параметров $k = 0.1$, $\kappa = 0.5$, $\tau = 0.5$ для $\nu = 0.32$ сходимость отсутствует. Однако оказывается, что сходимость улучшается с увеличением шага по времени τ .

Таблица 6.

КЭ сетка A1, $\kappa = 0.5$, $\tau = 0.5$, $k = 0.1$, $K = 1$			
ν	0.4	0.35	0.32
Число итераций	9	25	>100

Из таблицы 7 видно, что при увеличении шага τ в десять раз сходимость имеет место быть для $\nu = 0.3$ при итерационном параметре $\kappa = 0.5$. Однако при $\kappa = 0$ сходимости, конечно, нет.

Таблица 7.

КЭ сетка A1, $\tau = 5$, $k = 0.1$, $K = 1$, $\nu = 0.3$		
κ	0.5	0
Число итераций	16	>100

В результате проведенного анализа вычислительных экспериментов можно сделать вывод, что улучшенный предобуславливатель $\mathbb{B} = \frac{\kappa}{\tau} \mathbb{E} + C$ действительно улучшает сходимость (по сравнению с $\mathbb{B} = C$). Также можно заметить, что расчеты подтверждают теорию, но и добавляют различные аспекты относительно характера сходимости, не улавливаемые теоретическим рассмотрением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена физически и геометрически нелинейная связанная формулировка задачи консолидации в скоростях. Для численного решения нелинейной задачи консолидации использовалась линеаризованная вариационная постановка. Связывание уравнений деформирования скелета грунта и фильтрации жидкости осуществляется методом Узавы. Постановка численно реализована в виде собственной компьютерной программы.

Теоретически исследована зависимость скорости сходимости итерационного процесса от выбора предобуславливателя. Показано, что предобуславливатель улучшает сходимость. Вычислительные эксперименты решения линейной задачи подтвердили результаты теоретического исследования скорости сходимости. Показано, что сходимость слабо зависит от шагов сетки по координатам и по времени (если шаг по времени больше некоторого предельного значения). В целом подтверждается теоретический вывод, что сходимость не зависит

от коэффициента проницаемости. Нарушение сходимости при малых значениях коэффициента проницаемости может быть вызвано влиянием ошибок округления при решении линейных систем прямым методом. Закономерно сходимость сильно зависит от объемного модуля и коэффициента Пуассона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быченков Ю.В., Чижонков Е.В. *Итерационные методы решения седловых задач*. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. – 349 с.
2. Шешенин С.В., Артамонова Н.Б. *Моделирование нелинейной консолидации пористых сред* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – №1. – С.167-176.
3. Artamonova N.B., Sheshenin S.V. *Finite element implementation of a geometrically and physically non-linear consolidation model* // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2023. – Vol.35. – Iss.4. – Pp.1291-1308.

УДК 539.32
EDN GKHFH (<https://elibrary.ru/gkhfih>)
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.33



О РАЗВИТИИ МЕТОДА ТРЕФФТЦА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Волков-Богородский Д.Б.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

1. ВВЕДЕНИЕ

Предлагается схема аппроксимации задач механики структурно-неоднородных сред, основанная на сшивке представляющих исходную область решения блоков [1] с помощью энергетического функционала (энергетической нормы), аналогичного функционалу метода конечных элементов [2]. Как известно, этот метод в качестве аппроксимирующего базиса использует функции, непрерывные во всей области представления решения, т.е. осуществляет аппроксимацию в «непрерывном» пространстве W_2^1 . Однако, необходимость жесткой технологической привязки функций формы к элементам исходной сетки сильно ограничивает их аппроксимативные возможности в пределах одного элемента: как правило это полиномы специального вида, не превышающие третьей степени (линейные, квадратичные, билинейные, биквадратичные), а приближение к аналитическим особенностям решения достигается за счет измельчения сетки (метод h -аппроксимации [2]).

Наряду с традиционными методами аппроксимации решения во всей области (метод Рунге, метод Бубнова-Галеркина, см. [3]) существуют методы, осуществляющие аппроксимацию по границе области, на основе сингулярных интегральных уравнений и фундаментальных решений дифференциальных уравнений (методы теории потенциала). Фактически, аппроксимация в этих методах осуществляется на системах функций, обладающих свойством полноты и точно удовлетворяющих исходным уравнениям [4]. Аппроксимация на функциях, точно удовлетворяющих исходному уравнению, составляет суть метода Треффтца, рассматривавшегося автором как вариант метода Рунге для аппроксимации решений уравнения Лапласа на системе гармонических полиномов в энергетической L_2 -норме градиента функции (интеграл Дирихле) [5].

Для аппроксимации по классической схеме Треффтца требуется набор гармонических полиномов $\{\psi_n(P)\}$, образующих полную систему в смысле нормы, определяемой интегралом Дирихле

$$J(u) = \int_G |\nabla u|^2 dG, \quad (1)$$

и интегральная формула Грина для скалярного произведения, связанного с билинейной формой интеграла Дирихле

$$W(u, u') = \int_G (\nabla u, \nabla u') dG = \int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n} u' d(\partial G) = \int_{\partial G} u \frac{\partial u'}{\partial n} d(\partial G). \quad (2)$$

Тогда решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа (граничное условие первого рода $u(P)=h$, $P \in \partial G$) ищется в виде ряда по гармоническим полиномам, наименее уклоняющегося от точного решения u_0 в смысле интегральной нормы (1)

$$J(u-u_0) \rightarrow \min, \quad u(P) = \sum_k a_k \psi_k(P). \quad (3)$$

В результате решение находится из системы линейных уравнений, формируемой исключительно по границе исходной области на основе интегрального соотношения (2) через используемые гармонические полиномы и известную правую часть

$$\sum_l c_{kl} a_l = h_k, \quad c_{kl} = \int_{\partial G} \frac{\partial \psi_k(P)}{\partial n} \psi_l(P) d(\partial G), \quad (4)$$

$$h_k = \int_{\partial G} \frac{\partial \psi_k(P)}{\partial n} h(P) d(\partial G).$$

Аппроксимация достигается на основе свойства полноты гармонических полиномов.

Таким образом, схема аппроксимации Треффтца представляет собой метод Ритца минимизации квадратичного функционала на специальной аналитической системе функций, точно удовлетворяющей исходным уравнениям. В более поздних работах этот метод стали трактовать наряду с методом граничных элементов [4], как способ аппроксимации граничных значений в L_2 -норме, или с помощью коллокаций, на системе функций, заменяющей фундаментальное решение, точно удовлетворяющей уравнению, но не являющейся сингулярной. Логичнее было бы называть его в этом случае методом наименьших квадратов, или методом коллокаций.

Очень важным моментом в численном анализе является необходимость сочетания двух схем аппроксимации: метода конечных элементов и метода Треффтца (см. гибридный метод конечных элементов [4]), или разных Треффтц аппроксимаций в разных подобластях-блоках исходной области (см. блочный метод наименьших квадратов [1,6,7]), поскольку последний дает приближение, адекватно описывающее аналитические особенности решения, например, концентрацию напряжений в окрестности сингулярных элементов. До сих пор это сочетание осуществлялось непосредственно, путем минимизации квадратичной невязки или путем взвешенной коллокации.

В настоящей работе классический метод Треффтца [5] обобщается на блочную структуру и на задачи теории упругости путем введения энергетической нормы в «разрывном» пространстве W_2^1 – на системе подобластей-блоков с независимыми системами аппроксимирующих функций, сшиваемых между собой, в отличие от метода наименьших квадратов, как это делалось раньше, с помощью схемы Бубнова-Галеркина в скалярном произведении аппроксимирующих функций из разных блоков, специальным образом согласованных с функционалом энергии (с энергетической нормой). В результате мы получим блочную систему уравнений, аналогичную блочной системе метода наименьших квадратов [1], однако обладающую значительно лучшими вычислительными свойствами, сравнимыми со свойствами матрицы жесткости метода конечных элементов.

Показано, что обобщенная схема Треффтца позволяет одновременно с минимизацией функционала энергии сшивать все необходимые величины на границах блоков: перемещения, поверхностные силы, а для градиентных уравнений четвертого порядка еще и производные перемещений и когезионные моменты, что достигается исключительно благодаря аналитической конструкции используемых функций.

В качестве приложения обобщенной схемы Треффтца предлагается эффективный инструмент для точного, почти аналитического решения задачи на ячейке в методе асимптотического усреднения, на основе которой определяются эффективные деформационные и прочностные характеристики композитных материалов в рамках классической и градиентной теории упругости [8,9]; эта аналитико-численная схема решения задачи на ячейке была реализована в конечно-элементном комплексе общего назначения UWay.

2. БЛОЧНАЯ СХЕМА МЕТОДА ТРЕФФТЦА. АППРОКСИМАЦИЯ В РАЗРЫВНОМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим потенциальную энергию напряженно-деформируемого состояния упругого тела, образующую квадратичный функционал на векторе перемещений \mathbf{u} , аналогичный интегралу Дирихле (1) в классическом методе Треффтца

$$E(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_G \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dG = \frac{1}{2} \int_G C_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} dG, \quad (5)$$

где σ_{ij} – напряжения, ε_{ij} – деформации, C_{ijkl} – тензор жесткости, имеющий для изотропного тела следующий вид: $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il})$, λ и μ – коэффициенты Ламе. И рассмотрим соответствующую квадратичному функционалу (5) билинейную форму

$$W(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \int_G \sigma_{ij} \varepsilon'_{ij} dG = \int_G C_{ijkl} u_{i,j} u'_{k,l} dG. \quad (6)$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса для всех перемещений \mathbf{u} и \mathbf{u}' , удовлетворяющих условию равновесия $\sigma_{ij,j} = \sigma'_{ij,j} = 0$ (т.е. однородной системе уравнений теории упругости) выполняется интегральное соотношение Грина

$$W(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \int_{\partial G} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{u}' d(\partial G) = \int_{\partial G} \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}') \mathbf{u} d(\partial G), \quad (7)$$

где $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \|\sigma_{ij} n_j\|$ – вектор поверхностных напряжений, n_j – компоненты вектора внешней нормали к поверхности тела. Для изотропного тела $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \|\lambda u_{kk} n_i + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j\|$.

Для уравнений градиентной теории упругости общий вид функционала энергии в отличие от (6) определяется двумя тензорами (четвертого и шестого ранга)

$$E(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \int_G C_{ijkl} R_{i,j} R_{k,l} dG + \frac{1}{2} \int_G C_{ijklmn} R_{i,jk} R_{l,mn} dG, \quad (8)$$

где \mathbf{R} – вектор перемещений, C_{ijkl} и C_{ijklmn} соответственно тензор модулей классической упругости и тензор шестого ранга градиентных модулей. Существуют разные модели градиентной теории упругости (8), рассмотрим одну

из них, определяемую в изотропном случае одним дополнительным модулем C

$$E(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \int_G \left(\lambda \theta^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + C^{-1} \left| (\mu + \lambda) \nabla \theta + \mu \nabla^2 \mathbf{R} \right|^2 \right) dG, \quad (9)$$

Соответствующее интегральное соотношение Грина для билинейной формы функционала энергии (9) имеет следующий вид (см. [9])

$$\begin{aligned} W(\mathbf{R}, \mathbf{R}') &= \int_{\partial G} (\boldsymbol{\sigma}(U) - \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u})) \mathbf{R}' d(\partial G) + \int_{\partial G} \mathbf{m}_{(n)}(\mathbf{u}) \mathbf{R}'_n d(\partial G) = \\ &= \int_{\partial G} (\boldsymbol{\sigma}(U') - \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}')) \mathbf{R} d(\partial G) + \int_{\partial G} \mathbf{m}_{(n)}(\mathbf{u}') \mathbf{R}_n d(\partial G), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mathbf{u} = -C^{-1} \left((\mu + \lambda) \nabla \theta + \mu \nabla^2 \mathbf{R} \right)$ – когезионное поле перемещений, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u})$ – когезионные силы на поверхности тела, $\mathbf{m}_{(n)}(\mathbf{u})$ – когезионные моменты, а $U = \mathbf{R} + \mathbf{u}$ – соответственно классическое поле перемещений, удовлетворяющее классическим уравнениям равновесия Ламе, $\boldsymbol{\sigma}(U)$ – классический вектор поверхностных напряжений.

В методе Треффтца билинейная форма (7) или (10) рассматривается как скалярное произведение, соответствующее энергетической норме $\|\mathbf{u}\|_E = W(\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}$, в которой будет осуществляться аппроксимация точного решения \mathbf{u}_0 на некоторой полной системе функций \mathbf{u}_n , точно удовлетворяющей исходным уравнениям классической или градиентной теории упругости, $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_E \rightarrow 0$.

Рассмотрим случай, когда исходная область разбивается на конечное число подобластей-блоков G_k простой структуры, $\bar{G} = \cup \bar{G}_k$, $G_k \cap G_l = \emptyset$, $k \neq l$ (черта означает замыкание области); блочная структура это аналог конечно-элементной сетки, или сама конечно-элементная сетка. В каждом блоке используется своя полностью независимая система функций, обращающаяся в нуль вне своего блока, и аналитически точно удовлетворяющая исходным уравнениям теории упругости. Норма, обеспечивающая сходимость к решению и сшивку отдельных представлений конструируется по границе всех блоков с помощью принципа взаимности на общих границах блоков

$$\|\mathbf{u}\|_E = \left(\sum_k W_k(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \right)^{1/2}, \quad W_k(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \int_{S_1^{(k)}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{u}' dS + \int_{S_2^{(k)}} \mathbf{u} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}') dS, \quad (11)$$

где $S_1^{(k)} \cup S_2^{(k)} = \partial G_k$. Принцип взаимности заключается в том, что на общей границе S_{kl} у двух соседних блоков G_k и G_l поверхностный интеграл раскрывается по-разному: как условия первого рода для функции \mathbf{u}' в блоке G_k и как условия второго рода для функции \mathbf{u}' в блоке G_l .

Такой способ определения нормы и связанного с ней скалярного произведения обеспечивает сходимость к точному решению в разрывном пространстве на независимых системах функций, определенных в блоках \bar{G}_k (вплоть до границы), и обращающихся в нуль вне этих блоков. И тем самым обеспечивает сшивку этих представлений, поскольку точное решение \mathbf{u}_0 обладает необходимой гладкостью.

Для градиентной теории упругости принцип взаимности в разбиении границы блоков на условия первого и второго рода для общих перемещений $\mathbf{R}' = \mathbf{U}' - \mathbf{u}'$ будет выглядеть следующим образом

$$\begin{aligned} W_k(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = & \int_{S_1^{(k)}} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}) - \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u})) \mathbf{R}' dS + \int_{S_1^{(k)}} \mathbf{R}_{,n} \mathbf{m}_{(n)}(\mathbf{u}') dS + \\ & + \int_{S_2^{(k)}} \mathbf{R} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}') - \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}')) dS + \int_{S_2^{(k)}} \mathbf{m}_{(n)}(\mathbf{u}) \mathbf{R}'_{,n} dS. \end{aligned} \quad (12)$$

Для аппроксимации точного решения используется проекционный метод Бубнова-Галеркина, который формулируется с помощью билинейной формы (7) или (10) следующим образом

$$W_k(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_i^{(k)}) = 0, \quad \mathbf{u}(P) = \sum_i a_i^{(k)} \mathbf{u}_i^{(k)}, \quad P \in G_k. \quad (13)$$

Реализация обобщенной схемы аппроксимации Треффтца (11)-(13) на блочной структуре приводит к блочной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов \mathbf{X}_k в разложениях (13) внутри блоков

$$T_k \mathbf{X}_k + \sum_l T_{kl} \mathbf{X}_l = \mathbf{H}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (14)$$

где N – общее число подобластей в блочной структуре. Эта система имеет разреженную структуру и плотно заполненные матрицы-блоки T_k и T_{kl} . Здесь T_k – матрица Треффтца, составленная из скалярных произведений (7) или (10) функций по границам блоков, T_{kl} – матрицы, составленные из скалярных произведений аппроксимирующих функций смежных блоков, \mathbf{H}_k – вектор, соответствующий граничным условиям задачи. Благодаря принципу взаимности мы получаем невырожденную систему уравнений.

При реализации блочной формулировки метода Треффтца возникает необходимость решения системы линейных алгебраических уравнений, структура которой соответствует структуре блочного разбиения исходной области [1,6]. Поскольку система линейных уравнений имеет блочно-разреженную структуру, то естественным образом при ее решении возникают два уровня вычислений: интенсивные вычисления с плотными подматрицами-блоками на уровне общей памяти и относительно независимые вычисления между блоками на уровне распределенной памяти. Такая организация вычислительной работы соответствует структуре современных кластерных систем и позволяет эффективно использовать их неоднородную структуру в параллельных алгоритмах. Интенсивные вычисления с плотными подматрицами можно распараллелить на основе потоков вычислений с использованием общей памяти или в графическом процессоре, а относительно независимые вычисления с блочно-разреженной структурой можно распараллелить с помощью MPI (см. пример такой организации вычислительной работы для блочного метода наименьших квадратов в [6]).

3. T-ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИИ ФОРМЫ СО СТРУКТУРОЙ

Ключевым моментом в реализации обобщенной схемы Треффтца на системе

блоков G_k исходной области G является построение полных систем функций, аналитически точно удовлетворяющих исходным уравнениям. Для задач теории упругости (классической и градиентной) аналитической основой для такого построения является представление Папковича-Нейбера [7], с помощью которого можно провести структурный анализ общего решения [10] и получить представление базисной системы функций на основе гармонического полинома произвольной степени и фундаментального решения уравнения Гельмгольца (метод радиальных множителей).

Аналитические возможности аппроксимирующей системы функций можно значительно расширить, если использовать в этом качестве решение обобщенной задачи Эшелби для уединенного многослойного включения сферической, цилиндрической или сфероидальной формы с полиномиальной асимптотикой на бесконечности и с точным удовлетворением контактных условий на межфазной границе (см. [10]). Задача решается аналитически точно с помощью метода радиальных множителей и теоремы Гаусса о представлении однородных полиномов через гармонические. Полноту аппроксимирующей системы функций обеспечивает полиномиальная асимптотика на бесконечности. Собирая все решения обобщенной задачи Эшелби с полиномиальным условием на бесконечности при произвольной степени полинома, мы получим Т-полную систему функций для аппроксимации решений в механике структурно-неоднородных сред с многослойными включениями в каждом блоке. Эта система функций позволяет с высокой степенью точности аппроксимировать локальные поля напряжений в окрестности включений, и ее можно рассматривать как систему функций формы со структурой, обеспечивающую аналитически точное выполнение условий контакта на границе включений в блоке.

4. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Схема блочной аппроксимации Треффтца (11)-(14) была реализована в развиваемом конечно-элементном комплексе общего назначения Uway на конечно-элементных сетках, рассматриваемых в качестве блоков, и на блочных структурах, односвязных и двусвязных областей, задаваемых геометрически в своем внутреннем формате B-Rep (boundary representation). Результаты расчетов формировались в двух форматах: для конечно-элементной сетки в формате визуализатора Tecplot 360, а для B-Rep представлений блочной структуры общего вида в grid-формате геоинформационной системы Golden Surfer на некотором плоском сечении образца.

На рис.1 представлен простейший пример расчета стационарной тепловой задачи для клиновидного образца с включением в виде эллиптического выроста. Коэффициенты теплопроводности материала образца и включения: $\kappa_M = 0.069$ Вт/(м·К), $\kappa_I = 0.0563$ Вт/(м·К); геометрические параметры: нижнее квадратное основание с размером $A = 5$ м, высота $H = 10$ м, верхнее прямоугольное основание с размерами A и $B = 2.5$ м. К нижнему основанию приложена температура $T = 300$ К, к верхнему основанию – теплоток $Q = 0.1$ Вт/м², боковая поверхность теплоизолирована.

Эта задача демонстрирует непосредственное обобщение классической схемы (1)-(4) для уравнения Лапласа на блочную структуру тетраэдров в количестве $N = 4101$, максимальная степень аппроксимирующих полиномов

$M=1$, т.е. в каждом блоке использовались линейные аппроксимации. Температурное поле было выведено по узлам тетраэдров в формате Tecplot «со связностью».

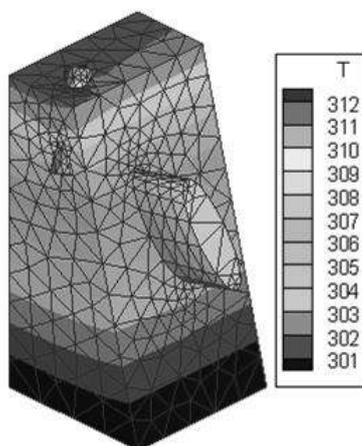


Рис.1. Температурное поле методом Треффтца на конечно-элементной сетке в качестве блоков.

Второй пример касается задачи на ячейке [8] в 2D в классической теории упругости для композиционного материала с включением эллиптической формы. Область была разбита на $N=496$ плоских четырехугольных и треугольных элементов с учетом криволинейности межфазной границы. Параметры включения: полуоси эллипса $a=0.4$, $b=0.1$, угол поворота относительно горизонтальной оси $\varphi=30^\circ$, модуль Юнга $E=78$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu=0.3$; параметры матрицы: модуль Юнга $E=5.066$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu=0.49$.

На рис.2 представлен расчет задачи на ячейке при единичной средней деформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle = 1$ на системе гармонических полиномов w^m с максимальной степенью $M=11$. Как видим, блочный метод Треффтца обеспечивает при $M=11$ практически аналитическую точность картины напряжений, обеспечивая мельчайшие детали их концентрации. Результаты были выведены в формате Surfer на прямоугольной сетке с высочайшей плотностью 401×401 точек.

На рис.3,4 представлен пример решения задачи на ячейке для волокнистого композита с функционально-градиентным межфазным слоем, разбитым на 100 частей с переменными характеристиками. Параметры включения – углеродные волокна $E_I=800$ ГПа, $\nu_I=0.3$, параметры матрицы – эпоксидная смола $E_M=3$ ГПа, $\nu_M=0.32$ (левый рис.3а) и почти несжимаемый эластомер $E_M=0.135$ ГПа, $\nu_M=0.4999$ (правый рис.3б) при объемном наполнении включений 1%. Функционально-градиентный межфазный слой G_L состоит из $N=100$ концентрических подслоев G_j с параметрами (см. рис.5)

$$E_j = E_I - j \frac{E_I - E_M}{N}, \quad \nu_j = 0.3, \quad r_j = q^j r_1, \quad q = 1.015, \quad 1 \leq j \leq N.$$

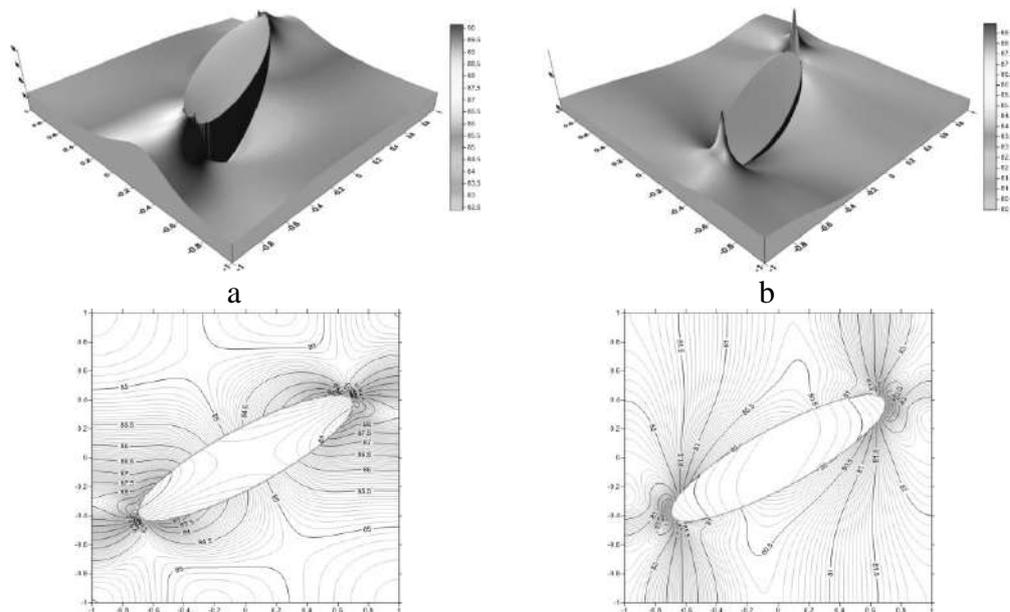


Рис.2. Линии уровня и поверхность распределения напряжений в задаче на ячейке для дисперсного композита с эллиптическим включением: а) распределение компоненты напряжений σ_{11} ; б) распределение компоненты напряжений σ_{22} .

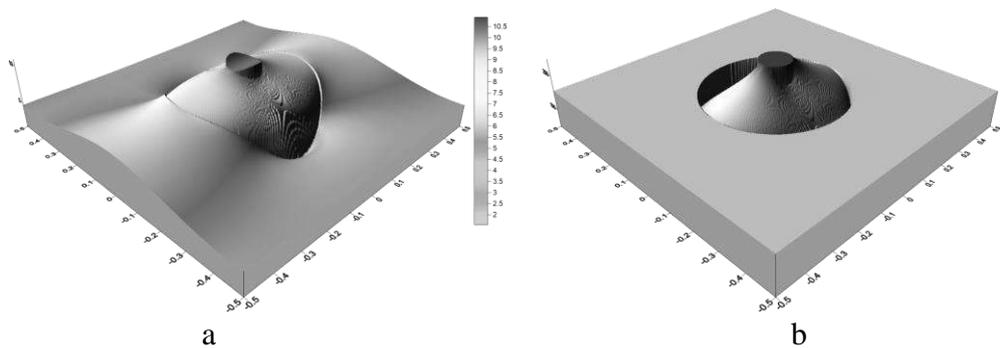


Рис.3. Компонента напряжений σ_{11} в задаче на ячейке для волокна с функционально-градиентным межфазным слоем при деформации 1% вдоль оси x ; а) распределение в эпоксидной матрице, б) распределение в эластомерной почти несжимаемой матрице.

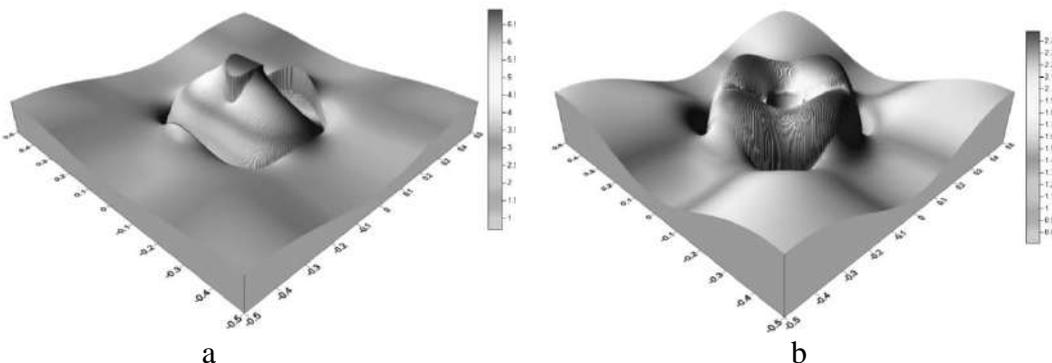


Рис.4. Компонента напряжений σ_{11} (а) и σ_{12} (б) в задаче на ячейке для волокна с функционально-градиентным межфазным слоем в эпоксидной матрице при 1% деформации.

Задача решалась с помощью функций формы (см. [10]), обеспечивающих аналитически точно все контактные условия (условия идеального контакта), методом Треффтца обеспечивались периодические граничные условия для задачи на ячейке на одном квадратном блоке. На рис.3 представлены результаты расчета т.н. «локальной матрицы жесткости» метода асимптотического усреднения, представляющей собой локальную картину напряжений при нормированной средней деформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle = 0.01$: для эпоксидной матрицы (левый рис.3а) и эластомерной матрицы (правый рис.3б). Наблюдается качественное различие в распределении внутренних напряжений: в первом случае обеспечивается более равномерное распределение напряжений на границе между межфазным слоем и матрицей.

Результатом усреднения по ячейке распределений локальных напряжений при различных средних деформациях в методе асимптотического усреднения определяет значение модулей глобальной матрицы жесткости. На рис.4 приведены такие картины для σ_{22} при $\langle \varepsilon_{11} \rangle = 0.01$ и σ_{12} при $\langle \varepsilon_{12} \rangle = 0.01$ для композита с эпоксидной матрицей, определяющие соответственно первый и второй параметры Ламе λ и μ . Детализация картины распределения напряжений достигалась за счет вывода результатов в формате Surfer на прямоугольной сетке с плотностью 401×401 точек.

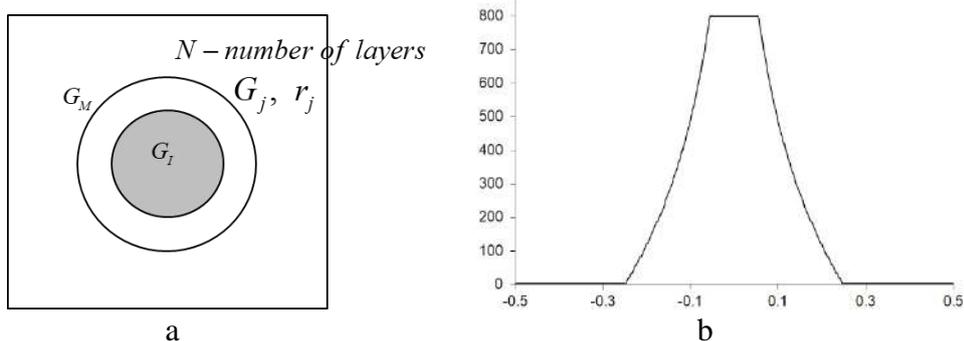


Рис.5. а) структура функционально-градиентного межфазного слоя для волокнистого композита; б) распределение модуля упругости по сечению волокна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана блочная схема Треффтца для решения задач классической и градиентной теории упругости в структурно-неоднородных средах с включениями различной формы (сферические, цилиндрические, эллиптические, сфероидальные). Эта схема использует конечно-элементную сетку или разбиения исходной области на односвязные или двусвязные блоки с криволинейной границей. Аппроксимация осуществляется в разрывном пространстве на независимых в блоках, полных системах функций, являющихся фундаментальными решениями уравнения Гельмгольца и Лапласа. За счет аналитического представления решения с помощью потенциалов Папковича-Нейбера обеспечивается точное удовлетворение исходному уравнению и контактным условиям на межфазных границах. Задача минимизации исходного квадратичного функционала энергии на специальном образом сконструированной норме по границе блоков сводится к блочной системе уравнений, которая

обеспечивает сшивку всех необходимых величин по границе элементов: перемещений, поверхностных сил, а для градиентных уравнений теории упругости еще и производных перемещений, и когезионных моментов. В качестве приложения разработанной схемы, реализованной в конечно-элементном пакете Uway, предлагается использовать ее для точного, почти аналитического решения задачи на ячейке в методе асимптотического усреднения Бахвалова, на основе которой определяются эффективные деформационные и прочностные характеристики композитных материалов в рамках классической и градиентной теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков-Богородский Д.Б. *Разработка блочного аналитико-численного метода решения задач механики и акустики* / Школа-семинар «Композиционные материалы». Сборник трудов. – М.: ИПРИМ РАН, 2000. – С.44-56.
2. Сьярле Ф. *Метод конечных элементов для эллиптических задач*. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
3. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике*. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
4. Zielinski A.P., Zienkiewicz O.C. *Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution functions* // Int. J. Num. Meth. Eng. – 1985. – Vol.21. – Pp.509-528.
5. Trefftz E. *Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren* // Proc. 2nd Int. Cong. Appl. Mech. – Zurich, 1926. – Pp.131-137.
6. Волков-Богородский Д.Б., Сушко Г.Б., Харченко С.А. *Комбинированная MPI+threads параллельная реализация метода блоков для моделирования тепловых процессов в структурно-неоднородных средах* // Вычислительные методы и программирование. – 2010. – Т.11. – С.127-136.
7. Волков-Богородский Д.Б. *Подход к задачам о взаимодействии акустической и упругой среды с помощью блочного метода мультиполей* / XI Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред». Материалы. Т.2. – М.: МАИ, 2005. – С.17-22.
8. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
9. Волков-Богородский Д.Б. *Аппроксимации на основе обобщенного метода Треффтца в задачах градиентной теории упругости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т.28. – №4. – С.524-542.
10. Volkov-Bogorodskiy D.B. *Structural Analysis in the Problems of Gradient Elasticity* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol.44. – No.6. – Pp.2480-2500.

УДК 544.187

EDN NLUNGW (<https://elibrary.ru/nlungw>)

DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.34



КВАНТОВО-ХИМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОНФОРМЕРОВ ПОЛИМЕРА ЗИЛОН

Никитин С.М.^{1,2}, Карнет Ю.Н.¹

¹ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

²НИИЯФ МГУ, г. Москва, Россия

Зилон был открыт еще в прошлом веке, но до сих пор остается одним из самых прочных на разрыв полимеров. Структурная формула Зилона приведена на рис.1.

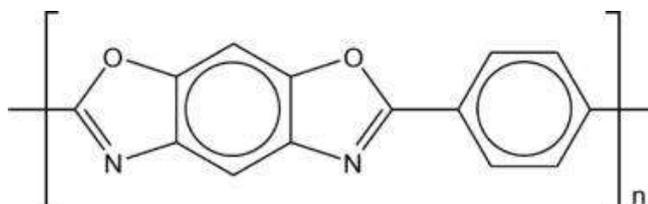


Рис.1. Структура мономерной единицы полимера Зилон.

Исходя из структурной формулы, можно строить модели полимера двумя способами.

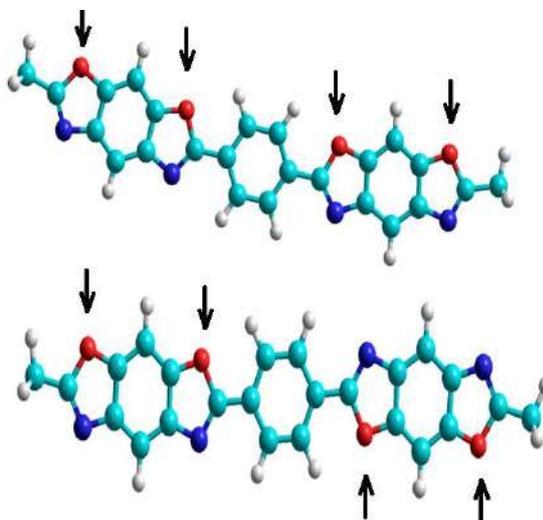


Рис.2. Варианты расположения бензобисоксазоловых фрагментов полимерной цепи относительно друг друга.

На рис.2 представлены варианты расположения соседних бензобисоксазоловых фрагментов полимерной цепи относительно друг друга. Стрелками выделены атомы – кислорода. Структуры оптимизированы по энергии полуэмпирическим методом с параметризацией AM-1. Если бы реализовался только один вариант расположения мономерных звеньев, когда все атомы кислорода находятся по одну сторону цепи, а все атомы азота по другую,

то полимер образовывал бы окружность или ее фрагмент как показано на рис.3.



Рис.3. Фрагмент полимера, включающий пять мономерных остатков. Для образования окружности необходимо 25 остатков.

При синтезе полимера мономерные фрагменты располагаются случайным образом. Мы рассчитали барьер вращения вокруг связи между фениленовым и оксазольным фрагментами. Он оказался равен 2.63 Ккал/моль. Используемая для расчетов модель приведена на рис.4. Атомы, образующие двугранный угол, выделены стрелкой.

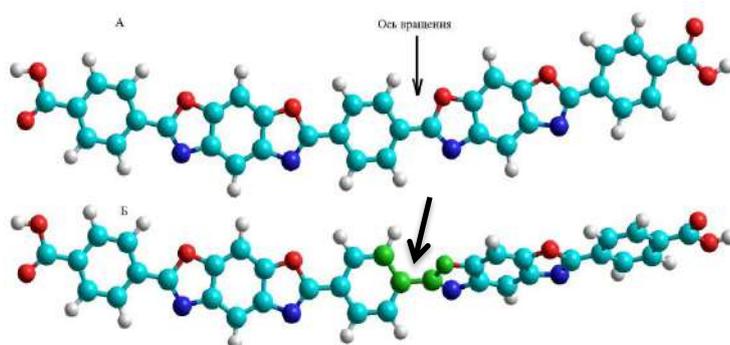


Рис.4. Модельная структура, использованная для расчета барьера при вращении вокруг связи фенилен-оксазол.

Несмотря на невысокий барьер вращения вокруг связи, вращение фрагментов полимера, находящегося в виде сплошного блока, будет сильно затруднено из-за контактов между цепями. В то же время в процессе фабрикации из полимера волокна связанного с принудительным вытягиванием структура с чередующимся расположением атомов кислорода и азота становится предпочтительной. На рис.5 приведены два фрагмента цепи полимера с чередованием расположения гетероатомов.

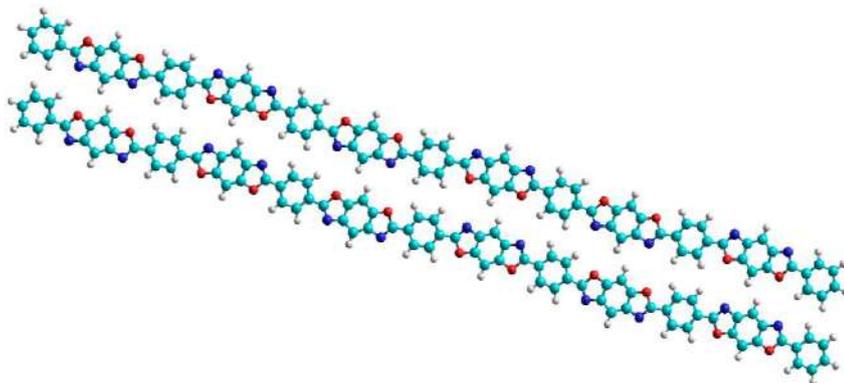


Рис.5. Взаимное расположение двух отрезков цепи с чередующимся расположением фрагментов.

Данная структура оптимизирована по энергии. Расстояния между атомами азота и кислорода соседних цепей составляет 4.2-4.3 Å.

Следует отметить, что свести аналогичным образом фрагменты цепей без чередования расположения гетероатомов невозможно.

ВЫВОДЫ

Цепь Зилона не является строго линейной, а представляет собой ломаную линию.

Входящие в состав цепи бензобисоксазоловые блоки ориентированы азотами как в одну, так и в другую сторону. Разнонаправленная ориентация возникает в процессе синтеза. Барьер вращения бензобисоксазолового блока низкий и если выполняются дополнительные условия (разбавленный маловязкий раствор, повышенная температура, приложение механических нагрузок), то возможны соответствующие конформационные переходы в полимерных цепях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wolfe J.F., Arnold F.E. *Rigid-rod polymers. 1. Synthesis and thermal properties of para-aromatic polymers with 2,6-benzobisoxazole units in the main chain* // *Macromolecules*. – 1981. – Vol.14. – Pp.909-915.
2. Nikitin S.M., Karnet Yu.N. *Quantum-chemical calculation of single chain folding of poly (p-phenylene-2,6-benzobisoxazole) (Zylon®)* // *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*. – 2024. – Vol.15. – Iss.1. – Pp.1-6.
3. Dewar M.J.S., Healy E.F., Holder A.J., Yuan Y.Ch. *Comments on a Comparison of AMI with Recently Developed PM3 Method* // *Journal of Computational Chemistry*. – 1990. – Vol.11. – No.4. – Pp.541-542.
4. Hu K., Wang L., Liu X., Zhuang Q., Xue Zh., Han Zh. *Charge distribution of poly (p-phenylenebenzobisoxazole) investigated by quantum chemical simulation* // *Computational and Theoretical Chemistry*. – 2014. – Vol.1042. – Pp.1-7.
5. Huang Y.K., Frings P.H., Hennes E. *Mechanical properties of Zylon/epoxy composite* // *Composites Part B: Engineering*. – 2002. – Vol.33. – No.2. – Pp.109-115.
6. Karnet Yu.N., Nikitin S.M., Nikitina E.A., Yanovskii Yu.G. *Computer simulation of mechanical properties of carbon nanostructures* // *Mechanics of Solids*. – 2010. – Vol.45. – No.4. – Pp.595-609.
7. Porter R.S., Wang L.-H. *Uniaxial extension and order development in flexible chain polymers* // *Journal of Macromolecular Science, Part C: Polymer Reviews*. – 1995. – Vol.35. – No.1. – Pp.63-115.
8. Tashiro K., Yoshino J. et al. *Crystal Structure and Packing Disorder of Poly (p-phenylenebenzobisoxazole): Structural Analysis by an Organized Combination of X-ray Imaging Plate System and Computer simulation Technique* // *Macromolecules*. – 1998. – Vol.31. – Pp.5430-5440.



ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОГО ТЕНЗОРА ЖЕСТКОСТИ СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Семенов М.А., Власов А.Н.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

Рассматриваются методы определения эффективного тензора жесткости структурно неоднородных сред на примере мерзлых грунтов. Применен метод асимптотического усреднения с использованием программного комплекса конечно-элементного анализа.

ВВЕДЕНИЕ

Решение задач геомеханики это в первую очередь определение механических характеристик структурно неоднородных сред, представленных грунтами. Их механические свойства определяются при инженерно-геологических изысканиях в полевых условиях, а также в результате лабораторных исследований образцов, отобранных во время инженерно-геологических изысканий в поле. Далее заметим, что свойства мерзлых грунтов могут сильно зависеть от температуры. Изменение температуры даже на 0.1°C у высокотемпературных мерзлых грунтов их механические характеристики могут существенно измениться. В силу этого определение свойств мерзлых грунтов, как правило, требует существенных трудозатрат и времени. В случае же скальных грунтов определение их механических характеристик зачастую невозможно ни в полевых условиях и тем более в лабораторных в силу ярко выраженного масштабного эффекта.

В данной работе рассматривается задача определения деформационных свойств мерзлых грунтов. Решение этой задачи реализовано использованием аналитико-численного метода, основанного на параметрическом методе асимптотического усреднения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как упоминалось во введении, механические характеристики грунтов сильно зависят от температуры. Особенно сильно это проявляется в отрицательной области значения близкой к температуре фазовых переходов лед – жидкость. На рис.1,2 представлены зависимости модуля общей деформации мерзлых глины и суглинка от температуры.

Решение задачи определения деформационных свойств мерзлых грунтов будет строиться на основе параметрического метода асимптотического усреднения. В данной работе решалась задача определения эффективных свойств песчаник базальной структуры (песок во льду). Такие пески встречаются, например, в районе Бованенковского месторождения.

Асимптотический метод усреднения дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами позволяет получить уравнения, коэффициенты которых не являются быстро осциллирующими, а решения полученных уравнений

близки к решениям исходных уравнений при соответствующих граничных условиях [1].

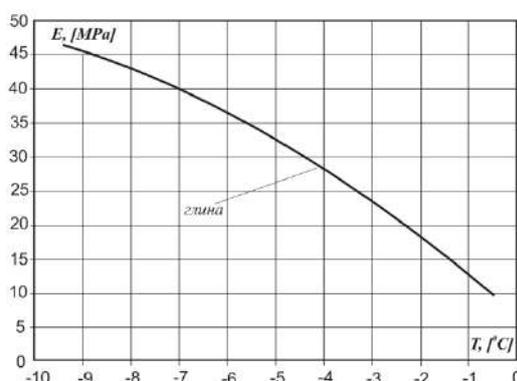


Рис.1. Зависимость модуля общей деформации глины от температуры.

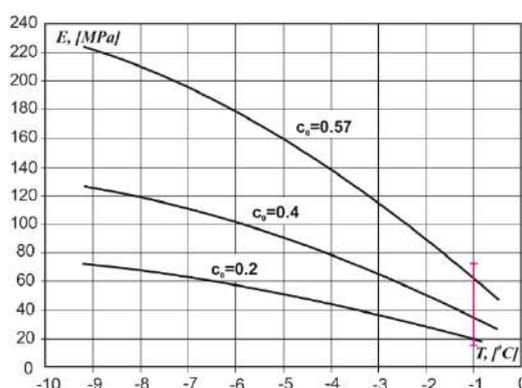


Рис.2. Зависимость модуля общей деформации мёрзлой супеси от температуры.

Для определения эффективных деформационных характеристик с использованием метода асимптотического усреднения необходимо решить задачу на ячейке [1,2]

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(A_{ij}(\xi) \frac{\partial M_{i_1}}{\partial \xi_i} \right) = 0, \quad \langle M_{i_1} \rangle = E, \quad [M_{i_1}] = \left[n_i A_{ij}(\xi) \frac{\partial M_{i_1}}{\partial \xi_i} \right] = 0. \quad (1)$$

Пример ячейки периодичности представлен на рис.3.

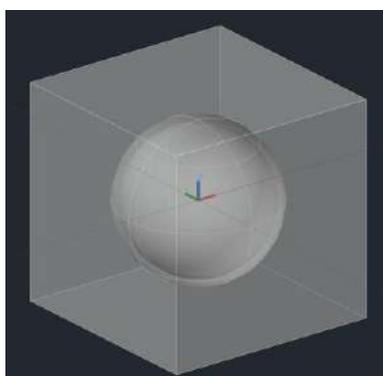


Рис.3. Модель ячейки периодичности.

После усреднения по ячейке получаем эффективный тензор жесткости

$$\hat{A}_{i_1 i_2} = \left\langle A_{i_1 j} \frac{\partial M_{i_1}}{\partial \xi_j} \right\rangle. \quad (2)$$

Здесь $A_{ij}(\xi) = \|c_{ijkl}\|$ – матрицы, составленные из компонентов тензора жесткости;
 $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – вектор нормали к границе раздела фаз.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКОГО СОСТАВА ПЕСКА

Для оценки свойств мерзлого песка (песок в ледяной матрице) необходимо было определить его гранулометрический состав, из которого были изготовлены образцы песчаник базальной структуры. Гранулометрический состав песка определялся методом просеивания через сита (рис.4) с отверстиями 2; 1,0; 0,5; 0,25; 0,10 мм [3].



Рис.4. Определение гранулометрического состава песка.

Были изготовлены образцы двух видов по гранулометрическому составу (см. таблицу 1).

Таблица 1.

Гранулометрический состав образцов.

Размер сита, мм	Образец 1, г	Образец 2, г
2	0,01	0
1	0,22	1,03
0,5	0,68	1,34
0,25	97,38	74,15
0,1	1,51	23,05
< 0,1	0,13	0,40

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО УСРЕДНЕНИЯ

В соответствии с методом асимптотического усреднения по определению эффективных деформационных характеристик решалась задача на ячейке с использованием программном комплексе ANSYS. Для этого была построена

геометрическая модель песчаника базальной структуры. Модель представляла из себя кубическую матрицу из льда с размером граней 1.5 мм со сферическим включением из оксида кремния (песчинка) диаметром 1.1 мм (рис.3), что соответствует образцу 2.

Модуль деформации матрицы принимался равным 6,5 ГПа. Такое значение модуля деформации лед может принимать при температуре при -6°C . Модуль деформации оксида кремния принимался в расчетах равным 34 ГПа.

После усреднения по формуле (2) решений задач на ячейке были получены следующее значение эффективного модуля общей деформации песчаника базальной структуры

$$E = 17.14 \text{ ГПа.} \quad (3)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Был рассмотрен пример применения модели асимптотического усреднения с помощью программы конечно-элементного анализа. Данный метод будет возможно применять на практике, так как он может учитывать разную структуру грунтов и температуру.

В дальнейшем планируется данный метод подтвердить экспериментом и рассмотреть вязкоупругие модели материалов, рассмотреть разные модели ячеек и сравнить между собой и экспериментом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б. *Параметрический метод асимптотического усреднения для нелинейных уравнений термоупругости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.491-507.
2. Бахвалов Н.С., Панасенко. Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах.* – М.: Наука, 1984. – 352 с.
3. *ГОСТ 12536-2014. Методы лабораторного определения гранулометрического (зернового) и микроагрегатного состава.*

**Высокоскоростной удар,
распространение и взаимодействие
волн и вихрей в деформируемых
твердых, жидких и газообразных
средах**



СТАЦИОНАРНЫЕ И НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СТРУКТУРЫ РАЗРЫВОВ В ДВУХЖИДКОСТНОЙ ПЛАЗМЕ, ОПИСЫВАЕМЫЕ УРАВНЕНИЯМИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Бахолдин И.Б.

*Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН,
 г. Москва, Россия*

Ранее была разработана теория бездиссипативных и слабодиссипативных структур разрывов [1-3], согласно этой теории решения задачи о распаде произвольного разрыва в недиссипативном случае содержат расширяющиеся области, однородные участки, волновые зоны и центрированные простые волны. В слабодиссипативном случае с течением времени волновые зоны перестают расширяться. Упорядоченные волновые зоны описываются усредненными уравнениями. Эти области могут ограничиваться или разделяться обратимыми структурами разрывов, представляющими собой переходы между однородными или периодическими состояниями.

Уравнения электромагнитной гидродинамики плазмы выводятся из гидродинамических уравнений ионов и электронов с добавленными уравнениями Максвелла в пренебрежении током смещения и предположением квазинейтральности, т.е. совпадением концентраций зарядов ионов и электронов. В результате получаются уравнения обычной магнитной гидродинамики [4] с добавленными дисперсионными членами [5]. В одномерном случае уравнения, записанные в форме законов сохранения, имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nu^2 + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} + b^2 n \right) &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial nv}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nuv - B_x B_y + R_e^{-1} \frac{dB_z}{dt} \right) &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial nw}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nuw - B_x B_z - R_e^{-1} \frac{dB_y}{dt} \right) &= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(uB_y - B_x v - R_i^{-1} \frac{dw}{dt} \right) &= \varepsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(uB_z - B_x w + R_i^{-1} \frac{dv}{dt} \right) &= \varepsilon \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}, & \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla, \end{aligned} \quad (1)$$

n – плотность частиц (объемная концентрация заряда) ионов или электронов, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ – напряженность магнитного поля, и $\mathbf{v} = (u, v, w)$ скорость ионов. Используются безразмерные величины. Они определяются через физические так: $x = \hat{x}/L$, $t = \hat{t}\omega_0$, $v = \hat{v}/V_A$, $B = \hat{\mathbf{B}}/|B_0|$, $n = \hat{n}/n_0$; L , $\omega_0 = V_A/L$, n_0 , $|B_0|$, $V_A = |B_0| [4\pi n_0 (m_e + m_i)]^{-1/2}$ – характерная длина, частота, плотность

невозмущенной плазмы, модуль вектора невозмущенного магнитного поля, альвеновская скорость. Здесь m_i и m_e – массы ионов и электронов, соответственно, ε – коэффициент магнитной вязкости, связанной с ионно-электронным трением, b^2 – коэффициент сжимаемости электронного газа. Параметры дисперсии R_i и R_e даются формулами: $R_i = \omega_{ic}/\omega_0$ и $R_e = \omega_{ec}/\omega_0$, где $\omega_{ic} = e|B_0|/(m_i c)$ и $\omega_{ec} = e|B_0|/(m_e c)$ – ионная и электронная циклотронные частоты соответственно, e – заряд электрона, c – скорость света. Для удобства расчета мы можем взять L таким, что $\omega_0 = \sqrt{\omega_{ic}\omega_{ec}}$, тогда $R_i = R_e^{-1} = \sqrt{m_i/m_e}$. Для одномерных движений компонента B_x магнитного поля остается константой все время движения. Здесь включены коэффициенты вязкости ионного газа λ и μ так, как это принято в механике сплошной среды. Существует и другой вариант уравнений электромагнитной гидродинамики, где в качестве неизвестных используется среднemasовая скорость среды и ее плотность [6]. У рассматриваемых уравнений скорость распространения коротких волн конечная, поэтому при отсутствии диссипации возможны как образования бездиссипативных структур в случае умеренных амплитуд разрывов, так и опрокидывание волн в случае больших амплитуд. Можно также использовать более простой вариант уравнений, где $R_e^{-1} = 0$.

Дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$ содержит ветви быстрых магнитозвуковых, альвеновских и медленных магнитозвуковых волн. Быстрая магнитозвуковая ветвь имеет точку перегиба при $k > 0$ при $\theta > \theta_c$, где $\theta = \arctan\left(\sqrt{B_y^2 + B_z^2}/B_x\right)$, есть пересечение с прямой, касательной в начале координат [3,5] (классических уединенных волн нет, возможны обобщенные и 1:1 уединенные волны). При $\theta < \theta_c$ точки перегиба и пересечения нет (возможны классические уединенные волны). В случае медленных магнитозвуковых волн всегда имеется пересечение с альвеновской ветвью (допустимо наличие обобщенных уединенных волн). В случае альвеновских волн в зависимости от значений V , θ и b возможно пересечение с быстрой магнитозвуковой ветвью, отсутствие пересечения, пересечение с альвеновской ветвью. Совпадение скоростей периодических волн при наличии рационального отношения периодов будем называть резонансом. Можно также говорить о резонансе между бесконечно длинными и короткими волнами. Резонансы прогнозируются по числу пересечений дисперсионной кривой и прямой $V = \omega/k$, V – скорость волн, но ниже рассматриваются и чисто нелинейные резонансы длинных магнитозвуковых и альвеновских волн, не определяемые таким способом. Уединенные волны можно находить как предельные решения последовательностей периодических волн, а структуры бездиссипативных разрывов – как предельные решения последовательностей уединенных волн. Имеются быстрые магнитозвуковые структуры разрывов, альвеновские структуры, медленные магнитозвуковые структуры.

В недиссипативном случае быстрые магнитозвуковые структуры имеют волновые зоны, расширяющиеся со временем. Бывают структуры солитонного типа, структуры с разрывом с излучением и структуры стохастического типа [3]. В первом случае на границе волновой зоны волны стремятся к уединенным

при $t \rightarrow \infty$. Во втором случае на границе имеется переход между однородным и периодическим состоянием. При добавлении слабой диссипации волновая зона перестает расширяться со временем, приближенная уединенная волна и переход между однородным и периодическим состоянием сохраняются, решение становится стационарным, стохастическая структура может стать стационарной, может остаться стохастической, может стать периодической по времени [2,3].

Согласно теории [1,5] в результате резонанса с альвеновскими волнами в медленных магнитозвуковых структурах должно наблюдаться излучение коротких альвеновских волн внутрь расширяющейся структуры, что должно приводить к стохастическому ее характеру. В расчетах уравнений (1) было невозможно обеспечить достаточно мелкий шаг, чтобы рассчитывать короткие альвеновские волны. Фактически наблюдались структуры солитонного типа или опрокидывание волны [3].

Альвеновские структуры в расчетах со временем расплывались без образования уединенных волн [3] как в бездиссипативном случае, так и с диссипацией. Факт расплывания альвеновских структур при включении диссипации в классической магнитной гидродинамике хорошо известен.

Еще при включении газодинамической вязкости встречаются ударные волны [3]. В них скорость разрыва и граничные условия на u и n определяются из интегрального вида первых двух уравнений системы (1), т.е. также как в газовой динамике, скачков поперечного магнитного поля и поперечных скоростей нет, но есть скачки производных от этих величин. Условия на производные определяются из интегрального вида остальных уравнений.

Особый интерес представляет взаимодействие магнитозвуковых и альвеновских волн при θ близком к $\pi/2$, и θ близком к нулю. В этих случаях скорость длинных альвеновских волн V_a близка к скоростям длинных медленных и быстрых магнитозвуковых волн, V_- и V_+ . Возможен нелинейный резонанс между длинными волнами [9,10]. Данные случаи наиболее интересны и с физической точки зрения, поскольку при этом затухание Ландау слабое.

Была разработана методика исследования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, позволяющая отображать ветви периодических решений уравнений бегущих волн, получаемых из системы (1), на некоторой плоскости [2,3,8-10]. Рассмотрим сначала случай θ близкого к $\pi/2$, приведенные ниже рисунки соответствуют $\theta = 1.525$, $b^2 = 0.5$, $V = V_-(1 + \mu)$.

Оказалось, что при достаточном удалении скорости альвеновских волн от скорости магнитозвуковых ветви медленных магнитозвуковых и коротких альвеновских волн образуют одну систему ветвей с двумя точками равновесия $1(M)$ и $2M$, рис.1, $\mu = 0.5$. И есть вторая система ветвей, ассоциированная с точкой $3A$. Здесь обозначения A или M указывают, что через точку проходит альвеновская или магнитозвуковая длинноволновая ветвь, через эти точки проходят и коротковолновые альвеновские ветви, (M) обозначает, что длинноволновая магнитозвуковая ветвь подходит к этой точке близко, через эту точку также проходит коротковолновая альвеновская ветвь. Используемая методика не позволяет построить детальное распределение ветвей и однозначно определить, доходит ли одноволновая ветвь до точки (M) при малых значениях μ , как это было сделано для быстрых магнитозвуковых волн [8]. Это связано

с большим отношением периодов коротких альвеновских и длинных медленных магнитозвуковых волн. Это не дает возможности определить, существует ли здесь обычная или обобщенная уединенная волна. Под обобщенной уединенной волной понимается комбинация из уединенной волны и периодического решения. Но при увеличении скорости V становится явно видно, что ветви с резонансом коротких альвеновских и длинных медленных магнитозвуковых волн отделены от точки $I(M)$. В случае же умеренных значений μ можно найти двоякопериодические решения, практически неотличимые от уединенных волн.

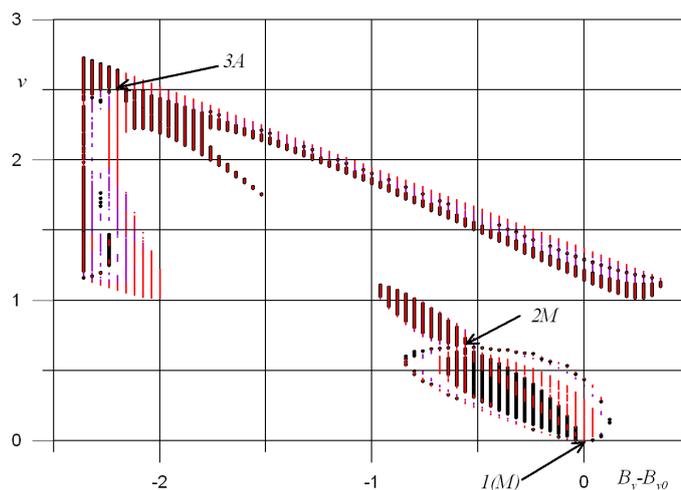


Рис.1.

При сближении скоростей медленных магнитозвуковых и альвеновских волн системы периодических волн, ассоциированных с точками 1, 2, 3 образуют единую систему, рис.2, $\mu = 0.575$. Появляются троякопериодические волны, связанные с одновременным резонансом длинных альвеновских, коротких альвеновских и длинных медленных магнитозвуковых волн. Им соответствует область между точками 2M и 3A. Помимо приближенного солитонного решения медленных магнитозвуковых волн появляется и гибридное приближенное солитонное решение, включающее длинноволновые альвеновские и медленные магнитозвуковые компоненты одновременно. У обеих уединенных волн подошва ассоциирована с точкой $I(M)$.

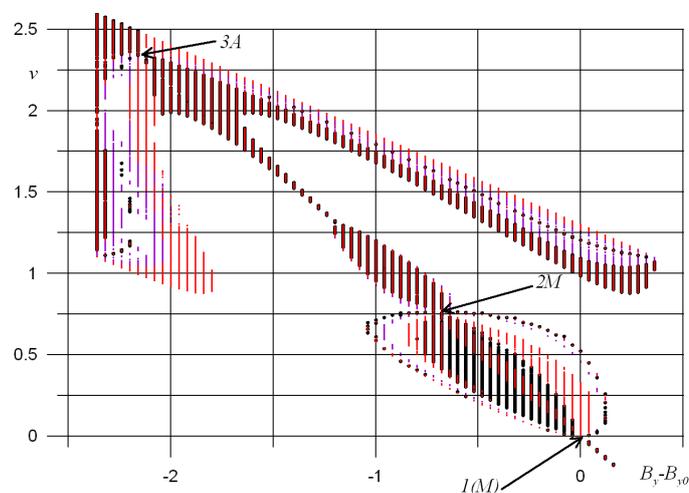


Рис.2.

В случае незначительного превышения магнитозвуковой скорости над альвеновской наблюдается аналогичное расположение ветвей, но точка $1(M)$ становится точкой $1A$, а точка $3A$ становится точкой $3(M)$, рис.3, $\mu = 0.8$. Также выявляются тройкопериодические решения и приближенные солитонные решения, но подошва уединенных волн теперь ассоциирована с точкой $3(M)$.

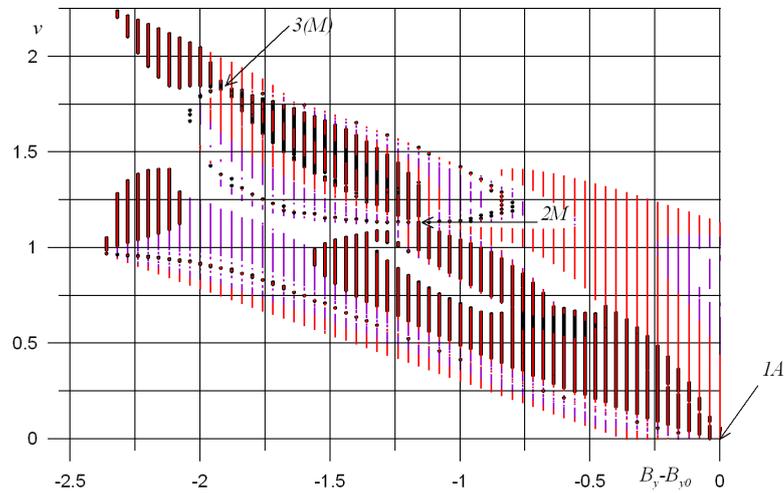


Рис.3.

При дальнейшем увеличении скорости магнитозвуковые точки пропадают и остаются только двоякопериодические альвеновские волны, рис.4, $\mu = 0.9$. Приближенных солитонных решений здесь нет.

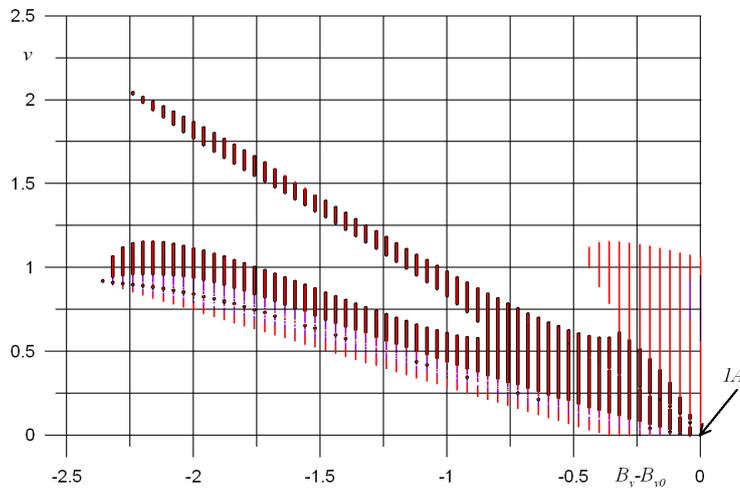


Рис.4.

Гиперболические уравнения классической магнитной гидродинамики могут рассматриваться как упрощенные уравнения по отношению к уравнениям электромагнитной гидродинамики. Поэтому можно рассмотреть эволюционность переходов между состояниями равновесия. Под эволюционностью понимается следующее: число граничных условий на разрыве равно числу уходящих характеристик плюс единица. Это необходимое условие для корректной постановки задачи для решений с разрывами. В этом смысле при $V_a > V_-$ эволюционны переходы $1 \rightarrow 2$ (медленный магнитозвуковой) и $3 \rightarrow 1$ (альвеновский). При $V_a < V_-$ эволюционны переходы $3 \rightarrow 2$ (медленный

магнитозвуковой) и $1 \rightarrow 3$ (альвеновский). Предполагается, что разрыв движется вправо, а учет состояний до и после разрыва идет справа налево. Число граничных условий определяется числом уравнений магнитной гидродинамики, которые можно записать в интегральной форме. Тип альвеновский или магнитозвуковой определяется тем, что соответствующие характеристики приходят по обе стороны разрыва, а для остальных характеристик одна из них уходящая, а другая приходящая. Переходы $3 \rightarrow 2$ при $V_a > V_-$ и $1 \rightarrow 2$ при $V_a < V_-$ – гибридные альвено-магнитозвуковые разрывы с приходящими характеристиками обоих типов с двух сторон. Они могут быть эволюционным, если число граничных условий меньше числа уравнений в форме законов сохранения, но здесь это невозможно. Разрывы такого типа рассматривались для двумерной эволюции гребня уединенной волны и двумерного распределения установившихся волн [1] и назывались пересечениями волн, но там фактически рассматривались двужначные решения. Для рассмотренных выше переходов существуют и системы периодических волн, позволяющие построить волновые зоны, приближенно описывающие такие переходы.

Было осуществлено и исследование уравнений бегущих волн при $R_e^{-1} = 0$ (система второго порядка). Это позволяет пренебречь короткими альвеновскими волнами и получить точные солитонные решения. Коротковолновые и резонансные ветви пропадают, точки без скобок становятся эллиптическими, а точки в скобках становятся гиперболическими и с ними ассоциированы подошвы уединенных волн. Затем была включена слабая магнитная диссипация с целью получения стационарных структур. Она показала, что существуют точные солитонные структуры для медленных магнитозвуковых разрывов и приближенные структуры для описанных выше альвеновских разрывов, чем меньше величина ε , тем точнее приближение. Кроме того, существуют точные решения для структуры альвено-магнитозвукового разрыва, рис.5, $\mu = 0.8$, $\varepsilon = 0.01$, отмечены участки, соответствующие точкам 1, 2, 3. Эта структура фактически состоит из приближенной альвеновской структуры (справа) и приближенной медленной магнитозвуковой (слева), поэтому рисунки с этими структурами не показаны. Структура имеет один внутренний свободный параметр. Это отличается от перехода между периодическим и двоякопериодическим состоянием [2] (класс +1), где дополнительный свободный параметр был связан с параметрами разрыва и разрыв был эволюционным. На рис.6 показана фазовая траектория рассматриваемого решения. Две точки равновесия хорошо заметны как места накручивания кривой. К третьей точке равновесия тянется «язык» слева. В не диссипативном случае из этой точки выходят сепаратрисы, соответствующие подошвам медленной магнитозвуковой и гибридной альвено-магнитозвуковой уединенной волны. В первом случае фазовая кривая огибает точку 2, а во втором огибает точки 1 и 2 одновременно. При $V_- \rightarrow V_a$ эти уединенные волны сливаются, а их длины (длину можно рассматривать по уровню половины амплитуды) увеличиваются.

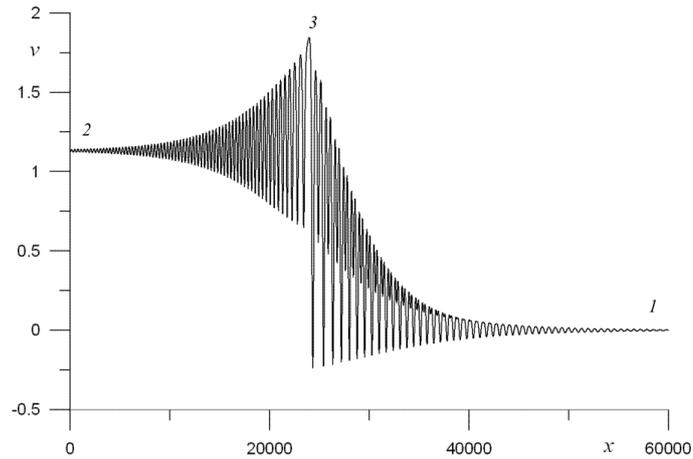


Рис.5.

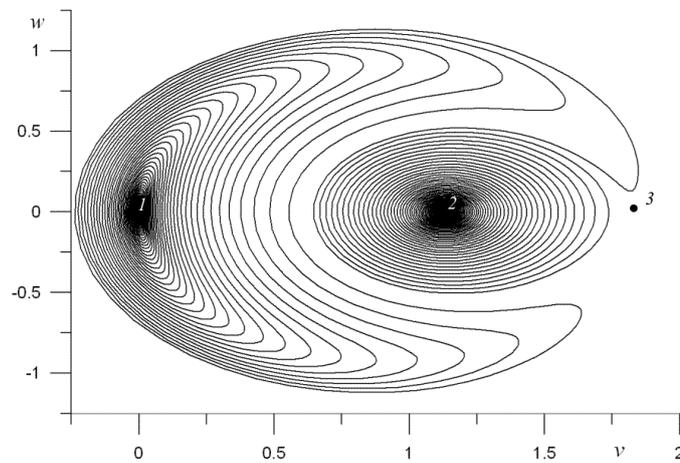


Рис.6.

Отметим, что расположение трех точек равновесия здесь принципиально отличается от случая модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза с кубической нелинейностью [1]. В случае этого уравнения вид фазового портрета зависит от знака при производной третьего порядка. Либо две крайние точки равновесия гиперболические и средняя эллиптическая, либо наоборот две крайние эллиптические и средняя гиперболическая. В первом случае есть уединенные волны и кинки, т.е. переходы между крайними точками, у них значение скорости вполне определенное. Во втором случае есть только уединенные волны. Здесь же одна крайняя точка эллиптическая, а другая – гиперболическая, средняя точка эллиптическая. Кинков здесь нет, но есть предельный аналог кинка. При $V = V_a = V_-$ есть предельные периодические решения, приближающиеся одновременно к двум крайним точкам, период волны при этом стремится к бесконечности, график похож на синусоиду.

Был осуществлен расчет эволюции начальных данных типа сглаженной ступеньки для исходных уравнений в частных производных. В случае ступеньки, соответствующей гибридной альвено-магнитозвуковой структуре возникало нестационарное решение с альвеновскими и альвено-магнитозвуковыми волновыми зонами, рис.7а, $t = 50000$ и $t = 100000$. При перемене сторон ступеньки местами возникал аналог простой волны, рис.7б. В случае значений, соответствующих рассмотренной выше эволюционной альвеновской структуре, соединяющей точки 1 и 3, возникло решение с нестационарным аналогом

альвеновского кинка с поворотом поперечного магнитного поля на 180 градусов, рис.8а. Причем такой нестационарный кинк возникал и при перемене сторон ступеньки местами, рис.8б. Заметим, что подобные решения задачи о распаде разрыва возникали и при исследовании модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза с кубической нелинейностью. Таким образом, если для решения задачи о распаде разрыва требуется кинк, он возникает здесь несмотря на то, что у уравнений бегущих волн имеются только периодические волны, лишь похожие на кинк.

Расчет уравнений (1) осуществлялся с включением магнитной вязкости, поэтому, несмотря на то что нет возможности рассчитывать короткие альвеновские волны, возникающие за счет резонанса, он правильный, поскольку такие волны должны подавляться вязкостью.

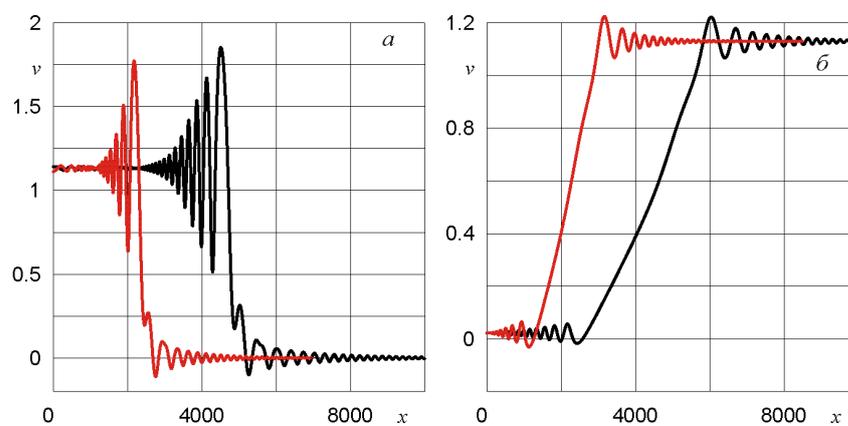


Рис.7.

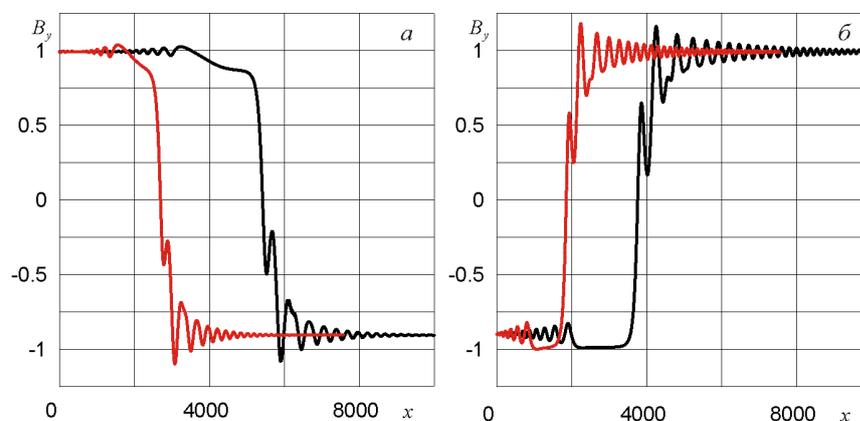


Рис.8.

Аналогичные картины расположения ветвей периодических решений были выявлены и при θ , близком к нулю, рис.9-10, $\theta = 0.3$, $V = V_a(1 + \mu)$. Также обнаружены три точки равновесия. И также тип крайних точек меняется в зависимости от того $V_a > V_+$, рис.9, $\mu = -0.0025$, или $V_a < V_+$, $\mu = 0.01$, рис.10. Также есть троякопериодические решения, но теперь за счет резонанса коротких и длинных быстрых магнитозвуковых и длинных альвеновских волн. Через точки A и M проходят длинноволновые альвеновская и быстрая магнитозвуковая ветви, а также коротковолновые быстрые магнитозвуковые ветви. Через точку (M) проходит коротковолновая быстрая магнитозвуковая ветвь, а длинноволновая быстрая магнитозвуковая ветвь к ней подходит (эта ветвь может состоять

из нескольких последовательно приближающихся к ней фрагментов [8]).

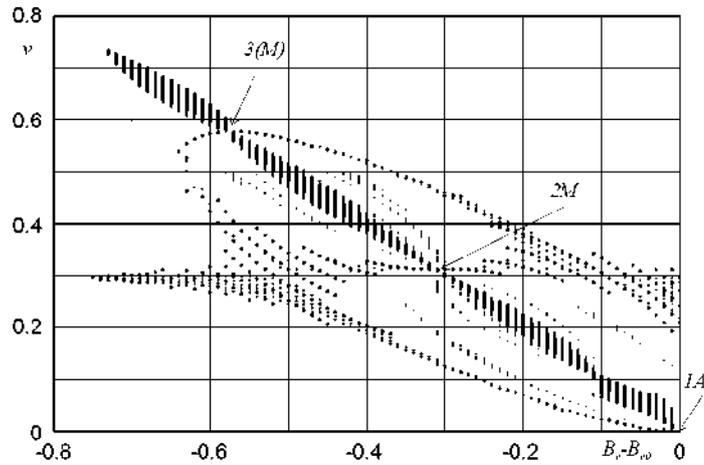


Рис.9.

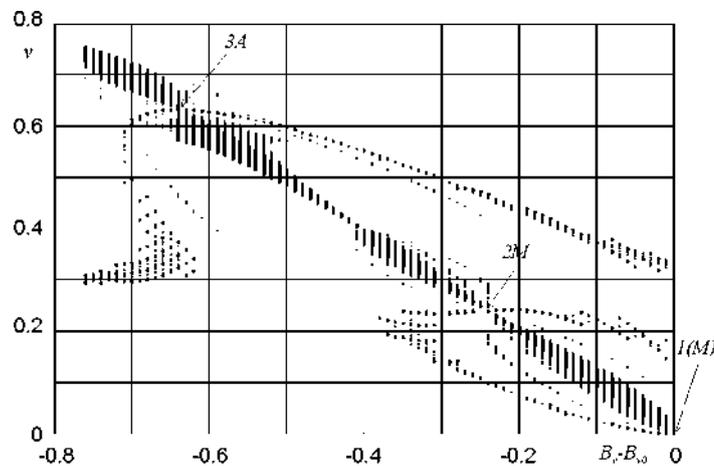


Рис.10.

Проведенные исследования периодических решений показали, что резонансные ветви могут заканчиваться заострением волн коротковолновой составляющей. Это позволяет предполагать, что при наличии резонанса опрокидывание длинных волн может приводить к излучению коротких и компенсировать опрокидывание, что аналогично действию вязкости. Затем короткие волны могут опрокинуться, что потребует включения вязких членов для получения классического непрерывного решения. Минимальная амплитуда коротковолновой составляющей в случае резонанса зависит не только от амплитуды длинноволновой (солитонной) компоненты, но и от соотношения длин волн, поэтому решения, близкие к солитонным, выявляются и при умеренных значениях амплитуды, если отношение длин волн велико. Отметим также, что наличие приближенных уединенных волн необязательно связано с наличием соответствующих резонансных периодических решений или обобщенных уединенных волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахолдин И.Б. *Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды*. – М.: Физматлит, 2004. – 318 с.

2. Бахолдин И.Б. *Стационарные и нестационарные структуры разрывов для моделей, описываемых обобщенным уравнением Кортевега-Бюргерса* // ПММ. – 2011. – Т.75. – №2. – С.271-302.
3. Бахолдин И.Б. *Анализ уравнений двухжидкостной плазмы в приближении электромагнитной гидродинамики и структур разрывов в их решениях* // ЖВММФ. – 2021. – Т.61. – №3. – С.458-474.
4. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. *Магнитная гидродинамика*. – М.: Логос, 2005. – 328 с.
5. Ильичев А.Т. *Уединенные волны в моделях гидромеханики*. – М.: Физматлит, 2003. – 256 с.
6. Гавриков М.Б. *Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика*. – М.: КРАСАНД, 2018. – 584 с.
7. Bakholdin I.B., Plichev A.T. *Fast magnetosonic solitonic structures in a quasi-neutral collision-free finite-beta plasma* // Wave Motion. – 2022. – Vol.112. – 102936.
8. Бахолдин И.Б. *Структуры бездиссипативных разрывов и уединенные волны в решениях уравнений двухжидкостной плазмы в приближении электромагнитной гидродинамики* // ЖВММФ. – 2022. – Т.62. – №12. – С.162-176.
9. Бахолдин И.Б. *Структуры разрывов и уединенные волны в электромагнитной гидродинамике, связанные с линейными и нелинейными резонансами альвеновских волн* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2023. – Т.63. – №11. – С.1894-1910.
10. Бахолдин И.Б. *Периодические и уединенные волны и бездиссипативные структуры разрывов в электромагнитной гидродинамике в случае резонанса волн* // Труды математического института им. В.А. Стеклова. – 2023. – Т.322. – С.24-37.



ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА АБСОЛЮТНО ТВЁРДОМ ЦИЛИНДРЕ С УПРУГИМ НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ

Белкин А.Э.

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

В работе рассматривается задача дифракции нестационарной акустической волны на абсолютно твёрдом цилиндре с упругим неоднородным покрытием. Нестационарные волны, в отличие от гармонических, являются обобщением понятия звуковой волны, куда более реалистично описывающим существующие в действительности механические колебания газов и жидкостей. Хотя стационарным (гармоническим, монохроматическим) волнам в последнее время посвящались многие работы (к примеру, [2-5]), нестационарные акустические импульсы также становились объектом исследования [1].

Перейдём к постановке задачи. Рассматривается трёхмерное пространство с введённой цилиндрической системой координат r, φ, z , заполненное идеальной сжимаемой жидкостью с равновесной плотностью ρ_i и скоростью звука c . В пространство помещён абсолютно твёрдый цилиндр, покрытый упругим радиально-неоднородным изотропным цилиндрическим слоем. Оси цилиндра и цилиндрического покрытия совпадают друг с другом и с осью Oz цилиндрической системы координат. Радиус твёрдого цилиндра равен R_0 , он же совпадает с внутренним радиусом покрытия. Внешний радиус неоднородного покрытия равен R . Плотность неоднородного покрытия – непрерывная функция $\rho(r)$, модули упругости Ламе – непрерывные функции $\lambda(r)$ и $\mu(r)$.

Из бесконечности на цилиндр с покрытием по нормали к его образующей набегают плоская нестационарная акустическая волна [7,8,10], записываемая в терминах давления p

$$p_i = f(ct + r \cos \varphi) \cdot [H(ct + r \cos \varphi) - H(c(t - T) + r \cos \varphi)],$$

где $f(\tau)$ – заданная функция (плотность сигнала); T – продолжительность действия звукового импульса; $H(\tau)$ – единичная функция Хевисайда, равная 0 при $\tau < 0$ и 1 при $\tau \geq 0$. Полагается, что фронт волны достигает внешней поверхности покрытия $r = R_1$ в момент времени $t = 0$. Требуется определить отражённое от цилиндра акустическое поле p_s . Так как фронт волны параллелен образующим цилиндра, то зависимость от координаты z искомой величины p_s отсутствует. Задача является осесимметричной и благодаря этому сводится к двумерной. Иллюстрация к постановке задачи приведена на рис.1.

Выбирая R характерной величины размерности длины, c – характерной величины размерности скорости, ρ_i – в качестве характерной величины

размерности плотности, запишем математическую постановку в безразмерных величинах. Величины x размерности длины заменяются по правилу $x = R\tilde{x}$; величины x размерности площади заменяются по правилу $x = R^2\tilde{x}$; величины x размерности времени заменяются по правилу $x = (1/c) \cdot R\tilde{x}$; величины x размерности скорости заменяются по правилу $x = c\tilde{x}$; величины x размерности плотности, измеряемые в $\text{кг}/\text{м}^3$, заменяются по правилу $x = \rho_i\tilde{x}$; величины x размерности давления, измеряемые в $\text{кг}/(\text{мс}^2)$, заменяются по правилу $x = \rho_i c^2\tilde{x}$.

Функция f заменяется по правилу $f(X) = \rho_i c^2 \tilde{f}\left(\frac{1}{R} \cdot X\right)$. Для любой величины x величина \tilde{x} является её безразмерным аналогом.

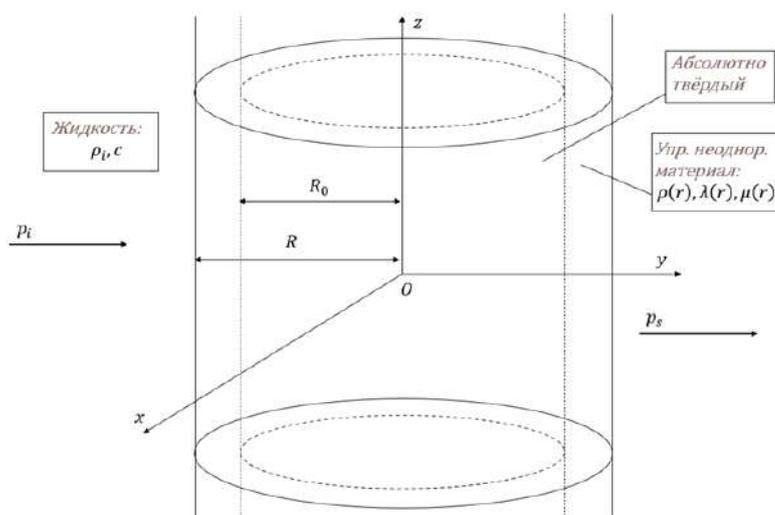


Рис.1. Иллюстрация к постановке задачи.

После выбора правил замены все формулы, включая уравнения и граничные условия, записываются в безразмерных величинах, при этом верхний значок (волна) опускается: вместо \tilde{x} используется обозначение x . В безразмерных величинах падающая волна записывается следующим образом

$$p_i = f(t + r \cos \varphi) \cdot [H(t + r \cos \varphi) - H(t - T + r \cos \varphi)].$$

С учётом осесимметричности, отражённая волна p_s удовлетворяет волновому уравнению, которое в цилиндрических координатах записывается так

$$\frac{\partial^2 p_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_s}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p_s}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 p_s}{\partial t^2} = 0.$$

Для отыскания отражённой волны p_s следует рассмотреть поля смещений и напряжений в неоднородном покрытии. С учётом осесимметричности задачи, смещение в покрытии может иметь только две ненулевые компоненты u_r , u_φ , которые удовлетворяют общим уравнениям движения сплошной среды

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} = \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} \end{cases}$$

Напряжения σ и смещения \bar{u} связаны также посредством других уравнений, а именно закона Гука

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\lambda + 2\mu}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \sigma_{r\varphi} = \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \end{cases}$$

В математическую постановку задачи входят волновое уравнение, общие уравнения движения упругой среды, закон Гука, дополненные рядом граничных условий. На внешней поверхности неоднородного покрытия, безразмерный радиус которой равен 1, вводятся условия контакта (равенство ускорений частиц жидкости и покрытия; равенство давления жидкости нормальному напряжению покрытия; отсутствие касательного напряжения)

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \right|_{r=1} = - \left(\frac{\partial p_i}{\partial r} + \frac{\partial p_s}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} \\ \left. \sigma_{rr} \right|_{r=1} = - (p_i + p_s) \Big|_{r=1} \\ \left. \sigma_{r\varphi} \right|_{r=1} = 0 \end{cases}$$

На внутренней поверхности неоднородного покрытия, безразмерный радиус которой равен R_0/R , вводятся условия контакта (смещения равны нулю, так как они отсутствуют в твёрдом внутреннем цилиндре)

$$\begin{cases} u_r \Big|_{r=R_0/R} = 0 \\ u_\varphi \Big|_{r=R_0/R} = 0 \end{cases}$$

Также вводится условие Зоммерфельда излучения на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial p_s}{\partial r} - \frac{\partial p_s}{\partial t} \right) = 0.$$

Заменим все величины, рассматриваемые в задаче, их изображениями, применив ко всем уравнениям и граничным условиям преобразование Фурье [6]

$$\hat{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{i\omega t} dt.$$

Отметим важное свойство преобразования Фурье

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial X(t)}{\partial t} e^{i\omega t} dt = -i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{i\omega t} dt = -i\omega \hat{X}(\omega).$$

Изображение объекта $X(t)$ далее будет обозначаться $\hat{X}(\omega)$. Подставляя формулу падающей волны в преобразование Фурье и используя теорему сложения для цилиндрических функций, можно представить изображение $\hat{p}_i(r, \varphi, \omega)$ в виде

$$\hat{p}_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{v}(\omega) J_n(\omega r) e^{in\varphi},$$

где J_n – цилиндрическая функция Бесселя первого рода порядка n ;

$\hat{v}(\omega) = (-i)^n \int_0^T f(t) e^{i\omega t} dt$. Применяя преобразование Фурье к волновому

уравнению, получаем уравнение Гельмгольца, которому должно удовлетворять изображение рассеянной волны $\hat{p}_s(r, \varphi, \omega)$

$$\frac{\partial^2 \hat{p}_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{p}_s}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{p}_s}{\partial \varphi^2} + \omega^2 \hat{p}_s = 0.$$

Применение преобразования Фурье к условию излучения на бесконечности даёт соответствующее условие для уравнения Гельмгольца [9]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \hat{p}_s}{\partial r} + i\omega \hat{p}_s \right) = 0.$$

Далее получим изображения уравнений, описывающих неоднородное покрытие. Применение преобразования Фурье к уравнениям движения дают следующую систему уравнений, которую далее будем обозначать У1

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\sigma}_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\sigma}_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\hat{\sigma}_{rr} - \hat{\sigma}_{\varphi\varphi}}{r} + \rho\omega^2 \hat{u}_r = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\sigma}_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \frac{\hat{\sigma}_{r\varphi}}{r} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{r\varphi}}{\partial r} + \rho\omega^2 \hat{u}_\varphi = 0 \end{cases}$$

Применение преобразования Фурье к закону Гука дают систему уравнений, которую далее будем обозначать У2

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \left(\frac{\partial \hat{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \hat{u}_r \right) \\ \hat{\sigma}_{\varphi\varphi} = \frac{\lambda + 2\mu}{r} \left(\frac{\partial \hat{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \hat{u}_r \right) + \lambda \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial r} \\ \hat{\sigma}_{r\varphi} = \mu \left(\frac{\partial \hat{u}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \varphi} - \frac{\hat{u}_\varphi}{r} \right) \end{cases}$$

Граничные условия на границе между неоднородным покрытием цилиндра и жидкостью после применения к ним преобразования Фурье принимают форму

$$\begin{cases} \left(\omega^2 \hat{u}_r - \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial r} - \frac{\partial \hat{p}_s}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = 0 \\ (\hat{\sigma}_{rr} + \hat{p}_i + \hat{p}_s) \Big|_{r=1} = 0 \\ \hat{\sigma}_{r\varphi} \Big|_{r=1} = 0 \end{cases}$$

Граничные условия на границе между неоднородным покрытием и твёрдым цилиндром после применения к ним преобразования Фурье принимают форму

$$\begin{cases} \hat{u}_r \Big|_{r=R_0/R} = 0 \\ \hat{u}_\varphi \Big|_{r=R_0/R} = 0 \end{cases}$$

С помощью метода разделения переменных возможно найти решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющего условию на бесконечности, в виде бесконечного ряда

$$\hat{p}_s(r, \varphi, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(\omega) \hat{v}(\omega) H_n(\omega r) e^{in\varphi},$$

где H_n – цилиндрическая функция Ханкеля 1-ого рода порядка n ; $A_n(\omega)$ – коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий.

Так как компоненты вектора смещений и тензора напряжений частиц неоднородного упругого покрытия (а также их изображения) должны быть периодическими функциями координаты φ , можно искать функции $\hat{u}_r, \hat{u}_\varphi, \hat{\sigma}_{rr}$ и $\hat{\sigma}_{r\varphi}$ в виде бесконечных рядов

$$\begin{cases} \hat{u}_r(r, \varphi, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{U}_{r_n}(r, \omega) \hat{v}(\omega) e^{in\varphi} \\ \hat{u}_\varphi(r, \varphi, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{U}_{\varphi_n}(r, \omega) \hat{v}(\omega) e^{in\varphi} \\ \hat{\sigma}_{rr}(r, \varphi, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\sigma}_{r_n}(r, \omega) \hat{v}(\omega) e^{in\varphi} \\ \hat{\sigma}_{r\varphi}(r, \varphi, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\sigma}_{r\varphi_n}(r, \omega) \hat{v}(\omega) e^{in\varphi} \end{cases}$$

Используя эти представления, приведём систему дифференциальных уравнений в частных производных У1 к виду системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{U}'_n = \mathbf{D}_n^{(1)} \mathbf{U}_n + \mathbf{E}_n^{(1)} \mathbf{W}_n,$$

где

$$\mathbf{U}_n(r, \omega) = \begin{pmatrix} \hat{U}_{r_n}(r, \omega) \\ \hat{U}_{\varphi_n}(r, \omega) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_n(r, \omega) = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{r_n}(r, \omega) \\ \hat{\sigma}_{r\varphi_n}(r, \omega) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_n^{(1)}(r, \omega) = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)r} & -\frac{\lambda in}{(\lambda + 2\mu)r} \\ -\frac{in}{r} & \frac{1}{r} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_n^{(1)}(r, \omega) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda + 2\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}.$$

Штрих в верхнем индексе означает дифференцирование по r .

Аналогичным образом приведём систему дифференциальных уравнений в частных производных У2 к виду системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{W}'_n = \mathbf{D}_n^{(2)} \mathbf{U}_n + \mathbf{E}_n^{(2)} \mathbf{W}_n,$$

$$\mathbf{D}_n^{(2)}(r, \omega) = \begin{pmatrix} \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)r^2} & \frac{4\mu(\lambda + \mu)in}{(\lambda + 2\mu)r^2} \\ -\frac{4\mu(\lambda + \mu)in}{(\lambda + 2\mu)r^2} & \frac{4\mu(\lambda + \mu)n^2}{(\lambda + 2\mu)r^2} \end{pmatrix} - \rho\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_n^{(2)}(r, \omega) = - \begin{pmatrix} \frac{2\mu}{(\lambda + 2\mu)r} & \frac{i\eta}{r} \\ \frac{\lambda i\eta}{(\lambda + 2\mu)r} & \frac{2}{r} \end{pmatrix}.$$

Записанные уравнения вместе образуют систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами относительно неизвестных $\hat{U}_{r_n}, \hat{U}_{\varphi_n}, \hat{\sigma}_{r_n}, \hat{\sigma}_{\varphi_n}$. Дополняя дифуравнения краевыми условиями, можно однозначно определить значения смещений и напряжений в неоднородном покрытии. Подставляя бесконечные ряды в первое граничное условие и используя ортогональность функций $e^{i\eta\varphi}$, получаем для каждого n формулу

$$\omega \cdot \hat{U}_{r_n}(1, \omega) - J'_n(\omega) - A_n(\omega) H'_n(\omega) = 0.$$

Записывая её в следующем виде, получаем возможность вычислить коэффициенты $A_n(\omega)$ по известным значениям $\hat{U}_{r_n}(R_1, \omega)$

$$A_n(\omega) = \frac{\omega \cdot \hat{U}_{r_n}(1, \omega) - J'_n(\omega)}{H'_n(\omega)}.$$

Аналогичным образом, используя представления в виде бесконечных рядов, получаем из второго и третьего граничных условий систему краевых условий

$$(\mathbf{W}_n + \mathbf{G}_n \mathbf{U}_n)|_{r=1} = \mathbf{Q}_n,$$

где

$$\mathbf{G}_n(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{\omega H_n(\omega)}{H'_n(\omega)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_n(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{J'_n(\omega) H_n(\omega)}{H'_n(\omega)} - J_n(\omega) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя бесконечные ряды в последние два граничных условия, получаем для каждого n краевые условия

$$\mathbf{U}_n|_{r=R_0/R} = 0.$$

Таким образом, краевая задача для определения функций $\hat{U}_{r_n}, \hat{U}_{\varphi_n}, \hat{\sigma}_{r_n}, \hat{\sigma}_{\varphi_n}$ в упругом неоднородном покрытии состоит из записанных выше уравнений, дополненных граничными условиями.

Краевую задачу представим в виде

$$\begin{cases} \mathbf{U}'_n = \mathbf{D}_n^{(1)} \mathbf{U}_n + \mathbf{E}_n^{(1)} \mathbf{W}_n \\ \mathbf{W}'_n = \mathbf{D}_n^{(2)} \mathbf{U}_n + \mathbf{E}_n^{(2)} \mathbf{W}_n \\ (\mathbf{W}_n + \mathbf{G}_n \mathbf{U}_n)|_{r=1} = \mathbf{Q}_n \\ \mathbf{U}_n|_{r=R_0/R} = 0 \end{cases}$$

Для решения задачи используем метод сведения краевой задачи к совокупности задач Коши. Пусть $\mathbf{U}_n^{(j)}, \mathbf{W}_n^{(j)}$ ($j=1,2$) – решения задач Коши соответственно

$$\begin{cases} \mathbf{U}'_n = \mathbf{D}_n^{(1)}\mathbf{U}_n + \mathbf{E}_n^{(1)}\mathbf{W}_n \\ \mathbf{W}'_n = \mathbf{D}_n^{(2)}\mathbf{U}_n + \mathbf{E}_n^{(2)}\mathbf{W}_n \\ \mathbf{U}_n|_{r=R_0/R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{W}_n|_{r=R_0/R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{U}'_n = \mathbf{D}_n^{(1)}\mathbf{U}_n + \mathbf{E}_n^{(1)}\mathbf{W}_n \\ \mathbf{W}'_n = \mathbf{D}_n^{(2)}\mathbf{U}_n + \mathbf{E}_n^{(2)}\mathbf{W}_n \\ \mathbf{U}_n|_{r=R_0/R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{W}_n|_{r=R_0/R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Решение каждой задачи Коши может быть осуществлено каким-либо численным методом: в данной работе использовался метод Рунге-Кутты четвёртого порядка. Так как $\mathbf{U}_n^{(j)}$, $\mathbf{W}_n^{(j)}$ являются решениями с линейно независимыми начальными условиями, они образуют фундаментальную систему решений. Ввиду однородности последнего условия краевой задачи, её решение является линейной комбинацией двух решений

$$\begin{cases} \mathbf{U}_n = A\mathbf{U}_n^1 + B\mathbf{U}_n^2 \\ \mathbf{W}_n = A\mathbf{W}_n^1 + B\mathbf{W}_n^2 \end{cases}$$

Так как единственное решение \mathbf{U}_n , \mathbf{W}_n должно удовлетворять граничному условию $(\mathbf{W}_n + \mathbf{G}_n \mathbf{U}_n)|_{r=1} = \mathbf{Q}_n$, неизвестные множители A , B могут быть определены путём решения системы линейных алгебраических уравнений

$$A(\mathbf{W}_n^{(1)} + \mathbf{G}_n \mathbf{U}_n^{(1)})|_{r=1} + B(\mathbf{W}_n^{(2)} + \mathbf{G}_n \mathbf{U}_n^{(2)})|_{r=1} = \mathbf{Q}_n.$$

Итого: решая задачи Коши с помощью метода Рунге-Кутты и, затем, СЛАУ, определяем коэффициенты A и B . Таким образом, для каждого n и ω определяем функции \hat{U}_{r_n} , \hat{U}_{φ_n} , $\hat{\sigma}_{r_n}$, $\hat{\sigma}_{\varphi_n}$. Используя известное значение $\hat{U}_{r_n}(1, \omega)$, определяем коэффициенты $A_n(\omega)$. В итоге, определено изображение рассеянной волны \hat{p}_s . Так как точное суммирование бесконечной суммы не представляется возможным, можно ограничиться достаточно большим значением индекса n , в дальнейшем обозначаемым M .

Применим к полученному выражению для изображения рассеянного поля формулу обратного преобразования Фурье. Отражённое от цилиндра поле p_s тогда может быть вычислено по формуле

$$p_s(r, \varphi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-M}^M \hat{v}(\omega) A_n(\omega) H_n(\omega r) e^{in\varphi - i\omega t} d\omega.$$

Приближённое вычисление данного интеграла возможно при использовании численного интегрирования на основе квадратурных формул. При этом бесконечный предел несобственного интеграла следует заменить конечным

$$p_s(r, \varphi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\max}}^{\omega_{\max}} \sum_{n=-M}^M \hat{v}(\omega) A_n(\omega) H_n(\omega r) e^{in\varphi - i\omega t} d\omega.$$

Значение ω_{\max} подбирается в зависимости от вида плотности сигнала $f(t)$: значения спектральной плотности $\hat{f}(\omega)$ имеют значения, существенно отличающиеся от нуля, только в небольшом диапазоне частот ω , и пределы интегрирования ω_{\max} следует подбирать в соответствии с данным диапазоном, в зависимости от требуемой точности. В случае, когда точка наблюдения находится далеко от цилиндра (дальняя зона акустического поля, $r \gg 1$), воспользовавшись асимптотическим представлением функции Ханкеля, можно переписать формулу в следующем виде (здесь $y = t - r$)

$$p_s(r, \varphi, t) \approx \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\pi \sqrt{2\pi r}} \sum_{n=-M}^M \int_{-\omega_{\max}}^0 \frac{(-1)^{n-1} \hat{v}(\omega) A_n(\omega) e^{i(n\varphi - \omega y)}}{(-i)^n \sqrt{-\omega}} d\omega + \\ + \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\pi \sqrt{2\pi r}} \sum_{n=-M}^M \int_0^{\omega_{\max}} \frac{(-1)^n \hat{v}(\omega) A_n(\omega) e^{i(n\varphi - \omega y)}}{(-i)^n \sqrt{\omega}} d\omega.$$

Таким образом, в данной работе поставлена и решена задача о рассеянии плоской нестационарной акустической волны, распространяющейся в идеальной жидкости, на абсолютно твёрдом цилиндрическом теле, покрытом упругим радиально-неоднородным изотропным слоем. Плотность и модули упругости неоднородного слоя являются непрерывными функциями радиальной координаты, соответствующей удалённости точки от оси цилиндра. Математическая постановка задачи включает волновое уравнение; общие уравнения движения для неоднородного покрытия; граничные условия контакта на внешней и внутренней границах покрытия; условие излучения на бесконечности. Уравнения и условия записываются в безразмерных величинах, впоследствии к ним применяется преобразование Фурье по времени. Изображения волновых полей в жидкости и неоднородном покрытии находятся в виде разложений по цилиндрическим функциям. Для нахождения изображений полей смещений и напряжений в покрытии строится краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Искомое рассеянное поле по найденному изображению может быть определено посредством применения обратного преобразования Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаев А.В. *Рассеяние сферической нестационарной акустической волны неоднородным трансверсально-изотропным сферическим слоем* // Известия ТулГУ. Серия Механика. – 2002. – Т.8. – Вып.2. – С.58-64.
2. Толоконников Л.А. *О рассеянии плоской звуковой волны упругим эллиптическим цилиндром с несколькими полостями* // Изв. ТулГУ. Естественные науки. – 2012. – Вып.2. – С.157-164.
3. Толоконников Л.А. *Определение акустического поля, рассеянного упругим сфероидом с несколькими сферическими полостями* // Изв. ТулГУ. Естественные науки. – 2012. – Вып.1. – С.73-80.
4. Толоконников Л.А. *Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием* // Изв. ТулГУ. Естественные науки. – 2013. – Вып.2. – Ч.2. – С.265-274.

5. Толоконников Л.А., Юдачев В.В. *Отражение и преломление плоской звуковой волны упругим плоским слоем с неоднородным покрытием* // Изв. ТулГУ. Естественные науки. – 2015. – Вып. 3. – С.219-226.
6. Уфлянд Я.С. *Интегральные преобразования в задачах теории упругости.* – М.-Л.: Изд-во АН СССР. 1967. – 403 с.
7. Филиппов И.Г., Егорычев О.А. *Нестационарные колебания и дифракция волн в акустических и упругих средах.* – М.: Машиностроение, 1977. – 304 с.
8. Харкевич А.А. *Неустановившиеся волновые явления.* – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 206 с.
9. Шендеров Е.Л. *Излучение и рассеяние звука.* – Л.: Судостроение, 1989. – 304 с.
10. Нигул У.К., Метсавээр Я.А., Векслер Н.Д., Кутсер М.Э. *Эхо-сигналы от упругих оболочек. Т.2.* – Таллин: Б.и., 1974. – 345 с.

УДК 51-72
EDN TIZVTE (<https://elibrary.ru/tizvte>)
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.38



КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ С УПРУГИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Бирюков Д.Р.

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

В данной работе рассматривается задача дифракции акустической волны [7] с произвольной формой волнового фронта на области, заполненной невязкой ньютоновской жидкостью (движение которой описывается уравнением Эйлера и уравнением неразрывности) и содержащей некоторое количество упругих [2], в общем случае неоднородных и анизотропных, тел произвольных форм. Задачи со схожими постановками рассматривались во многих работах последних лет, к примеру, [3-6]. Вообще говоря, в данной задаче может рассматриваться как трёхмерное, так и двумерное пространство. Для упрощения записи формул будем приводить уравнения в двумерной форме (там, где имеет значение размерность).

Основной задачей, которая ставится в данной работе, является построение конечно-элементной модели [1] для рассматриваемого явления дифракции. Известно, что аналитическое решение подобных задач возможно только для существенно ограниченного класса волн и тел. В случае произвольной конфигурации тел, рассеивающих звук, задачу следует решать численным методом, классическим примером которого является описываемый в этой работе метод конечных элементов.

Приведём обозначения физических характеристик. Параметры жидкости – плотность ρ_i и скорость звука c . Упругие тела описываются полем плотности $\rho(\vec{r})$ и тензором упругих постоянных $L(\vec{r})$, где \vec{r} – радиус-вектор.

В пространстве распространяется плоская стационарная звуковая волна давления P_0 , для которой известен волновой вектор \vec{k} ; циклическая частота $\omega = k \cdot c$; $k = |\vec{k}|$. После рассеяния волны P_0 на совокупности упругих тел образуется результирующее волновое поле P . Разность результирующей и падающей волн $P_s = P - P_0$ есть искомая рассеянная (или отражённая) звуковая волна. Поля P, P_0, P_s в жидкости удовлетворяют уравнению Гельмгольца [7], которое для P_s записывается как

$$\Delta P_s + k^2 P_s = 0.$$

Поля смещений \vec{u} и напряжений σ в упругих телах удовлетворяют общим уравнениям движения [2] $\nabla \cdot \sigma + \rho \omega^2 \vec{u} = 0$ и закону Гука [2] $\sigma = \Lambda \cdot \nabla \vec{u}$. На границе между жидкостью и любым упругим телом выполняются условия контакта – равенство напряжений $\sigma_m = p \vec{n}$ и равенство смещений $\rho_i \omega^2 \vec{u} = \nabla P$.

Согласно методу конечных элементов, к области решения задачи следует применить операцию дискретизации [1]. Так как, вообще говоря, задача решается для бесконечной по размеру области (всё пространство), следует разделить его на внутреннюю конечную по размеру область D , для которой выполняется

дискретизация, и оставшуюся – бесконечную – область, в которой неизвестные представляются в виде аналитических формул. Область D содержит все участки области решения, представляющие сложность для аналитического решения, и имеет границу такой формы, чтобы связь между значениями неизвестных внутри и вне D записывалась легко. То есть, D должна удовлетворять следующим требованиям: во-первых, D содержит все упругие и твёрдые тела (поэтому следует добавить в условие задачи дополнительное ограничение: все тела должны располагаться в конечной по размеру области), а вне D находится только жидкость; во-вторых, граница D (обозначаемая далее G) является жидкой (что означает, что G не содержит точек упругих и твёрдых тел); в-третьих, G представляет собой окружность в двумерном случае и сферу в трёхмерном случае.

Вне D падающая и рассеянная волны ищутся путём аналитического решения уравнения Гельмгольца (в цилиндрических координатах, так как граница G является цилиндром или окружностью) и представляются в виде бесконечных рядов

$$P_0 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m J_m(kr) e^{im\varphi},$$

$$P_s = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m H_m(kr) e^{im\varphi},$$

где B_m – известные коэффициенты, получаемые из формулы падающей волны; A_m – неизвестные коэффициенты, которые определяются с помощью применения метода конечных элементов; J_m – цилиндрическая функция Бесселя порядка m ; H_m – цилиндрическая функция Ханкеля первого рода порядка m ; r и φ – цилиндрические координаты, связанные с декартовыми посредством соотношений $x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = r \cdot \sin(\varphi)$.

Внутри D не рассматриваются отдельно падающая и рассеянная волны. Вместо этого, неизвестной величиной в D является целое результирующее поле P . Область D представляется в виде совокупности конечных элементов, между которыми располагаются точки-узлы. Для простоты считаем, что элементы являются треугольниками первого порядка, то есть, каждый элемент содержит три узла. Узлы имеют как глобальную нумерацию по всей конечно-элементной сетке, так и локальную нумерацию от 1 до 3 внутри каждого отдельного элемента.

Каждый элемент E снабжается локальной системой координат (e_1, e_2) , $0 \leq e_1 \leq 1$, $0 \leq e_2 \leq 1$, $0 \leq e_1 + e_2 \leq 1$, связанной с глобальной декартовой системой (x, y) посредством соотношений

$$x = x^{(1q)} t_1(e_1, e_2) + x^{(2q)} t_2(e_1, e_2) + x^{(3q)} t_3(e_1, e_2),$$

где $x^{(bq)}$ – глобальная координата b -го узла q -го элемента (аналогичное выражение имеет место и для двух других декартовых координат), $F_b(e_1, e_2)$ – функции формы, определяемые для треугольного элемента первого порядка как

$$F_b(e_1, e_2) = \delta_{\beta 1} + (\delta_{\beta 3} - \delta_{\beta 1}) e_2 + (\delta_{\beta 2} - \delta_{\beta 1}) e_1,$$

где δ – символ Кронекера. Неизвестные величины также выражаются внутри элемента через узловые значения

$$P = P^{(1q)}t_1(e_1, e_2) + P^{(2q)}t_2(e_1, e_2) + P^{(3q)}t_3(e_1, e_2),$$

где $P^{(bq)}$ – давление в b -ом узле q -го элемента. Аналогичным образом представляются и другие неизвестные – компоненты смещения. Производные давления по глобальным координатам внутри элемента представляются следующим образом

$$\frac{\partial P}{\partial x} = P^{(1q)} \frac{\partial t_1}{\partial x} + P^{(2q)} \frac{\partial t_2}{\partial x} + P^{(3q)} \frac{\partial t_3}{\partial x}.$$

В свою очередь, производные функций формы по глобальным координатам следует представлять в следующей форме

$$\frac{\partial F_b}{\partial x} = \frac{\partial F_b}{\partial e_1} \frac{\partial e_1}{\partial x} + \frac{\partial F_b}{\partial e_2} \frac{\partial e_2}{\partial x}.$$

Формулы производных функций формы по глобальным координатам подставляются в формулы производных давления по глобальным координатам для вычисления производных давления. Можно заметить, что формулы $\frac{\partial F_b}{\partial x}$ содержат производные локальных координат элемента по глобальным. Используя формулы функций формы, можно выразить локальные координаты через глобальные и, как следствие, вычислить производные локальных координат по глобальным.

Рассмотрим произвольный элемент E с номером q в глобальной нумерации конечно-элементной сетки, принадлежащий жидкой области. Колебания в элементе удовлетворяют (2). Если участок границы элемента находится на G , то выполняются граничные условия

$$\begin{aligned} (P_0 + P_s)|_G &= P|_G, \\ \frac{\partial}{\partial n} (P_0 + P_s)|_G &= \frac{\partial P}{\partial n}|_G. \end{aligned}$$

В соответствии с методом Галеркина, умножим обе части уравнения Гельмгольца на функцию формы F_b и проинтегрируем по площади элемента E

$$\int (\Delta P + k^2 P) F_b dS = 0,$$

где dS – элемент площади (или объёма в трёхмерном случае) элемента E . Здесь и далее интеграл без указания области интегрирования означает интегрирование по объёму элемента. В преобразованной форме последнее уравнение записывается как

$$\int [\nabla \cdot (F_b \nabla P) - \nabla P \cdot \nabla F_b + k^2 P F_b] dS = 0.$$

Применяя к последнему уравнению формулу Гаусса-Остроградского, получим

$$\int \nabla P \cdot \nabla F_b dS - \int k^2 F_b P dS - \oint (\bar{n} \cdot \nabla P) F_b dl = 0,$$

где dl – элемент длины границы элемента E , \bar{n} – внешняя нормаль к границе элемента. Здесь и далее значок интеграла по контуру используется для интеграла по границе элемента. Аналогичным образом преобразуется и уравнение для упругих областей: в данной статье опустим данные формулы вследствие их громоздкости.

Первое граничное условие можно переписать в виде

$$P|_{r=R_D} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (B_m J_m(kR_D) + A_m H_m(kR_D)) e^{im\varphi},$$

где R_D – радиус окружности G . Левую часть равенства следует выразить через узловые значения давления на поверхности G . Для удобства следует ввести специальное обозначение W_{bq} . Данное выражение равно 1 в случае, когда участок границы q -го элемента, содержащий b -ый узел в локальной нумерации данного элемента, лежит на G ; и равно нулю в противном случае. Тогда последнее равенство переписывается в виде

$$\sum_{q=1}^{NUM} \sum_{b=1}^3 P^{(bq)} W_{bq} F_b = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (B_m J_m(kR_D) + A_m H_m(kR_D)) e^{im\varphi}.$$

Здесь NUM – общее число элементов в сетке. Учитывая взаимную попарную ортогональность цилиндрических гармоник, применим к обеим частям последнего равенства оператор скалярного произведения путём домножения их на $e^{-im\varphi}$ и интегрирования по окружности G . В итоге, выразив из полученной формулы A_m , для каждого целого m получим

$$A_m = -\frac{B_m J_m(kR_D)}{H_m(kR_D)} + \frac{1}{H_m(kR_D)} \sum_{q=1}^{NUM} \sum_{b=1}^3 P^{(bq)} W_{bq} \int_{-\pi}^{\pi} F_b e^{-im\varphi} d\varphi.$$

Далее перепишем второе граничное условие в виде

$$\left. \frac{\partial P}{\partial n} \right|_{r=R_D} = k \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (B_m J'_m(kR_D) + A_m H'_m(kR_D)) e^{im\varphi}.$$

Подставим в данную формулу представление для A_m , получим

$$(\nabla p \cdot \bar{n})|_{r=R_D} = Q_1 + Q_2,$$

где

$$Q_1 = \sum_{q=1}^{NUM} \sum_{b=1}^3 \left(P^{(bq)} W_{bq} k \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{H'_m(kR_D) \int_0^{2\pi} F_b e^{-im\varphi} d\varphi}{H_m(kR_D)} \right),$$

$$Q_2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} k B_m \left(J'_m(kR_D) - \frac{J_m(kR_D) H'_m(kR_D)}{H_m(kR_D)} \right) e^{im\varphi}.$$

Рассматривая полученную формулу и её составляющие, можно видеть, что в неё входят узловые значения давления, не имеющие отношения собственно к элементу E . Согласно методу конечных элементов, на основе данного уравнения строятся локальные матрицы жёсткости и масс для элемента E . В случае задач механики деформируемого твёрдого тела все неизвестные, входящие в получаемые уравнения, выражались бы через значения в узлах соответствующего элемента. Таким образом, «связаны друг с другом» оказываются только узлы, относящиеся к одному элементу. Благодаря этому, при сборке глобальной матрицы из локальных матриц всех элементов первая была бы разреженной, что значительно упрощало бы дальнейшее решение системы линейных алгебраических уравнений.

В нашем же случае (случай задачи дифракции) матрица, строящаяся для одного элемента, может включать себя коэффициенты при узловых значениях для всех узлов поверхности G . Это является следствием того, что пространство вне D не подвергается дискретизации и в некотором смысле представляет собой

один элемент бесконечного размера. Чем больше узлов содержится на поверхности G , тем большая часть глобальной матрицы будет не обладать свойством разреженности.

Коэффициент локальной матрицы элемента в строке, соответствующей функции формы F_b , в столбце, соответствующей узловому значению $P^{(aa)}$ (узел того же элемента)

$$\int \left(\left[\sum_{l=1}^2 \frac{\partial F_b}{\partial x_l} \frac{\partial F_a}{\partial x_l} \right] - k^2 F_b F_a \right) dS.$$

Коэффициент локальной матрицы элемента в строке, соответствующей функции формы F_b , в столбце, соответствующей узловому значению $P^{(a\beta)}$ (узел внешней поверхности G , $W_{a\beta} = 1$)

$$\oint (-kF_b) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{kH'_m(R_D) \int_0^{2\pi} F_a e^{-im\varphi} d\varphi}{H_m(kR_D)} dl.$$

Коэффициент правой части, соответствующий функции формы F_b

$$\oint (kF_b) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} B_m \left(J'_m(kR_D) - \frac{J_m(kR_D)H'_m(kR_D)}{H_m(kR_D)} \right) dl.$$

Коэффициенты, входящие в локальную матрицу упругого элемента, строятся аналогичным образом.

Глобальная матрица всей конечно-элементной сетки строится на основе совокупности локальных матриц всех элементов. Решение построенной глобальной системы линейных алгебраических уравнений позволяет вычислить все узловые значения давления. Затем, на основе формулы для A_m вычисляются соответствующие коэффициенты, и, наконец, рассеянная волна P_s .

В итоге, в статье рассмотрена процедура дискретизации области, заполненной идеальной жидкостью, при использовании метода конечных элементов для решения задачи дифракции стационарной акустической волны. Описаны уравнения и граничные условия, составляющие математическую постановку задачи, а также процедура дискретизации и построение матриц жидких элементов. Показано, что метод разделения пространства на дискретизируемую область и на область, в которой неизвестные выражаются аналитически, приводит к появлению элемента бесконечного размера, граница которого совпадает с границей дискретизируемой области. Данная особенность должна учитываться при выборе количества узлов на соответствующей поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике*. – М.: Мир, 1975. – 543 с.
2. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела*. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
3. Толоконников Л.А., Скобельцын С.А., Ларин Н.В. *О методе решения задач дифракции звуковых волн на упругих телах с неоднородными покрытиями / Международная научная конференция «Современные проблемы математики,*

механики, информатики». Материалы конференции. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2009. – С.477-480.

4. Толоконников Л.А., Филатова Ю.М. *Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с произвольно расположенной сферической полостью* // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2010. – Вып.1. – С.114-122.
5. Скобельцын С.А. *Задача о рассеянии упругих цилиндрических волн неоднородным цилиндром* // Изв. ТулГУ. Серия Геодинамика, физика, математика, термодинамика, геоэкология. – 2006. – Вып.3. – С.126-138.
6. Скобельцын С.А. *Решение задачи о рассеянии плоской звуковой волны неоднородным упругим цилиндром с помощью МКЭ* / Международная научная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики». Материалы конференции. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2008. – С.298-300.
7. Шендеров Е.Л. *Волновые задачи гидроакустики*. – Л.: Судостроение, 1972. – 348 с.

УДК 539.42

EDN ONVFCN (<https://elibrary.ru/onvfcn>)

DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.39



МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО СЕТЧАТОГО УДАРНИКА И ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПРЕГРАДЫ

Головешкин В.А.^{1,2}, Беклемишев С.А.¹, Выборнов А.Н.¹, Мягков Н.Н.²

¹МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Россия

²ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Для защиты космического аппарата (КА) от метеороидов и космического мусора используется экранная схема защиты. В качестве экрана могут быть использованы не только сплошные алюминиевые пластины, но и другие конструкционные материалы, например, металлические сетки. Как отмечено в [1-2] использование сеточных экранов позволяет уменьшить общий вес защиты КА, не снижая общий уровень защищенности.

Для инженерных приложений представляет интерес построение аналитических моделей, использующих минимальное число параметров материалов ударника и сетки.

В предлагаемой работе, как и в работах [3-6], задача обращается и рассматривается внедрение деформируемого сетчатого ударника (сетки) в массивную преграду, которая моделируется неограниченным деформируемым полупространством. В такой постановке влияние геометрии сетки с квадратной ячейкой определяется только одним безразмерным параметром γ – отношением диаметра проволоки к периоду сетки ($0 \leq \gamma \leq 1$). Малые значения параметра $\gamma \ll 1$ соответствуют случаю, когда соседние проволоки ячейки сетки практически не влияют на внедрение друг друга. В этом случае, например, для нахождения глубины внедрения сетки достаточно рассмотреть внедрение одной струны. Случай, когда апертура сетки (видимое на просвет расстояние между проволоками) сравнима или меньше диаметра проволоки, из которой сплетена сетка, рассмотрен в работе [4]. Этот случай соответствует значениям $\gamma_* < \gamma < 1$, где величина $\gamma_* \approx 0.43$ определена в рамках предложенной модели в работе [5].

1. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО СЕТЧАТОГО УДАРНИКА С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПРЕГРАДОЙ

1.1. Модель деформации преграды.

Предложенная модель взаимодействия сетчатого ударника с преградой, рассматривалась в работах [3-6].

Сплошная преграда рассматривается как деформируемое полупространство, свойства которого моделируются жестко идеально-пластическим телом. Механические свойства материала преграды определяются двумя параметрами:

пределом текучести Y_t ; плотностью ρ_t . Сетчатый ударник (рис.1) состоит из несжимаемого деформируемого материала с плотностью ρ_s . Его механические свойства моделируются жестко идеально-пластическим телом с пределом текучести Y_s . Он имеет вид неограниченного полотна (рис.1a), состоящего из квадратных ячеек размером $2l$ (рис.1b), образованных проволоками диаметром $d_w = 2a$ и лежащих в одной плоскости. Круглое поперечное сечение проволоки сетки в процессе исследования заменяется прямоугольным сечением с основанием $2a$ и той же площадью, что и круг диаметром $2a$. Считается, что во все моменты процесса полотно сетки параллельно поверхности полупространства преграды, а вектор скорости сетки перпендикулярен ее поверхности.

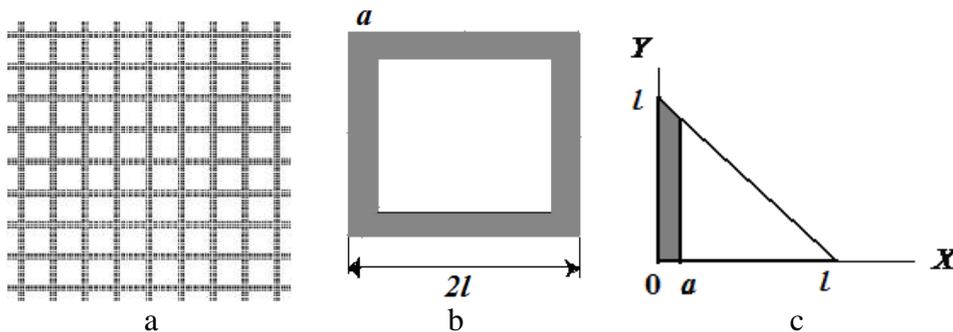


Рис.1. а) Фрагмент сетчатого ударника; б) ячейка сетки, где $2l$ – период сетки, равный $l_a + d_w$, l_a – апертура, a – радиус проволоки; с) 1/8 ячейки сетки.

При таких предположениях математическую постановку задачи определяют следующие параметры: Y_t и ρ_t – предел текучести и плотность материала сетки, характеризующие механические свойства преграды; l и a – характеризующие геометрию сетки; Y_s и ρ_s – предел текучести и плотность материала сетки, характеризующие механические свойства материала сетки; V_0 – начальная скорость ударника.

В процессе взаимодействия сетки с преградой, картина течения последней имеет ячеистую структуру, отображающую геометрию сетки. В силу периодической структуры сетки и симметрии ячейки достаточно рассмотреть течение только 1/8 ячейки так, как это показано на рис.1с.

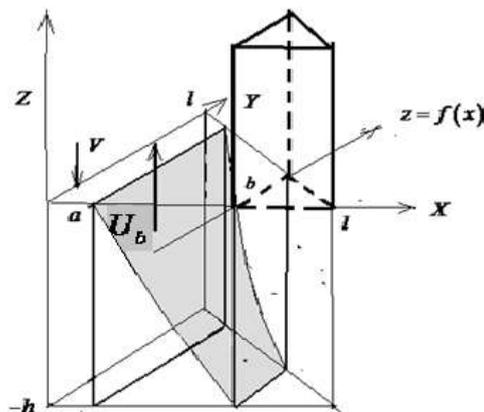


Рис.2. Схема течения при взаимодействии сетки с преградой (показана 1/8 ячейки сетки).

Ось Z на рис.1,2 направлена против направления удара, ее начало расположено на поверхности преграды в точке контакта сетки с поверхностью преграды. Будем считать, что деформация преграды происходит при $-h < z < 0$. Рассмотрим следующую схему течения, которое сопровождает внедрение сетки в преграду (рис.2), аналогичную рассматриваемой в [3-7].

Начальную скорость сетки обозначим через V_0 , текущую скорость преграды на границе контакта с сеткой обозначим U . Деформация ячейки преграды происходит по следующей схеме. В каждой ячейке имеются деформируемая, жесткая и неподвижная зоны, которые разделены поверхностями $z = f(x)$, $x = b$. Жесткая зона расположена при $a < x < b$; $f(x) < z < 0$. Неподвижная зона расположена при $b < x < l$. Жесткая зона движется как твердое недеформируемое тело со скоростью U_b (рис.2), против направления движения ударника. В силу условия несжимаемости имеем

$$U_b = U \frac{\gamma(2-\gamma)}{(\beta-\gamma)(2-\beta-\gamma)}, \quad \text{где } \gamma = a/l < 1; \beta = \frac{b}{l}, \gamma < \beta \leq 1. \quad (1)$$

Предполагается, что жесткий материал преграды, поднявшийся в процессе движения выше уровня границы контакта сетки с преградой, покидает преграду и в дальнейшем движении не рассматривается. Поле скоростей в материале преграды строится по схеме, которая предложена в [5,6]. При ее построении приняты следующие предположения: 1) скорость u_z является линейной функцией координаты z и не зависит от других координат; 2) скорость u_y полагается линейной функцией y . Тогда, из условия несжимаемости и условия равенства нулю нормальной составляющей скорости на поверхностях $X = 0$ и $X + Y = l$, получены [5,6] следующие соотношения для скоростей

$$u_x = \frac{U}{2h} \left[\frac{l^2}{(l-x)} - l \right] + \frac{U}{2h} x, \quad (2)$$

$$u_y = -\frac{U}{2h} \left[\frac{l^2}{(l-x)^2} - 1 \right] y, \quad (3)$$

$$u_z = -\frac{U}{h} (z+h). \quad (4)$$

Уравнение поверхности $z = f(x)$, которая разделяет жесткую и деформируемую зоны, получается из условия непрерывности нормальной составляющей скорости для поля скоростей, заданных соотношениями (1) и (2)-(4). Вывод этого уравнения и его решение приведены в [3,6]

$$f(x) = h \frac{l^2 - (l-b)^2}{(l-a)^2 - (l-b)^2} \left[\frac{l^2 - (l-a)^2}{l^2 - (l-x)^2} - 1 \right]. \quad (5)$$

Для исследования процесса взаимодействия сетки и преграды требуется определить полную мощность внутренних сил W и полную кинетическую энергию деформируемой преграды E_p .

Полная мощность внутренних сил W включает следующие составляющие: W_1 – полная мощность внутренних сил в деформируемой зоне; W_2 - W_5 – полные

мощности внутренних сил при разрывах касательной скорости на поверхностях $z = -h$, $z = f(x)$, $z = 0$, $x = b$. Полная мощность внутренних сил равна

$$W = \sum_{i=1}^5 W_i.$$

Мощность внутренних сил в единице объема w в деформируемой зоне равна $w = Y_t \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 + 2\varepsilon_{xz}^2 + 2\varepsilon_{yz}^2}}$ (где $\varepsilon_x, \dots, \varepsilon_{yz}$ – соответствующие компоненты тензора скоростей деформации), мощность внутренних сил w на разрывах скоростей на единицу площади поверхности разрыва равна $w = \frac{Y_t}{\sqrt{3}} [v]$, где $[v]$ – модуль разности касательной скорости на поверхности разрыва.

В дальнейшем вместо величины h рассматривается безразмерная величина \bar{h} , где $\bar{h} = h/l$. Черта при записи опускается.

Соответствующие вычисления [5,6], дают

$$W = \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \frac{Ul^2}{12} \Phi(h; \gamma; \beta). \quad (6)$$

Значения β , h определяются из условия минимума мощности W в области $0 < h < \infty$, $\gamma < \beta \leq 1$, то есть $\beta = \beta(\gamma)$, $h = h(\gamma)$. Расчеты показывают, что при $\gamma > \gamma_*$ неподвижная зона в центре ячейки исчезает (параметр β становится равным 1) и течение охватывает всю ячейку (рис.2), где $0.43 < \gamma_* < 0.44$.

Следовательно, функция $\Phi(h; \gamma; \beta)$ фактически является функцией γ . Обозначим $\Theta(\gamma) = \Phi[h(\gamma); \gamma; \beta(\gamma)]$. Тогда для полной мощности внутренних сил имеем

$$W = \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \frac{Ul^2}{12} \Theta(\gamma). \quad (7)$$

Как показано в [5,6] данная функция на интервале $0.05 < \gamma < 0.9$ с точностью приемлемой для инженерных расчетов аппроксимируется приближенным соотношением, $\Theta(\gamma) \approx \Theta_{AP}(\gamma)$, где $\Theta_{AP}(\gamma) = 50\gamma(1.2 - \gamma)$ при $\gamma \leq \gamma_*$; $\Theta_{AP}(\gamma) = 18 - 35\ln(1 - \gamma)$ при $\gamma > \gamma_*$.

Полная кинетическая энергия деформируемой преграды E_p представляется в виде

$$E_p = E_1 + E_2 + E_3,$$

где $E_1 + E_2$ – кинетическая энергия деформируемой среды; E_3 – кинетическая энергия жесткой зоны.

Соответствующие вычисления [5,6] приводят к следующему соотношению для полной кинетической энергии E

$$E = \frac{1}{2} \rho U^2 l^3 \Psi(h, \beta, \gamma). \quad (8)$$

Так как $\beta = \beta(\gamma)$, $h = h(\gamma)$ – функции γ , то $\Psi(h, \beta, \gamma)$ фактически является функцией γ . Обозначим $\Omega(\gamma) = \Psi[h(\gamma), \beta(\gamma), \gamma]$.

Как показано в [5,6], данная функция на интервале $0.05 < \gamma < 0.9$ с точностью приемлемой для инженерных расчетов аппроксимируется приближенным соотношением $\Omega(\gamma) \approx \Omega_{AP}(\gamma)$, где $\Omega_{AP}(\gamma) = 2.2\gamma^2 + 0.9\gamma^3$ при $\gamma \leq \gamma_*$; $\Omega_{AP}(\gamma) = -0.33 \frac{\ln(1-\gamma)}{1-\gamma} + 0.33 \frac{\gamma}{1-\gamma}$ при $\gamma > \gamma_*$, где $\gamma_* \approx 0.43$.

Таким образом, полная кинетическая энергия системы равна

$$E_p = \frac{1}{2} \rho_t l^3 \Omega U^2. \quad (9)$$

Поскольку предполагается, что материал преграды, поднявшийся выше нижней границы сетки, покидает преграду и в дальнейшем движении системы не участвует, требуется оценить поток уносимой энергии. Пусть K_b – поток кинетической энергии частиц, покинувших преграду. В силу условия несжимаемости, поток массы частиц, покинувших преграду $\frac{dm_b}{dt}$ равен

$$\frac{dm_b}{dt} = \frac{\rho_t}{8} [(l-a)^2 - (l-b)^2] (U + U_b).$$

Так как скорость частиц, покидающих преграду равна U_b , то, имеем

$$\begin{aligned} K_b &= \frac{1}{16} \rho_t \frac{[l^2 + (l-b)^2][l^2 - (l-a)^2]^2}{[(l-a)^2 - (l-b)^2]^2} U^3 = \\ &= \frac{1}{16} \rho_t l^2 \frac{[1 + (1-\beta)^2][1 - (1-\gamma)^2]^2}{[(1-\gamma)^2 - (1-\beta)^2]^2} U^3. \end{aligned}$$

Так как $\beta = \beta(\gamma)$, то $K_b = \frac{1}{2} \rho_t l^2 H(\gamma) U^3$, где

$$H(\gamma) = \frac{1}{8} \frac{[1 - (1-\beta(\gamma))^2][1 - (1-\gamma)^2]^2}{[(1-\gamma)^2 - (1-\beta(\gamma))^2]^2}.$$

Как показано в [5,6], данная функция на интервале $0.05 < \gamma < 0.9$ с приемлемой точностью аппроксимируется приближенным соотношением $H(\gamma) \approx H_{AP}(\gamma)$, где $H_{AP}(\gamma) = \frac{2}{25} \gamma (2-\gamma)^2 \frac{3.5-2\gamma}{(1-\gamma)^2}$ при $\gamma \leq \gamma_*$;

$$H_{AP}(\gamma) = \frac{1}{8} \frac{\gamma^2 (2-\gamma)^2}{(1-\gamma)^4} \text{ при } \gamma > \gamma_*.$$

Из баланса энергии имеем

$$\frac{dE_p}{dt} + W + K_b = N, \quad (10)$$

где N – мощность внешних сил на границе контакта ударника и преграды.

1.2. Модель взаимодействия ударника и преграды.

При построении уравнений движения ударника с учетом растекания используется методика, принятая в [7]. Обозначим V – скорость задней стенки ударника, U – скорость лицевой стороны струны (т.е. поверхности контакта струны с преградой). В [7] показано, что напряжение σ – возникающее на поверхности контакта струны с преградой может быть оценено выражением

$$\sigma \approx \sigma_s + \rho_s \frac{(v-u)^2}{2}. \quad (11)$$

Напряжение (11) можно рассматривать как внешнюю силу, действующую на преграду. Обозначим N как мощность этих сил. С учетом (11), принимая во внимание, что тыльная сторона струны не нагружена, приближенно можно положить

$$N = U \left(\sigma_s + \rho_s \frac{(V-U)^2}{2} \right) l^2 \gamma (2-\gamma). \quad (12)$$

Уравнение баланса энергии для преграды имеет вид

$$\frac{dE_p}{dt} + W + K_b = N, \quad (13)$$

где E_p – полная кинетическая энергия, W – мощность внутренних сил.

Изменение глубины внедрения S и скорость U связаны соотношением

$$\frac{dS}{dt} = U. \quad (14)$$

Для построения полной математической модели необходимы некоторые предположения относительно профиля поля скоростей в струне. Аналогично, как предложено в [7], примем следующую модель. Полагаем, что массовая скорость в направлении удара в струне постоянна и равна V за исключением малой области шириной Δ около контактной поверхности струна-ударник. В этой области происходит пластическое течение материала струны, а скорость изменяется от величины U на поверхности контакта до значения V . Тогда торможение задней стенки определяется по аналогии с известными моделями внедрения стержней в преграду. Уравнение торможения имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\sigma_s}{\delta \rho_s}, \quad (15)$$

где δ – текущий продольный размер ударника.

Кинематическое соотношение для изменения продольного размера в направлении движения представляется уравнением

$$\frac{d\delta}{dt} = -(V-U). \quad (16)$$

Уравнение (13), после преобразований может быть представлено в виде

$$\frac{dU}{dt} + \frac{Y_t}{\rho_l l} \frac{1}{12\sqrt{3}} \frac{\Theta(\gamma)}{\Omega(\gamma)} + \frac{1}{2} \frac{1}{l} \frac{H(\gamma)}{\Omega(\gamma)} U^2 = \frac{1}{\rho_l l} \left(\sigma_s + \rho_s \frac{(V-U)^2}{2} \right) \frac{1}{2} \frac{\gamma(2-\gamma)}{\Omega(\gamma)}. \quad (17)$$

Система уравнений (14)-(17) с начальными условиями $S=0$, $\delta=\delta_0$, $V=V_0$, $U=0$ при $t=0$ определяют поведение системы до момента $\delta=0$ – полное растекание струны.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Введем безразмерные переменные $S = \bar{S}l$, $\delta = \bar{\delta}\delta_0$, $V = \bar{V}V_0$, $U = \bar{U}V_0$,
 $t = \bar{t}l/V_0$ и безразмерные величины $\alpha = \frac{\sigma_s}{\rho_s v_0^2}$, $\mu = \frac{\rho_s}{\rho_t}$, $\kappa = \frac{\rho_s}{\rho_t} \cdot \frac{Y_t}{\sigma_s}$, $\lambda = \frac{l}{\delta_0}$.

В дальнейшем черту опускаем. Система уравнений (14)-(17) в безразмерных переменных примет вид

$$\frac{dS}{dt} = U, \tag{18}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\alpha\lambda}{\delta}, \tag{19}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = -\lambda(V - U), \tag{20}$$

$$\frac{dU}{dt} + \kappa\alpha \frac{1}{12\sqrt{3}} \frac{\Theta(\gamma)}{\Omega(\gamma)} + \frac{1}{2} \frac{H(\gamma)}{\Omega(\gamma)} U^2 = \mu \left(\alpha + \frac{(V-U)^2}{2} \right) \frac{1}{2} \frac{\gamma(2-\gamma)}{\Omega(\gamma)}. \tag{21}$$

Система уравнений (18)-(21) с начальными условиями

$$V = 1, U = 0, S = 0, \delta = 1 \text{ при } t = 0 \tag{22}$$

определяет решение задачи – функции $V(t)$, $U(t)$, $S(t)$, $\delta(t)$ до момента $\delta = 0$ – полное растекание струны.

Решение системы (18)-(22) ищется как функция параметра S – глубины проникания. Тогда система уравнений преобразуется к следующему виду

$$\frac{dV}{dS} = -\alpha \frac{\lambda}{\delta U}, \tag{23}$$

$$\frac{d\delta}{dS} = -\frac{\lambda(V-U)}{U}, \tag{24}$$

$$\frac{dU}{dS} U + \kappa\alpha \frac{1}{12\sqrt{3}} \frac{\Theta(\gamma)}{\Omega(\gamma)} + \frac{1}{2} \frac{H(\gamma)}{\Omega(\gamma)} U^2 = \mu \left(\alpha + \frac{(V-U)^2}{2} \right) \frac{1}{2} \frac{\gamma(2-\gamma)}{\Omega(\gamma)} \tag{25}$$

с начальными условиями $V = 1, U = 0, \delta = 1$ при $S = 0$.

Поскольку $\alpha \ll 1$, то до полного растекания струны, как показано в [7], можно положить $V = 1$, а систему можно переписать в виде

$$\frac{d\delta}{dS} = -\frac{\lambda(1-U)}{U}, \tag{26}$$

$$\frac{dU}{dS} U + \kappa\alpha \frac{1}{12\sqrt{3}} \frac{\Theta(\gamma)}{\Omega(\gamma)} + \frac{1}{2} \frac{H(\gamma)}{\Omega(\gamma)} U^2 = \mu \left(\alpha + \frac{(1-U)^2}{2} \right) \frac{1}{2} \frac{\gamma(2-\gamma)}{\Omega(\gamma)} \tag{27}$$

с начальными условиями $U = 0, \delta = 1$ при $S = 0$. Момент полного растекания струны определяется из условия $\delta = 0$. Связь между δ и U может быть определена из решения дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\delta} = & -\frac{1}{\lambda(1-U)} \mu \left(\alpha + \frac{(1-U)^2}{2} \right) \frac{1}{2} \frac{\gamma(2-\gamma)}{\Omega(\gamma)} + \frac{\kappa\alpha}{\lambda(1-U)} \frac{1}{12\sqrt{3}} \frac{\Theta(\gamma)}{\Omega(\gamma)} + \\ & + \frac{1}{2\lambda(1-U)} \frac{H(\gamma)}{\Omega(\gamma)} U^2 \end{aligned}$$

с начальным условием $U = 0$ при $\delta = 1$.

Она определяется соотношением

$$\int_0^U \frac{2\lambda\Omega(\gamma)(1-x)dx}{\left[H(\gamma) - \frac{\mu}{2}\gamma(2-\gamma) \right] x^2 + \left[\mu\gamma(2-\gamma) \right] x + \left[\kappa\alpha \frac{1}{6\sqrt{3}} \Theta(\gamma) - \frac{\mu}{2}\gamma(2-\gamma)(2\alpha+1) \right]} = \delta - 1. \quad (28)$$

Обозначим значение $U = U^*$ соответствующее значению $\delta = 0$. Соответствующая этому значению глубина проникания сетки S^* определяется из соотношения

$$\int_0^{U^*} \frac{2\Omega(\gamma)xdx}{\mu \left(\alpha + \frac{(1-x)^2}{2} \right) \gamma(2-\gamma) - \kappa\alpha \frac{1}{6\sqrt{3}} \Theta(\gamma) - H(\gamma)x^2} = S^*. \quad (29)$$

После полного растекания сетки происходит движение по инерции. Уравнение имеет вид

$$\frac{dU}{dS} U + \kappa\alpha \frac{1}{12\sqrt{3}} \frac{\Theta(\gamma)}{\Omega(\gamma)} + \frac{1}{2} \frac{H(\gamma)}{\Omega(\gamma)} U^2 = 0 \quad (30)$$

с начальными условиями $U = U^*$ при $S = S^*$.

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\int_{U^*}^U \frac{2\Omega(\gamma)xdx}{\kappa\alpha \frac{1}{6\sqrt{3}} \Theta(\gamma) + H(\gamma)x^2} = S^* - S.$$

Полная глубина проникания S_f определяется из условия остановки движения $U = 0$ соотношением

$$S_f = S^* + \frac{\Omega(\gamma)}{H(\gamma)} \ln \frac{\kappa\alpha \frac{1}{6\sqrt{3}} \Theta(\gamma) + H(\gamma)U^{*2}}{\kappa\alpha \frac{1}{6\sqrt{3}} \Theta(\gamma)}. \quad (31)$$

3. ПРИМЕР

Результаты расчетов позволяют оценить глубину кратера в преграде, полученного в результате проникания сетки в преграду. Они показывают, что с увеличением параметра γ , глубина кратера по отношению к периоду сетки растет при $\gamma < \gamma_*$ и уменьшается при $\gamma_* < \gamma < 1$. Глубина кратера по отношению к диаметру проволоки уменьшается с ростом γ . В качестве примера на рис.3 показаны зависимости глубин кратера от параметра γ при ударе стальной сетки по алюминиевой преграде для различных начальных скоростей удара. Видно, что пиковые значения S_f/l при $\gamma_* = 0.43$ растут с увеличением начальной скорости удара V_0 . Отметим, что значение параметра $\gamma = 1$ соответствует сплошной пластинке (апертура сетки обращается в ноль), в этом случае $S_f = 0$ из-за несжимаемости материала преграды. Параметры, которые брали для расчетов, показаны в таблице 1.

Таблица 1.

Параметры жестко-пластичного материала сетки и преграды [8].

	Плотность	Предел текучести
Сетка (нержавеющая сталь)	$\rho_s = 7890 \text{ кг/м}^3$	$Y_s = 0.74 \text{ ГПа}$
Преграда (сплав алюминия 1100)	$\rho_t = 2700 \text{ кг/м}^3$	$Y_t = 0.1 \text{ ГПа}$

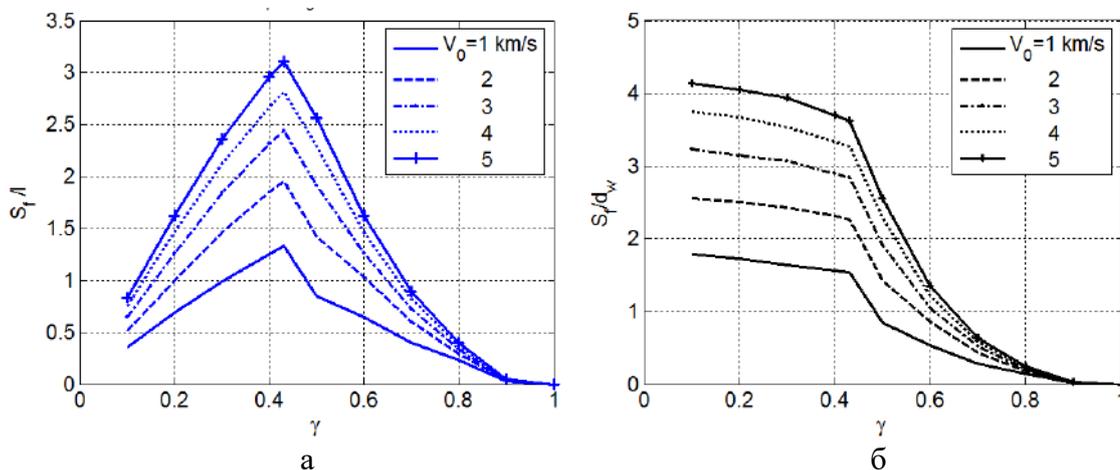


Рис.3. (а) Зависимость глубины кратера, нормированной на половину периода сетки, (S_f/l) , от параметра γ , характеризующего дискретность сетки, для скоростей удара от 1 до 5 км/с. Материал сетки – сталь, материал преграды – алюминий. Пиковые значения S_f/l соответствуют $\gamma_* = 0.43$. (б) То же самое для глубины кратера, нормированной на диаметр проволоки, (S_f/d_w) .

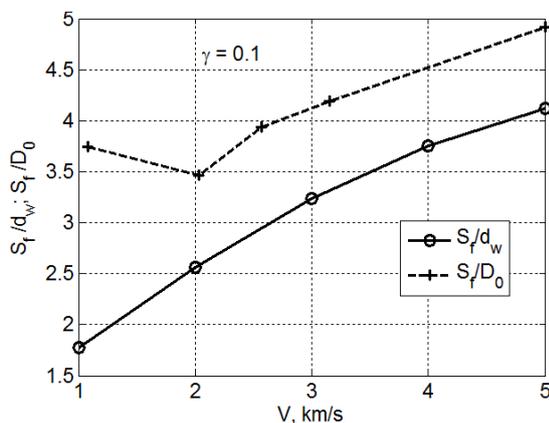


Рис.4. Глубина проникания стальной сетки ($\gamma = 0.1$), нормированной на диаметр проволоки (S_f/d_w) , сравнивается с экспериментальной [8] глубиной проникания компактного стального ударника, нормированной на начальный диаметр ударника (S_f/D_0) , в алюминиевую преграду.

К сожалению, экспериментальные данные, показывающие глубину внедрения сетки в массивную преграду в зависимости от скорости удара, в настоящее время в литературе отсутствуют. Поэтому результаты представленной аналитической модели для глубины кратера при малом значении

$\gamma = 0.1$, соответствующем независимому внедрению проволок ячейки сетки, частично сравниваются с известными экспериментами [8] по внедрению стального ударника в толстую алюминиевую преграду. Результат такого сравнения представлен на рис.4. Видно, что при скоростях удара $V_0 > 1$ км/с зависимость нормированной глубины кратера, образованного при внедрении стальной сетки в алюминиевую преграду, от V_0 качественно согласуется с аналогичной зависимостью, полученной в эксперименте для компактного стального ударника.

ВЫВОДЫ

Предложена аналитическая модель высокоскоростного взаимодействия деформируемого сетчатого ударника (сетки) с полубесконечной деформируемой преградой. Механическое поведение материала сетчатого ударника и деформируемой преграды моделируется жестко идеально-пластическим законом поведения при условии несжимаемости. Поэтому для описания поведения материалов сетки и преграды используются только предел текучести и плотность.

В модели предполагается, что до встречи с преградой и в последующем процессе движения полотно сетки параллельно поверхности преграды, а скорость направлена перпендикулярно этой поверхности. Ввиду периодической структуры сетки и симметрии ячейки, мы рассматриваем течение, сопровождающее внедрение только для $1/8$ ячейки.

При исследовании процесса взаимодействия принимается гипотеза, что материал преграды, поднявшийся в процессе движения выше уровня границы контакта сетки с преградой, покидает преграду и в дальнейшем движении не рассматривается.

Представленная модель показывает, что проникание сетки в преграду, которое сопровождается образованием кратера, включает два этапа. Первый этап, это непосредственное взаимодействие сетки и преграды. Он длится до полного растекания материала сетки и выноса его за пределы преграды. Второй этап – это движение по инерции, при котором также происходит углубление кратера до его полной остановки.

В рамках предложенной модели зависимость решения от геометрии сетки определяется одним параметром γ , равным отношению диаметра проволоки к периоду сетки ($0 \leq \gamma \leq 1$). Предложенная модель позволяет исследовать процесс как при малых значениях γ , когда пластическая деформация преграды охватывает лишь часть ячейки ($0 < \gamma < \gamma_*$, где $\gamma_* \approx 0.43$), так и для случая $\gamma_* < \gamma < 1$ – когда апертура сетки (видимое на просвет расстояние между проволоками) сравнима или меньше диаметра проволоки и пластическая деформация распространяется по всей ячейке. Важно отметить, что в рамках принятой модели значение параметра $\gamma_* \approx 0.43$ является универсальным, не зависящим от материалов сетки и преграды.

Результаты расчетов по предложенной модели позволяют оценить глубину кратера в преграде, образованного в результате соударения. Показано, что с увеличением параметра γ , глубина кратера по отношению к периоду сетки растет с увеличением γ при $0 < \gamma < \gamma_*$ и уменьшается при $\gamma_* < \gamma < 1$. Глубина

кратера по отношению к диаметру проволоки уменьшается с ростом γ , испытывая резкое падение в окрестности $\gamma = \gamma_*$. Экспериментальные данные, показывающие глубину внедрения сетки в массивную преграду в зависимости от скорости удара, в настоящее время в литературе отсутствуют. Поэтому, результаты представленной аналитической модели для глубины кратера при малых γ , частично сравниваются с известными экспериментами [8] по внедрению стального ударника в толстую алюминиевую преграду. Результат такого сравнения представлен на рис.4. Видно, что при скоростях удара $V_0 > 1$ км/с зависимость нормированной глубины кратера, образованного при внедрении стальной сетки в алюминиевую преграду, от V_0 качественно согласуется с аналогичной зависимостью, полученной в эксперименте для компактного стального ударника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Безруков Л.Н., Гадасин И.М., Киселев А.И. и др. *О физических принципах построения защиты модуля «Заря» Международной космической станции от ударного повреждения частицами околоземной среды* // Космонавтика и ракетостроение. – 2000. – Vol.18. – Pp.140-151.
2. Horz F., Cintala M.J., Bernhard R.P. et al. *Multiple-mesh bumpers: a feasibility study* // Int. J. Impact Eng. – 1995. – Vol.17. – Pp.431-442.
3. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N., Shumikhin T.A. *Model of interaction of a rigid mesh with a deformable target* // Meccanica. – 2021. – Vol.56. – No.1. – Pp.179-193. DOI: 10.1007/s11012-020-01272-5
4. Головешкин В.А., Мягков Н.Н., Чернова П.Д. *Моделирование взаимодействия жесткого сетчатого ударника с деформируемой преградой* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №1. – С.3-23. DOI: 10.33113/mkmc.ras.2020.26.01.003_023.01
5. Головешкин В.А., Мягков Н.Н. *Модель взаимодействия жесткой сетки с деформируемой преградой* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т.28. – №2. – С.151-174.
6. Головешкин В.А., Мягков Н.Н. *Моделирование взаимодействия деформируемого сетчатого ударника с деформируемой преградой* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т.29. – №1. – С.3-21. DOI: 10.33113/mkmc.ras.2023.29.01.01
7. Myagkov N.N., Goloveshkin V.A., Shumikhin T.A., Sulimov A.V. *On hypervelocity penetration of the mesh-bumper strings into a projectile* // Int. J. Impact Engng. – 2009. – Vol.36. – Pp.468-475.
8. Valerio-Flores O.L., Murr L.E., Hernandez V.S. et al. *Observations and simulations of the low velocity-to-hypervelocity impact crater transition for a range of penetrator densities into thick aluminum targets* // Journal of Materials Science. – 2004. – Vol.39. – Pp.6271-6289.



ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ И ПИРОТЕХНИЧЕСКИЕ УСТРОЙСТВА ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ СОВМЕСТНОГО ТЕПЛОВОГО И МЕХАНИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ ПОТОКОВ ИЗЛУЧЕНИЙ И ЧАСТИЦ НА ТОНКОСТЕННЫЕ КОМПОЗИТНЫЕ КОНСТРУКЦИИ*

Острик А.В.^{1,2}, Николаев Д.Н.¹, Чепрунов А.А.², Бугай И.В.²

¹Федеральный исследовательский центр проблем химической физики
и медицинской химии РАН, г. Черноголовка, Россия

²Технологический университет им. А.А. Леонова, г. Королев, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное развитие методов и устройств генерации излучений и частиц различной физической природы требует обеспечения прочности конструкций летательных аппаратов (ЛА), работающих в условиях воздействия потоков высокой плотности энергии [1-5]. Не менее интенсивно разрабатываются и конструктивные средства защиты ЛА от потоков излучений и частиц (ПИЧ) на основе гетерогенных пористых материалов и покрытий нового поколения, что позволяет защитить композитные тонкостенные конструкцию ЛА в рамках допустимых весовых затрат.

Экспериментальное подтверждение прочности ЛА путём их непосредственного облучения в полете не представляется возможным в связи с отсутствием мощных источников ПИЧ, способных генерировать необходимые плотности энергии на поверхностях с размерами порядка нескольких метров. Поэтому предложено использовать [2] расчетно-экспериментальный подход, в котором определение параметров нестационарных тепловых и механических нагрузок проводится расчетным путем, а при прочностных испытаниях натуральных конструкций ЛА эти параметры воспроизводятся специальными наборами устройств.

Разработка набора таких устройств актуальна и имеет большое практическое значение [1,2,5]. Однако на современном этапе отсутствует набор устройств, удовлетворяющих в полном объеме потребностям практики. В частности, требуются устройства генерации малоимпульсных нагрузок субмикросекундной длительности, обеспечивающие высокую одновременность приложения давления к поверхности испытываемой конструкции. Кроме того, имеются лишь отдельные устройства для моделирования совместного теплового и механического действия ПИЧ. Но во многих реализующихся в полете случаях ЛА подвергается совместному многократному тепловому и механическому действиям ПИЧ, при которых проявляется их комплексный характер [6]. Под комплексностью понимается такое совместное (не обязательно одновременное) действие, когда общий эффект (повышение температуры, тепловой унос материала, накопление

* Работа выполнена в рамках Темкарты №0089-2019-0001 (№ государственной регистрации ААА-А19-119071190040-5) и при финансовой поддержке РФФИ (соглашение №21-72-20023).

пластических деформаций и микрповреждений, трещинообразование и расслоение) от него не определяется простым суммированием результата действия каждого фактора, т.е. не справедлив принцип суперпозиции ущерба [6].

Для испытаний на прочность конструкций ЛА к комплексному тепловому и механическому действию ПИЧ используется подход, основанный на совместном применении пиротехнических устройств нагрева и газодинамических устройств генерации механических нагрузок. В свою очередь, совместное применение устройств требует разработки специальных испытательных стендов.

На разработку нового набора воспроизводящих действия ПИЧ устройств и стенда для испытаний конструкций ЛА на прочность к комплексному тепловому и механическому действию ПИЧ и направлена настоящая работа.

1. УСТРОЙСТВА ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ ТЕПЛООВОГО ДЕЙСТВИЯ ПИЧ

Эксплуатационным источником теплового действия на ЛА являются газовые потоки (например, аэродинамические и истекающие из камер сгорания ракетных двигателей) [7]. При этом, как правило, полетные тепловые потоки близки к квазистационарным, и в конструкции устанавливается медленно меняющийся температурный профиль. Кроме того, ЛА могут быть подвергнуты импульсным воздействиям различных видов ПИЧ [6].

В таблице 1 приведены некоторые практически важные (применительно к тепловому действию) виды воздействий ПИЧ и соответствующие им режимы поглощения энергии [6] (под мгновенным поглощением подразумевается вариант воздействия, при котором длительность поглощения ПИЧ значительно меньше характерного времени перераспределения энергии теплопроводностью). Следует отметить, что, конечно, не все возможные сочетания рассмотренных видов воздействий реализуются на практике для ЛА. Однако известен целый ряд практически важных сочетаний, когда имеет место комплексное действие ПИЧ. Наиболее опасными являются воздействия объемно поглощаемых излучений (ОПИ) [2,4,5]. Отметим, что в случае ОПИ, имеющего в своем спектре жесткую и мягкую части, комплексность действия проявляется наиболее полно: нагрев жестким излучением изменяет термодинамические и механические характеристики материала, что оказывает влияние на формирование термомеханического импульса, а мягкая часть приводит к уносу материала (тепловому действию) и формированию испарительной части механического импульса. Следовательно, даже само разделение на тепловое и механическое действия в этом случае оказывается весьма условным.

Таблица 1.
Воздействия ПИЧ и соответствующие режимы поглощения.

Вид воздействия	Пространственный режим	Временной режим
Радиоизлучение высокой частоты	Объемное поглощение	Постепенное поглощение
Монохроматическое излучение оптического диапазона	Поверхностное поглощение	Постепенное поглощение
Световое излучение мощного взрыва	Поверхностное поглощение	Постепенное поглощение

Мягкое рентгеновское излучение мощного взрыва или реактора лазерного термоядерного синтеза	Поверхностное поглощение	Мгновенное поглощение
Жесткое рентгеновское излучение мощного взрыва	Объемное поглощение	Мгновенное поглощение
γ -излучение мощного взрыва или реактора лазерного термоядерного синтезе	Объемное поглощение	Мгновенное поглощение
Электроны радиационных поясов	Объемное поглощение	Постепенное поглощение
Нейтроны мощного взрыва или реактора лазерного термоядерного синтеза	Объемное поглощение	Мгновенное поглощение
Нейтроны ядерного реактора	Объемное поглощение	Постепенное поглощение
Тяжелые ионы ускорителя	Объемное поглощение	Мгновенное поглощение

В зависимости от характеристик ПИЧ и свойств композитных материалов (КМ) (в частности, длины пробега частиц в поглощающем материале и его температуропроводности), а также толщины конструкции, тепловое действие приводит к различным распределениям температуры. Поэтому при исследовании комплексного теплового и механического действия перед генерацией механического импульса возникает необходимость создавать в тонкостенной конструкции ЛА следующий набор ее тепловых состояний:

- приповерхностный нагрев, когда материал внешнего слоя прогрет на некоторую толщину, а тыльная сторона конструкции остается практически холодной;

- объемный неравномерный нагрев, когда материалы прогреты по всей толщине многослойной конструкции, но со значительной разницей температур облучаемой и тыльной поверхностей;

- равномерный нагрев, когда температура материалов по толщине конструкции – постоянная.

Приповерхностный нагрев характерен при воздействии монохроматического излучения, светового импульса мощного взрыва [6] или аэродинамических потоков в режиме развитого испарения [7]. При этом температура вблизи аблирующей (испаряющейся или сублимирующей) поверхности составляет 1000...2000°С.

Объемный неравномерный нагрев по толщине имеет место при воздействии жесткого ОПИ с энергией фотонов более 20 кэВ и невысокими уровнями плотности энергии (при высоких уровнях превалирует механическое действие). Причиной неравномерного нагрева может быть воздействие монохроматического излучения, светового импульса, гамма - нейтронного излучения и аэродинамических потоков в режиме теплопроводности. В этом случае температура меняется в диапазоне 100...1000°С. Неравномерный нагрев также реализуется для сопел и сопловых насадков из углеродных и углерод-углеродных КМ [8] работающих ракетных двигателей. Температуры корпусов сопел составляют 1000...3000°С.

При воспроизведении температурного профиля в элементах композитных конструкций ЛА возможно применение нескольких способов подвода тепла к преграде: с помощью контактной токопроводящей пластины, листовых пиротехнических зарядов, КВЧ-излучения (излучения крайне высокой частоты с длиной волны 1...10 мм) и др. На рис.1 представлены схемы испытаний плоских пакетов композитных материалов на совместное тепловое и механическое действие ОПИ при использовании электронагрева однослойной композитной преграды (рис.1а) и комбинированного нагрева двухслойной композитной преграды токопроводящим слоем и КВЧ-излучением (рис.1б). Измеренные (использовался бесконтактный способ измерения температуры [9]) температурные профили для этих двух случаев показаны на рис.2а,б, соответственно рис. 1а,б. Требуемые для воспроизведения (определенные методом Монте-Карло распределения удельного энерговыделения от ОПИ для этих преград и пересчитанные на распределения температуры) температурные профили показаны на рис.2 пунктирными линиями. Видно, что подбором интенсивности ввода энергии в композитные пластины удастся достичь удовлетворительного согласия в требуемых и получаемых температурных профилях.

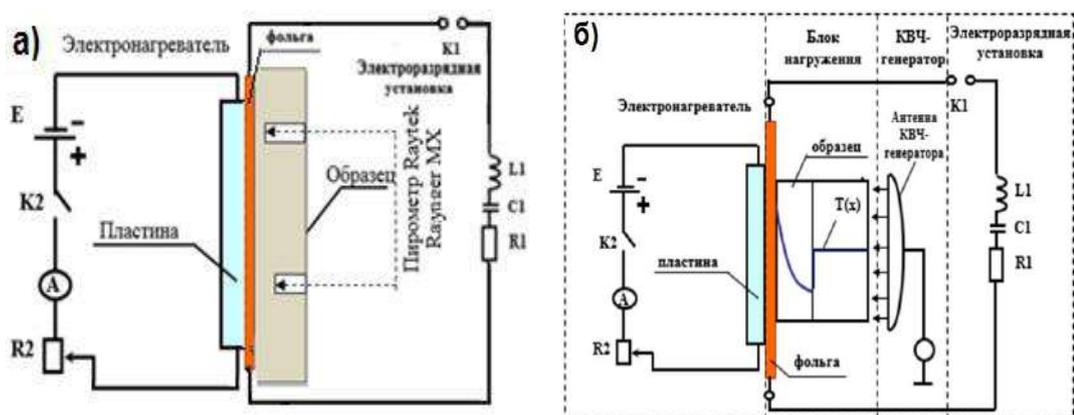


Рис.1. Схема испытаний плоских пакетов КМ: а) электронагрев однослойной преграды; б) комбинированный нагрев (электронагрев + КВЧ) двухслойной преграды.

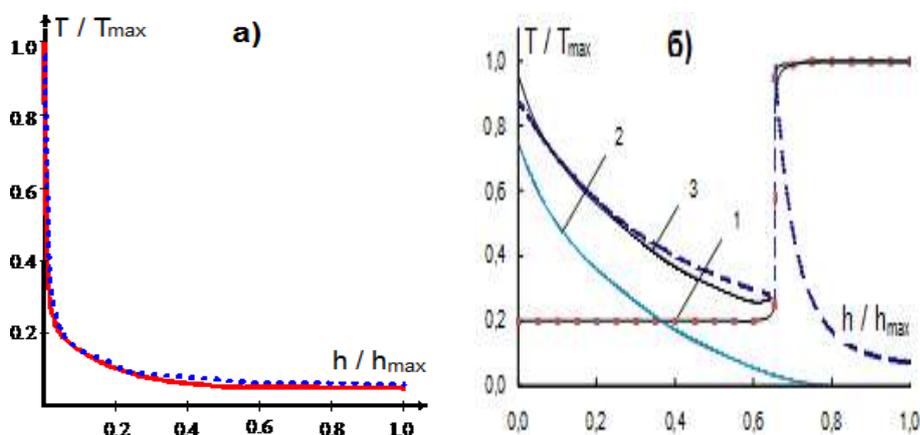


Рис.2. Температурные профили: а) электронагрев однослойной преграды (пунктиром – воспроизводимый Т-профиль от ОПИ); б) комбинированный нагрев (1 – КВЧ-нагрев; 2 – электронагрев; 3 – суммарный; пунктир – воспроизводимый Т-профиль от ОПИ).

По достижению в образце необходимого распределения температуры его нагружают импульсом давления, формирующимся при разряде батареи конденсаторов электроразрядной установки через металлическую фольгу (она показана для обоих вариантов преграды на рис.1). Параметры импульса давления (величина и длительность) воспроизводятся так, чтобы соответствовать механическому действию ОПИ с заданными характеристиками.

Рассмотренные методы нагрева используются для экспериментов с фрагментами конструкций. Применительно к испытаниям натуральных элементов ЛА более удобным оказывается применение пиротехнических составов (ПТС). Использование гибких листов ПТС позволяет изготавливать контактные пиротехнические устройства (КПТУ) пригодные для нагрева конструкций с криволинейными поверхностями. Заданный поток энергии на поверхности испытываемого объекта и ее температура воспроизводятся подбором рецептуры и толщины пиротехнического листа. Рецептура определяет скорость горения, а толщина листа – общее время подвода тепла. Многослойные КПТУ, состоящие из слоев с различными скоростями горения позволяют варьировать её в диапазоне от единиц до сотен мм/с. Важным варьируемым показателем также является удельное тепловыделение ПТС, меняющаяся в широких пределах (50...1000 кал/г).

Экспериментальные исследования показали, что, используя различные многослойные КПТУ, возможно обеспечить для композитного материала: времена нагрева 1...10 с; температуры вблизи нагреваемой поверхности 100...3000°С; темпы нагрева 10...3000°град/с. Отметим, что для создания температурных полей при большой протяженности поверхности натурной конструкции необходимо использовать многоточечное инициирование ПТС.

2. УСТРОЙСТВА ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЙ

При испытаниях на прочность композитных конструкций ЛА используется представительный набор устройств [1,2,5], позволяющих воспроизводить нестационарные нагрузки, соответствующие механическому действию потоков излучений в широком диапазоне изменения длин волн, плотностей энергий и длительностей облучения. Ряд из этих устройств разрабатывался [1] специально для воспроизведения механического действия оптического излучения и позволяет генерировать нагрузки с весьма сложными пространственно-временными распределениями давления по поверхности конструкции. Тем не менее, как отмечалось в [2], требуются новые устройства, позволяющие воспроизводить малоимпульсные нагрузки микросекундной длительности с высокой одновременностью приложения давления к поверхности испытываемого элемента ЛА. Поэтому дополнительно к набору устройств [1,2,5] разработаны два новых малоимпульсных устройства: ленточный заряд [9] и заряд с управляемым инициированием.

Ленточный заряд выполняется из лент взрывчатого вещества (ВВ), которые размещаются на трубках круглого сечения (см. рис.3). Трубки равноудалены от поверхности нагружаемого объекта. Для обеспечения одновременности приложения нагрузки используется многоточечная лучевая система инициирования с торцов лент ВВ.



Рис.3. Ленточный заряд ВВ.

Заряд с управляемым инициированием изготавливается в виде тонкой (≤ 3 мм) оболочки из волокнистого материала с фрезерованными каналами, заполненными пластическим взрывчатым веществом (ВВ) (см. рис.4). Размещение в каналах даёт ряд преимуществ по сравнению с другими способами локализации ВВ (например, сплошным слоем или секторами на пористой подложке). Управляемое инициирование реализуется методом, заимствованным из технологии создания давлений мегабарного уровня.

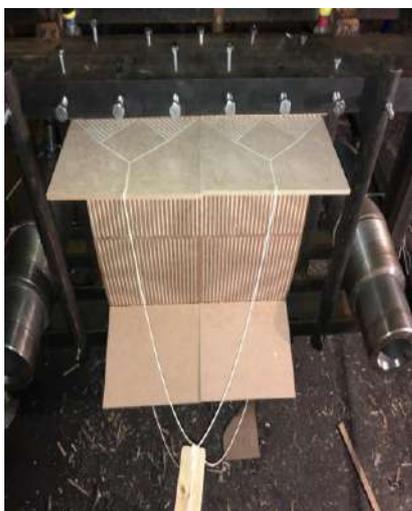


Рис.4. Заряд ВВ с управляемым инициированием.

Набор устройств [1,2,5], дополненный этими новыми разработками, имеет более широкие возможности и используется в настоящее время для испытаний композитных конструкций ЛА на прочность к механическому действию излучений различной физической природы.

3. УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ИСПЫТАТЕЛЬНЫЙ СТЕНД

Устройства, воспроизводящие действия ПИЧ (в том числе, и комплексное тепловое и механическое действие), располагаются для совместного функционирования на универсальном испытательном стенде [10]. Назначение

стенда обеспечить заданную последовательность воздействий устройствами на испытываемую конструкцию и по возможности воспроизвести полетные теплосиловые нагрузки (в рассматриваемом варианте стенда это тепловой нагрев от аэродинамических потоков и внутреннее давление в замкнутой оболочечной конструкции).

Под универсальностью стенда понимается:

- двойное предназначение (для верификации отдельных устройств и для проведения испытаний);
- многофункциональность (применим для различных сочетаний воздействий);
- широкая область использования (помимо действий ПИЧ может быть использован для любых нестационарных воздействий теплосиловых нагрузок, имеющих сложный пространственно-временной профиль).

Универсальность достигается использованием основы стенда в комплекте с различным набором воспроизводящих устройств.

Возможный вариант снаряжения универсального испытательного стенда показан на рис.5 (рис.5а – вид сбоку; рис.5б – фронтальный вид). Испытываемая тонкостенная композитная конструкция (3) подвешивается на баллистическом маятнике (1, 2). Она герметично закрывается двумя прочными стальными крышками. С одной стороны конструкция нагревается сгорающим ПТС (5), ее температура измеряется промышленным оптическим пирометром (11) и непрерывно записывается в память компьютера. Одновременно сгорает жгут из ПТС, подвешенный внутри конструкции, создавая внутреннее давление (величина внутреннего давления измеряется пьезодатчиком, а также рассчитывается по изменению показаний тензодатчиков). В момент догорания ПТС (5) открывается стопор (6), и пружинный поворотный механизм поворачивает конструкцию на 180° в положение, для которого нагретая часть оказывается напротив взрывного нагружающего устройства (4), установленного неподвижно. Как только новое положение конструкции фиксируется стопором (8), происходит подрыв устройства (4). Для диагностики состояния нагружаемой конструкции измеряются окружные и продольные нестационарные деформации в различных точках внутренней поверхности оболочки при помощи тензодатчиков (10).

Электрические выводы тензодатчиков подключены при помощи герметичной колодки (9), она же используется для вывода контактов электроподжига ПТС внутри.

При конструировании универсального стенда учтены предыдущие наработки. В частности, за основу стенда был принят ранее разработанный стендовый ракетный двигатель с телом вращения [1]. Однако в стенд внесено принципиальное изменение, расширившее возможности его универсализации. Ранее [1], воспроизводящие устройства перемещались над испытываемой конструкцией при их смене. В новом варианте, испытываемая конструкция проворачивается при смене нагревательного устройства для воспроизведения теплового действия ПИЧ и полетных тепловых потоков на взрывное устройство для моделирования механического действия излучений. Необходимость поворота оболочки на 180° вызвана тем, что в противном случае при сгорании слоя ПТС (5, рис.5а) может быть повреждено взрывное устройство (4, рис.5а).

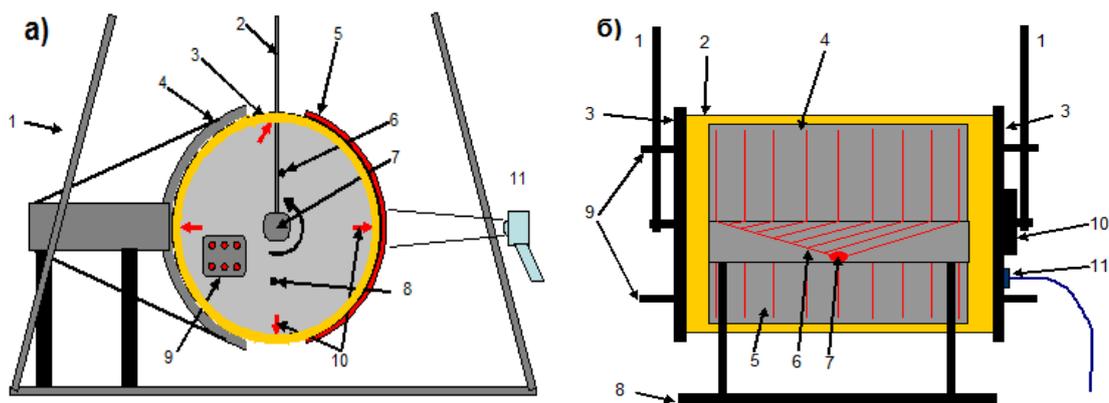


Рис.5. Схема стенда. а) Вид сбоку: 1 – стойка маятника (верхний шарнир не показан); 2 – подвес маятника; 3 – испытываемая цилиндрическая оболочка с крышками; 4 – взрывное устройство ЗУИ или ЭПЗ стойке; 5 – пиротехнический состав или ТЭН; 6 – съемный стопор; 7 – пружинный поворотный механизм; 8 – несъемный стопор; 9 – герметичная электрическая колодка; 10 – места расположения тензодатчиков; 11 – оптический пирометр. б) Вид с фронта: 1 – подвес маятника; 2 – испытываемая цилиндрическая оболочка; 3 – герметичные крышки; 4 – взрывное устройство распределенного импульсного нагружения, верхняя деталь; 5 – взрывное устройство, нижняя деталь; 6 – детонационная разводка; 7 – точка инициирования; 8 – стойка взрывного устройства нагружения; 9 – стопора; 10 – пружинный поворотный механизм; 11 – герметичная электрическая колодка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Рассмотрен расчетно-экспериментальный метод подтверждения прочности композитных конструкции ЛА к комплексному тепловому и механическому действию ПИЧ.

2. Для воспроизведения теплового действия ПИЧ на натурные конструкции ЛА предложено использовать многослойные контактные пиротехнические устройства с многоточечным инициированием. Экспериментально определены возможности таких устройств: времена нагрева 1...10 с; температуры вблизи нагреваемой поверхности 100...3000°C; темпы нагрева 10...3000°град/с.

3. Предложены два новых малоимпульсных устройства микросекундной длительности для воспроизведения нестационарных нагрузок, соответствующих механическому действию ОПИ.

4. Разработан универсальный испытательный стенд, обеспечивающий совместное функционирование рассматриваемых устройств и заданную последовательность их воздействий на испытываемую конструкцию.

В итоге, для реализации используемого в настоящее время расчетно-экспериментального метода разработан необходимый набор устройств, воспроизводящих тепловое и механическое действия в широком диапазоне изменения характеристик ПИЧ, а также универсальный испытательный стенд, обеспечивающий их совместное функционирование.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лоборев В.М., Острик А.В., Петровский В.П., Чепрунов А.А. *Методы моделирования механического действия излучений на материалы и конструкции*. – Сергиев Посад: ЦФТИ МО РФ, 1997. – 75 с.
2. Бакулин В.Н., Грибанов В.М., Острик А.В., Ромадинова Е.А., Чепрунов А.А. *Механическое действие рентгеновского излучения на тонкостенные композиционные конструкции*. – М.: ФМЛ, 2008. – 256 с.
3. Дьяченко И.В., Шенцев Н.И. *О возможности применения лазерного оружия в системах противокосмической обороны // Стратегическая стабильность*. – 2009. – №3(48). – С.51-58.
4. Грибанов В.М., Острик А.В., Потапенко А.И., Фортов В.Е. *Механическое действие рентгеновского излучения на гетерогенные материалы и тонкостенные конструкции / В монографии «Физика ядерного взрыва: в 5 томах»*. Том 2. Действие взрыва. – М.: Физматлит, 2010. – С. 344-447.
5. Осоловский В.С., Острик А.В., Чепрунов А.А. и др. *Воспроизведение механического и теплового действия рентгеновского излучения на элементы конструкций объектов / В монографии «Физика ядерного взрыва: в 5 томах»* Том 3. Воспроизведение факторов взрыва. – М.: Физматлит, 2013. – С.350-386.
6. Бакулин В.Н., Острик А.В. *Комплексное действие излучений и частиц на тонкостенные конструкции с гетерогенными покрытиями*. – М.: ФМЛ, 2015. – 288 с.
7. Панкратов Б.М., Полежаев Ю.В., Рудько А.К. *Взаимодействие материалов с газовыми потоками*. – М.: Машиностроение, 1976. – 224 с.
8. Ellis R.A. et. al. *Development of a carbon-carbon translating nozzle extension for the RL10B-2 liquid rocket engine // American Institute of Aeronautics and Astronautics Papers*. – 1997. – No.2672. – Pp.1-7.
9. Гирин Ю.В., Мартынов А.Г., Чепрунов А.А., Первов А.Ю. *Ленточный заряд из листового взрывчатого вещества*. Патент на изобретение №2557298 от 24.06.2015.
10. Кузьменков А.Ю., Острик А.В., Чепрунов А.А. *Стенд для испытаний конструкций летательных аппаратов на совместное действие тепловых и механический нагрузок*. Патент на изобретение №2789669 от 07.02.2023.

Геомеханика. Современные методы исследований



УПРУГАЯ ПОЛОСА С ОСТАТОЧНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Власов Д.А.¹, Коваленко М.Д.²

¹ООО «Сигма Тау», г. Москва, Россия

²ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Теория остаточных напряжений – одна из наиболее важных современных проблем математики и механики деформируемого твёрдого тела. Безопасность при горнопроходческих работах и строительстве подземных сооружений; прогноз землетрясений, основанный не на статистических данных, а на физической модели очага землетрясений и еще множество других прикладных проблем, эффективное решение которых невозможно без теории остаточных напряжений. В настоящее время нет сколь-нибудь развитой, математически строгой теории остаточных напряжений в конечных упругих областях. Вместе с тем имеется достаточно много экспериментальных и лабораторных исследований, полученных, в частности, в Киргизской АН [1-3], в Дальневосточном и Сибирском отделениях РАН [4-7]. Несмотря на огромный фактический материал, данные лабораторных и полевых исследований, свидетельствующие о важности остаточных напряжений, на практике они почти не учитываются. Это объясняется тем, что экспериментально установить характер распределения остаточных напряжений крайне сложно. Необходима теория, объясняющая механизмы возникновения самонапряженного состояния в конечных упругих областях и их перераспределения в результате образования новых свободных поверхностей.

В статьях [8,9] было показано, что теория остаточных напряжений является следствием решения бигармонической проблемы теории упругости. В ее основе лежат разложения по собственным функциям Папковича-Фадля, независимо от того, в какой системе координат решается (двумерная или трехмерная) краевая задача и от причины возникновения остаточных напряжений (предыстория формирования массива, неоднородность упругой среды, трещиноватость, температурные факторы и т.д.). Там же было установлено, что физическая модель полученных решений в прямоугольных пластинах с остаточными напряжениями соответствует классическим представлениям об остаточных напряжениях (например, [10]).

В этой статье (в четно-симметричной постановке) рассмотрена бесконечная упругая полоса со свободными сторонами, склеенная из одинаковых прямоугольников так, что в каждом из них возникают остаточные напряжения. Затем из полосы вырезается один из прямоугольников. При этом остаточные напряжения сбрасываются, а стороны прямоугольника деформируются. Приводятся формулы для остаточных напряжений в прямоугольнике и формулы, описывающие деформацию его сторон после сброса остаточных напряжений. Решение задачи для прямоугольника с остаточными напряжениями сравнивается с численным решением для прямоугольника в классической постановке, полученным при условии, что известны остаточные напряжения на стыках

прямоугольников. Численные решения строились в программном комплексе ZSoil.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Рассмотрим бесконечную упругую горизонтальную полосу $\{ \Pi : |x| < \infty, |y| \leq 1 \}$ со свободными сторонами. Разрежем ее на одинаковые прямоугольники $\{ P : |x| \leq d, |y| \leq 1, 0 < d < \infty \}$. Заменяем прямоугольники с прямолинейными сторонами прямоугольниками P' с симметрично искривленными (относительно центральных осей) сторонами. Приложим к ним некоторые системы напряжений так, чтобы они вновь приобрели вид прямоугольников P , а затем вновь склеим их по торцам в бесконечную полосу со свободными сторонами. В результате получим ту же бесконечную полосу Π , но в которой есть периодическое поле остаточных напряжений.

Сечениями $x = \pm d$ вырежем из полосы с остаточными напряжениями прямоугольник P . При этом остаточные напряжения сбрасываются и прямоугольник P принимает вид P' . Если известны сбрасываемые остаточные напряжения $\sigma(y) = \sigma_x(\pm d, y)$ (касательные напряжения в силу симметрии задачи здесь равны нулю), то можно полностью восстановить поле остаточных напряжений в прямоугольнике, а также перемещения, которые возникают при их разрядке. Решение этой задачи представляется рядами

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k d \sinh \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda} \sinh \bar{\lambda} d \cosh \lambda_k d)}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k d \cosh \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda} \sinh \bar{\lambda} d \cosh \lambda_k d)}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k d \cosh \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda} \sinh \bar{\lambda} d \cosh \lambda_k d)}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda} \lambda_k^2 \sinh \bar{\lambda}_k d \cosh \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda} \sinh \bar{\lambda} d \cosh \lambda_k d)}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \lambda_k \sinh \bar{\lambda}_k d \sinh \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda} \sinh \bar{\lambda} d \cosh \lambda_k d)}. \end{aligned} \quad (1)$$

по собственным функциям Папковича-Фадля

$$\begin{aligned} \xi(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1-\nu}{2} \sin \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \\ &\quad - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\ \chi(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k + \sin \lambda_k \right) \sin \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y, \\ s_x(\lambda_k, y) &= (1+\nu) \lambda_k \left[(\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y \right], \end{aligned} \quad (2)$$

$$s_y(\lambda_k, y) = (1 + \nu) \lambda_k [(\sin \lambda_k + \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y],$$

$$t_{xy}(\lambda_k, y) = (1 + \nu) \lambda_k^2 (\cos \lambda_k \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y).$$

В формулах (1), (2) введены следующие обозначения. Через $U(x, y), V(x, y)$ обозначены, соответственно, продольное и поперечное перемещения, умноженные на модуль сдвига G , ν – коэффициент Пуассона, числа $\bar{\lambda}_k, \lambda_k$ – множество четверок $\{\pm \lambda_k, \pm \bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ комплексных нулей целой функции экспоненциального типа $L(\lambda) = \lambda + \sin \lambda \cos \lambda$. Коэффициенты σ_k (аналоги коэффициентов Фурье) определяются по формуле

$$\sigma_k = \int_{-1}^1 \sigma(y) x_k(y) dy, \quad x_k(y) = \frac{\cos \lambda_k y}{2(1 + \nu) \lambda_k \sin \lambda_k}. \quad (3)$$

Если же известна форма профилей торцов $U(\pm d, y) = u(y)$ прямоугольника P' после сброса остаточных напряжений, то в формулах (1) надо числа σ_k заменить на u_k по формуле [9]

$$\sigma_k = \frac{u_k}{\lambda_k} \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \sinh \bar{\lambda}_k d \cosh \lambda_k d)}{\sinh \lambda_k d \sinh \bar{\lambda}_k d \operatorname{Im} \lambda_k}, \quad (4)$$

где (δ – дельта-функция Дирака)

$$u_k = \int_{-1}^1 u(y) u_k(y) dy, \quad u_k(y) = \frac{1}{1 + \nu} \left\{ \frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k} - [\delta(y - 1) + \delta(y + 1)] \right\}. \quad (5)$$

Ряды (1) равносходятся с тригонометрическими по системам функций $\{\cos k\pi y\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\sin k\pi y\}_{k=1}^{\infty}$, что является следствием асимптотической близости собственных чисел λ_k и чисел $k\pi$.

ПРИМЕР

Решение для прямоугольника P с остаточными напряжениями сравнивалось с численным решением для этого же прямоугольника в классической постановке, когда на его торцах заданы самоуравновешенные нормальные напряжения

$$\sigma(y) = \begin{cases} 1 & (|y| < 0.25), \\ -\frac{1}{2} & (0.25 < |y| < 0.5), \\ 0 & (0.5 < |y| \leq 1) \end{cases} \quad (6)$$

Для того чтобы исключить взаимовлияние торцов прямоугольника, считалось, что $d = 4$. Коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$. Сплошным кривым отвечают численные решения в прямоугольнике, пунктирным – решение (1); Через $y = c = 3.925$ обозначено сечение близко расположенное к торцу прямоугольника.

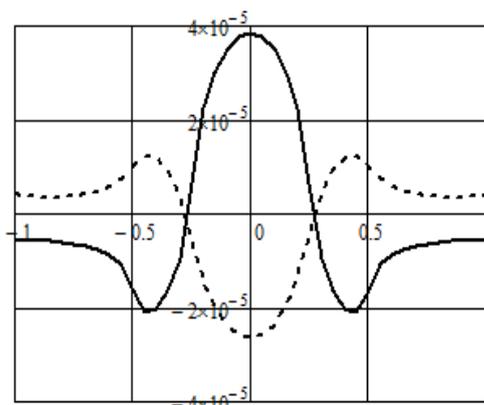


Рис.1. Продольные перемещения (вдоль оси x) при $x = c$ в численном решении (сплошная кривая) и перемещения, возникающие при сбросе остаточных напряжений.

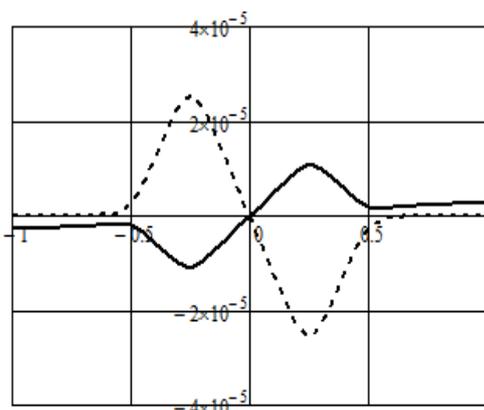


Рис.2. Поперечные перемещения (вдоль оси y) при $x = c$ в численном решении (сплошная кривая) и перемещения, возникающие при сбросе остаточных напряжений.

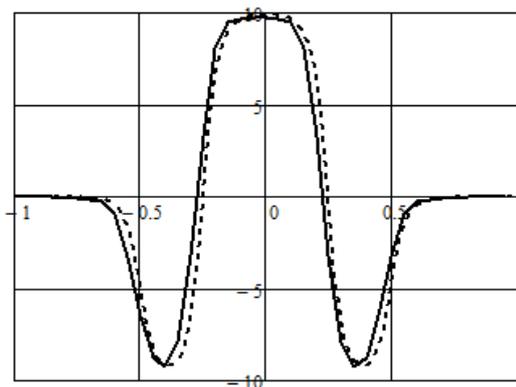


Рис.3. Нормальные напряжения $\sigma_x(\pm c, y)$ в численном решении (сплошная кривая) и остаточные напряжения.

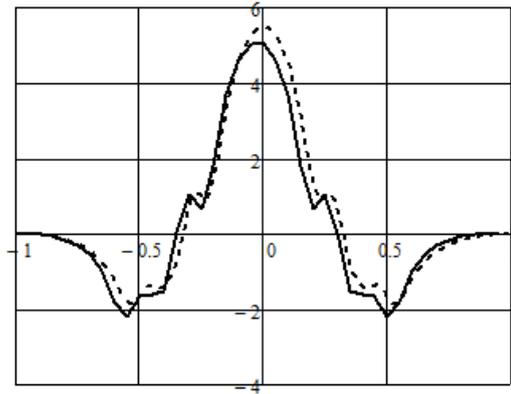


Рис.4. Нормальные напряжения $\sigma_y(\pm c, y)$ в численном решении (сплошная кривая) и остаточные напряжения.

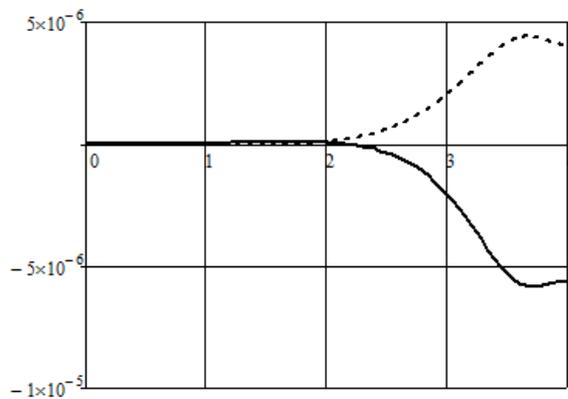


Рис.5. Продольные перемещения $U(x, 1)$ на участке $(0 \leq x \leq d)$ в численном решении (сплошная кривая) и соответствующие перемещения, возникающие при разрядке.

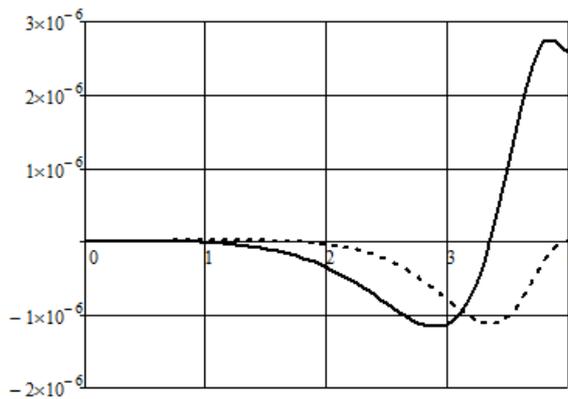


Рис.6. Поперечные перемещения $V(x, 1)$ на участке $(0 \leq x \leq d)$ в численном решении (сплошная кривая) и соответствующие перемещения, возникающие при разрядке.

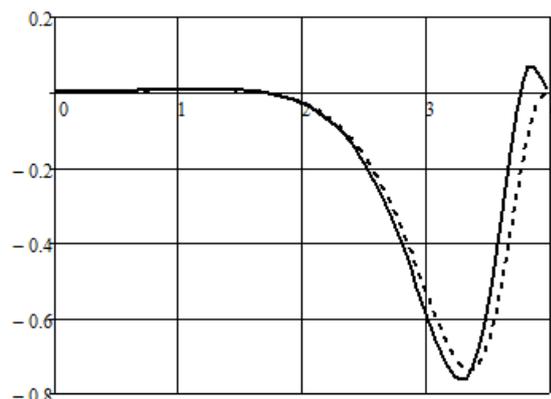


Рис.7. Нормальные напряжения $\sigma_x(x,1)$ на участке $(0 \leq x \leq d)$ в численном решении (сплошная кривая) и соответствующие остаточные напряжения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Сравнивая графики распределения напряжений можно заметить, что численное решение в классической постановке не сильно отличается от остаточных напряжений, полученных аналитически. Вместе с тем, отличия в перемещениях значительны и, в первую очередь, они отличаются знаками.

2. Если известны сбрасываемые нормальные напряжения $\sigma_x(\pm d, y)$ или форма профиля $U(\pm d, y)$ прямоугольника P' , то по формулам (1)-(5) можно восстановить поле остаточных напряжений.

3. В том случае, когда поле остаточных напряжений в полосе не является четно или нечетно симметричным, надо воспользоваться результатами статьи [9], где рассмотрены все случаи симметрии.

4. Прямоугольник может быть вырезан в любом месте из полосы с остаточными напряжениями. Его ориентация относительно осей координат и длины сторон могут быть различными.

5. Точные решения, описывающие остаточные напряжения весьма сложны и трудоемки. Один из путей построения численных решений задач с остаточными напряжениями (на основе любого из имеющихся программных комплексов или численных алгоритмов) состоит в следующем: надо так подобрать форму сторон прямоугольника P' в численном решении (в более общем случае – форму границ области), чтобы численное решение в классической постановке совпадало с точным решением задачи с остаточными напряжениями.

6. Решение (1) не удовлетворяет условиям совместности деформаций. Следствием этого является существование нетривиальных разложений нуля по собственным функциям Папковича-Фадля. Если же коэффициенты разложений в формулах (1) (числа σ_k или u_k) определять каким-либо приближенным методом, то в полученном приближенно-аналитическом решении нетривиальных разложений нуля не будет. Следовательно, таким решением не удастся описать остаточные напряжения. Простое объяснение отличия классического решения для прямоугольника от решения с остаточными напряжениями было дано в [8,9].

7. Алгоритм точных решений трехмерных задач с остаточными напряжениями в конечных упругих областях канонической формы остается неизменным, т.е. решения всегда будут представляться рядами по собственным

функциям Папковича-Фадля. Однако эти решения сложнее и более трудоемки. Но в случае осесимметричных задач в цилиндрической системе координат (тоннели, шахты) построение точных решений с остаточными напряжениями не сильно усложняется.

8. Задачи об остаточных напряжениях в конечных упругих областях канонической формы раньше не ставились и не решались как краевые задачи теории упругости. Причина этого заключается в отсутствии математического фундамента для решения таких задач. Теория остаточных напряжений, основанная на разложениях по собственным функциям Папковича-Фадля, в частности, формулы (1) являются следствием решения бигармонической проблемы [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Тажибаев К.Т. *Условия динамического разрушения горных пород и причины горных ударов*. – Фрунзе: Илим, 1989. – 180 с.
2. Тажибаев К.Т. *Концепция стационарной деформации литосферных плит, прогноз и предупреждение тектонических землетрясений* // Известия национальной АН Кыргызской Республики. – 2009. – №2. – С.47-58.
3. Айтматов И.Т., Тажибаев К.Т., Казакбаева Г.О. *Исследование остаточных напряжений в горных породах на основе поляризационно-оптического метода моделирования* // Вестник КРСУ. – 2006. – Т.6. – №7. – С.13-18.
4. Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф. *Моделирование процессов деформирования самонапряженных образцов горных пород* // ФТПРПИ. – 2017. – №1. – С.15-23.
5. Ци Чэнчжи, Цинь Циху, Ван Минян. *Математическое моделирование зонального разрушения массива вокруг подземных выработок и реверсивного деформирования образцов горных пород* // Вестник ДГТУ. – 2011. – №3/4(8/9). – С.92-120.
6. Гузев М.А., Макаров В.В. *Деформирование и разрушение сильно сжатых горных пород вокруг выработок*. – Владивосток: Дальнаука, 2007. – 232 с.
7. Ксендзенко Л.С., Макаров В.В. *Метод определения параметров математической модели сильно сжатого массива по данным экспериментов* // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2012. – №8. – С.382-385.
8. Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т.Д. *Разложения по функциям Фадля-Папковича. Примеры решений в полуполосе* // Известия РАН. МТТ. – 2013. – №5. – С.121-144.
9. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Yu G. *A boundary value problem in the theory of elasticity for a rectangle: exact solutions* // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. – 2020. – Vol.71. – No.6. – 199.
10. Гольденблат И.И. *Нелинейные проблемы теории упругости*. – М.: Наука, 1969. – 336 с.

УДК 624.1
EDN DDHXAT (<https://elibrary.ru/ddhxat>)
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.42



ПРОБЛЕМЫ ДОСТОВЕРНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОЛЕТНЕМЕРЗЛЫХ ГРУНТОВ И НОВЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПОДХОДЫ К ПРОВЕДЕНИЮ ГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Королев М.В.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

Рассматривается вопрос достоверности определения механических характеристик мерзлых грунтов. Показано, что применяемые в настоящее время методы определения механических характеристик недостаточно информативны, обладают высокой стоимостью и не способны решить новые актуальные задачи, связанные с массовым строительством объектов в северной климатической зоне. На основе системного анализа предложены новый подход к испытанию таких грунтов, на основе которого разработаны новые более эффективные методы, методики и приборы для геомеханических испытаний.

Ключевые слова: многолетнемерзлые грунты; реологические свойства; масштабная неоднородность; ползучесть; релаксация; геомеханические испытания

Необходимость активного освоения северных территорий РФ, активизации деятельности добывающих и перерабатывающих предприятий, создание современной инфраструктуры Северного Морского пути, подразумевает осуществление массового строительства различных объектов, что выдвигает особые требования к их экономичности и надежности.

Надежность и экономичность строительных объектов напрямую зависит от достоверности и точности исходной информации, которая используется при проектировании, в частности от достоверности и точности определения механических характеристик грунтов основания. Достоверное определение значений механических характеристик многолетнемерзлых грунтов представляет собой сложную задачу. Это обусловлено следующими обстоятельствами:

1. Специфическими свойствами многолетнемерзлых грунтов, географическими и климатическими особенностями криолитозоны:

– большим разнообразием грунтов от рыхлых до скальных различного состава, происхождения и состояния (что вызывает необходимость иметь большое разнообразие методов, пригодных для их испытаний);

– реологическими свойствами мерзлых грунтов, существенным снижением прочности и повышением деформируемости во времени (что вызывает необходимость проведения сложных длительных испытаний);

– существенной зависимостью механических свойств грунтов от значения отрицательных температур (это вызывает необходимость проводить испытания грунтов при различных значениях температур, что кратно увеличивает количество);

– изменчивостью в плане и по глубине, зависимостью свойств от температуры и засоленности (необходимость проведения большого количества испытаний,

использование сложного оборудования, стационарных климатических камер, автоматизированных приборов);

- масштабной неоднородностью и зависимостью свойств от макроструктуры (что требует проведения крупномасштабных полевых испытаний);

- сложностью проведения полевых и лабораторных испытаний в условиях сурового климата, удаленности объектов и часто при недостаточно развитой базе. Большая продолжительность зимнего периода с суровыми морозами, высокий снежный покров, короткий летний период.

2. Недостаточной степенью разработанности к настоящему времени эффективных методов и методик исследования механических свойств мерзлых грунтов, в особенности в условиях изменения климата:

- новым вызовом, связанным с наблюдаемой в последнее время активной деградацией мерзлоты;

- недостаточной изученностью свойств мерзлых и оттаивающих грунтов ввиду их большого разнообразия. Отсутствием таблиц значений механических характеристик в зависимости от их происхождения, физических характеристик и других параметров, не позволяющих определять необходимые характеристики по аналогам;

- большой длительностью, трудозатратами и стоимостью испытаний, низкой информативностью и точностью при использовании существующих методов, рекомендуемых нормативной литературой;

- практическим отсутствием в практике изысканий новых эффективных методов, приборов и методик, позволяющих эффективно и достоверно определять механические характеристики реологических, масштабно неоднородных грунтов при различных температурах в результате того, что в последние годы из-за недостатка финансирования такие работы практически не велись;

3. Неготовностью изыскательских организаций к проведению большого объема изысканий, связанных с реализацией крупных инфраструктурных проектов в северной климатической зоне и к участвовавшим случаям аварий существующих зданий и сооружений в результате деградации мерзлоты:

- сокращением числа организаций, способных проводить данные геомеханические исследования, особенно располагающихся непосредственно в районах распространения мерзлоты;

- старением материально-технической базы в местных изыскательских организациях, в том числе из-за высокой стоимости современных автоматизированных приборов;

- недостатком высококвалифицированных кадров непосредственно в северных регионах, способных работать на современном сложном оборудовании;

4. Дополнительными осложняющими факторами:

- политической обстановкой в мире, экономической и технологической блокадой России, которые диктуют необходимость быстрого ответа на новые вызовы с использованием собственных разработок в условиях ограниченных ресурсов;

- острой необходимостью импортозамещения иностранных измерительных и иных устройств, используемых в приборах и установках для геомеханических изысканий;

- недостаточным финансированием перспективных исследований и отсутствием действенного механизма внедрения удачных разработок.

Исходная информация, от которой зависит надежность и экономичность проектных решений для фундаментов и оснований сооружений устанавливается в ходе инженерно-геологических (ИГ) изысканий. Однако, следует учесть, что инженерно-геологические скважины, по которым строится ИГ разрез, отстоят друг от друга на достаточно большом расстоянии. Нет гарантий, что между скважинами выделенные ИГ элементы залегают по ровной прямой линии, и там нет других линз и слоев. Часто сложности и ошибки возникают при выделении и описании ИГ элементов. Несмотря на то, что в состав ИГ изысканий входят дополнительные методы (геофизические, зондирование и т.д.), позволяющие уточнить данные бурения, все равно сам инженерно-геологический разрез в любом случае составлен на основании весьма ограниченных данных и является некоторым условным виртуальным отображением представлений геолога об изучаемом объекте. Исследованию подлежит весьма незначительная по объему часть массива, которая составляет от объема основания сооружения не более 10^{-6} . Насколько это представление соответствует реальности, зависит от опыта геолога и полноты ИГ изысканий. Очень часто встречаются случаи, когда при строительстве или дополнительных ИГ изысканиях выясняются существенные расхождения с первоначальными результатами. Поэтому проектировщики проектируют конструкции с большим запасом, пренебрегая критерием экономичности, но даже эта мера не полностью гарантирует нормальную работу сооружения. Всё вышесказанное усугубляется при изысканиях массивов многолетнемерзлых грунтов, из-за особенностей их свойств.

Таким образом, исходя из вышесказанного возникает закономерный вопрос, а насколько, при большой неоднородности грунтов, значительной зависимости их механических свойств от температуры, с учетом сложности отбора, транспортировки и подготовки образцов, вообще являются представительными результаты геомеханических лабораторных испытаний мерзлых грунтов и насколько они достоверны?

Вопросам анализа причин возникновения погрешностей посвящены работы Коломенского Н.В. и Комарова И.С. (1956 г.), Робиновича С.Г. (1978 г.), Чернойского А.А. (1984 г.), Гавришина А.Н. (1980 г.), Усикова Ю.Т. (1983 г.), Писарева Е.А. и Огонченко В.П. (1979 г.), Дмитриева В.В. (1989 г.) и мн. др.[1].

Так, например, Коломенский Н.В. и Комаров И.С. (1956 г.) выделили три группы причин, обуславливающих рассеяние частных показателей свойств пород: погрешности, допускаемые при лабораторных испытаниях; погрешности, связанные с нарушением естественной структуры и физического состояния пород при отборе, транспортировке и хранении образцов; неоднородность горных пород.

Следует отметить, что наиболее весомым фактором в данном случае является именно неоднородность мерзлых грунтов и нарушение первоначальных свойств грунтов при отборе проб и транспортировке.

С учетом вышесказанного возникает вопрос, насколько следует стремиться к точности отдельных испытаний?

Как известно, стоимость сооружения (рис.1, кривая 2) зависит от достоверности инженерно-геологических изысканий и, соответственно, точности определения механических характеристик грунтов основания. С увеличением точности стоимость сооружения уменьшается за счет уменьшения неоправданных запасов. С другой стороны, при увеличении точности геомеханических изысканий возрастает их стоимость (рис.1, кривая 1) [1].

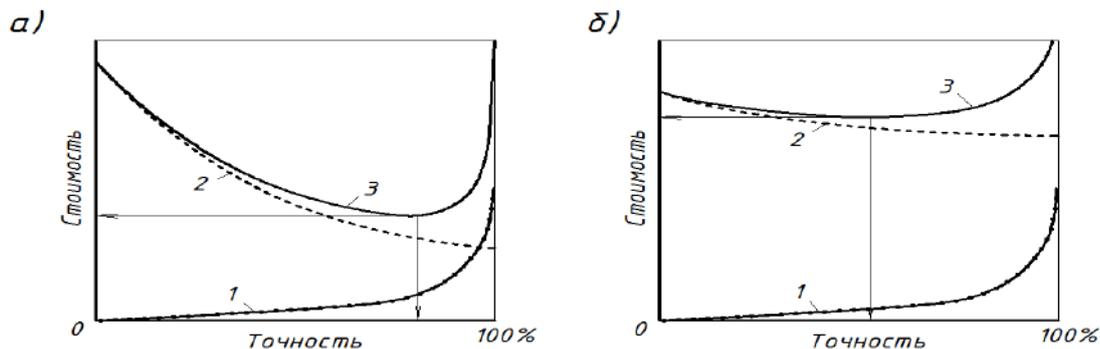


Рис.1. Зависимость стоимости испытаний (1), стоимости сооружения (2) и их суммарной стоимости (3) от точности испытаний. а) для сооружения, стоимость которого значительно зависит от точности определения характеристик; б) для сооружения, стоимость которого мало зависит от точности испытаний.

В настоящее время, в попытке увеличить точность геомеханических расчетов, часто стали использовать достаточно сложные модели грунта. Между тем, очевидно, что при использовании в геотехнических расчетах сложных моделей грунта, требующих определения путем длительных дорогостоящих специальных геомеханических исследований, входящих в данную модель характеристик, стоимость инженерно-геологических и геомеханических изысканий будет существенно возрастать. Суммарная же стоимость геомеханических изысканий и сооружения (кривая 3) будет иметь минимум в определенной точке, которая соответствует не максимальной, а оптимальной точности при минимуме общих затрат. Если стоимость сооружения существенно зависит от точности геомеханических испытаний (график а), то оптимальная точность должна быть высокой, если нет (график б), то и оптимальная точность испытаний может быть невысокой. С развитием эффективных и экономичных геотехнологий, направленных на улучшение строительных свойств грунта, требования к точности геомеханических исследований будет снижаться [1].

Таким образом, экономия на точности и достоверности изысканий, с одной стороны, может значительно увеличить стоимость сооружения. С другой стороны, нет необходимости однозначно стремиться к неоправданному экономически повышению точности отдельных испытаний. Тем более, что с учетом вышеизложенного, эта точность только кажущаяся. Поэтому использование в расчетах сложных моделей грунта должно быть экономически оправдано и обосновано.

Для определения оптимальной точности геомеханических исследований целесообразно перед составлением программы исследований провести серии численных вариационных расчетов для определения степени влияния механических свойств грунтов различных ИГ элементов на стоимость проектируемого сооружения и установить оптимальную требуемую точность определения тех или иных механических характеристик (параметров выбранной модели) для различных ИГ элементов, и, определив требуемую точность выбирать соответствующие методы и методики исследований. Такая методика оценки целесообразной точности испытаний изложена в [1].

Особую проблему в части достоверности исходной информации составляют непосредственно геомеханические испытания, наибольший объем которых приходится лабораторные исследования.

При этом отобранные для испытаний образцы мерзлого грунта должны доставляться в грунтовые лаборатории, где имеются климатические камеры и соответствующее оборудование для испытаний. При этом образцы размораживаются и разуплотняются, что существенно влияет на достоверность результатов.

Классические методы определения параметров длительной прочности грунтов, обладающих реологическими свойствами (в т.ч. мерзлых грунтов), были созданы еще в 30-40-х годах прошлого столетия и основаны на испытаниях в режиме контролируемой (задаваемой) нагрузки) [2;3], то есть ступенчатом приложении к образцу нагрузки, измерении развития деформаций, приложении следующей ступени вплоть до разрушения образца. Существенными недостатками такого подхода к определению параметров длительной прочности для мерзлых грунтов, обладающих ярко выраженными реологическими свойствами, являются:

– значительная длительность опыта и малая информативность, поскольку в ходе испытаний образец доводится до разрушения, при сдвиговых испытаниях для определения параметров длительной прочности φ^∞ , c^∞ требуется испытать минимум два образца при различных нормальных напряжениях σ .

– испытания грунтов при фиксированном его физическом состоянии, т.е. при одном значении отрицательной температуры. Для определения параметров длительной прочности при различных температурах, что часто требуется для расчетов оснований при возможном изменении температуры массива, требуется целая серия длительных испытаний, что существенно удорожает и усложняет геомеханические изыскания.

Очевидно, что для исследования механических свойств мерзлых и оттаивающих грунтов в условиях возможного изменения их температуры следует разрабатывать более перспективные и информативные методы и методики, используя при этом новые идеи и иные подходы.

Под перспективностью методов понимается возможность широкого и эффективного использования и дальнейшего совершенствования и модернизации способов, приборов и методик испытаний на основе данного общего подхода (метода) для рационального решения приоритетных задач в определенных областях и условиях строительства. Перспективные идеи обладают рядом признаков:

- простота идеи;
- идею легко объяснить;
- не требует больших затрат на реализацию;
- возможность быстрого внедрения и быстрого получения положительного эффекта;
- возможность широкого внедрения (размеры рынка);
- оригинальность и уникальность идеи;
- возможность дальнейшего развития общей идеи;
- возможность использования идеи для решения широкого круга задач.

По сравнению с традиционным, более перспективным подходом, на наш взгляд, являются испытания в режиме контролируемых (задаваемых) деформаций без разрушения испытываемого образца. Идея такого подхода впервые была предложена проф. Вяловым С.С. (1978) и реализованные им в так называемом динамометрическом методе определения длительной прочности грунтов на одноосное сжатие [2].

Следует отметить, что в последние годы многие исследователи оценили новые возможности и перспективы испытаний реологичных грунтов в режиме контролируемых деформаций (ползуче-релаксационном режиме нагружения). Так, в НИИОСП им. Н.Е. Герсевича Труфановым А.Н. проводились исследования возможности использования ползуче-релаксационного режима нагружения для компрессионных испытаний [4]. Сотрудники института геоэкологии РАН проводили испытания по данной методике на стабилometре [5]. Испытания свай в режиме ползучести-релаксации рекомендовательно вошли в нормативную литературу.

Все исследователи отмечают высокую эффективность данного метода испытаний для грунтов, обладающих реологическими свойствами и большие преимущества по сравнению с традиционными методиками. Однако, еще большие преимущества метод ползуче-релаксационного режима испытаний раскрывает при исследовании мерзлых грунтов при различных температурах и в процессе их оттаивания, делая его действительно уникальным по точности и информативности [1] и актуальным для нашей страны в новых условиях.

Используя общий принцип испытания в режиме задаваемых деформаций без разрушения грунта автором, начиная с 1985 г., сначала в МИСИ им. В.В. Куйбышева, затем в НИУ МГСУ, и в настоящее время в ИПРИМ РАН [1,6-8] разработаны новые методики испытаний в ползуче-релаксационном режиме нагружения, которые полностью отвечают вышеизложенным требованиям. Эти методики могут быть реализованы при различных видах испытаний: шаровым штампом, на сдвиг, при испытаниях в стабилometре, при испытаниях свай и др. Вышеприведенные методики позволяют на порядки сократить время, трудоемкость, количество испытаний и существенно повысить точность определений, а также могут быть эффективно использованы при проведении полевых и лабораторных испытаниях и при геотехническом мониторинге объектов криолитозоны [9].

Например, методика сдвиговых испытаний с использованием для определения параметров длительной прочности мерзлых грунтов при различных отрицательных температурах в режиме оттаивания по результатам одного опыта позволяет в ходе одного опыта не только определить параметры длительной прочности мерзлых пород при фиксированной температуре, но и определить их значение при различных температурах в ходе одного опыта [1]. Программа нагружения для получения параметров длительной прочности грунтов при различных отрицательных температурах, а также в режиме оттаивания грунтов для испытаний на сдвиг приведена на рис.2а, а процесс испытаний в климатической камере на сдвиговом приборе ВСВ-25м на рис.2. Подробно данная методика описана в [1].

Однако при испытаниях в стационарных климатических камерах при изменении температуры нагрузочные и измерительные системы прибора испытывают температурные деформации, искажающие результаты испытаний. Поэтому в ИПРИМ РАН в настоящее время создается целая линейка уникальных мобильных приборов с портативной климатической камерой для испытания [1,10]. Отличительной особенностью этих приборов является то, что в мини морозильную камеру помещается только испытываемый образец грунта, а нагрузочная и измерительная системы располагаются снаружи и не испытывают температурных деформаций. Эти приборы легко доставляются непосредственно к месту отбора образцов, просты в наладке и эксплуатации. Первый прибор из этой серии – прибор

шарового штампа уже прошел экспериментальную проверку, использовался при полевых исследованиях на одном из объектов в г. Норильске и показал высокую эффективность.

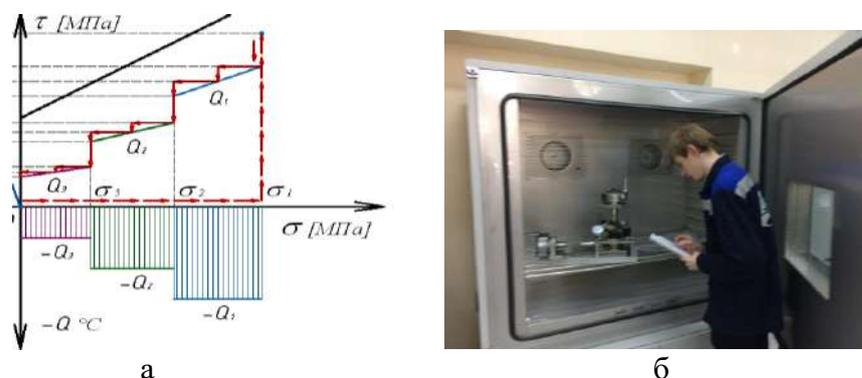


Рис.2. а) кривые длительной прочности и программа испытаний мерзлых грунтов при различных температурах $\theta_1, \theta_2, \theta_3$; б) сдвиговые испытания на приборе ВСВ-25 м в климатической камере.

Учитывая масштабную неоднородность многих грунтов, наиболее представительными испытаниями являются полевые исследования. Проведение полевых испытаний в криолитозоне весьма сложны и трудоемки. Для определения механических характеристик масштабно неоднородных грунтов традиционно используются проведение полевых испытаний целиков различной формы – прямоугольных или кольцевых в шурфах и штольнях. Применяют также испытания горячим штампом. В последние годы наблюдается стремление к отказу от методов, связанных с трудоемкими подготовительными работами, к повышению технологичности полевых и лабораторных экспериментов, к более массовому использованию геофизических методов (сейсмо- и электроразведка, георадар и др.), широкому применению таких экспресс методов, как статическое зондирование, замене механических испытаний расчетными и экспресс-методами.

Расчетно-аналитические методы представляются наиболее перспективными, однако для их более широкого использования необходимо разрабатывать особые виды испытаний, для определения входящих в расчеты параметров. Некоторые такие разработки ведутся в ИПРИМ РАН. В частности, разрабатывается лабораторная установка, позволяющая определять модуль сдвига и модуль деформации трещин.

С целью снижения трудоемкости подготовительных работ, при проведении полевых работ, на наш взгляд, более целесообразно использовать инвентарные штампы. Приведем пример такой разработки.

При исследовании мерзлых полускальных грунтов, слагающих борта котлована строящейся Вилуйской ГЭС-3, автором была разработана и апробирована инвентарная установка кольцевого нагружения – кольцевой ребристый штамп, где касательная крутящая нагрузка передавалась на массив с помощью ребер, закрепленных на металлическом инвентарном кольцевом штампе [1] (рис.3).

С помощью кольцевого ребристого штампа можно проводить испытания в режиме ползучести – релаксации и проводить опыты по определению параметров прочности на сдвиг кручением.

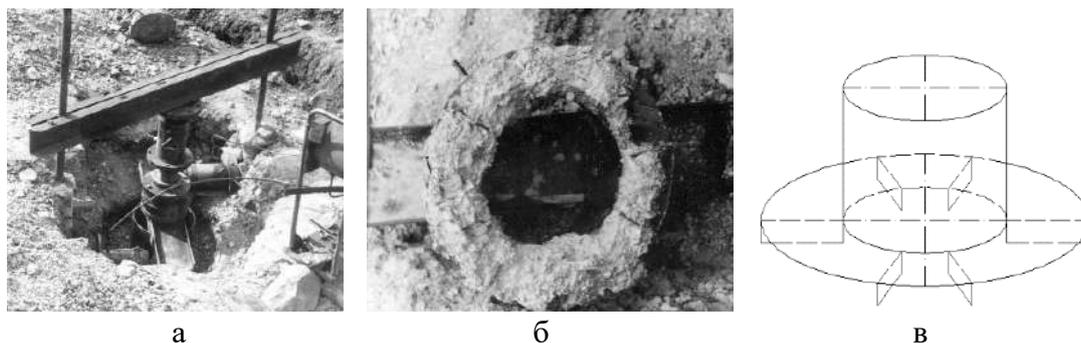


Рис.3. а, б) полевые испытания кольцевым ребристым штампом диаметром 0,5 м в шурфе; в) схема инвентарного кольцевого ребристого штампа.

Однако недостатком вышеописанного способа является то, что он не позволяет определить параметры прочности мерзлых грунтов при различных значениях отрицательных температур в скважинах и открытых шурфах. Обычным ребристым штампом возможно только проведение испытаний при фиксированном значении температуры массива изменяя её во всей штольне или требуется проводить опыты в морозильной камере.

Если же изменять температуру мерзлого массива грунта с поверхности, с помощью нагревательных или охлаждающих устройств, под подошвой ребристого штампа, то в нем возникает неравномерное температурное поле. Это не позволяет осуществлять сдвиг кручением грунта с одинаковой температурой, при помощи прямоугольных ребер штампа.

С целью усовершенствования метода в ИПРИМ РАН были проведены численные температурные расчеты изменения температуры грунта в массиве при изменении её под кольцевой подошвой штампа. Расчеты проводились с помощью программного комплекса «Abacus».

Результаты расчетов представлены в графической форме на рис.4.

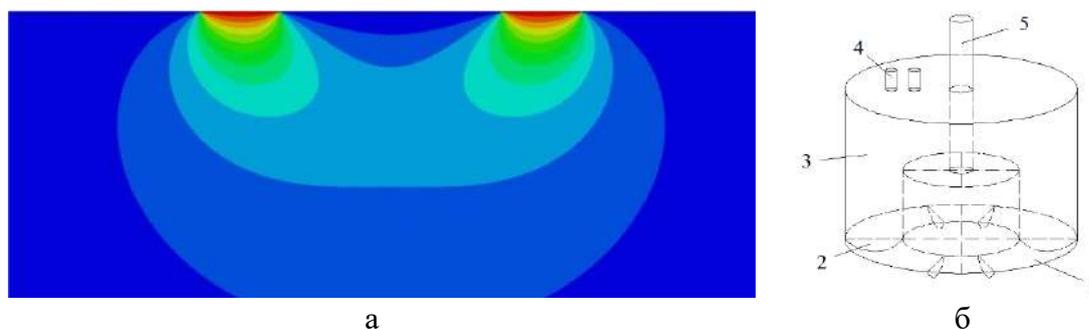


Рис.4. а) результаты численных расчетов изменения изолиний температуры в массиве мерзлого грунта при её изменении на поверхности под подошвой кольцевого штампа; б) принципиальная схема кольцевого ребристого штампа для испытания мерзлых грунтов при различных температурах в коротких скважинах, где 1 – подошва кольцевого штампа; 2 – овалы ребра; 3 – бак с теплоносителем; 4 – подводный и отводящий трубопроводы; 5 – вал штампа для передачи крутящего момента и вертикальной нагрузки.

Как показали проведенные расчеты, форма линии равных температур при таком нагреве одинакова и не зависит от теплофизических свойств грунта. Это обстоятельство дает возможность существенно упростить устройство кольцевого ребристого штампа для определения механических свойств грунта

при различных температурах и отказаться от внешней и внутренней вкладок, которые были необходимы для создания равномерного температурного поля.

Было предложено ребра штампа делать не в виде прямоугольных пластин, а округлой формы, повторяющей кривую линии равных температур, которая формируется под подошвой кольцевого штампа при её нагревании. Тогда при приложении крутящей нагрузки сдвиг грунта будет осуществляться точно по границе слоя грунта с одинаковой температурой. На рис.4б показана принципиальная схема предлагаемого устройства.

В ИПРИМ РАН также разработана методика определения несущей способности свай при различных температурах отдельно по боковой поверхности и под нижним концом [11].

Следует особо отметить, что все эти разработки выполнялись с использованием современных методов системного анализа и технологий решения изобретательских задач.

Таким образом, новые разработки ИПРИМ РАН позволят во многом решить задачи по более надежному определению механических свойств мерзлых и оттаивающих грунтов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Королев М.В. *Системные инновации в методах исследования механических свойств грунтов*. – М.: ФГБУН ИПРИМ РАН: ООО «Сам Полиграфист», 2018. – 376 с., ил.
2. Вялов С.С. *Реологические основы механики грунтов: Учебное пособие для строительных вузов*. – М.: Высшая школа, 1978. – 447 с.
3. Цытович Н.А. *Механика мерзлых грунтов (Общая и прикладная)*. – М.: Высшая школа, 1973. – 448 с.
4. Труфанов А.Н. *Определение параметров консолидации грунта методом релаксации напряжений // Инженерные изыскания*. – 2015. – №12. – С.18-21.
5. Кутергин В.Н., Кальберген Р.Г., Карпенко Ф.С., Леонов А.Р., Мерзляков В.П. *Определение реологических свойств грунтов методом релаксации // Основания, фундаменты и механика грунтов. Механика грунтов*. – 2013. – №1. – С.2-5.
6. Ухов С.Б., Королев М.В. *Способ определения длительной прочности горных пород*. А.С. СССР №1323913, опубликовано в Б.И. №25 от 15.07.1987.
7. Ухов С.Б., Королев М.В., Брызгалин Ю.В. *Способ определения параметров длительной прочности горных пород*. А.С. СССР №1610386, опубликовано в Б.И. №44 от 30.11.1990.
8. Ухов С.Б., Королев М.В., Монастырский А.Е. *Способ определения длительного сцепления мерзлых грунтов*. А.С. СССР №1561032, опубликовано в Б.И. №16 от 30.04.1990.
9. Королев М.В. Власов А.Н. *К вопросу о безопасной эксплуатации и эффективном мониторинге объектов в криолитозоне в условиях деградации мерзлоты // Научно-практическая конференция «Новое качество государственного строительного надзора в контексте реформирования контрольной и надзорной деятельности»*. Сборник трудов. МГБУ ЦЭИИИС, 2021.
10. Королев М.В. *Развитие метода шарового штампа Н.А. Цытовича и динамометрического метода С.С. Вялова для определения параметров*

длительной прочности грунтов при различных температурах // Журнал «Фундаменты». – 2021. – №4.

11. Власов А.Н., Королев М.В., Королев П.М. *Способ определения несущей способности свай.* Патент на изобретение РФ №2629508. Заявка 2015156942. Приоритет от 30 декабря 2015 г.

УДК 624.1

EDN ZOVLUO (<https://elibrary.ru/zovluo>)

DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.43



НОВЫЕ ПРИБОРЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕРЗЛЫХ ГРУНТОВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Кыльчик Н.А., Королев М.В.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

Приводится описание конструкции принципиально нового универсального полуавтоматического мобильного прибора шарового штампа, разработанного в ИПРИМ РАН, не имеющего зарубежных и отечественных аналогов. Прибор позволяет как в лабораторных, так и в полевых условиях определять значение удельного длительного сцепления мерзлых глинистых грунтов при различных значениях отрицательных температур и в процессе оттаивания по результатам испытания одного образца. Позволяет существенно сократить время и стоимость испытаний, а также повысить их точность. Испытания опытного образца прибора показали его высокую эффективность.

Ключевые слова: шаровой штамп; ползучесть; релаксация напряжений; длительная прочность; режим задаваемых нагрузок; режим задаваемых напряжений; морозильная камера

Активное освоение северных территорий нашей страны и реализация крупных инфраструктурных проектов в условиях меняющегося климата и деградации мерзлоты, необходимость проведения большого количества длительных испытаний по определению механических характеристик многолетнемерзлых грунтов при различных температурах выдвигает принципиально новые требования к методам, методикам и приборам для геомеханических исследований.

Применяемые в настоящее время методики (и приборы) для определения параметров длительной прочности мерзлых и оттаивающих грунтов обладают малой точностью, малой информативностью и большой длительностью и стоимостью испытаний и не позволяют эффективно решать поставленные задачи [1].

Это заставляет искать принципиально новые рациональные подходы к проведению геомеханических испытаний. Для определения механических свойств мерзлых грунтов используются, в основном, такие приборы, как прессы для испытаний на одноосное сжатие (или растяжение по Бразильскому методу), одометры, сдвиговые приборы (одноплоскостного среза), реже – приборы шарового штампа. В последние годы все чаще в лабораториях стали использовать приборы трехосного сжатия (стабилометры) или универсальные комплексы, позволяющие с помощью одной станины, нагрузочных и измерительных систем путем смены оснастки реализовать различные виды испытаний (трехосные, компрессионные, сдвиговые и на одноосное сжатие).

На всех имеющихся приборах, в конечном счете, осуществляют испытания по классическим методикам – в режиме задаваемых нагрузок, основанных

на ступенчатом приложении к образцу нагрузки, измерении развития деформаций до стабилизации, приложении следующей ступени вплоть до разрушения образца [2].

Существенными недостатками такого подхода к определению параметров длительной прочности для мерзлых грунтов, обладающих ярко выраженными реологическими свойствами, является значительная длительность опыта (порядка 1 месяца и более) вследствие того, что деформации ползучести развиваются и затухают крайне медленно. Поскольку в ходе испытаний образец доводится до разрушения, при сдвиговых испытаниях для определения параметров длительной прочности требуется испытать минимум два образца при различных нормальных напряжениях. Для учета естественной неоднородности мерзлых грунтов нормативная литература требует проведения минимум шести испытаний. Применяемые методики предусматривают проведение испытаний грунтов при фиксированном его физическом состоянии, т.е. при одном значении отрицательной температуры. Для определения параметров длительной прочности при различных температурах, что часто требуется для расчетов оснований при возможном изменении температуры массива, требуется целая серия длительных испытаний, что существенно удорожает и усложняет геомеханические изыскания. Таким образом, данные методики обладают весьма малой информативностью. Кроме того, большинство имеющихся приборов, в силу особенностей создания нагрузки не позволяет реализовать испытания в режиме задаваемых деформаций.

В настоящее время известны существенно более эффективные и информативные методики, которые позволяют в ходе испытания одного образца, без его разрушения, определить параметры длительной прочности (деформируемости) при различных температурах. Эти методики, основаны на испытаниях в режиме не задаваемых (контролируемых) нагрузок, а в режиме контролируемых (задаваемых) деформаций и проводятся без разрушения испытываемого образца в режиме ползуче-релаксационного нагружения. Методики во многом основаны на идее, предложенной профессором Вяловым С.С. (1978 г.) [1], продолжили своё развитие в трудах группы авторов (Королев М.В., Монастырский А.Е., Ухов С.Б., Брызгалин Ю.В. и др.) под руководством и участия Королева М.В., начиная с 1985 г.[3-5].

Ниже рассматривается применение такого подхода при совершенствовании испытания шаровым штампом [6,7].

Методика разработана для определения длительного сцепления при различных температурах методом шарового штампа и реализуется следующим образом: на выровненную поверхность образца мерзлого грунта с заданной отрицательной температурой $\theta^{\circ}\text{C}$ устанавливается шаровой штамп диаметром D . Температура выбирается наиболее низкой, в диапазоне отрицательных температур, при которых требуется определить сцепление. Затем к шаровому штампу через упругий элемент большой жесткости прикладывается такая сжимающая нагрузка, чтобы относительная осадка штампа (s) находилась в диапазоне $0,005 < s/D < 0,1$. В качестве упругого элемента может быть использован жесткий динамометр с винтом или гидродомкрат.

Далее образец испытывается в ползуче-релаксационном режиме, для чего перестают подкручивать винт, создающий нагрузку на динамометр, или подкачивать гидродомкрат. При этом сжимающая нагрузка будет уменьшаться, вследствие развития осадки штампа и связанного с этим разжатия динамометра (или выдвигания штока домкрата). При этом при использовании

упругого элемента большой жесткости незначительное увеличение осадки вызовет существенное уменьшение сжимающей нагрузки. С течением времени величина падения нагрузки будет уменьшаться и система «внешняя нагрузка – внутренние силы сопротивления» придет в равновесное состояние при данной осадке, стабилизированной нагрузке P_i и заданной отрицательной температуре θ °С (рис.1).

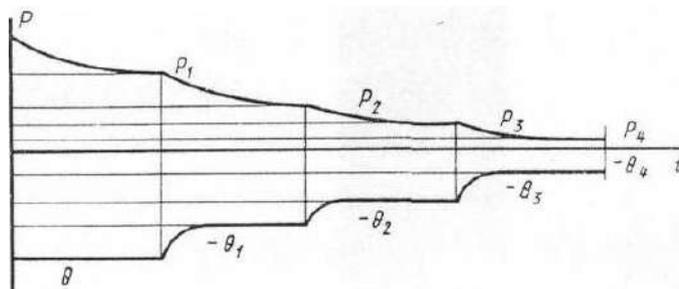


Рис.1. Изменение сжимающей нагрузки, осадки и сцепления во времени при изменении температуры испытаний шаровым штампом, $p = f(t)$.

Затем абсолютное значение отрицательной температуры уменьшают до величины θ_2 . Учитывая, что сцепление тем выше, чем ниже значение отрицательной температуры, при повышении температуры (растеплении) система выйдет из состояния равновесия, сжимающая нагрузка P начнет уменьшаться за счет развития перемещений и придет в новое состояние равновесия, характеризуемое осадкой s_2 , нагрузкой P_3 и температурой θ_2 .

При этом осадка s_2 близка к s_1 . По полученным значениям из выражения (1) определяют длительное сцепление c_u при данной отрицательной температуре θ_2 . Далее аналогичным образом производят несколько ступенчатых повышений температуры до положительных значений и определяют сцепление при этих температурах по полученным стабилизированным значениям P_i и s_i по известным формулам данной отрицательной температуре θ можно вычислить длительное сцепление мерзлого глинистого грунта

$$C = 0,18 \frac{P}{\pi DS}. \quad (1)$$

Для технической реализации метода авторами данной методики была разработана простая конструкция прибора, приведенного на рис.2, где нагрузочное устройство выполнено в виде динамометра с винтом. Для автоматической записи измерений в то время использовался двух координатный графопостроитель. Возможно так же использовать для создания вертикальной нагрузки нагрузочный блок от полевого сдвигового прибора ВСВ-25 (м) [8].

Недостатком данного прибора является то, что при проведении испытаний в стационарной климатической камере при изменении температуры нагрузочные и измерительные устройства. В ИПРИМ РАН, с учетом вышеописанных новых требований к оборудованию для геомеханических испытаний создан опытный образец универсального мобильного прибора для определения удельного сцепления мерзлых грунтов методом шарового штампа, на одноосное сжатие и изгиб балочек.

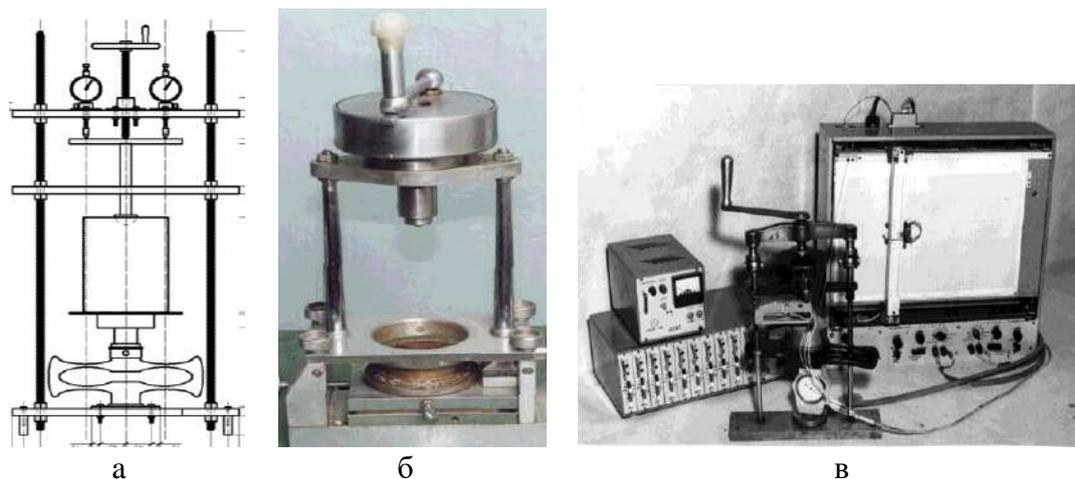


Рис.2. Прибор шарового штампа для испытаний в режиме ползучести релаксации. а) схема прибора; б) блок для создания вертикальной нагрузки через упругий элемент от полевого сдвигового прибора ВСВ – 25 м; в) полуавтоматический прибор шарового штампа.

Новый прибор состоит из компактной морозильной камеры, позволяющей создавать и поддерживать необходимое значение отрицательной температуры, в которую помещается образец грунта, отобранный из скважины или шурфа, нагрузочного и измерительных устройств.

Отличительной способностью прибора является то, что все нагрузочные и измерительные устройства расположены вне морозильной камеры, что позволяет избежать погрешностей, связанных с температурными деформациями силовых и измерительных элементов, и производить испытания при разных значениях температуры на одном образце в ходе одного опыта. На рис.3 показаны малогабаритная переносная морозильная камера, нагрузочное устройство и общий внешний вид прибора.

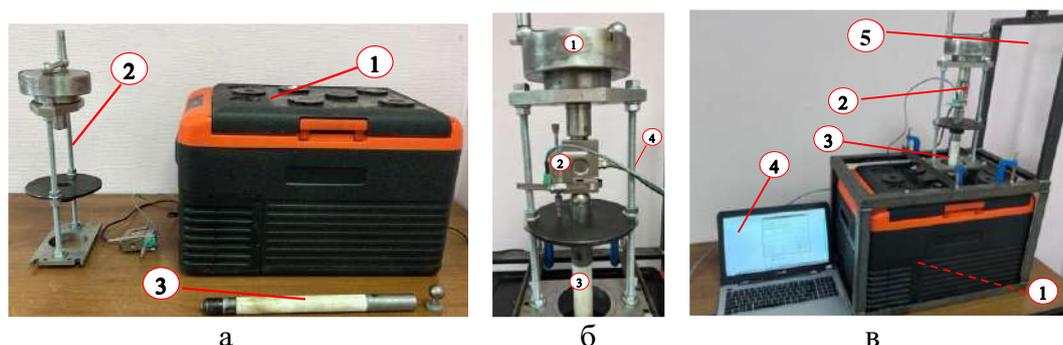


Рис.3. а) компактная морозильная камера (1), съемное нагрузочное и измерительное устройство (2), шток из материала с низкой теплопроводностью и малым коэффициентом линейного температурного расширения, на конце которого установлен шаровой штамп (3); б) образцы, помещаемые сразу после отбора в морозильную камеру; в) нагрузочное устройство: винтовой редуктор от сдвигового прибора ВСВ-25 (м) для испытаний в режиме задаваемых деформаций (1), цифровой динамометр и датчик перемещения (2), нагрузочный подвижной шток с шаровым штампом (3), опорные стойки, прикрепляемые к силовой раме.

Прибор, в зависимости от методики испытаний, может оснащаться сменными нагрузочными устройствами: механическим редуктором с винтом и цифровым динамометром (для испытаний в задаваемых деформациях в режиме ползучести – релаксации), грузовой платформой или рычагом с грузом (для испытаний в режиме задаваемых нагрузок и ползучести) – рис.4.

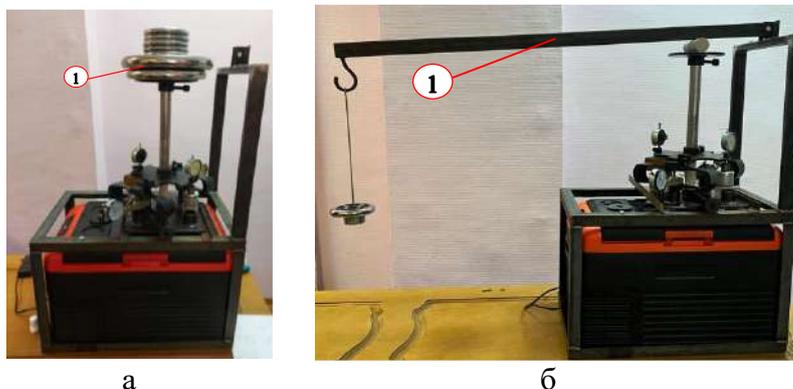


Рис.4. Нагрузочные устройства для проведения испытаний в режиме задаваемой нагрузки: а) нагрузочное устройство с грузовой платформой для гири (1); б) рычажное нагрузочное устройство (1).

Приведем для примера результаты испытаний одного образца мерзлого суглинка при различных значениях отрицательных температур с помощью разработанного прибора (рис.5).

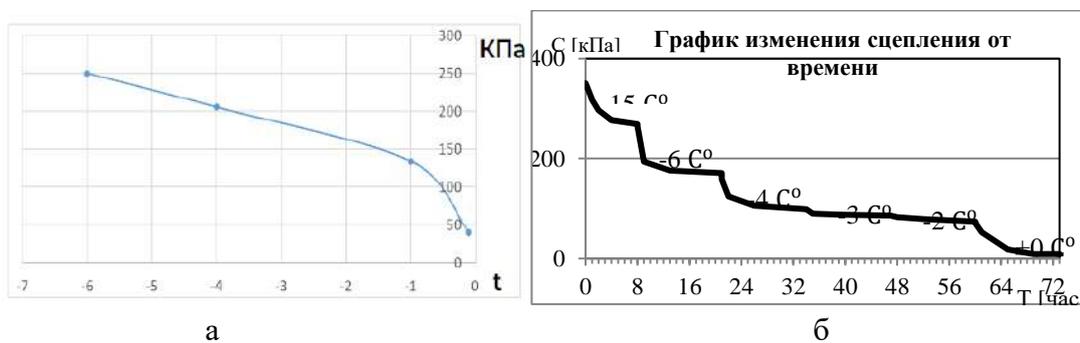


Рис.5. График зависимости значения длительного сцепления образца мерзлого грунта от его температуры (а) и изменения сцепления от времени испытания (б).

Значительное уменьшение сцепления в диапазоне температур от двух до нуля градусов связано с процессом фазовых переходов.

Результаты нескольких серий испытаний разработанного прибора и сопоставительные эксперименты по методикам испытаний в режиме задаваемых нагрузок и задаваемых деформаций проведены. приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Результаты сопоставительных опытов по методике испытаний в режиме задаваемых деформаций и по традиционной методике испытаний в режиме задаваемых нагрузок.

Получе-релаксационный режим. Опыт №1				Получе-релаксационный режим. Опыт №2				Получе-релаксационный режим. Опыт №3			
время, час	время, мин	усилия ППР, кН	С, по гост, МПа	время, час	время, мин	усилия ППР, кН	С, по гост, МПа	время, час	время, мин	усилия ППР, кН	С, по гост, МПа
0	0	0,162	0,318	0	0	0,167	0,327	0	0	0,177	0,347
0,08	4,8	0,137	0,269	0,08	4,8	0,141	0,276	0,08	4,8	0,149	0,292
0,16	9,6	0,124	0,243	0,16	9,6	0,127	0,249	0,16	9,6	0,133	0,261
0,25	15	0,122	0,239	0,25	15	0,124	0,243	0,25	15	0,128	0,251
0,3	18	0,113	0,222	0,3	18	0,117	0,229	0,3	18	0,125	0,245
0,5	30	0,110	0,216	0,5	30	0,113	0,222	0,5	30	0,119	0,233
1	60	0,103	0,202	1	60	0,110	0,216	1	60	0,124	0,243
2	120	0,102	0,200	2	120	0,108	0,212	2	120	0,120	0,235
4	240	0,100	0,196	4	240	0,107	0,210	4	240	0,124	0,243
8	480	0,099	0,194	8	480	0,106	0,208	8	480	0,120	0,235
24	1440	0,098	0,192	24	1440	0,105	0,206	24	1440	0,119	0,233

ГОСТ. Опыт 1				ГОСТ. Опыт 2				ГОСТ. Опыт 3			
время, час	время, мин	деформации	С, МПа	время, час	время, мин	деформации	С, МПа	время, час	время, мин	деформации	С, МПа
0	0	0,000	-	0	0	0,000	-	0	0	0,000	-
0,08	4,8	0,130	1,154	0,08	4,8	0,180	0,833	0,08	4,8	0,200	0,750
0,16	9,6	0,140	1,071	0,16	9,6	0,190	0,789	0,16	9,6	0,230	0,652
0,25	15	0,160	0,938	0,25	15	0,200	0,750	0,25	15	0,250	0,600
0,3	18	0,170	0,882	0,3	18	0,230	0,652	0,3	18	0,270	0,556
0,5	30	0,180	0,833	0,5	30	0,250	0,600	0,5	30	0,280	0,536
1	60	0,200	0,750	1	60	0,290	0,517	1	60	0,300	0,500
2	120	0,230	0,652	2	120	0,340	0,441	2	120	0,325	0,462
4	240	0,255	0,588	4	240	0,350	0,429	4	240	0,340	0,441
6	360	0,275	0,545	6	360	0,365	0,411	6	360	0,360	0,417
8	480	0,285	0,526	8	480	0,375	0,400	8	480	0,370	0,405

Как видно из результатов экспериментов результаты по традиционной методике и по методике испытаний в режиме релаксации напряжений достаточно близки.

Демонстрация и публичное тестирование опытного образца прибора производились в лаборатории мерзлых грунтов №8 НИИОСП им. Герсеванова сотрудниками ИПРИМ РАН и сотрудниками данной лаборатории.

Сопоставительные испытания по предлагаемой и традиционной методики были проведены совместно с сотрудниками мерзлотной лаборатории Норильского Заполярного университета в г. Норильске.

В настоящее время планируется провести публичные сопоставительные испытания в специализированных лабораториях ведущих профильных организаций: МГУ и МГРИ с подписанием соответствующих актов. Для легального использования методик и приборов в практике изысканий разрабатываются соответствующие стандарты организации.

Прибор был также апробирован при проведении полевых испытаний на объектах в г. Норильск и показал высокую эффективность (рис.6).



Рис.6. Фото проведения испытаний мерзлого грунта с помощью разработанного прибора в полевых условиях, непосредственно в месте отбора кернов из скважины.

Используя данную принципиальную конструкцию, в настоящее время в ИПРИМ РАН разрабатывается целая серия приборов для испытания мерзлого грунта при различных температурах и другими методами (рис.7).

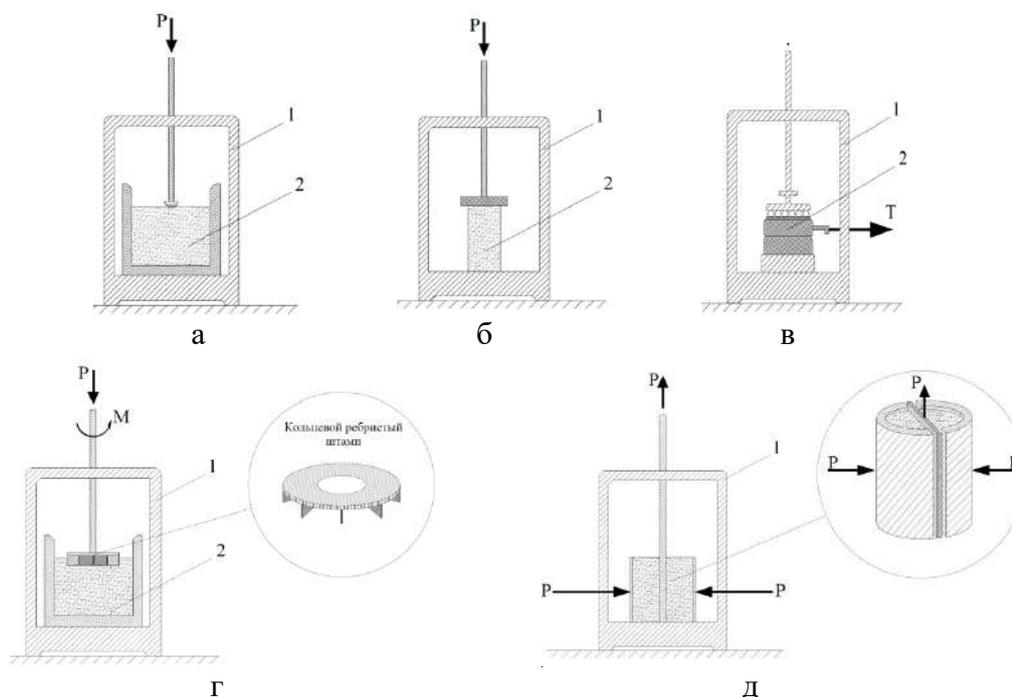


Рис.7. Различные схемы испытаний: а) шаровым штампом; б) на одноосное сжатие; в) на одноплоскостной срез с вертикальной пригрузкой; г) на срез кольцевым ребристым штампом кручением с вертикальной пригрузкой; д) определение сопротивления сваи по боковой поверхности.

Разработанный прибор показал высокую эффективность. Важно отметить, что стоимость изготовления такого универсального прибора на порядки меньше, чем стоимость применяемого существующего оборудования, а эффективность, информативность, точность и технологичность испытаний на порядки выше. Наладка и эксплуатация прибора не требует высокой квалификации сотрудников. Данные приборы могут легко доставляться непосредственно на строительную площадку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Королев М.В. *Перспективные методы определения механических свойств многолетнемерзлых грунтов* // Научный вестник Арктики. – 2022. – №12. – С.23-33. DOI: 10.52978/25421220_12_23-33.
2. Вялов С.С. *Реологические основы механики грунтов. Уч. пос. для строительных вузов.* – М.: Высшая школа, 1978. – 447 с.
3. Ухов С.Б., Королев М.В. *Способ определения длительной прочности горных пород.* А.С. СССР №1323913, опубликовано в Б.И. №25 от 15.07.1987.
4. Ухов С.Б., Королев М.В., Брызгалин Ю.В. *Определение параметров длительной прочности грунтов при испытании в режиме ползучести-релаксации* / Сборник научных трудов ВНИИ оснований и подземных сооружений им. Н.М. Герсеванова. – М.: Стройиздат, 1990. – С.237-249.

5. Ухов С.Б., Королев М.В., Монастырский А.Е. *Способ определения длительного сцепления мерзлых грунтов.* А.С. СССР №1561032, опубликовано в Б.И. №16 от 30.04.1990.
6. Королев М.В. *Развитие метода шарового штампа Н.А.Цытовича и динамометрического метода С.С.Вялова для определения параметров длительной прочности грунтов при различных температура // Фундаменты.* – 2021. – №4. – С.4-8
7. Королев М.В. *О значимости научного наследия Н.А. Цытовича и С.С. Вялова в становлении и развитии инженерного мерзлотоведения. Развитие метода шарового штампа Н.А. Цытовича и динамометрического метода С.С. Вялова для определения длительной прочности мерзлых грунтов / IV международной НПК «Современные технологии инженерных изысканий, проектирования и строительства на многолетнемерзлых грунтах». Сборник трудов.* – Москва, 2021.
8. Королев М.В. *Системные инновации в методах исследования механических свойств грунтов.* – М.: ФГБУН ИПРИМ РАН: ООО «Сам Полиграфист», 2018. – 376 с.

УДК 69.05
EDN VEFHYK (<https://elibrary.ru/vefhyk>)
DOI 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.44



РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ГЕОТЕХНИКИ НА НЕСОГЛАСОВАННЫХ СЕТКАХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Нестеров И.В., Мерзлякова А.Д., Шейко Е.А.

ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта», г. Москва, Россия

В настоящее время для решения широкого класса задач геотехники используется метод конечных элементов [1]. Для его численной реализации разработано большое количество программного обеспечения. Наиболее популярными среди инженеров являются программы Plaxis, Midas GTS NX, Geo 5 и др. Особенностью геотехнических расчётов является учёт стадийности возведения инженерного сооружения [2], контактирующего с грунтом. В большинстве программ для всех стадий используется единая топология сетки конечных элементов, в которой координаты узлов для всех стадий не меняются. В ходе стадийного прочностного анализа из конечно-элементной модели либо удаляются, либо добавляются конечные элементы, а результаты расчёта суммируются (рис.1).



Рис.1. Начальная и конечная стадии расчётов подземной парковки для жилого комплекса в районе Рублёво-Архангельское.

Этот подход не всегда удобен, особенно для инженерных сооружений со сложной геометрией и не позволяет менять густоту сетки для разных частей конструкции в зависимости от стадии возведения. Для учёта стадийности в конечно-элементном анализе используются два подхода. Первый базируется на принципе суперпозиций, широко используемого в строительной механике.

Вычислительная схема этой модели стадийности для численной реализации по МКЭ приведена на рис.2.



Рис.2. Вычислительный алгоритм учёта стадийности возведения, построенный на принципе суперпозиций.

В ходе стадийного расчёта перемещения, усилия и напряжения суммируются на каждой стадии расчёта. Этот метод достаточно удобен для решения задач строительной механики в линейной постановке. В случае нелинейной работы материала используется другой подход, основанный на пересчёте нагрузки на расчётную модель текущей стадии в зависимости от напряжённо-деформированного состояния предыдущей стадии расчёта. Вычислительная схема этого алгоритма приведена на рис.3.

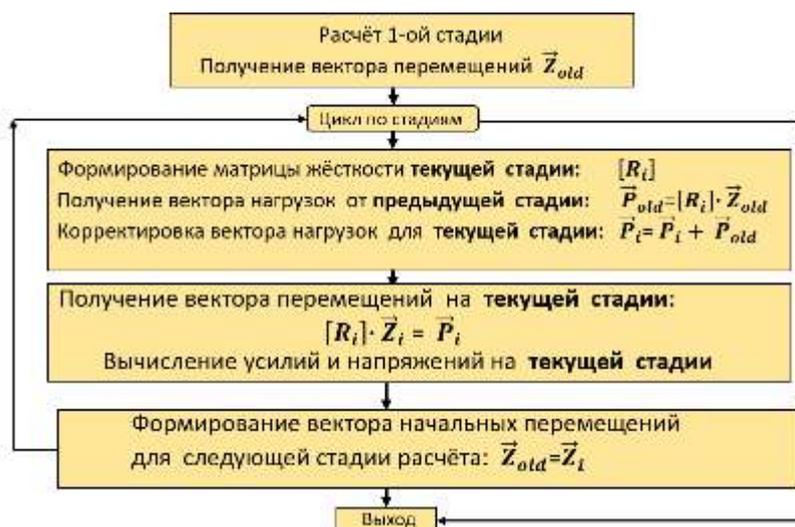


Рис.3. Стадийный расчёт с пересчётом текущей нагрузки в зависимости от НДС предыдущей стадии.

Этот подход удобно использовать, когда КЭ-сетки текущей и предыдущей стадий не согласованы по узлам (рис.4).

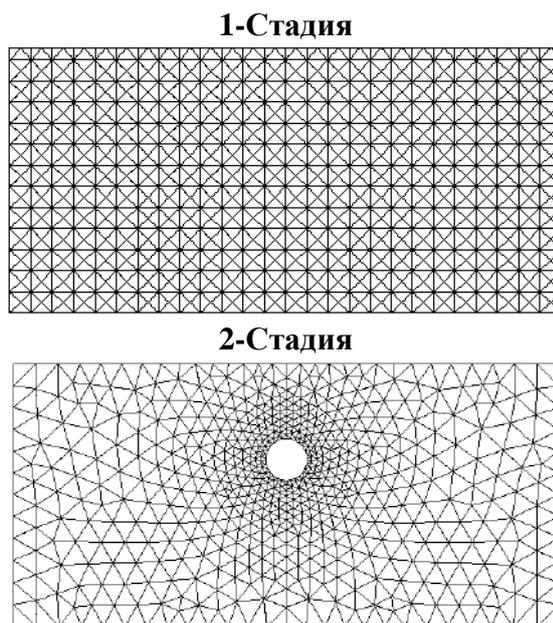


Рис.4. Несогласованность сетки КЭ при стадийном расчёте тоннельной выработки.

При использовании несогласованных сеток КЭ для пересчёта нагрузок на текущей стадии в программный комплекс необходимо добавить блоки интерполяции вектора перемещений и дополнительных физических характеристик конечных элементов на КЭ-сетке предыдущей стадии. Вычислительная схема алгоритма учёта стадийности на несогласованных сетках приведена на рис.5.



Рис.5. Вычислительная схема алгоритма учёта стадийности на несогласованных сетках.

Процедура интерполяции поля перемещений и дополнительных физических характеристик конечных элементов на поле перемещений предыдущей стадии выполняется с использованием базисных функций конечных элементов (рис.6).

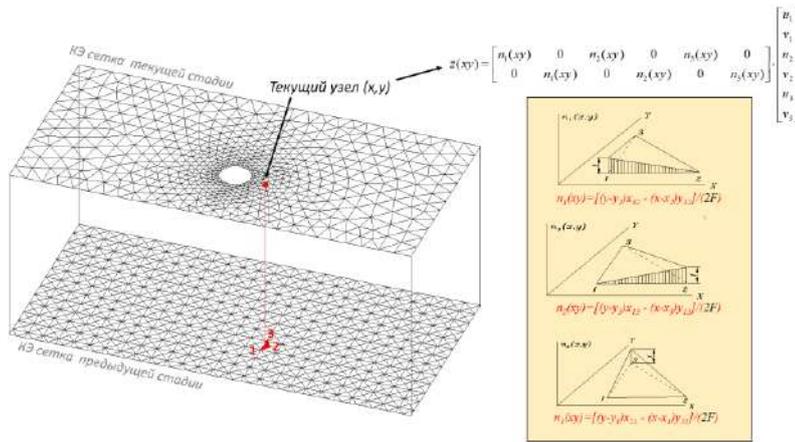


Рис.6. Интерполяция поля перемещений на поле перемещений предыдущей стадии.

Для оценки качества интерполяции на поле перемещений предыдущей стадии были проведены тестовые расчёты тоннельной выработки неполный вектор нагрузок, полученный после интерполяции на поле перемещений Стадии-1:

$$\vec{P}_{old} = [R_i] \cdot \vec{Z}_{old}.$$

На рис.7 приведены поля вертикальных перемещений, полученный после интерполяции. Сравнительный анализ показал, что они практически идентичны.

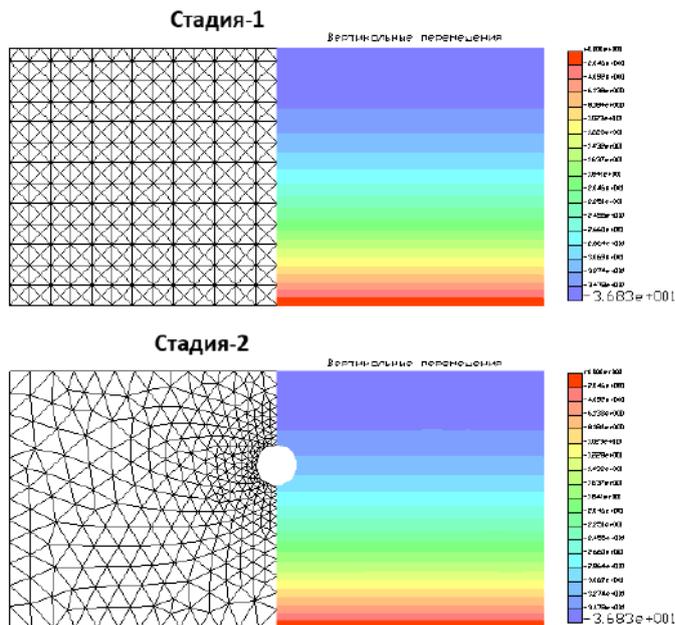


Рис.7. Поля вертикальных перемещений до и после интерполяции.

В качестве примера использования несогласованных сеток конечных элементов приведём стадийный расчёт шпунтовой стенки ограждения котлована с уточнением напряжённо-деформированного состояния на второй стадии расчёта. Исходные данные для расчёта приведены на рис.8.

Расчёт выполнялся в физически-нелинейной постановке с использованием модели грунта Кулона-Мора [3-5]. Уточнение напряжённо-деформированного состояния выполнялось с использованием адаптивных сеток конечных элементов [6-8]. На рис.9 приведены КЭ-сетка и сжимающие напряжения от бытового давления грунта на первой стадии расчёта.

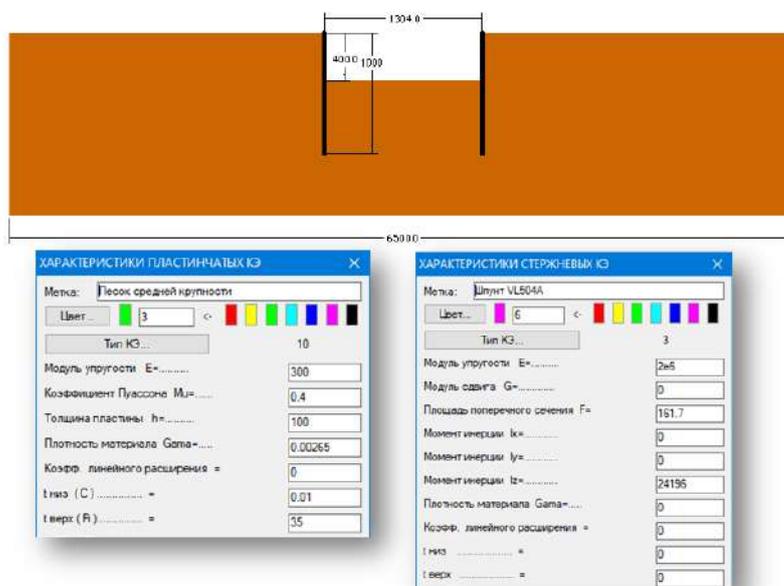


Рис.8. Исходные данные для расчёта шпунтовой стенки ограждения котлована.

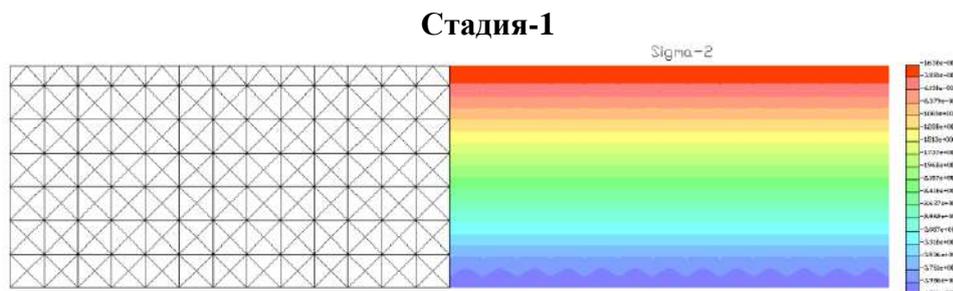
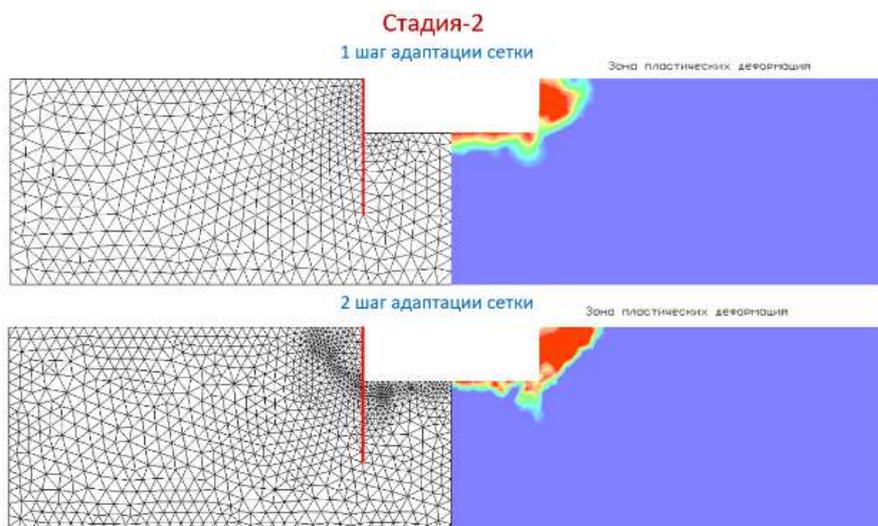


Рис.9. КЭ-сетка и сжимающие напряжения от бытового давления грунта на первой стадии расчёта.

На второй стадии моделировалась выемка грунта, а также менялась густота сетки конечных элементов по границе зоны пластических деформаций грунтового массива (рис.10)



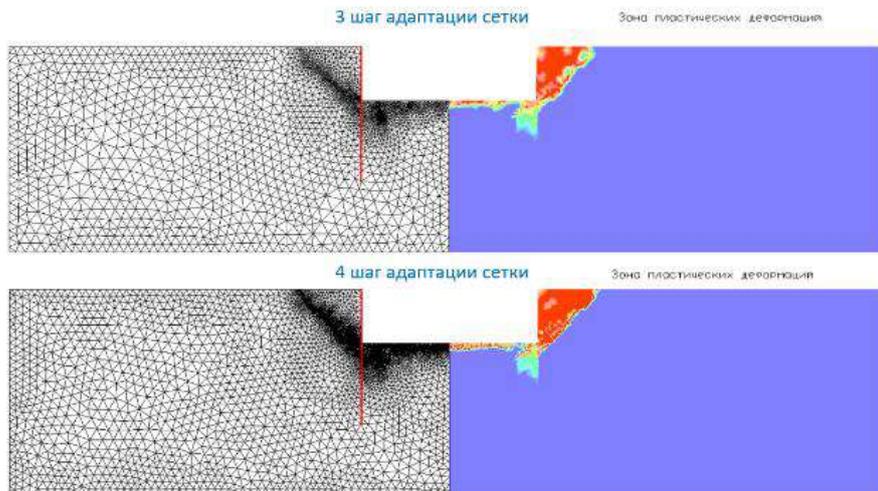


Рис.10. Адаптивное изменение густоты сетки на второй стадии расчёта котлована.

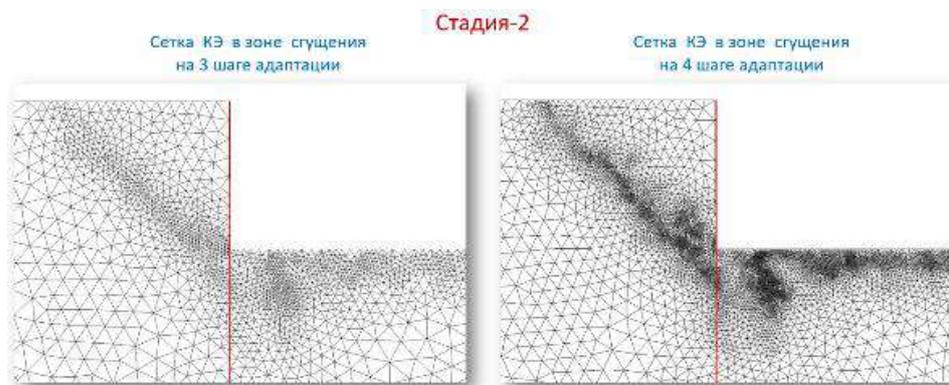


Рис.11. Сетка КЭ на 3 и 4 шагах адаптации.

На рис.12 показаны эпюры изгибающих моментов в шпунтовой стенке для 4-х шагов адаптации.

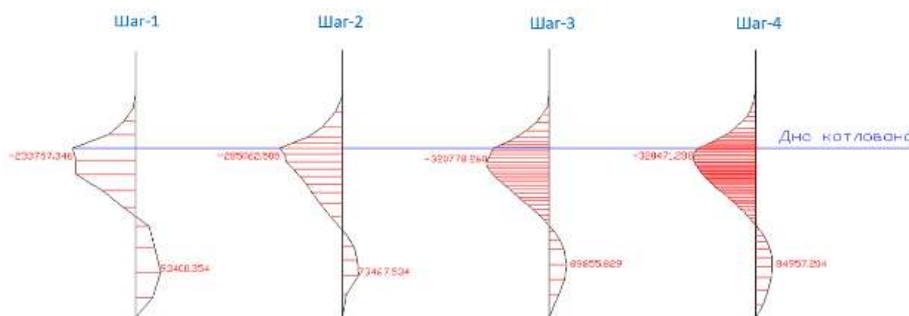


Рис.12. Эпюры изгибающих моментов в шпунтовой стенке.

В результате сгущения сетки максимальный изгибающий момент увеличился на 27%. Подобного рода исследование невозможно выполнить на согласованной сетке и наглядно иллюстрирует преимущества технологии стадийного расчёта на несогласованных сетках конечных элементов.

ВЫВОДЫ

1. Стадийные расчёты по МКЭ на несогласованных сетках конечных элементов не требуют планирования единой КЭ-модели для всех стадий расчёта.

2. Для этой технологии расчёта согласованность должна быть обеспечена только для внешних контуров расчётных схем по стадиям, что позволяет свободно изменять густоту сетки на любом этапе расчёта.

3. Численная реализация КЭ-анализа на несогласованных сетках не требует больших изменений архитектуры программного комплекса. Для расчётов по этой методике в программный комплекс необходимо добавить блоки интерполяции поля перемещений и физических характеристик конечных элементов.

4. Использование несогласованных сеток конечных элементов позволяет упростить процесс подготовки исходной информации для стадийного расчёта и повысить точность КЭ-анализа на любой стадии расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике*. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
2. Фадеев А.Б. *Метод конечных элементов в геомеханике*. – М.: Недра, 1987. – 224 с.
3. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. *Строительная механика: Учеб. для строительных спец. вузов*. – М.: Высшая Школа, 1986. – 607 с.
4. Галлагер Р. *Метод конечных элементов. Основы*. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
5. Перельмутер А.В., Кабанцев О.В. *Анализ конструкций с изменяющейся расчётной схемой*. – М.: Склад софт, 2015. – 149 с.
6. Нестеров И.В., Мерзлякова А.Д. *Особенности формирования адаптивных сеток МКЭ для решения задач геотехники / 11-я Всероссийская научная конференция с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред»*. Сборник трудов. – 2021. – С.356-361.
7. Лебедев А.С., Лисейкин В.Д., Хакимзянов Г.С. *Разработка методов построения адаптивных сеток // Вычислительные технологии*. – 2002. – Т.7. – №3. – С.29-43.
8. Сакало В.И., Шкурин А.А. *Универсальная программа триангуляции двумерной области произвольной формы со сгущением сетки // Проблемы прочности*. – 1985. – №1. – С.106-108.

Типография ООО «Сам Полиграфист» Подписано в печать 18.12.2023
г. Москва, Волгоградский пр., д.42, корп.5 Объем 39,5 п.л. Тираж 250 экз. Зак. №1023
